

Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2013

Wilhelm Singhof

Teil I: Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

1. Normierte und metrische Räume: Definitionen und Beispiele

Def. Sei V ein (reeller) Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \| v \|,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- (1) $\| v \| \geq 0$ für alle $v \in V$.
- (2) $\| v \| = 0 \iff v = 0$.
- (3) $\| \alpha v \| = |\alpha| \cdot \| v \|$ für $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (4) $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$ für alle $v, w \in V$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *normierter Raum* ist ein Paar $(V, \| \cdot \|)$, wobei V ein Vektorraum und $\| \cdot \|$ eine Norm auf V ist. Meist sagt man: "Sei V ein normierter Raum" statt "sei $(V, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum".

Beispiel: Auf $V = \mathbb{R}^n$ erhält man Normen $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_\infty$ und $\| \cdot \|_2$ folgendermaßen: Ist $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so sei

$$\begin{aligned}\| v \|_1 &:= |x_1| + \dots + |x_n|, \\ \| v \|_\infty &:= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \\ \| v \|_2 &:= (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Um die Dreiecksungleichung für $\| \cdot \|_2$, die sog. *Euklidische Norm*, nachzuweisen, braucht man:

Satz 1. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sind $v = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \| v \|_2 \cdot \| w \|_2.$$

Bem. Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\| v \|_\infty \leq \| v \|_2 \leq \| v \|_1 \leq n \cdot \| v \|_\infty$.

Allgemeiner gilt: Zwei Normen $\| \cdot \|$ und $| \cdot |$ auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive reelle Zahlen a, A gibt mit

$$a \| v \| \leq | v | \leq A \| v \| \quad \forall v \in V.$$

Def. Sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden vier Eigenschaften:

- (I) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.
- (II) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (III) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

(IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) , wobei X eine Menge und d eine Metrik auf X ist. Man sagt oft „ X ist metrischer Raum“ statt „ (X, d) ist metrischer Raum“.

Beispiel: Sei V ein normierter Raum. Definiere $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Dann ist V ein metrischer Raum.

Beispiel: Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$, so wird Y mit der Einschränkung von d auf $Y \times Y$ ein metrischer Raum.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann heißt die Menge

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

die *offene Kugel* und

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

die *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r .

2. Einige grundlegende topologische Begriffe

Def. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt A *offen in X* , wenn gilt: Ist $x \in A$, so existiert ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq A$.

Satz 1. Eine offene Kugel in einem metrischen Raum X ist offen in X .

Satz 2. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

- a) X und \emptyset sind offen in X .
- b) Ist I irgendeine Menge und sind die A_i mit $i \in I$ offen in X , so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen in X .
- c) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind A_1, \dots, A_n offen in X , so ist $A_1 \cap \dots \cap A_n$ offen in X .

Beispiel: $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ ist offen in \mathbb{R} . Aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ ist nicht offen in \mathbb{R} .

Def. Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt *Umgebung* von x in X , wenn es eine offene Teilmenge A von X gibt mit

$$x \in A \subseteq U.$$

Eigenschaften von Umgebungen:

- (1) Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:
 - (a) U ist Umgebung von x .
 - (b) Es gibt ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq U$.
- (2) Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.
- (3) Ist U Umgebung von x und $V \supseteq U$, so ist V Umgebung von x .
- (4) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von x ist eine Umgebung von x .

Beispiel: Betrachte \mathbb{R}^n mit den Normen $\| \cdot \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Diese drei Normen besitzen dieselben offenen Mengen.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

x heißt *Häufungspunkt* von A , falls in jeder Umgebung von x ein von x verschiedener Punkt von A liegt.

x heißt *Berührungspunkt* von A , falls in jeder Umgebung von x ein Punkt von A liegt.

Bem. x ist Berührungspunkt von $A \iff x \in A$ oder x ist Häufungspunkt von A .

Satz 3. und Def. Sei X metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

- (a) A enthält alle Häufungspunkte von A .
- (b) A enthält alle Berührungspunkte von A .
- (c) $X \setminus A$ ist offen in X .

Wenn A diese Eigenschaften hat, so heißt A *abgeschlossen* in X .

Satz 4. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

- 1) \emptyset und X sind abgeschlossen.
- 2) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- 3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Satz 5. Sei X ein metrischer Raum und A eine endliche Teilmenge von X . Dann ist A abgeschlossen in X .

Def. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X . Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *Grenzwert* der Folge (x_n) , wenn eine der vier folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- 1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ für $n \geq N$.
- 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$ im Sinne von Analysis I.
- 3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ für $n \geq N$.
- 4. Für jede Umgebung U von x_0 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$.

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. Wenn (x_n) den Grenzwert x_0 besitzt, so sagt man, dass (x_n) gegen x_0 *konvergiert* und schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ oder $x_n \rightarrow x_0$.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\| \cdot \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Sei $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}^n mit $x^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)$ und sei $x^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n$.

Genau dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$, wenn für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq n$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_\nu^k = \xi_\nu^0$.

Bem. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

- a) x ist Berührungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \rightarrow x$.
- b) x ist Häufungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \neq x$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \rightarrow x$.
- c) A ist abgeschlossen in $X \iff$ ist (x_n) eine Folge in A , so dass $x_0 = \lim x_n$ in X existiert, so ist $x_0 \in A$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$. Dann heißt x ein *innerer Punkt* von A , wenn A eine Umgebung von x ist. Sei $\overset{\circ}{A}$ die Menge aller inneren Punkte von A ; sie heißt das *Innere* von A .

Satz 6. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist $\overset{\circ}{A}$ die größte offene Teilmenge von X , die in A enthalten ist.

Satz 7. Ist V ein normierter Raum, $x \in V$, $r > 0$ und $A := \overline{B}_r(x)$, so ist $\overset{\circ}{A} = B_r(x)$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Sei \overline{A} die Menge aller Berührungspunkte von A in X . Sie heißt der *Abschluss* von A .

Satz 8. a) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

b) \overline{A} ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die A umfasst.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$.

x heißt *Randpunkt* von A in X , wenn x Berührungspunkt von A und von $X \setminus A$ ist.

Sei ∂A die Menge der Randpunkte von A in X , also $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

∂A heißt der *Rand* von A in X .

Bem. ∂A ist abgeschlossen in X .

X ist die disjunkte Vereinigung von $\overset{\circ}{A}$, ∂A und $(X \setminus A)^\circ$.