

Lineare Algebra II

N. Perrin

Düsseldorf
Sommersemester 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung	5
1.1	Äquivalenzrelationen	5
1.2	Lineare Abbildungen, Matrizen, Basiswechsel	6
1.3	Äquivalenz von Matrizen	7
1.4	Basiswechsel für Endomorphismen, Ähnlichkeit	8
1.5	Erste Invarianten für die Ähnlichkeitsrelation	8
1.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	10
1.7	Diagonalisierbare Matrizen	11
1.8	Eigenwerte und das charakteristische Polynom	11
1.9	Trigonalisierbarkeit	12
1.10	Minimal Polynom	12
2	Jordansche Normalform	15
2.1	Invariante Unterräume	15
2.2	Verallgemeinerte Eigenräume	16
2.3	Haupträume	17
2.4	Jordan-Kette	20
2.5	Endomorphismus mit einem Eigenwert	22
2.6	Jordansche Normalform	24
3	Symmetrische Gruppe	27
3.1	Definition	27
3.2	Transpositionen	28
3.3	Support	30
3.4	Permutationsmatrix	30
3.5	Elementare Transpositionen	31
3.6	Determinante	33
4	Tensorprodukt	35
4.1	Bilineare Abbildungen und Tensorprodukt	35
4.2	Basen	37
4.3	Erste Eigenschaften	39
4.4	Bilineare Abbildungen	40
4.5	Tensorprodukt von Homomorphismen	40
4.6	Körper Erweiterung	41
4.7	Multilineare Abbildungen	43

4.8	Symmetrische und antisymmetrische Tensoren	44
5	Algebren	47
5.1	Algebren	47
5.2	Verknüpfungstafel	48
5.3	Unteralgebren, Ideale und Quotienten	49
5.4	Produkte	51
5.5	Einschränkung und Erweiterung der Skalare	51
5.6	Erzeuger	52
5.7	Polynome	54
5.8	Graduierte Algebren	56
5.9	Tensor Algebra	58
5.10	Symmetrische Algebra	60
5.11	Äußere Algebra	65
6	Kombinatorischer Exkurs	75
6.1	Abbildungen	75
6.2	Formeln	78
6.3	Basen und Dimension	79
7	Bilineare und sesquilineare Formen	80
7.1	Definition	80
7.2	Matrizen	82
7.3	Orthogonalität	86
7.4	Dualräume	90
7.5	Quadratische Formen	91
7.6	Adjungiert	91

1 Wiederholung

In diesem Semester werden wir weiter mit linearen Abbildungen arbeiten. Wir nehmen an, dass alles, was im Skript LA1 steht, bekannt ist. Wir werden aber mit einigen Wiederholungen anfangen.

1.1 Äquivalenzrelationen

Definition 1.1.1 1. Sei M eine Menge. Eine **Relation** auf M ist eine Teilmenge R von $M \times M$. Seien x, y zwei Elemente in M , für $(x, y) \in R$ schreibt man $x \sim_R y$.

2. R heißt **reflexiv**, wenn $x \sim_R x$ für alle $x \in M$.

3. R heißt **symmetrisch**, wenn $x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$.

4. R heißt **transitiv**, wenn $(x \sim_R y \text{ und } y \sim_R z) \Rightarrow x \sim_R z$.

Definition 1.1.2 Eine Relation R heißt **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition 1.1.3 Sei R eine Äquivalenzrelation auf M .

1. Die **Äquivalenzklasse** $[x]$ ist

$$[x] = \{y \in M \mid x \sim_R y\} \subset M.$$

2. Die **Quotientenmenge** M/R ist die Gesamtheit der Äquivalenzklassen:

$$M/R = \{[x] \in \mathfrak{P}(M) \mid x \in M\}.$$

Satz 1.1.4 Sei R eine Äquivalenzrelation auf M . Dann sind alle Elemente aus M in genau einer Äquivalenzklasse. \square

Für eine Äquivalenzrelation sind die folgenden Fragen wichtig:

Frage 1.1.5

1. Wann sind zwei Elemente $x, y \in M$ äquivalent?
2. Suche ein Element in jede Äquivalenzklasse.

1.2 Lineare Abbildungen, Matrizen, Basiswechsel

Für die Definitionen von Abbildungen, Körpern, Vektorräumen und Basen verweisen wir auf das Skript LA1 (Definition 2.2.1, Definition 3.1.1 und Definition 5.1.1). Sei K ein Körper und seien V und W zwei K -Vektorräume.

Definition 1.2.1 Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt **linear**, wenn für alle $x, y \in K$ und alle $v, v' \in V$ gilt

$$f(xv + yv') = xf(v) + yf(v').$$

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W . Da \mathcal{B}' eine Basis ist, gibt es, für alle $j \in [1, n]$, Skalare $(a_{i,j})_{i \in [1, m]}$ aus K mit

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i.$$

Für Definition und Eigenschaften von Matrizen verweisen wir auf das Skript LA1.

Definition 1.2.2 Die Matrix $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ von f mit den Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ist

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = (a_{i,j})_{i \in [1, m], j \in [1, n]} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wenn wir die Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ wechseln, wird sich die Matrix $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ verändern. Der Basiswechselsatz erklärt, wie sich die Matrix verändert.

Satz 1.2.3 Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Seien \mathcal{B}, \mathcal{C} Basen von V und seien $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ Basen von W . Sei $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ und $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(f)$. Dann gilt

$$B = QAP$$

wobei $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}_V)$ und $Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(\text{Id}_W)$. □

Wir werden zwei Beispiele von Äquivalenzrelationen für Matrizen einführen.

1.3 Äquivalenz von Matrizen

Definition 1.3.1 1. Seien $A, B \in M_{m,n}(K)$. A und B sind **äquivalent**, falls es $P \in \text{GL}_n(K)$ und $Q \in \text{GL}_m(K)$ gibt mit

$$B = QAP.$$

In diesem Fall schreiben wir $A \sim B$.

2. Sei R die Relation $R = \{(A, B) \in M_{m,n}(K) \mid A \sim B\}$.

Lemma 1.3.2 Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation. □

Satz 1.3.3 Seien $A, B \in M_{m,n}(K)$.

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{Rg}(A) = \text{Rg}(B).$$

Wir können also die Frage: *wann sind zwei Elemente $A, B \in M$ äquivalent?* antworten: Zwei Matrizen A, B sind äquivalent genau dann, wenn $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(B)$.

Um die zweite Frage: *suche ein Element aus jeder Äquivalenzklasse* zu beantworten brauchen wir die folgende Definition.

Definition 1.3.4 Sei $A \in M_{m,n}(K)$ mit $\text{Rg}(A) = r$ Dann heißt

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

die **Normalform** von A bzg. Äquivalenz von Matrizen.

Wir haben gesehen, dass die Äquivalenzklasse einer Matrix A mit $\text{Rg}(A) = r$ die folgende Menge ist:

$$[A]_{\sim} = \{B \in M_{n,m}(K) \mid \text{Rg}(B) = \text{Rg}(A) = r\}.$$

Wir haben in $[A]$ ein sehr einfaches Element: die **Normalform** von A .

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in [A]_{\sim}.$$

1.4 Basiswechsel für Endomorphismen, Ähnlichkeit

Satz 1.4.1 Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Seien \mathcal{B} und \mathcal{C} Basen von V und sei $f : V \rightarrow V$ linear. Sei $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ und $B = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$. Dann gilt

$$B = P^{-1}AP,$$

wobei $P = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$. □

Definition 1.4.2 1. Seien $A, B \in M_n(K)$. Dann sind A und B **ähnlich**, falls es ein $P \in \text{GL}_n(K)$ gibt mit

$$B = P^{-1}AP.$$

In diesem Fall schreiben wir $A \approx B$.

2. Sei R' die Relation $R' = \{(A, B) \in M_n(K) \mid A \approx B\}$.

Lemma 1.4.3 Die Relation R' ist eine Äquivalenzrelation. □

Die zwei wichtigen Fragen für die Ähnlichkeitrelation sind:

Frage 1.4.4

1. Wann sind zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ ähnlich?
2. Suche eine Normalform bzg. Ähnlichkeit von Matrizen.

Wir werden dieses Semester diese Fragen beantworten.

1.5 Erste Invarianten für die Ähnlichkeitsrelation

Lemma 1.5.1 Seien $A, B \in M_n(K)$. Es gilt

$$A \approx B \Rightarrow A \sim B.$$

Beweis. Seien $A, B \in M_n(K)$ mit $A \approx B$. Nach der Definition gibt es ein $P \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = P^{-1}AP$. Sei $Q = P^{-1} \in \text{GL}_n(K)$, dann gilt $B = QAP$ und $A \sim B$. ■

Korollar 1.5.2 Seien $A, B \in M_n(K)$ mit $A \approx B$. Dann gilt $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(B)$.

Beweis. Folgt aus Satz [1.3.3](#). ■

Beispiel 1.5.3 In Korollar 1.5.2 haben wir nicht $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(B) \Rightarrow A \approx B$. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $C \approx A$ gilt: es gibt $P \in \text{GL}_2(K)$ mit

$$C = P^{-1}AP = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2 = A.$$

Es gilt also

$$[A]_{\approx} = \{A\}.$$

Die einzige Matrix die ähnlich zu A ist, ist die Matrix A . Also gilt $\text{Rg}(A) = 2 = \text{Rg}(B)$ (z.B. beide Determinanten sind ungleich 0) aber $A \not\approx B$.

Nächstes Semester haben wir den folgende Satz bewiesen.

Satz 1.5.4 Seien $A, B \in M_n(K)$ mit $A \approx B$. Dann gilt $\chi_A = \chi_B$. □

Korollar 1.5.5 Seien $A, B \in M_n(K)$ mit $A \approx B$. Dann sind die Eigenwerte von A und B gleich.

Beispiel 1.5.6 In Satz 1.5.4 haben wir nicht $\chi_A = \chi_B \Rightarrow A \approx B$. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\chi_A = (X - 1)^2 = \chi_B.$$

Die Eigenwerte von A und B sind gleich (der einzige Eigenwert ist 1). Aber, wie in Beispiel 1.5.3, gilt $A \not\approx B$.

Wir geben hier eine hinreichende Bedingung für die Ähnlichkeit von Matrizen.

Satz 1.5.7 Seien $A \in M_n(K)$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und sei $B \in M_n(K)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ als Eigenwerten. Dann gilt $A \approx B$. □

Beweis. Wir wissen (siehe Satz 1.7.5), dass die Matrix A und auch die Matrix B diagonalisierbar mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind. Es gibt also Matrizen $P, Q \in \text{GL}_n(K)$ mit

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1}BQ.$$

Es gilt also $A \approx D \approx B$. ■

Beispiel 1.5.8 Im Satz 1.5.7 haben wir nicht

$(A \approx B) \Rightarrow (A \text{ und } B \text{ haben die gleichen } n \text{ paarweise verschiedenen Eigenwerte}).$

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Dann gilt $A \approx B$ und A und B haben die gleichen Eigenwerte, aber A und B haben nur einen Eigenwert und nicht 2 paarweise verschiedene Eigenwerte.

Diese Beispiele und erste Invarianten zeigen, dass Diagonalisierbarkeit einen starken Zusammenhang mit Ähnlichkeit hat. Wir werden aber mehr brauchen. Wir wiederholen jetzt die Eigenschaften von diagonalisierbaren Matrizen.

1.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1.6.1 1. Sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus von V . Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt **Eigenvektor mit Eigenwert** $\lambda \in K$ falls gilt

$$f(v) = \lambda v.$$

2. Sei $A \in M_n(K)$ eine Matrix. Ein Vektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ heißt **Eigenvektor mit Eigenwert** $\lambda \in K$ falls gilt

$$Av = \lambda v.$$

Definition 1.6.2 Sei $\lambda \in K$ und $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Der **Eigenraum** $E(f, \lambda)$ zu f und λ ist der Unterraum

$$E(f, \lambda) = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_V - f) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

Satz 1.6.3 Die Eigenwerte von f sind die Nullstellen von χ_f . □

Satz 1.6.4 Sei $f \in \text{End}(V)$.

1. Für $\lambda \neq \mu$ gilt $E(f, \lambda) \cap E(f, \mu) = 0$.
2. Systeme von Eigenvektoren mit paarweise verschiedenen Eigenwerten von f sind linear unabhängig. □

Sei $n = \dim V$

Korollar 1.6.5 Sei $f \in \text{End}(V)$. Dann hat f höchstens n Eigenwerte.

Korollar 1.6.6 Sei $f \in \text{End}(V)$. Dann gilt

$$\sum_{\lambda \in K} E(f, \lambda) = \bigoplus_{\lambda \in K} E(f, \lambda).$$

1.7 Diagonalisierbare Matrizen

Definition 1.7.1 Eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ heißt diagonal wenn gilt: $a_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$.

Definition 1.7.2 Eine Matrix $A \in M_n(K)$ ist **diagonalisierbar** falls sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, i.e. falls es $P \in \text{GL}_n(K)$ gibt so dass PAP^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Bemerkung 1.7.3 Eine Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn es in der Ähnlichkeitsklasse von A eine Diagonalmatrix D gibt. Für diagonalisierbare Matrizen gibt es ein sehr einfaches Element: die Diagonalmatrix D . Diese Diagonalmatrix D wird die **(jordansche) Normalform** von A sein.

Satz 1.7.4 Sei $A \in M_n(K)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis \mathcal{B} von K^n , welche aus Eigenvektoren von A besteht.
3. $\sum_{\lambda \in K} \dim E(A, \lambda) = n$.
4. $\oplus_{\lambda \in K} E(A, \lambda) = K^n$. □

Satz 1.7.5 Sei $n = \dim V$ und $f \in \text{End}(V)$. Hat f genau n verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar. □

1.8 Eigenwerte und das charakteristische Polynom

Satz 1.8.1 Sei $A \in M_n(K)$ und sei $f \in \text{End}(V)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \{\text{Eigenwerte von } A\} &= \{\text{Nullstellen von } \chi_A\} \\ \{\text{Eigenwerte von } f\} &= \{\text{Nullstellen von } \chi_f\}. \end{aligned}$$

Satz 1.8.2 Sei $n = \dim V$ und sei $f \in \text{End}(V)$. Für jedes $\lambda \in K$ gilt dann

$$\dim E(f, \lambda) \leq m(\chi_f, \lambda),$$

wobei $m(\chi_f, \lambda)$ die Vielfachheit von λ in χ_f ist. □

Korollar 1.8.3 Sei $n = \dim V$ und sei $f \in \text{End}(V)$. Der Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn χ_f vollständig in Linearfaktoren zerfällt und für jedes $\lambda \in K$, gilt $\dim E(f, \lambda) = m(\chi_f, \lambda)$.

1.9 Trigonalisierbarkeit

Definition 1.9.1 1. Eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ ist eine obere Dreiecksmatrix wenn $a_{i,j} = 0$ für $i > j$.

2. Sei $n = \dim V$ und $f \in \text{End}(V)$. Der Endomorphismus f heißt **trigonalisierbar** falls es eine Basis \mathcal{B} gibt mit $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix.

Bemerkung 1.9.2 Eine Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn es in der Ähnlichkeitsklasse von A eine obere Dreiecksmatrix D gibt.

Satz 1.9.3 Sei $f \in \text{End}(V)$. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

1. f ist trigonalisierbar.
2. χ_f zerfällt über K vollständig in Linearfaktoren. □

Korollar 1.9.4 Falls K algebraisch abgeschlossen ist, falls also jedes Polynom in $K[X] \setminus \{0\}$ über K in Linearfaktoren zerfällt, dann ist jedes $f \in \text{End}(V)$ mit $\dim V < \infty$ trigonalisierbar.

Bemerkung 1.9.5 Für K algebraisch abgeschlossen, gibt es immer in der Ähnlichkeitsklasse $[A]_{\approx}$ von A eine obere Dreiecksmatrix. Wir können also als einfaches Element in der Ähnlichkeitsklasse eine obere Dreiecksmatrix wählen. Wir werden sehen, dass man eine noch einfachere Matrix wählen kann: die **(jordansche) Normalform** von A .

1.10 Minimal Polynom

Sei V mit $\dim V = n$ und sei $f \in \text{End}(V)$.

Satz 1.10.1 Es existiert genau ein normiertes Polynom $\mu_f \in K[X]$, das **Minimalpolynom von f** mit

1. $\mu_f(f) = 0$
2. Ist $P \in K[X]$ mit $P(f) = 0$, so ist μ_f ein Teiler von P . □

Satz 1.10.2 Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist diagonalisierbar.
2. μ_f zerfällt vollständig in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen. □

Satz 1.10.3 (Satz von Cayley-Hamilton) Es gilt $\chi_f(f) = 0$. □

Korollar 1.10.4 Es gilt: μ_f ist ein Teiler von χ_f .

Korollar 1.10.5 μ_f und χ_f haben die gleichen Nullstellen (die Eigenwerte). Sei λ eine solche Nullstelle, es gilt

$$m(\mu_f, \lambda) \leq m(\chi_f, \lambda).$$

Satz 1.10.6 Seien $A, B \in M_n(K)$ mit $A \approx B$. Dann gilt $\mu_A = \mu_B$. □

Beweis. Sei $P \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = P^{-1}AP$. Es gilt also auch $A = PBP^{-1}$. Eine einfache Induktion gibt für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$B^i = P^{-1}A^iP.$$

Sei $\mu_A = \sum_{i=0}^k a_i X_i \in K[X]$. Es gilt $\mu_A(A) = 0$. Wir zeigen, dass $\mu_A(B) = 0$. Es gilt

$$\mu_A(B) = \sum_{i=0}^k a_i B^i = \sum_{i=0}^k a_i P^{-1}A^iP = P^{-1} \left(\sum_{i=0}^k a_i A^i \right) P = P^{-1} \mu_A(A) P = 0.$$

Es gilt also: $\mu_A(B) = 0$ und μ_B ist ein Teiler von μ_A .

Wir können A und B vertauschen und so gilt auch $\mu_B(A) = 0$. Daraus folgt, dass μ_A ein Teiler von μ_B ist. Es folgt, dass $\mu_A = \lambda \mu_B$ mit $\lambda \in K$, und weil μ_A und μ_B beide normiert sind, folgt $\mu_A = \mu_B$. ■

Beispiel 1.10.7 Im Satz 1.10.6 haben wir nicht $\mu_A = \mu_B \Rightarrow A \approx B$. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Korollar 1.10.5 hat μ_A (bzw. μ_B) die Eigenwerte von A (bzw. B) als Nullstellen. Also haben μ_A und μ_B die Zahlen 1 und 2 als Nullstellen. Die beiden Matrizen A und B sind Diagonalmatrizen, also diagonalisierbar. Nach Satz 1.10.2 folgt, dass μ_A und μ_B einfache Nullstellen haben. Es folgt

$$\mu_A = (X - 1)(X - 2) = \mu_B.$$

Wir zeigen, dass $A \not\approx B$. Hätten wir $A \approx B$, dann folgt nach Satz 1.5.4 $\chi_A = \chi_B$. Aber es gilt

$$\chi_A = (X - 1)^2(X - 2) \neq (X - 1)(X - 2)^2 = \chi_B.$$

Also $A \not\approx B$.

Beispiel 1.10.8 Es gibt Matrizen A und B mit

$$\operatorname{Rg}(A) = \operatorname{Rg}(B), \quad \chi_A = \chi_B \quad \text{und} \quad \mu_A = \mu_B$$

, aber mit $A \not\approx B$.

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\operatorname{Rg}(A) = 4 = \operatorname{Rg}(B), \quad \chi_A = (X - 1)^4 = \chi_B \quad \text{und} \quad \mu_A = (X - 1)^2 = \mu_B.$$

Aber es gilt $A \not\approx B$.

Übung 1.10.9 Seien A und B wie im Beispiel [1.10.8](#).

1. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Rg}(A) = 4 = \operatorname{Rg}(B)$, $\chi_A = (X - 1)^4 = \chi_B$ und $\mu_A = (X - 1)^2 = \mu_B$.
2. Zeigen Sie, dass $A \not\approx B$.

2 Jordansche Normalform

Sei V ein K -Vektorraum der Dimension n und sei $f \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus.

2.1 Invariante Unterräume

Definition 2.1.1 Ein Unterraum U von V heißt **invariant** für f (oder **f -invariant**) falls $f(U) \subset U$.

Lemma 2.1.2 Sei U ein Unterraum von V .

- (i) Wenn U f -invariant ist, dann ist U auch $P(f)$ -invariant für alle $P \in K[X]$.
- (ii) Sei $\lambda \in K$. Dann ist U genau dann f -invariant, wenn U $(f - \lambda \text{Id}_V)$ -invariant ist. \square

Beweis. (i) Sei $P \in K[X]$ und $u \in U$. Dann ist $f(u) \in U$ und per Induktion gilt $f^k(u) \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $P(f)(u) \in U$.

- (ii) Angenommen U sei f -invariant. Dann gilt $f(u) \in U$ für alle $u \in U$. Es folgt $(f - \lambda \text{Id}_V)(u) = f(u) - \lambda u \in U$ und U ist $(f - \lambda \text{Id}_V)$ -invariant. Umgekehrt, sei $u \in U$, dann gilt $(f - \lambda \text{Id}_V)(u) \in U$ also $f(u) - \lambda u \in U$. daraus folgt $f(u) \in U$ und U ist f -invariant. \blacksquare

Lemma 2.1.3 Seien U_1, \dots, U_r f -invariante Unterräume so dass, $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$.

- (i) Seien $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ Basen von U_1, \dots, U_r . Dann ist $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ eine Basis von V .
- (ii) Sei $A_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f|_{U_i})$ für $i \in [1, r]$, dann gilt

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}.$$

Beweis. Übung. \blacksquare

Lemma 2.1.4 Umgekehrt, sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis mit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

wobei $A_i \in M_{n_i}(K)$. Dann sind die Unterräume

$$U_i = \langle v_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, v_{n_1+\dots+n_{i-1}+n_i} \rangle$$

f -invariant und es gilt $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$. □

Beweis. Übung. ■

2.2 Verallgemeinerte Eigenräume

Definition 2.2.1 Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$. Der k -te verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert λ ist $E_k(f, \lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_V)^k$.

Bemerkung 2.2.2 Es gilt $E_1(f, \lambda) = E(f, \lambda)$ also ist der erste verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert λ der Eigenraum zum Eigenwert λ .

Lemma 2.2.3 Sei $\lambda \in K$.

- (i) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $E_k(f, \lambda)$ f -invariant.
- (ii) Es gilt $E_k(f, \lambda) \subset E_l(f, \lambda)$ für $k \leq l$.
- (iii) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $E_k(f, \lambda) = E_{k+1}(f, \lambda)$.
- (iv) Sei k mit $E_k(f, \lambda) = E_{k+1}(f, \lambda)$, dann gilt $E_k(f, \lambda) = E_l(f, \lambda)$ für alle $l \geq k$. □

Beweis. (i) Sei $v \in E_k(f, \lambda)$. Dann gilt $(f - \lambda \text{Id}_V)^k(v) = 0$. Wir zeigen, dass $f(v) \in E_k(f, \lambda)$ also $(f - \lambda \text{Id}_V)^k(f(v)) = 0$. Es gilt

$$(f - \lambda \text{Id}_V)^k(f(v)) = ((f - \lambda \text{Id}_V)^k \circ f)(v) = f \circ (f - \lambda \text{Id}_V)^k(v) = f((f - \lambda \text{Id}_V)^k(v)) = 0.$$

(ii) Sei $v \in E_k(f, \lambda)$ und $l \geq k$. Dann gilt $(f - \lambda \text{Id}_V)^k(v) = 0$. Also gilt $(f - \lambda \text{Id}_V)^l(v) = (f - \lambda \text{Id}_V)^{l-k}((f - \lambda \text{Id}_V)^k(v)) = (f - \lambda \text{Id}_V)^{l-k}(0) = 0$. Es gilt also $v \in E_l(f, \lambda)$.

(iii) Wir betrachten $d_k = \dim E_k(f, \lambda)$. Die Folge $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist steigend und $d_k \leq n$. Es gibt also ein k mit $d_k = d_{k+1}$ also $\dim E_k(f, \lambda) = \dim E_{k+1}(f, \lambda)$. Daraus folgt $E_k(f, \lambda) = E_{k+1}(f, \lambda)$.

(iv) Sei k mit $E_k(f, \lambda) = E_{k+1}(f, \lambda)$ und sei $l \geq k$. Es gilt $E_k(f, \lambda) \subset E_l(f, \lambda)$. Umgekehrt zeigen wir per Induktion über $l \geq k$, dass $E_l(f, \lambda) \subset E_k(f, \lambda)$. Für $l = k$ ist dies wahr.

Angenommen $E_l(f, \lambda) \subset E_k(f, \lambda)$. Wir zeigen $E_{l+1}(f, \lambda) \subset E_k(f, \lambda)$. Sei $v \in E_{l+1}(f, \lambda)$. Es gilt $(f - \lambda \text{Id}_V)^{l+1}(v) = 0$, also $(f - \lambda \text{Id}_V)^{k+1}((f - \lambda \text{Id}_V)^{l-k}(v)) = 0$. Es folgt $(f - \lambda \text{Id}_V)^{l-k}(v) \in E_{k+1}(f, \lambda) = E_k(f, \lambda)$. Es gilt also $0 = (f - \lambda \text{Id}_V)^k((f - \lambda \text{Id}_V)^{l-k}(v)) = (f - \lambda \text{Id}_V)^l(v) = 0$ und $v \in E_l(f, \lambda) \subset E_k(f, \lambda)$. ■

Korollar 2.2.4 Sei $\lambda \in K$. Dann gibt es ein $M_\lambda \in \mathbb{N}$ mit $E_k(f, \lambda) \subsetneq E_{k+1}(f, \lambda)$ für $k < M_\lambda$ und $E_k(f, \lambda) = E_{k+1}(f, \lambda)$ für $k \geq M_\lambda$.

2.3 Haupträume

Definition 2.3.1 Der Hauptraum zum Eigenwert λ ist $H(f, \lambda) = E_{M_\lambda}(f, \lambda)$.

Lemma 2.3.2 (i) Ist λ ein Eigenwert von f , so gilt $H(f, \lambda) \neq 0$.

(ii) Sonst gilt $H(f, \lambda) = 0$. □

Beweis. (i) Sei v ein Eigenvektor zu λ . Es gilt $v \neq 0$ und $(f - \lambda \text{Id}_V)(v) = 0$. Es gilt also $0 \neq E(f, \lambda) \subset H(f, \lambda)$.

(ii) Angenommen $H(f, \lambda) \neq 0$. Dann gibt es ein $v \in H(f, \lambda)$ mit $v \neq 0$. Es gilt $(f - \lambda)^{M_\lambda}(v) = 0$ und daraus folgt $(f - \lambda)^l(v) = 0$ für alle $l \geq M_\lambda$. Sei k maximal mit der Eigenschaft $(f - \lambda)^k(v) \neq 0$ (z.B. hat $k = 0$ diese Eigenschaft, aber alle $k \geq M_\lambda$ haben diese Eigenschaft nicht mehr). Es gilt also $(f - \lambda)^k(v) \neq 0$ und $(f - \lambda)^{k+1}(v) = 0$. Daraus folgt

$$0 = (f - \lambda)^{k+1}(v) = (f - \lambda \text{Id}_V)((f - \lambda)^k(v)).$$

Also ist $(f - \lambda)^k(v)$ ein Eigenvektor von f mit dem Eigenwert λ . Widerspruch. ■

Wir werden die Haupträume dank dem Minimalpolynom studieren. Zuerst brauchen wir ein Lemma.

Definition 2.3.3 Seien $P_1, \dots, P_r \in K[X]$. Die Polynome P_1, \dots, P_r sind **teilerfremd**, falls es kein $Q \in K[X]$ mit $\deg(Q) > 0$ und $Q|P_i$ für alle $i \in [1, r]$ gibt.

Beispiel 2.3.4 (i) X und $X - 1$ sind teilerfremd.

(ii) Für $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschieden sind $P_1 = (X - \lambda_1)^{m_1}, \dots, P_r = (X - \lambda_r)^{m_r}$ teilerfremd.

(iii) Für $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschieden sei

$$P_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}.$$

Dann sind P_1, \dots, P_r teilerfremd.

(iv) Für $P_1 = \dots = P_r = 0$ sind P_1, \dots, P_r nicht teilerfremd. Jedes Polynom P teilt P_1, \dots, P_r : $P_i = 0 = 0 \cdot P$.

Lemma 2.3.5 Seien $P_1, \dots, P_r \in K[X]$ teilerfremd. Dann gibt es Polynome $Q_1, \dots, Q_r \in K[X]$ mit

$$Q_1 P_1 + \dots + Q_r P_r = 1.$$

Beweis. Nach Induktion über $N = \deg(P_1) + \dots + \deg(P_r)$.

Für $N = 0$ gilt $\deg(P_1) = \deg(P_r) = 0$. Es gibt also Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $P_i = \lambda_i$ für alle $i \in [1, r]$. Es gibt ein i mit $\lambda_i \neq 0$. (Wenn nicht gilt $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, also $P_1 = \dots = P_r = 0$ und P_1, \dots, P_r sind nicht teilerfremd.) Sei $Q_i = \frac{1}{\lambda_i}$ und $Q_j = 0$ für $j \neq i$, also gilt $Q_1 P_1 + \dots + Q_r P_r = 1$.

Wir nehmen an, dass es für alle teilerfremden Polynome R_1, \dots, R_r mit $N \geq \deg(R_1) + \dots + \deg(R_r)$ Polynome S_1, \dots, S_r gibt mit $S_1 R_1 + \dots + S_r R_r = 1$. Seien P_1, \dots, P_r teilerfremde Polynome mit $\deg(P_1) + \dots + \deg(P_r) = N + 1$. Ohne Beschränkung können wir annehmen, dass $\deg(P_1) \geq \dots \geq \deg(P_r)$. Wir wissen, dass es für alle $i \in [1, r - 1]$ Polynome U_i, R_i mit $P_i = T_i P_r + R_i$ und $\deg(R_i) < \deg(P_r) \leq \deg(P_i)$ gibt. Es gilt also $\deg(R_1) + \dots + \deg(R_{r-1}) + \deg(P_r) < \deg(P_1) + \dots + \deg(P_{r-1}) + \deg(P_r)$.

Wir zeigen, dass $R_1, \dots, R_{r-1}, R_r = P_r$ teilerfremd sind. Sei $P \in K[X]$ mit $P | R_i$ für alle $i \in [1, r]$. Es gilt $P | R_i$ und $P | R_r = P_r$. Also teilt P alle Polynome $T_i P_r + R_i = P_i$. Da P_1, \dots, P_r teilerfremd sind gilt $\deg(P) = 0$ und R_1, \dots, R_r sind teilerfremd. Nach Induktion gibt es Polynome S_1, \dots, S_r mit $S_1 R_1 + \dots + S_r R_r = 1$. Wir setzen $R_i = P_i - T_i P_r$ für $i \in [1, r - 1]$ und $R_r = P_r$. Es gilt

$$1 = S_1 R_1 + \dots + S_r R_r = S_1 (P_1 - T_1 P_r) + \dots + S_{r-1} (P_{r-1} - T_{r-1} P_r) + S_r P_r.$$

Wir setzen $Q_i = S_i$ für $i \in [1, r - 1]$ und $Q_r = S_r - (S_1 T_1 + \dots + S_{r-1} T_{r-1})$. Die Gleichung $Q_1 P_1 + \dots + Q_r P_r = 1$ folgt. ■

Beispiel 2.3.6 Sei $P_1 = X$ und $P_2 = X - 1$. Dann sind P_1 und P_2 teilerfremd und für $Q_1 = 1, Q_2 = -1$ gilt $Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = 1$.

Sei μ_f das Minimalpolynom von f . Wir nehmen an, dass μ_f in Linearfaktoren zerfällt:

$$\mu_f = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschieden sind.

Satz 2.3.7 Sei $H_i = \text{Ker}(f - \lambda_i)^{m_i}$ für $i \in [1, r]$. Es gilt

$$V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_r.$$

Beweis. Wir zeigen $V = H_1 + \cdots + H_r$. Sei $v \in V$. Wir zeigen, dass es Vektoren $v_i \in H_i$ für $i \in [1, r]$ gibt mit $v = v_1 + \cdots + v_r$. Sei $P_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}$ für $i \in [1, r]$. Dann sind P_1, \dots, P_r teilerfremd. Nach dem obigen Lemma gibt es Polynome Q_1, \dots, Q_r mit $P_1 Q_1 + \cdots + P_r Q_r = 1$. Es gilt also

$$v = \text{Id}_V(v) = (P_1(f)Q_1(f) + \cdots + P_r(f)Q_r(f))(v).$$

Sei $v_i = P_i(f)Q_i(f)(v)$. Es gilt $v = v_1 + \cdots + v_r$. Wir zeigen $v_i \in H_i$. Es gilt

$$(f - \lambda_i)^{m_i}(v_i) = (f - \lambda_i)^{m_i} P_i(f)Q_i(f)(v) = \mu_f(f)Q_i(f)(v) = 0(f)Q_i(f)(v) = 0.$$

Daraus folgt $v_i \in H_i$.

Wir zeigen jetzt, dass die Summe $H_1 + \cdots + H_r$ eine direkte Summe ist. Seien also $v_i \in H_i$ mit $v_1 + \cdots + v_r = 0$. Wir zeigen $v_i = 0$ für alle $i \in [1, r]$. Es gilt

$$0 = P_i(f)(v_1) + \cdots + P_i(f)(v_r) = P_i(f)(v_i)$$

da $(X - \lambda_j)^{m_j} P_i$ für alle $j \neq i$ teilt. Sei $R = (X - \lambda_i)^{m_i}$. Es gilt $R(f)(v_i) = 0$. Die Polynome P_i und $R = (X - \lambda_i)^{m_i}$ sind teilerfremd. Es gibt also Polynome Q und S mit $QP_i + SR = 1$. Daraus folgt

$$v_i = Q(f)P_i(f)(v_i) + S(f)R(f)(v_i) = 0.$$

Da der obige Beweis für alle $i \in [1, r]$ gilt, gilt also $v_i = 0$ für alle $i \in [1, r]$. ■

Korollar 2.3.8 Für alle $i \in [1, r]$ gilt $H(f, \lambda_i) = H_i$ und $M_{\lambda_i} = m_i$.

Beweis. Für alle $i \in [1, r]$ und $k \leq M_{\lambda_i} \leq l$ gilt

$$\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^k \subset \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{M_{\lambda_i}} \subset \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^l.$$

Es gilt also $H_i \subset H(f, \lambda_i)$.

Umgekehrt, sei $v \in H(f, \lambda_i)$. Wir zeigen, dass $v \in H_i$. Nach dem obigen Satz gilt $v = v_1 + \cdots + v_r$ mit $v_j \in H_j$ für alle $j \in [1, r]$. Sei $P_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}$ und $R = (X - \lambda_i)^{M_{\lambda_i}}$. Es gilt $P_i(f)(v_j) = 0$ für alle $j \in [1, r]$ und $R(f)(v) = 0$. Die Polynome P_i und R sind teilerfremd. Es gibt also $Q, S \in K[X]$ mit $1 = QP_i + SR$. Daraus folgt

$$v = Q(f)P_i(f)(v_1 + \cdots + v_r) + S(f)R(f)(v) = Q(f)P_i(f)(v_i).$$

Da $v_i \in H_i$ und H_i f -invariant, gilt $v = Q(f)P_i(f)(v_i) \in H_i$.

Wir zeigen $m_i = M_{\lambda_i}$. Es gilt

$$\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i+1} \subset \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{M_{\lambda_i}} = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i} \subset \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i+1}.$$

Alle Enthaltungen sind Gleichungen und es folgt $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i+1}$. Nach der Definition von M_{λ_i} gilt $M_{\lambda_i} \leq m_i$. Sei

$$P = (X - \lambda_i)^{M_{\lambda_i}} \cdots (X - \lambda_r)^{M_{\lambda_r}}.$$

Wir zeigen, dass $P(f) = 0$. Sei also $v \in V$. Wir zeigen $P(f)(v) = 0$. Nach dem obigen Satz gilt $v = v_1 + \cdots + v_r$ mit $v_i \in H_i$. Es gilt also $P(f)(v_i) = 0$ für alle $i \in [1, r]$. Daraus folgt $P(f)(v) = 0$. Aus der Definition von μ_f folgt, dass μ_f ein Teiler von P ist. Daraus folgt $m_i \leq M_{\lambda_i}$. Es folgt $M_{\lambda_i} = m_i$. ■

Korollar 2.3.9 Sei U ein f -invarianter Unterraum. Dann gilt

$$U = (U \cap H_1) \oplus \cdots \oplus (U \cap H_r).$$

Beweis. Da wir eine direkte Summe $H_1 \oplus \cdots \oplus H_r$ haben ist die Summe $(U \cap H_1) + \cdots + (U \cap H_r)$ auch eine direkte Summe. Wir haben eine Enthaltung $(U \cap H_1) \oplus \cdots \oplus (U \cap H_r) \subset U$. Umgekehrt, sei $v \in U$, und wie oben sei $P_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}$ für $i \in [1, r]$. Dann sind P_1, \dots, P_r teilerfremd und es gibt Polynome Q_1, \dots, Q_r mit $P_1 Q_1 + \cdots + P_r Q_r = 1$. Es gilt also

$$v = v_1 + \cdots + v_r$$

wobei $v_i = P_i(f)Q_i(f)(v) \in H_i$. Da U ein f -invarianter Unterraum ist und $v \in U$ ist, gilt $v_i = P_i(f)Q_i(f)(v) \in U$. Es folgt $v_i \in U \cap H_i$ und $U = (U \cap H_1) \oplus \cdots \oplus (U \cap H_r)$. ■

Korollar 2.3.10 Sei $i \in [1, r]$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit

$$(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i-1}(v) \neq 0 \text{ und } (f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i}(v) = 0.$$

Beweis. Es gilt $m_i = M_{\lambda_i}$. Also gilt $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i-1} = E_{m_i-1}(f, \lambda_i) \subsetneq E_{m_i}(f, \lambda_i) = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i}$. Sei $v \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i} \setminus \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i-1}$. Dann erfüllt v die obige Eigenschaft. ■

2.4 Jordan-Kette

Definition 2.4.1 Ein System (v_1, \dots, v_t) von Vektoren heißt **Jordan-Kette** (für f zum Eigenwert λ), falls für alle $k \in [1, t-1]$ gilt

- $v_1 \neq 0$,
- $(f - \lambda \text{Id}_V)(v_k) = v_{k-1}$

- $(f - \lambda \text{Id}_V)(v_{k+1}) = v_k$.

Lemma 2.4.2 (i) Es gibt einen Vektor $v \in V$ mit $(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i-1}(v) \neq 0$ und $(f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i}(v) = 0$.

(ii) Sei $v_k = (f - \lambda_i \text{Id}_V)^{m_i-k}(v)$. Das System (v_1, \dots, v_{m_i}) ist eine Jordan-Kette für f zum Eigenwert λ_i . \square

Beweis. (i) Siehe Korollar 2.3.10

(ii) Folgt aus den Definitionen von v und der Jordan-Kette. \blacksquare

Lemma 2.4.3 Sei (v_1, \dots, v_t) eine Jordan-Kette für f zum Eigenwert λ .

(i) Dann ist $((f - \lambda \text{Id}_V)(v_2), \dots, (f - \lambda \text{Id}_V)(v_t)) = (v_1, \dots, v_{t-1})$ eine Jordan-Kette für f zum Eigenwert λ .

(ii) Dann ist $\langle v_1, \dots, v_t \rangle$ f -invariant und (v_1, \dots, v_t) linear unabhängig. \square

Beweis. (i) Folgt aus der Definition.

(ii) Nach (i) folgt, dass $f - \lambda \text{Id}_V$ die Jordan-Kette auf $(0, v_1, \dots, v_{t-1})$ schickt. Daraus folgt, dass $\langle v_1, \dots, v_t \rangle$ $(f - \lambda \text{Id}_V)$ -invariant, also f -invariant ist.

Nach Induktion über t . Seien x_1, \dots, x_t Skalare mit $\sum_i x_i v_i = 0$. Es folgt $0 = \sum_i x_i (f - \lambda \text{Id}_V)(v_i) = \sum_{i \leq t-1} x_{i+1} v_i$. Da (v_1, \dots, v_{t-1}) eine Jordan-Kette ist, ist das System linear unabhängig. Es folgt $x_2 = \dots = x_t = 0$. Es gilt dann auch $x_1 v_1 = 0$. Da $v_1 \neq 0$ folgt $x_1 = 0$. Das System (v_1, \dots, v_t) ist linear unabhängig. \blacksquare

Korollar 2.4.4 Sei (v_1, \dots, v_t) eine Jordan-Kette für f zum Eigenwert λ . Sei $U = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$ und sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_t)$.

(i) Das System \mathcal{B} ist eine Basis von U .

(ii) Es gilt

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f|_U) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} := J(\lambda, t).$$

Beweis. (i) Folgt aus dem obigen Lemma.

(ii) Es gilt $(f - \lambda \text{Id}_V)(v_{k+1}) = v_k$ für $k \in [1, t-1]$. Daraus folgt $f(v_{k+1}) = \lambda v_{k+1} + v_k$. Es gilt auch $(f - \lambda \text{Id}_V)(v_1) = 0$, also $f(v_1) = \lambda v_1$. Das Lemma ist bewiesen. \blacksquare

Definition 2.4.5 Die Matrix $J(\lambda, t)$ heißt **Jordan-Block der Größe t zum Eigenwert λ** .

2.5 Endomorphismus mit einem Eigenwert

Sei $f \in \text{End}(V)$. In diesem Kapitel nehmen wir an, dass $\chi_f = (X - \lambda)^n$ und $\mu_f = (X - \lambda)^m$. Wie schreiben $E_i = E_i(f, \lambda)$. Es gilt

$$0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m = V.$$

Wir schreiben $g = f - \lambda \text{Id}_V$.

Lemma 2.5.1 Sei U ein Unterraum mit $E_1 \cap U = 0$. Dann ist $g|_U : U \rightarrow V$ injektiv.

Insbesondere gilt: Sei \mathcal{B} eine Basis von U , dann ist $g(\mathcal{B})$ eine Basis von $g(U)$. \square

Beweis. Es gilt $\text{Ker}(g|_U) = U \cap \text{Ker} g = U \cap E_1 = 0$. \blacksquare

Wir bauen jetzt eine Zerlegung von $V = E_m$ in eine direkte Summe.

Satz 2.5.2 Für alle $i \in [1, m]$, gibt es Unterräume $U_i \subset E_i$ so dass

$$E_i = E_{i-1} \oplus \bigoplus_{j=0}^{m-i} g^j(U_{i+j}).$$

Beweis. Nach absteigender Induktion über $i \in [1, m]$.

Für $i = m$, wählen wir U_m ein Komplement von E_{m-1} in E_m . Es gilt $E_m = E_{m-1} \oplus U_m$.

Induktionsannahme: für $k \in [i+1, m]$ gibt es Unterräume $U_k \subset E_k$ mit:

$$E_{i+1} = E_i \oplus \bigoplus_{j=0}^{m-i-1} g^j(U_{i+j+1}).$$

Lemma 2.5.3 Es gilt $E_{i-1} + \sum_{j=1}^{m-i} g^j(U_{i+j}) = E_{i-1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{m_i} g^j(U_{i+j})$. \square

Beweis. Sei $v \in E_{i-1}$ und $u_{i,j} \in U_{i+j}$ mit

$$v + \sum_{j=1}^{m-i} g^j(u_{i,j}) = 0.$$

Wir zeigen, dass $v = g^j(u_{i,j}) = 0$ für alle $j \in [1, m-i]$. Es gilt

$$\sum_{j=0}^{m-i-1} g^{i+j}(u_{i,j+1}) = \sum_{j=1}^{m-i} g^{i+j-1}(u_{i,j}) = -g^{i-1}(v) = 0.$$

Daraus folgt

$$\sum_{j=0}^{m-i-1} g^j(u_{i,j+1}) \in E_i.$$

Nach Induktionsannahme gilt $g^j(u_{i,j+1}) = 0$ für alle $j \in [0, m-i-1]$. Es folgt $g^{j+1}(u_{i,j+1}) = 0$ für alle $j \in [0, m-i-1]$ und $g^j(u_{i,j}) = 0$ für alle $j \in [1, m-i]$. Es folgt auch $v = 0$. ■

Sei U_i ein Komplement von $E_{i-1} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m_i} g^j(U_{i+j})$ in E_i . Es gilt

$$E_i = E_{i-1} \oplus \bigoplus_{j=0}^{m-i} g^j(U_{i+j}).$$

Korollar 2.5.4 Seien U_i für $i \in [1, m]$ wie im Satz 2.5.2. Sei \mathcal{B}_i eine Basis von U_i , dann ist $g^j(\mathcal{B}_i)$ eine Basis von $g^j(U_i)$ für alle $j \in [0, i-1]$.

Beweis. Nach Lemma 2.5.1, genügt es zu zeigen, dass $g^{j-1}(U_i) \cap E_1 = 0$ für alle $j \in [0, i-1]$. Sei $v \in g^{j-1}(U_i) \cap E_1$ und sei $u \in U_i$ mit $g^{j-1}(u) = v$. Es gilt $g^j(u) = g(v) = 0$. Daraus folgt $u \in U_i \cap E_j \subset U_i \cap E_{i-1} = 0$. Es folgt $u = 0$ und $v = 0$. ■

Korollar 2.5.5 Für alle $i \in [1, m]$ gilt

$$\dim E_i = \dim E_{i-1} + \sum_{k=i}^m \dim U_k \text{ und } \dim U_i = 2 \dim E_i - \dim E_{i+1} - \dim E - i - 1,$$

wobei $E_{m+1} = E_m = V$.

Beweis. Die erste Dimensionsformel folgt aus dem Satz 2.5.2 und dem Korollar 2.5.4. Die zweite Dimensionsformel folgt aus der ersten nach absteigender Induktion über i .

Für $i = m$ gilt $\dim E_m = \dim E_{m-1} + \dim U_m$. Daraus folgt die Dimensionformel. Induktionsannahme: Für $k \in [i+1, m]$ gilt $\dim U_k = \dim E_k - \dim E_{k+1} - \dim E_{k-1}$.

Es gilt $\dim E_i = \dim E_{i-1} + \sum_{k=i}^m \dim U_k$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dim U_i &= \dim E_i - \dim E_{i-1} - \sum_{k=i+1}^m \dim U_k \\ &= \dim E_i - \dim E_{i-1} - 2 \sum_{k=i+1}^m \dim E_k + \sum_{k=i+1}^m \dim E_{k+1} + \sum_{k=i+1}^m \dim E_{k-1} \\ &= \dim E_i - \dim E_{i-1} - 2 \sum_{k=i+1}^m \dim E_k + \sum_{k=i+2}^{m+1} \dim E_k + \sum_{k=i}^{m-1} \dim E_k \\ &= \dim E_i - \dim E_{i-1} - \dim E_{i+1} - \dim E_m + \dim E_{m+1} + \dim E_i \\ &= 2 \dim E_i - \dim E_{i-1} - \dim E_{i+1}. \end{aligned}$$

Korollar 2.5.6 Es gilt

$$V = \bigoplus_{i=1}^m \left(\bigoplus_{j=0}^{i-1} g^j(U_i) \right).$$

Korollar 2.5.7 Seien U_i für $i \in [1, m]$ wie im Satz 2.5.2 und seien \mathcal{B}_i Basen von U_i . Dann ist

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} g^j(\mathcal{B}_i) \right)$$

eine Basis von V .

Definition 2.5.8 Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $i \in [1, m]$, sei $n_i, d_i \in \mathbb{N}$ und $A_i \in M_{n_i}(K)$. Wir schreiben $\text{diag}(d_1 A_1, \dots, d_m A_m)$ für die blockdiagonale Matrix mit d_1 -Mal A_1, \dots , d_m -Mal A_m auf der Diagonale.

Korollar 2.5.9 Es gilt $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(d_1 J(\lambda, 1), \dots, d_m J(\lambda, m))$ wobei $d_i = \dim U_i$.

Beweis. Für $v \in U_i$, ist $(g^{i-1}(v), \dots, g(v), v)$ eine Jordan-Kette für f zum Eigenwert λ . Die Basis \mathcal{B} ist also eine Vereinigung von Jordan-Ketten und die obere Diagonalform der Matrix folgt daraus. ■

2.6 Jordansche Normalform

Satz 2.6.1 (Jordansche Normalform) Sei $f \in \text{End}(V)$, so dass χ_f (oder μ_f) in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es eine Basis \mathcal{B} von V so, dass

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(J(\zeta_1, n_1), \dots, J(\zeta_s, n_s))$$

, wobei die Matrizen $J(\lambda_i, n_i)$ sind, bis auf Vertauschen, eindeutig bestimmt sind. Diese Matrix heißt **Jordan-Normalform** von f . Die ζ_1, \dots, ζ_s sind nicht notwendig paarweise verschieden. □

Beweis. Ist \mathcal{B} eine Basis mit $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ wie oben, so sagen wir, dass $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ in Jordan-Normalform ist. Wir zeigen zuerst, dass es eine solche Basis gibt.

Für die Einschränkung f_i von f auf $H(f, \lambda_i)$ gilt $(f_i - \lambda_i \text{Id})^{m_i} = 0$. Nach Korollar 2.5.9 gibt es eine Basis \mathcal{B}_i von $H(f, \lambda_i)$ so, dass $\text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f_i)$ in Jordan-Normalform ist. Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$. Nach dem Satz 2.3.7, ist \mathcal{B} eine Basis von V und es gilt

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1), \dots, \text{Mat}_{\mathcal{B}_r}(f_r)).$$

Es folgt, dass $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ in Jordan-Normalform ist.

Wir zeigen jetzt, dass die Jordan-Blöcke, bis auf Vertauschen, eindeutig bestimmt sind. Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_s$ eine Basis mit $\mathcal{B}_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i})$ so, dass $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ in Jordan-Normalform ist.

Sei $J(\zeta_i, n_i)$ ein Jordan-Block von $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Dann ist $v_{i,1}$ ein Eigenvektor für den Eigenwert ζ_i . Es folgt, dass die Skalare ζ_1, \dots, ζ_s die Eigenwerte von f sind und also eindeutig bestimmt. Außerdem, gilt $v_{i,j} \in E_j(f, \zeta_i) \setminus E_{j-1}(f, \zeta_i)$ für $j \in [1, n_i]$. Sei $e_j(\lambda) = \dim E_j(f, \lambda)$. Es folgt

$$d_j(\lambda) = e_j(\lambda) - e_{j-1}(\lambda) = \text{Anzahl der Elemente von } \{i \mid \zeta_i = \lambda \text{ und } n_i \leq j\}.$$

Sei $j_t(\lambda)$ die Anzahl von Jordan-Blöcken der Gestalt $J(\lambda, t)$ in alle Jordan-Blöcken $J(\zeta_1, n_1), \dots, J(\zeta_s, n_s)$. Es folgt

$$d_j(\lambda) = \sum_{t \geq j} j_t(\lambda).$$

Daraus folgt

$$j_t(\lambda) = d_t(\lambda) - d_{t-1}(\lambda) = e_t(\lambda) + e_{t-2}(\lambda) - 2e_{t-1}(\lambda).$$

Es folgt, dass $j_t(\lambda)$ nur von f abhängt und dass die Jordan-Blöcke, bis auf Vertauschen, eindeutig bestimmt sind. ■

Sei $e_t(f, \lambda) = \dim E_t(f, \lambda)$ und sei $j_t(f, \lambda)$ die Anzahl von Jordan-Blöcke der Größe t zum Eigenwert λ .

Korollar 2.6.2 Sei $f \in \text{End}(V)$ und J eine jordansche Normalform für f .

- (i) J hat $\dim E(f, \lambda) = e_1(f, \lambda)$ Jordan-Blöcke zum Eigenwert λ .
- (ii) J hat $j_t(f, \lambda) = 2e_t(f, \lambda) - e_{t+1}(f, \lambda) - e_{t-1}(f, \lambda)$ Jordan-Blöcke $J(\lambda, t)$.
- (iii) Es gilt

$$e_i(\lambda) = \sum_{t \geq 1} \min(i, t) j_t(f, \lambda).$$

Beweis. (i) folgt aus (iii) für $i = 1$.

Wir haben im Beweis des obigen Satzes gezeigt, dass

$$e_i(\lambda) - e_{i-1}(\lambda) = d_i(\lambda) = \sum_{t \geq i} j_t(\lambda).$$

Es folgt

$$j_t(f, \lambda) = d_t(\lambda) - d_{t+1}(\lambda) = e_t(f, \lambda) - e_{t-1}(f, \lambda) - (e_{t+1}(f, \lambda) - e_t(f, \lambda))$$

und (ii) folgt.

Es gilt auch

$$e_i(f, \lambda) = \sum_{k=1}^i d_k(\lambda) = \sum_{k=1}^i \sum_{t \geq k} j_t(\lambda) = \sum_{t \geq 1} j_t(\lambda) \sum_{k \leq i, t} 1 = \sum_{t \geq 1} \min(i, t) j_t(f, \lambda).$$

Definition 2.6.3 Das Spektrum $\Sigma(f)$ eines Endomorphismus f (bzw. $\Sigma(A)$ einer Matrix A) ist die Menge aller Eigenwerte von f (bzw. von A).

Korollar 2.6.4 Zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$, so dass χ_A und χ_B in Linearfaktoren zerfallen, sind genau dann ähnlich, wenn $\dim E_i(A, \lambda) = \dim E_i(B, \lambda)$ für alle $\lambda \in K$.

Beweis. Nach dem Satz sind A und B genau dann ähnlich, wenn A und B die selben Jordan-Blöcke haben. Nach dem obigen Korollar ist dies äquivalent zu $j_t(A, \lambda) = j_t(B, \lambda)$ für alle $\lambda \in K$ und alle $t \in \mathbb{N}$. Nach dem obigen Korollar gilt

$$j_t(f, \lambda) = 2 \dim E_t(f, \lambda) - (\dim E_{t-1}(f, \lambda) + \dim E_{t+1}(f, \lambda))$$

und (nach Induktion) gilt auch

$$\dim E_i(f, \lambda) = \sum_{t \geq 1} \min(i, t) j_t(f, \lambda).$$

Es folgt, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn $\dim E_i(A, \lambda) = \dim E_i(B, \lambda)$ für alle $\lambda \in K$. ■

Beispiel 2.6.5 Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen sind in Jordan-Normalform. Die Jordan-Blöcke für A sind

$$J(1, 1); J(1, 1); J(1, 2).$$

Die Jordan-Blöcke für B sind

$$J(1, 2); J(1, 2).$$

Es folgt, dass $A \not\sim B$ (dies ist eine Lösung für die Übung nach dem Beispiel 1.10.8). Wir können die Dimension aller erweiterten Eigenräume Bestimmen. Für $\lambda \neq 1$ gilt $\dim E_i(A, \lambda) = \dim E_i(B, \lambda) = 0$ für alle i . Es gilt

$$\dim E_0(A, 1) = 0, \dim E_1(A, 1) = 3 \quad \text{und} \quad \dim E_i(A, \lambda) = 4 \quad \text{für alle } i \geq 2.$$

$$\dim E_0(B, 1) = 0, \dim E_1(B, 1) = 2 \quad \text{und} \quad \dim E_i(B, \lambda) = 4 \quad \text{für alle } i \geq 2.$$

3 Symmetrische Gruppe

3.1 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 1$ und sei $I_n = [1, n]$.

Definition 3.1.1 Die symmetrische Gruppe S_n ist die Gruppe $(\text{Bij}(I_n), \circ)$, wobei $\text{Bij}(I_n)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen $I_n \rightarrow I_n$ ist und die Verknüpfung \circ die Komposition von Abbildungen ist. Ein Element von S_n heißt **Permutation**.

Notation 3.1.2 Ist $\sigma : I_n \rightarrow I_n$ ein Element in S_n , so schreiben wir

$$\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n)).$$

Beispiel 3.1.3 (i) Die Gruppe S_1 . Die Menge I_1 hat nur ein Element: 1. Es gibt also nur eine Abbildung $I_1 \rightarrow I_1$: die Identität. Diese ist eine Bijektive Abbildung. Es gilt

$$S_1 = \{\text{Id}_{I_1}\}.$$

(ii) Die Gruppe S_2 . Die Menge I_2 hat zwei Elemente: 1 und 2. Es gibt zwei Bijektionen $I_2 \rightarrow I_2$: die Identität und die Abbildung $\tau_{1,2}$ definiert durch $\tau_{1,2}(1) = 2$ und $\tau_{1,2}(2) = 1$. Es gilt

$$S_2 = \{\text{Id}_{I_2}, \tau_{1,2}\} = \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

(iii) Die Gruppe S_3 hat 6 Elemente:

$$S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Lemma 3.1.4 Die Gruppe S_3 ist nicht abelsch. □

Beweis. Es gilt $(2, 1, 3) \circ (2, 3, 1) = (1, 3, 2)$ und $(2, 3, 1) \circ (2, 1, 3) = (3, 2, 1)$. Es folgt $(2, 1, 3) \circ (2, 3, 1) \neq (2, 3, 1) \circ (2, 1, 3)$ und S_3 ist nicht abelsch. ■

Lemma 3.1.5 Die Abbildung $\iota_{n+1} : S_n \rightarrow S_{n+1}$ definiert durch

$$\iota_{n+1}(\sigma)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{für } i \in [1, n] \\ n+1 & \text{für } i = n+1, \end{cases}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Das Bild ist die Untergruppe

$$\iota_{n+1}(S_n) = \{\sigma \in S_{n+1} \mid \sigma(n+1) = n+1\} = S_{n+1}(n+1).$$

Beweis. Die Abbildung ist injektiv: Seien $\sigma, \tau \in S_n$ mit $\iota_{n+1}(\sigma) = \iota_{n+1}(\tau)$. Dann gilt für alle $i \in [1, n]$, dass $\sigma(i) = \iota_{n+1}(\sigma)(i) = \iota_{n+1}(\tau)(i) = \tau(i)$. Es folgt $\sigma = \tau$.

Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Es gilt

$$\iota_{n+1}(\sigma \circ \tau)(i) = \begin{cases} \sigma \circ \tau(i) & \text{für } i \in [1, n] \\ n+1 & \text{für } i = n+1, \end{cases}$$

Es gilt auch

$$\iota_{n+1}(\sigma) \circ \iota_{n+1}(\tau)(i) = \begin{cases} \iota_{n+1}(\sigma)(\tau(i)) & \text{für } i \in [1, n] \\ \iota_{n+1}(\sigma)(n+1) & \text{für } i = n+1, \end{cases} = \begin{cases} \sigma(\tau(i)) & \text{für } i \in [1, n] \\ n+1 & \text{für } i = n+1, \end{cases}$$

Daraus folgt $\iota_{n+1}(\sigma \circ \tau) = \iota_{n+1}(\sigma) \circ \iota_{n+1}(\tau)$ und ι_{n+1} ist ein Gruppenhomomorphismus.

Das Bild ist enthalten in $S_{n+1}(n)$. Sei $\sigma \in S_{n+1}(n+1)$. Dann gilt $\sigma(I_n) \subset I_n$ und $\sigma|_{I_n} \in S_n$. Es gilt $\iota_{n+1}(\sigma|_{I_n}) = \sigma$. ■

Korollar 3.1.6 Die Gruppe S_n mit $n \geq 3$ ist nicht abelsch.

Beweis. Nach Induktion über n . Für $n = 3$, gilt dies nach Lemma 3.1.4. Nach Induktionsannahme ist S_n nicht abelsch, es gibt also Elemente $\sigma, \tau \in S_n$ mit $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$. Wir betrachten $\iota_{n+1}(\sigma), \iota_{n+1}(\tau) \in S_{n+1}$. Da ι_{n+1} injektiv und ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt $\iota_{n+1}(\sigma) \circ \iota_{n+1}(\tau) \neq \iota_{n+1}(\tau) \circ \iota_{n+1}(\sigma)$. Es folgt S_{n+1} ist nicht abelsch. ■

3.2 Transpositionen

Definition 3.2.1 Seien $i, j \in [1, n]$ mit $i \neq j$. Die **Transposition** $\tau_{i,j}$ ist die Permutation definiert durch

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} j & \text{für } k = i \\ i & \text{für } k = j, \\ k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 3.2.2 Es gilt $\tau_{i,j}^2 = \text{Id}_{i,n}$ oder $\tau_{k,n}^{-1} = \tau_{k,n}$.

Lemma 3.2.3 Jedes $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt von $r \leq n - 1$ Transpositionen. □

Beweis. Nach Induktion über n . Klar für $n = 1$ und $n = 2$. Sei $\sigma \in S_{n+1}$ und sei $i = \sigma(n+1)$. Sei $\tau = \tau_{i,n+1} \circ \sigma$. Es gilt $\tau(n+1) = \tau_{i,n+1}(i) = n+1$. Es gilt $\tau \in S_n(n+1)$ und nach Induktionsvoraussetzung ist τ ein Produkt von $r \leq n - 1$ Transpositionen. Es gilt $\sigma = \tau_{i,n+1} \circ \tau$. Daraus folgt, dass σ ein Produkt von $r + 1 \leq n$ Transpositionen ist. ■

Lemma 3.2.4 Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$. Sei $\text{Int}_g : G \rightarrow G$ definiert durch $\text{Int}_g(h) = ghg^{-1}$ für alle $h \in G$. Dann ist Int_g ein Gruppenautomorphismus von G und es gilt $\text{Int}_g^{-1} = \text{Int}_{g^{-1}}$. □

Beweis. Es gilt $\text{Int}_g(h)\text{Int}_g(k) = ghg^{-1}gkg^{-1} = ghkg^{-1} = \text{Int}_g(hk)$. Daraus folgt, dass Int_g ein Gruppenhomomorphismus ist. Es gilt $\text{Int}_g(\text{Int}_{g^{-1}}(h)) = g(g^{-1}hg)g^{-1} = h$ und $\text{Int}_{g^{-1}}(\text{Int}_g(h)) = g^{-1}(ghg^{-1})g = h$. Daraus folgt, dass $\text{Int}_g^{-1} = \text{Int}_{g^{-1}}$ und Int_g ein Gruppenautomorphismus ist. ■

Korollar 3.2.5 Sei $k \in [1, n+1]$ und sei $\iota_k : S_n \rightarrow S_{n+1}$ definiert durch

$$\iota_k(\sigma) = \tau_{k,n+1} \circ \iota_{n+1}(\sigma) \circ \tau_{k,n+1}^{-1}.$$

Dann ist ι_k injektiv und ein Gruppenhomomorphismus. Das Bild von ι_k ist die Untergruppe

$$\iota_k(S_n) = \{\sigma \in S_{n+1} \mid \sigma(k) = k\} = S_{n+1}(k).$$

Beweis. Es gilt $\iota_k = \text{Int}_{\tau_{k,n+1}} \circ \iota_{n+1}$. Es folgt, dass ι_k injektiv und ein Gruppenhomomorphismus ist. Das Bild von ι_k ist

$$\iota_k(S_n) = \text{Int}_{\tau_{k,n+1}}(\iota_{n+1}(S_n)) = \text{Int}_{\tau_{k,n+1}}(\{\sigma \in S_{n+1} \mid \sigma(n+1) = n+1\}).$$

Wir zeigen $\text{Int}_{\tau_{k,n+1}}(\{\sigma \in S_{n+1} \mid \sigma(n+1) = n+1\}) = \{\sigma \in S_{n+1} \mid \sigma(k) = k\}$. Sei $\sigma \in S_{n+1}$ mit $\sigma(n+1) = n+1$. Es gilt $\text{Int}_{\tau_{k,n+1}}(\sigma)(k) = \tau_{k,n+1}\sigma\tau_{k,n+1}(k) = \tau_{k,n+1}\sigma(n+1) = \tau_{k,n+1}(n+1) = k$. Es folgt $\text{Int}_{\tau_{k,n+1}}(\sigma) \in S_{n+1}(k)$. Sei $\sigma \in S_{n+1}$ mit $\sigma(k) = k$. Es gilt $\sigma = \text{Int}_{\tau_{k,n+1}}\text{Int}_{\tau_{k,n+1}}^{-1}(\sigma)$. Sei $\tau = \text{Int}_{\tau_{k,n+1}}^{-1}(\sigma) = \text{Int}_{\tau_{k,n+1}}(\sigma)$. Es gilt $\tau(n+1) = \tau_{k,n+1}\sigma\tau_{k,n+1}(n+1) = \tau_{k,n+1}\sigma(k) = \tau_{k,n+1}(k) = n+1$. Es folgt $\tau = \text{Int}_{\tau_{k,n+1}}(\sigma) \in S_{n+1}(n+1)$ und $\sigma = \text{Int}_{\tau_{k,n+1}}(\tau)$. ■

Lemma 3.2.6 Sei $S_{n+1}^i = \{\sigma \in S_{n+1} \mid \sigma(n+1) = i\}$. Dann ist die Abbildung $S_{n+1}^i \rightarrow S_{n+1}(n+1)$ definiert durch $\sigma \mapsto \tau_{i,n+1} \circ \sigma$ eine Bijektion. □

Beweis. Wir zeigen, dass diese Abbildung wohl definiert ist, i.e. dass für $\sigma \in S_{n+1}^i$ gilt $\tau_{i,n+1} \circ \sigma \in S_{n+1}(n+1)$. Es gilt

$$\tau_{i,n+1}\sigma(n+1) = \tau_{i,n+1}(i) = n+1.$$

Umgekehrt betrachten wir die Abbildung $S_{n+1}(n+1) \rightarrow S_{n+1}^i$ definiert durch $\sigma \mapsto \tau_{i,n+1} \circ \sigma$. Diese Abbildung ist wohl definiert: für $\sigma \in S_{n+1}(n+1)$ gilt

$$\tau_{i,n+1} \circ \sigma(n+1) = \tau_{i,n+1}(n+1) = i.$$

Diese Abbildungen sind invers. Es folgt das Lemma. ■

Korollar 3.2.7 Die Gruppe S_n hat $n!$ Elemente.

Beweis. Nach Induktion über n . Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr. Angenommen S_n hat $n!$ Elemente. Die Gruppe S_{n+1} ist die disjunkte Vereinigung

$$S_{n+1} = \coprod_{i=1}^{n+1} S_{n+1}^i.$$

Nach dem Lemma, folgt, dass S_{n+1}^i genau so viele Elemente wie S_n hat. Nach Induktionsvoraussetzung hat S_{n+1} , für alle $i \in [1, n+1]$, genau $n!$ Elemente. Es folgt, dass S_{n+1} genau $n \cdot n! = (n+1)!$ Elemente hat. ■

3.3 Support

Definition 3.3.1 Der **Support** einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist die Teilmenge $\text{Supp}(\sigma) \subset I_n$ definiert durch

$$\text{Supp}(\sigma) = \{i \in I_n \mid \sigma(i) \neq i\}.$$

Lemma 3.3.2 Seien $\sigma, \tau \in S_n$ mit $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) = \emptyset$. Dann gilt $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. \square

Beweis. Übung. ■

3.4 Permutationsmatrix

Definition 3.4.1 Sei $\sigma \in S_n$. Der zugehörige **Permutationsendomorphismus** $f_\sigma \in \text{End}(k^n)$ und die zugehörige **Permutationsmatrix** P_σ sind definiert durch

$$f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \text{ und } P_\sigma = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\sigma),$$

wobei $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische basis des k^n ist.

Beispiel 3.4.2 Sei $\sigma = (2, 3, 1) \in S_3$. Dann ist

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.4.3 Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Dann gilt $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma \circ \tau}$ und $P_\sigma \circ P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$. □

Beweis. Die Gleichung $P_\sigma \circ P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$ folgt aus $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma \circ \tau}$. Da \mathcal{B} eine Basis ist, genügt es zu zeigen, dass $f_\sigma \circ f_\tau(e_i) = f_{\sigma \circ \tau}(e_i)$. Es gilt

$$f_\sigma \circ f_\tau(e_i) = f_\sigma(e_{\tau(i)}) = e_{\sigma(\tau(i))} = f_{\sigma \circ \tau}(e_i).$$

Korollar 3.4.4 Sei $\sigma \in S_n$.

- (i) Die Matrix P_σ ist invertierbar.
- (ii) Die Abbildung $S_n \rightarrow \text{GL}_n(K)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. (i) Es gilt $P_\sigma \circ P_{\sigma^{-1}} = P_{\text{Id}} = I_n = P_{\sigma^{-1}} \circ P_\sigma$. Daraus folgt, dass P_σ invertierbar ist mit $P_{\sigma^{-1}}$ als Inversem.

- (ii) Folgt aus dem Lemma. ■

Korollar 3.4.5 Die Abbildung $\varepsilon : S_n \rightarrow K \setminus \{0\}$ definiert durch $\sigma \mapsto \det(P_\sigma)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Wir wissen, dass $\det : \text{GL}_n(K) \rightarrow K \setminus \{0\}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Daraus folgt, dass die obige Komposition auch ein Gruppenhomomorphismus ist. ■

Lemma 3.4.6 Sei $\tau_{i,j}$ eine Transposition. Dann gilt $\varepsilon(\tau_{i,j}) = -1$. □

Beweis. Man sieht, dass $P_{\tau_{i,j}} = E_{i,j}^{(n)}$ wobei $E_{i,j}^{(n)}$ die zugehörige Elementarmatrix ist. Daraus folgt das Lemma. ■

Korollar 3.4.7 Die Abbildung $\varepsilon : S_n \rightarrow \{1, -1\}$ definiert durch $\varepsilon(\sigma) = \det(P_\sigma)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Es bleibt nur zu zeigen, dass $\det(P_\sigma) \in \{-1, 1\}$. Nach Lemma 3.2.3, gilt, dass σ ein Produkt $\tau_1 \cdots \tau_k$ von Transpositionen ist. Es folgt $\det(P_\sigma) = (-1)^k \in \{-1, 1\}$. ■

Definition 3.4.8 Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt **gerade** falls $\varepsilon(\sigma) = 1$ und **ungerade** falls $\varepsilon(\sigma) = -1$.

3.5 Elementare Transpositionen

Definition 3.5.1 Sei $i \in [1, n-1]$. Die **elementare Transposition** s_i ist die Transposition $\tau_{i,i+1}$.

Lemma 3.5.2 Seien $i, j \in [1, n]$ mit $i < j$. Es gilt

$$\tau_{i,j} = s_i \cdots s_{j-2} s_{j-1} s_{j-2} \cdots s_i.$$

Insbesondere ist $\tau_{i,j}$ ein Produkt von $2(j-i) - 1$ elementare Transpositionen. □

Beweis. Nach Induktion über $j-i$. Für $j-i = 1$ gilt $j = i+1$ und $\tau_{i,j} = s_i$. Angenommen $\tau_{i,j} = s_i \cdots s_{j-2} s_{j-1} s_{j-2} \cdots s_i$, wir zeigen $\tau_{i-1,j} = s_{i-1} \cdots s_{j-2} s_{j-1} s_{j-2} \cdots s_{i-1}$. Es gilt

$$s_{i-1} \tau_{i,j} s_{i-1} = \tau_{i-1,j}.$$

Das Lemma folgt nach Induktionsannahme. ■

Satz 3.5.3 Jedes $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt von $R \leq \frac{n(n-1)}{2}$ elementare Transpositionen. □

Beweis. Nach Induktion über n . Für $n = 1$ oder $n = 2$ ist die Behauptung wahr. Wir nehmen an, dass das Lemma für S_n wahr ist. Sei $\sigma \in S_{n+1}$ und sei $i = \sigma(n+1)$. Sei $\tau = s_n \cdots s_i \sigma$. Es gilt $\tau(n+1) = n+1$. Es folgt, dass $\tau \in S_n$ und nach Induktionsannahme gibt es $R \leq \frac{n(n-1)}{2}$ elementare Transpositionen s_{i_1}, \dots, s_{i_R} mit $\tau = s_{i_1} \cdots s_{i_R}$. Es folgt, dass σ ein Produkt von weniger als

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - i + 1 \leq \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

elementaren Transpositionen ist. ■

Lemma 3.5.4 Es gilt

(i) $s_i^2 = \text{Id}$, für alle $i \in [1, n-1]$.

(ii) $(s_i s_{i+1})^3 = \text{Id}$, für alle $i \in [1, n-2]$.

(iii) $(s_i s_j)^2 = \text{Id}$, für alle $i, j \in [1, n-1]$ mit $|i-j| > 1$. □

Beweis. Übung. ■

Satz 3.5.5 Sei $\sigma \in S_n$ und sei

$$I(\sigma) = \{(i, j) \in [1, n] \times [1, n] \mid i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

und $\ell(\sigma) = |I(\sigma)|$. Dann gilt $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. □

Beweis. Sei $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ für alle $i \in [1, n-1]$. Dann gilt $\sigma = \text{Id}$ (Übung).

Sei $\sigma \neq \text{Id}$. Es gibt also ein $i \in [1, n-1]$ mit $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Wir zeigen, dass

$$s_i(I(\sigma)) = I(\sigma s_i) \cup \{(i+1, i)\} \text{ und } \ell(\sigma) = \ell(\sigma s_i) + 1.$$

Sei $(k, l) \in I(\sigma)$. Wir zeigen $s_i(k, l) = (s_i(k), s_i(l)) \in I(\sigma s_i) \cup \{(i+1, i)\}$. Es gilt $k < l$ und $\sigma(k) > \sigma(l)$. Es gilt auch $s_i(k, l) = (s_i(k), s_i(l))$ und $\sigma s_i(s_i(k)) = \sigma(k) > \sigma(l) = \sigma s_i(s_i(l))$.

Für $(k, l) = (i, i+1)$ gilt $s_i(k, l) = s_i(i, i+1) = (i+1, i)$. Sei $(k, l) \neq (i, i+1)$. Für $\{k, l\} \cap \{i, i+1\} = \emptyset$ gilt $s_i(k, l) = (k, l)$, also $s_i(k) < s_i(l)$. Daraus folgt $(s_i(k), s_i(l)) \in I(\sigma s_i)$.

Sei $k = i$ und $l \neq i+1$. Da $l > k = i$, gilt $l > i+1$. Es gilt also $s_i(k) = i+1 < l = s_i(l)$. Daraus folgt $(s_i(k), s_i(l)) \in I(\sigma s_i)$.

Sei $l = i+1$ und $k \neq i$. Da $k < l = i+1$, gilt $k < i$. Es gilt also $s_i(k) = k < i = s_i(l)$. Daraus folgt $(s_i(k), s_i(l)) \in I(\sigma s_i)$.

Daraus folgt $s_i(I(\sigma)) \subset I(\sigma s_i) \cup \{(i+1, i)\}$. Umgekehrt gilt $(i+1, i) = s_i(i, i+1) \in s_i I(\sigma)$. Sei $(a, b) = s_i(k, l) \in I(\sigma s_i)$ wobei $k = s_i(a)$ und $b = s_i(b)$. Wir zeigen, dass $(k, l) \in I(\sigma)$. Es gilt $\sigma(k) = \sigma s_i(a) > \sigma s_i(b) = \sigma(l)$.

Falls $(a, b) = (i, i+1)$, gilt $\sigma(i+1) = \sigma s_i(a) > \sigma s_i(b) = \sigma(i)$. Widerspruch. Für $\{a, b\} \cap \{i, i+1\} = \emptyset$, gilt $(k, l) = s_i(a, b) = (a, b)$, also $k = a < l = b$ und $(k, l) \in I(\sigma)$.

Sei $a = i$ und $b \neq i+1$. Da $b > a = i$, gilt $b > i+1$. Es gilt also $k = s_i(a) = i+1 < b = s_i(b) = l$ und $(k, l) \in I(\sigma)$.

Sei $b = i+1$ und $a \neq i$. Da $a < b = i+1$, gilt $k = s_i(a) = a < i = s_i(b) = l$ und $(k, l) \in I(\sigma)$. Daraus folgt $s_i(I(\sigma)) \supset I(\sigma s_i) \cup \{(i+1, i)\}$ und $s_i(I(\sigma)) = I(\sigma s_i) \cup \{(i+1, i)\}$. Es folgt, dass $\ell(\sigma) = |I(\sigma)| = |s_i(I(\sigma))| = |I(\sigma s_i)| + 1 = \ell(\sigma s_i) + 1$.

Wir zeigen durch Induktion über $\ell(\sigma)$, dass $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. Für $\ell(\sigma) = 0$, gilt $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ für alle i und $\sigma = \text{Id}$. Es folgt $\varepsilon(\sigma) = 1 = (-1)^{\ell(\sigma)}$.

Induktionsannahme: für $\ell(\sigma) = r \geq 0$ gilt $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. Sei σ mit $\ell(\sigma) = r+1 > 0$. Es gibt ein $i \in [1, n]$ mit $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Es folgt, dass $\ell(\sigma s_i) = \ell(\sigma) - 1 = r$. Nach Induktionsannahme gilt $\varepsilon(\sigma s_i) = (-1)^{\ell(\sigma s_i)} = (-1)^{\ell(\sigma)-1}$. Es folgt $\varepsilon(\sigma)(-1) = (-1)^{\ell(\sigma)-1}$ und $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. ■

3.6 Determinante

Satz 3.6.1 Sei $A \in M_n(K)$ eine Matrix. Dann gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}.$$

Beweis. Die zweite Formel folgt aus der Ersten und $\det(A^T) = \det(A)$.

Für die erste Formel zeigen wir, dass die Abbildung

$$A \mapsto D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

linear in den Zeilen ist, dass $D(A) = 0$ für $\text{Rg}(A) < n$ und, dass $D(I_n) = 1$.

Wir schreiben $I_n = (\delta_{i,j})$. Es gilt

$$D(I_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \delta_{i, \sigma(i)}.$$

Es gilt $\delta_{i, \sigma(i)} \neq 0$ genau dann, wenn $i = \sigma(i)$. Daraus folgt, dass gilt $\prod_{i=1}^n \delta_{i, \sigma(i)} \neq 0$ genau dann, wenn $i = \sigma(i)$ für alle $i \in [1, n]$ i.e. $\prod_{i=1}^n \delta_{i, \sigma(i)} \neq 0$ genau dann, wenn $\sigma = \text{Id}$. Daraus folgt

$$D(I_n) = 1.$$

Sei $A \in M_n(K)$ und seien $Z_1, \dots, Z_k, \dots, Z_n$ die Zeilen von A . Sei B mit Zeilen $Z_1, \dots, Z_k + Z'_k, \dots, Z_n$ und C mit Zeilen $Z_1, \dots, Z'_k, \dots, Z_n$. Wir schreiben $Z_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ und $Z'_k = (a'_{k,1}, \dots, a'_{k,n})$. Es gilt also $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ und $C = (c_{i,j})$ wobei

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{für } i \neq k \\ a_{k,j} + a'_{k,j} & \text{für } i = k. \end{cases} \quad \text{und } c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{für } i \neq k \\ a'_{k,j} & \text{für } i = k. \end{cases}$$

Es gilt

$$\prod_{i=1}^n b_{i, \sigma(i)} = \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} + a'_{k, \sigma(k)} \prod_{i=1, i \neq k}^n a_{i, \sigma(i)} = \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} + \prod_{i=1}^n c_{i, \sigma(i)}.$$

Daraus folgt $D(B) = D(A) + D(C)$ und D ist linear in den Zeilen.

Sei A mit $\text{Rg}(A) < n$. Es gibt eine Zeile Z_k mit $Z_k = \sum_{t=1, t \neq k}^n x_t Z_t$. Sei A_t die Matrix mit Zeilen $(Z_1, \dots, Z_{k-1}, Z_t, Z_{k+1}, \dots, Z_n)$. Nach Linearität gilt

$$D(A) = \sum_{t=1, t \neq k} x_t D(A_t).$$

Es genügt zu zeigen, dass $D(A_t) = 0$. Wir schreiben $A_t = (b_{i,j})$. Es gilt

$$D(A_t) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{i,\sigma(i)}.$$

Da die t -te und die k -te Zeilen von A_t gleich sind, gilt $b_{t,j} = b_{k,j}$ für alle j . Sei $\tau = \tau_{j,k}$, es gilt

$$\prod_{i=1}^n b_{i,\sigma\tau(i)} = b_{t,\sigma(k)} b_{k,\sigma(t)} \prod_{i \neq t,k}^n b_{i,\sigma(i)} = b_{k,\sigma(k)} b_{t,\sigma(t)} \prod_{i \neq t,k}^n b_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^n b_{i,\sigma(i)}.$$

Es folgt

$$D(A_t) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{i,\sigma\tau(i)}.$$

Wir setzen $\theta = \sigma\tau$ i.e. $\sigma = \theta\tau^{-1} = \theta\tau$. Es gilt

$$D(A_t) = \sum_{\theta \in S_n} \varepsilon(\theta\tau) \prod_{i=1}^n b_{i,\theta(i)} = - \sum_{\theta \in S_n} \varepsilon(\theta) \prod_{i=1}^n b_{i,\theta(i)} = -D(A_t).$$

Es folgt $D(A_t) = 0$. ■

4 Tensorprodukt

4.1 Bilineare Abbildungen und Tensorprodukt

Seien U, V und W drei K -Vektorräume.

Definition 4.1.1 Eine Abbildung $f : U \times V \rightarrow W$ heißt **bilinear** falls für alle $x, y \in K$ für alle $u, u' \in U$ und alle $v, v' \in V$ gilt:

- $f(xu + yu', v) = xf(u, v) + yf(u', v)$
- $f(u, xv + yv') = xf(u, v) + yf(u, v')$.

Lemma 4.1.2 Sei $f : U \times V \rightarrow W$ eine bilineare Abbildung und sei $g : W \rightarrow E$ eine lineare Abbildung. Dann ist $g \circ f$ eine bilineare Abbildung. \square

Beweis. Übung. \blacksquare

Wir versuchen bilineare Abbildung durch lineare Abbildungen zu ersetzen.

Definition 4.1.3 Ein K -Vektorraum E heißt **Tensorprodukt** von U und V falls gilt:

1. Es gibt eine bilineare Abbildung $\pi_E : U \times V \rightarrow E$ und
2. für jede bilineare Abbildung $f : U \times V \rightarrow W$, es gibt genau eine lineare Abbildung $L_f^E : E \rightarrow W$ mit $L_f^E \circ \pi_E = f$.

Bemerkung 4.1.4 Es ist noch nicht klar, dass es ein Tensorprodukt gibt. Wir zeigen zuerst, dass es höchstens ein Tensorprodukt gibt.

Satz 4.1.5 Seien E und F zwei Tensorprodukte für U und V . Dann sind E und F isomorph. \square

Beweis. Nach dem ersten Punkt der Definition gibt es bilineare Abbildungen $\pi_E : U \times V \rightarrow E$ und $\pi_F : U \times V \rightarrow F$. Nach dem zweiten Punkt gibt es eindeutig bestimmte lineare Abbildungen $L_{\pi_F}^E : E \rightarrow F$ und $L_{\pi_E}^F : F \rightarrow E$ mit $\pi_F = L_{\pi_F}^E \circ \pi_E$ und $\pi_E = L_{\pi_E}^F \circ \pi_F$. Wir zeigen, dass $L_{\pi_E}^F$ und $L_{\pi_F}^E$ isomorph sind.

Wir haben eine bilineare Abbildung $f = L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E \circ \pi_E : U \times V \rightarrow E$ und es gilt $f = L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E \circ \pi_E = L_{\pi_E}^F \circ \pi_F = \pi_E$. Nach dem zweiten Punkt gibt es genau

eine Abbildung L_f^E mit $L_f^E \circ \pi_E = f = \pi_E$. Aber wir haben $\text{Id}_E \circ \pi_E = \pi_E$ also $L_f^E = \text{Id}_E$. Wir haben auch $f = L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E \circ \pi_E$ also gilt $L_f^E = L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E$ und es folgt $L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E = \text{Id}_E$.

Der selbe Beweis, mit E und F vertauscht, zeigt $L_{\pi_F}^E \circ L_{\pi_E}^F = \text{Id}_F$. Es folgt, dass $L_{\pi_E}^F$ und $L_{\pi_F}^E$ Inverse sind. ■

Wir zeigen jetzt, dass es ein Tensorprodukt gibt. Wir betrachten

$$K^{(U \times V)} = \{\varphi : U \times V \rightarrow K \mid \varphi(u, v) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } (u, v) \in U \times V\}.$$

Für $(u, v) \in U \times V$ gibt es eine Abbildung $\varphi_{(u,v)}$ so, dass

$$\varphi_{(u,v)}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{für } (a, b) = (u, v) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 4.1.6 Das System $(\varphi_{(u,v)})_{(u,v) \in U \times V}$ ist eine Basis von $K^{(U \times V)}$. In anderen Worten ist das System $(\varphi_{(u,v)})_{(u,v) \in U \times V}$ linear unabhängig und für $\varphi \in K^{(U \times V)}$ gilt

$$\varphi = \sum_{(u,v) \in U \times V} \varphi(u, v) \varphi_{(u,v)}.$$

In dieser Summe tauchen nur endlich viele $\varphi(u, v) \varphi_{(u,v)}$ auf, die nicht null sind. □

Beweis. Übung. ■

Die Abbildungen

$$\varphi(\lambda u + \mu u', v) - \lambda \varphi(u, v) - \mu \varphi(u', v) \text{ und } \varphi(u, \lambda v + \mu v') - \lambda \varphi(u, v) - \mu \varphi(u, v')$$

sind in $K^{(U \times V)}$ enthalten. Sei

$$L = \langle \varphi(\lambda u + \mu u', v) - \lambda \varphi(u, v) - \mu \varphi(u', v), \varphi(u, \lambda v + \mu v') - \lambda \varphi(u, v) - \mu \varphi(u, v') \rangle.$$

Definition 4.1.7 Sei $U \otimes_K V = K^{(U \times V)} / L$ und $p : U \times V \rightarrow U \otimes_K V$ die kanonische Projektion. Für $(u, v) \in U \times V$, schreiben wir $u \otimes v = p(\varphi_{(u,v)})$ für das Bild von $\varphi_{(u,v)}$ in $U \otimes_K V$.

Lemma 4.1.8 Es gilt

$$1. (\lambda u + \mu u') \otimes v = \lambda(u \otimes v) + \mu(u' \otimes v).$$

$$2. u \otimes (\lambda v + \mu v') = \lambda(u \otimes v) + \mu(u \otimes v').$$

□

Beweis. Übung. ■

Lemma 4.1.9 Das System $(u \otimes v)_{(u,v) \in U \times V}$ ist ein EZS von $U \otimes_K V$. □

Beweis. Es ist das Bild der Basis $(\varphi_{(u,v)})_{(u,v) \in U \times V}$. ■

Satz 4.1.10 $(U \otimes_K V, \pi)$ ist ein Tensorprodukt von U und V . □

Beweis. Sei $\pi : U \times V \rightarrow U \otimes_K V$ die Abbildung, die durch $\pi(u, v) = u \otimes v$ definiert wird. Nach dem Lemma, ist π bilinear.

Sei jetzt $f : U \times V \rightarrow W$ eine bilineare Abbildung. wir zeigen, dass es eine lineare Abbildung $L_f : U \otimes_K V \rightarrow W$ gibt mit $f = L_f \circ \pi$.

Wir definieren zuerst eine lineare Abbildung $g : K^{(U \times V)} \rightarrow W$. Da $(\varphi_{(u,v)})_{(u,v) \in U \times V}$ eine Basis ist, genügt es $g(\varphi_{(u,v)})$ zu definieren. Wir setzen $g(\varphi_{(u,v)}) = f(u, v)$. Wir zeigen, dass $g|_L = 0$. Da $(\varphi_{(\lambda u + \mu u', v)} - \lambda \varphi_{(u,v)} - \mu \varphi_{(u', v)}, \varphi_{(u, \lambda v + \mu v')} - \lambda \varphi_{(u,v)} - \mu \varphi_{(u, v')})$ ein EZS von L ist, genügt es zu zeigen, dass

$$g(\varphi_{(\lambda u + \mu u', v)} - \lambda \varphi_{(u,v)} - \mu \varphi_{(u', v)}) = g(\varphi_{(u, \lambda v + \mu v')} - \lambda \varphi_{(u,v)} - \mu \varphi_{(u, v')}) = 0.$$

Da g linear und f bilinear ist, gilt

$$\begin{aligned} g(\varphi_{(\lambda u + \mu u', v)} - \lambda \varphi_{(u,v)} - \mu \varphi_{(u', v)}) &= g(\varphi_{(\lambda u + \mu u', v)}) - \lambda g(\varphi_{(u,v)}) - \mu g(\varphi_{(u', v)}) \\ &= f(\lambda u + \mu u', v) - \lambda f(u, v) - \mu f(u', v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analog zeigen wir, dass $g(\varphi_{(u, \lambda v + \mu v')} - \lambda \varphi_{(u,v)} - \mu \varphi_{(u, v')}) = 0$.

Nach dem Homomorphiesatz (Satz 7.4.8 Skript LAI), gibt es eine lineare Abbildung $L_f : U \otimes_K V \rightarrow W$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^{(U \times V)} & \xrightarrow{g} & W \\ p \downarrow & \nearrow L_f & \\ K^{(U \times V)} / L = U \otimes_K V & & \end{array}$$

kommutiert. Wir zeigen, dass $L_f \circ \pi = f$. Es gilt

$$L_f \circ \pi(u, v) = L_f(u \otimes v) = L_f(p(\varphi_{(u,v)})) = g(\varphi_{(u,v)}) = f(u, v).$$

Es folgt, dass $U \otimes_K V$ ein Tensorprodukt von U und V ist. ■

4.2 Basen

Lemma 4.2.1 Sei (u_1, \dots, u_r) ein System in U und sei (v_1, \dots, v_r) ein linear unabhängiges System in V . Falls

$$\sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i = 0,$$

so gilt $u_1 = \dots = u_r = 0$. □

Beweis. Sei $\varphi \in U^\vee$ und sei $f_\varphi : U \times V \rightarrow V$ definiert durch $f_\varphi(u, v) = \varphi(u)v$. Dann ist f_φ bilinear und es gibt ein lineares L_{f_φ} mit $L_{f_\varphi}(u \otimes v) = \varphi(u)v$. Es gilt

$$0 = L_{f_\varphi} \left(\sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i \right) = \sum_{i=1}^r \varphi(u_i)v_i.$$

Da (v_1, \dots, v_r) linear unabhängig ist, gilt $\varphi(u_i) = 0$ für alle $i \in [1, r]$. Da dies für alle $\varphi \in U^\vee$ wahr ist, gilt $u_i = 0$ für alle $i \in [1, r]$. ■

Lemma 4.2.2 Seien (u_1, \dots, u_n) und (v_1, \dots, v_m) EZS von U und V . Dann ist $(u_i \otimes v_j)_{i \in [1, n], j \in [1, m]}$ ein EZS von $U \otimes_K V$. □

Beweis. Da $(u \otimes v)_{u \in U, v \in V}$ ein EZS von $U \otimes_K V$ ist, genügt es zu zeigen, dass $u \otimes v \in \langle u_i \otimes v_j \mid i \in [1, n], j \in [1, m] \rangle$ für alle $u \in U$ und $v \in V$. Es gibt Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und μ_1, \dots, μ_m mit

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \text{ und } v = \sum_{j=1}^m \mu_j v_j.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} u \otimes v &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right) \otimes v \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (u_i \otimes v) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(u_i \otimes \sum_{j=1}^m \mu_j v_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m \mu_j u_i \otimes v_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j u_i \otimes v_j. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $(u_i \otimes v_j)_{i \in [1, n], j \in [1, m]}$ ein EZS von $U \otimes_K V$ ist. ■

Satz 4.2.3 Seien (u_1, \dots, u_n) und (v_1, \dots, v_m) Basen von U und V . Dann ist $(u_i \otimes v_j)_{i \in [1, n], j \in [1, m]}$ eine Basis von $U \otimes_K V$. □

Beweis. Aus Lemma 4.2.2 folgt, dass $(u_i \otimes v_j)_{i \in [1, n], j \in [1, m]}$ ein EZS ist. Seien $\lambda_{i,j}$ Skalare mit

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j} u_i \otimes v_j = 0.$$

Es gilt

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} u_i \right) \otimes v_j = 0.$$

Aus Lemma 4.2.1 folgt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} u_i = 0$$

für alle $j \in [1, m]$. Es folgt $\lambda_{i,j} = 0$ für alle $i \in [1, n]$ und $j \in [1, m]$. ■

Bemerkung 4.2.4 Mit dem selben Beweis gilt der obige Satz für unendlich-dimensionale Vektorräume.

Korollar 4.2.5 Seien U und V endlich-dimensionale Vektorräume. Dann gilt

$$\dim_K(U \otimes_K V) = \dim_K U \dim_K V.$$

4.3 Erste Eigenschaften

Satz 4.3.1 Es gibt genau einen Isomorphismus $\Phi : U \otimes_K V \rightarrow V \otimes_K U$ mit $\Phi(u \otimes v) = v \otimes u$. \square

Beweis. Seien (u_1, \dots, u_n) und (v_1, \dots, v_m) Basen von U und V . Dann ist $(u_i \otimes v_j)_{i \in [1,n], j \in [1,m]}$ eine Basis von $U \otimes_K V$ und $(v_j \otimes u_i)_{i \in [1,n], j \in [1,m]}$ eine Basis von $V \otimes_K U$. Wir setzen

$$\Phi(u_i \otimes v_j) = v_j \otimes u_i \text{ und } \Phi'(v_j \otimes u_i) = u_i \otimes v_j.$$

Dann sind Φ und Φ' Isomorphismen mit $\Phi^{-1} = \Phi'$. Man zeigt (Übung), dass $\Phi(u \otimes v) = v \otimes u$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.

Φ ist eindeutig bestimmt weil $u \otimes v$ ein EZS von $U \otimes_K V$ ist. \blacksquare

Satz 4.3.2 Es gibt genau einen Isomorphismus $\Psi : U \otimes_K (V \otimes_K W) \rightarrow (U \otimes_K V) \otimes_K W$ mit $\Psi(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w$. \square

Beweis. Seien (u_1, \dots, u_n) , (v_1, \dots, v_m) und (w_1, \dots, w_r) Basen von U , V und W . Dann ist $((u_i \otimes v_j) \otimes w_k)_{i \in [1,n], j \in [1,m], k \in [1,r]}$ eine Basis von $(U \otimes_K V) \otimes_K W$ und $(u_i \otimes (v_j \otimes w_k))_{i \in [1,n], j \in [1,m], k \in [1,r]}$ eine Basis von $U \otimes_K (V \otimes_K W)$.

Sei $\Psi : (U \otimes_K V) \otimes_K W \rightarrow U \otimes_K (V \otimes_K W)$ und $\Psi' : U \otimes_K (V \otimes_K W) \rightarrow (U \otimes_K V) \otimes_K W$ die lineare Abbildungen definiert durch $\Psi((u_i \otimes v_j) \otimes w_k) = u_i \otimes (v_j \otimes w_k)$ und sei $\Psi'((u_i \otimes (v_j \otimes w_k))) = (u_i \otimes v_j) \otimes w_k$. Dann sind Ψ und Ψ' Isomorphismen mit $\Psi^{-1} = \Psi'$. Man zeigt (Übung), dass $\Psi((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w)$ für alle $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$.

Ψ ist eindeutig bestimmt weil $(u \otimes v) \otimes w$ ein EZS von $(U \otimes_K V) \otimes_K W$ ist. \blacksquare

Bemerkung 4.3.3 Wir werden die Klammern in Multitensorprodukten nicht mehr schreiben. Wir schreiben z.B. $U_1 \otimes_K \dots \otimes_K U_n$.

Definition 4.3.4 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $V^{\otimes n}$ für $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ Mal}}$.

Satz 4.3.5 Es gilt $V \otimes_K K \simeq V$. \square

Beweis. Sei $f : V \times K \rightarrow V$ definiert durch $f(v, \lambda) = \lambda v$. Dann ist f bilinear und es gibt $L_f : V \otimes_K K \rightarrow V$ linear mit $L_f(v \otimes \lambda) = \lambda v$. Sei $\varphi : V \rightarrow V \otimes_K V$ die Abbildung definiert durch $\varphi(v) = v \otimes 1$. Diese Abbildung ist linear und es gilt $L_f \circ \varphi(v) = L_f(v \otimes 1) = v$, also $L_f \circ \varphi = \text{Id}_V$. Es gilt auch $\varphi \circ L_f(v \otimes \lambda) = \varphi(\lambda v) = \lambda v \otimes 1 = v \otimes \lambda$, also $\varphi \circ L_f = \text{Id}_{V \otimes_K K}$. \blacksquare

4.4 Bilineare Abbildungen

Definition 4.4.1 Sei $\text{Bil}(U \times V, W)$ der Untervektorraum von $W^{U \times V}$ aller bilinearen Abbildungen.

Satz 4.4.2 Es gibt einen Isomorphismus $\text{Bil}(U \times V, W) \simeq \text{Hom}_K(U \otimes_K V, W)$. \square

Beweis. Sei $\Phi : \text{Bil}(U \times V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(U \otimes_K V, W)$ definiert durch $\Phi(f) = L_f$. Die Abbildung Φ ist linear (Übung). Sei $\Phi' : \text{Hom}_K(U \otimes_K V, W) \rightarrow \text{Bil}(U \times V, W)$ definiert durch $\Phi'(L) = L \circ \pi$, wobei $\pi : U \times V \rightarrow U \otimes_K V$ die kanonische bilineare Abbildung ist. Es gilt $\Phi \circ \Phi'(L) = \Phi(L \circ \pi) = L$ und $\Phi' \circ \Phi(f) = L_f \circ \pi = f$. \blacksquare

4.5 Tensorprodukt von Homomorphismen

Seien U, V, W und E vier K -Vektorräume und seien $f : U \rightarrow W$ und $g : V \rightarrow E$ zwei Homomorphismen.

Lemma 4.5.1 Die Abbildung $\Phi : U \times V \rightarrow W \otimes_K E$ definiert durch $\Phi(u, v) = f(u) \otimes g(v)$ ist bilinear. Es gibt also genau eine lineare Abbildung $f \otimes g : U \otimes_K V \rightarrow W \otimes_K E$ mit $(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$. \square

Beweis. Übung. \blacksquare

Definition 4.5.2 Die Abbildung $f \otimes g$ heißt **die Tensorproduktabbildung**.

Satz 4.5.3 Sei $f \in \text{Hom}_K(U, W)$ und $g \in \text{Hom}_K(V, E)$.

(i) Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f \otimes g$ injektiv.

(ii) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $f \otimes g$ surjektiv.

(iii) Wenn f und g bijektiv sind, dann ist $f \otimes g$ bijektiv. \square

Beweis. (iii) folgt aus (i) und (ii).

(i) Seien $\mathcal{B} = (u_i)$ und $\mathcal{B}' = (v_j)$ Basen von U und V . Dann sind $f(\mathcal{B}) = (f(u_i))$ und $g(\mathcal{B}') = (g(v_j))$ lineare unabhängige Systeme. Da $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}' = (u_i \otimes v_j)$ eine Basis von $U \otimes_K V$ ist, genügt es zu zeigen, dass $(f \otimes g)(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}')$ ein linear unabhängiges System ist. Seien $\lambda_{i,j}$ Skalare mit

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} f(u_i) \otimes g(v_j) = 0.$$

Da $(g(v_j))$ ein lineares unabhängiges System ist gilt (nach Lemma 4.2.1)

$$\sum_i \lambda_{i,j} f(u_i) = 0 \text{ für alle } j.$$

Da $(f(u_i))$ ein linear unabhängiges System ist gilt $\lambda_{i,j}$ für alle i und j . Es folgt, dass $(f \otimes g)(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}')$ ein linear unabhängiges System ist.

(ii) Seien $\mathcal{B} = (u_i)$ und $\mathcal{B}' = (v_j)$ Basen von U und V . Da $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}' = (u_i \otimes v_j)$ eine Basis von $U \otimes_K V$ ist, genügt es zu zeigen, dass $(f \otimes g)(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}')$ ein EZS ist. Da f und g surjektiv sind, sind $f(\mathcal{B}) = (f(u_i))$ und $g(\mathcal{B}') = (g(v_j))$ EZS. Nach Lemma 4.2.2 gilt, dass $(f \otimes g)(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}')$ ein EZS ist. ■

Satz 4.5.4 Seien U, V, W, E vier K -Vektorräume. Es gibt eine injektive lineare Abbildung $\text{Hom}_K(U, W) \otimes_K \text{Hom}_K(V, E) \rightarrow \text{Hom}_K(U \otimes_K V, W \otimes_K E)$. Für U, V, W, E endlich-dimensional ist diese Abbildung ein Isomorphismus. □

Beweis. Sei $\Phi : \text{Hom}_K(U, W) \times \text{Hom}_K(V, E) \rightarrow \text{Hom}_K(U \otimes_K V, W \otimes_K E)$ definiert durch $\Phi(f, g) = f \otimes g$. Dann ist Φ bilinear und es gibt eine lineare Abbildung

$$L_\Phi : \text{Hom}_K(U, W) \otimes_K \text{Hom}_K(V, E) \rightarrow \text{Hom}_K(U \otimes_K V, W \otimes_K E)$$

mit $L_\Phi(f \otimes g) = f \otimes g$. Wir zeigen, dass L_Φ injektiv ist. Seien (u_i) , (v_j) , (w_k) und (e_l) Basen von U, V, W, E und sei $(f_{i,k})$ und $(g_{j,l})$ die angehörige Basen von $\text{Hom}_K(U, W)$ und $\text{Hom}_K(V, E)$ (mit $f_{i,k}(u_a) = \delta_{a,i} w_k$ und $g_{j,l}(v_b) = \delta_{b,j} e_l$). Dann ist $(f_{i,k} \otimes g_{j,l})$ eine Basis von $\text{Hom}_K(U, W) \otimes_K \text{Hom}_K(V, E)$. Sei $\sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j,k,l} f_{i,k} \otimes g_{j,l} \in \text{Ker}(L_\Phi)$. Es gilt

$$0 = \sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j,k,l} f_{i,k} \otimes g_{j,l}(u_a \otimes v_b) = \sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j,k,l} \delta_{a,i} w_k \otimes \delta_{b,j} e_l.$$

Da $(w_k \otimes e_l)$ eine Basis ist gilt $\lambda_{a,b,k,l} = 0$ für alle a, b, k, l . Daraus folgt, dass L_Φ injektiv ist.

Für endlich-dimensionale Vektorräume gilt

$$\begin{aligned} \dim(\text{Hom}_K(U, W) \otimes_K \text{Hom}_K(V, E)) &= \dim(\text{Hom}_K(U, W)) \dim(\text{Hom}_K(V, E)) \\ &= \dim U \dim V \dim W \dim E \\ &= \dim(\text{Hom}_K(U \otimes_K V) \dim(W \otimes_K E)) \\ &= \dim \text{Hom}_K(U \otimes_K V, W \otimes_K E). \end{aligned}$$

Es folgt, dass L_Φ ein Isomorphismus ist. ■

Korollar 4.5.5 Es gilt $(U \otimes_K V)^\vee \simeq U^\vee \otimes V^\vee$.

Beweis. Folgt aus dem obigen Satz für $W = K = E$. ■

4.6 Körper Erweiterung

Definition 4.6.1 Sei L ein Körper mit $K \subset L$. Dann heißt L eine **Körpererweiterung von K** . Der Körper L ist ein K -Vektorraum.

Satz 4.6.2 Sei V ein K -Vektorraum, dann ist $V \otimes_K L$ ein L -Vektorraum. Für $\dim_K V = n$ gilt $\dim_L V \otimes_K L = n$. \square

Beweis. Wir wissen, dass $(V \otimes_K L, +, \cdot)$ ein K -Vektorraum ist. Es folgt, dass $(V \otimes_K L, +)$ eine kommutative Gruppe ist. Für $z \in L$ definieren wir $f_z : V \times L \rightarrow V \otimes_K L$ durch $f_z(v, z') = v \otimes zz'$. Die Abbildung f_z ist K -bilinear. Daraus folgt, dass es eine K -lineare Abbildung $z \cdot_L : V \otimes_K L \rightarrow V \otimes_K L$ mit $z \cdot_L (v \otimes z') = v \otimes zz'$.

Man zeigt, dass $(V \otimes_K L, +, \cdot_L)$ ein L -Vektorraum ist (Übung). \blacksquare

Satz 4.6.3 Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V als K -Vektorraum. Dann ist $(v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1)$ eine Basis von $V \otimes_K L$ als L -Vektorraum.

Insbesondere gilt $\dim_L V \otimes_K L = \dim_K V$. \square

Beweis. Sei (l_0, l_1, \dots, l_r) eine Basis von L als K -Vektorraum mit $l_0 = 1$. Dann ist $(v_i \otimes l_j)$ eine Basis von $V \otimes_K L$ als K -Vektorraum.

Wir zeigen, dass $(v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1)$ ein EZS und linear unabhängig ist (als System von L -Vektorräume). Es gilt $v_i \otimes l_j = l_j(v_j \otimes 1)$ also gilt

$$v_i \otimes l_j \in \langle v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1 \rangle_L.$$

Daraus folgt, dass $(v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1)$ ein EZS ist.

Seien $\lambda_i \in L$ Skalare mit $\sum_i \lambda_i v_i \otimes 1 = 0$. Es gibt Skalare $\mu_{i,j} \in K$ mit

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^r \mu_{i,j} l_j.$$

Daraus folgt

$$\sum_i \sum_j \mu_{i,j} v_i \otimes l_j = 0.$$

Da $(v_i \otimes l_j)$ eine Basis als K -Vektorraum ist gilt $\mu_{i,j} = 0$ für alle i, j . Daraus folgt $\lambda_i = 0$ für alle i und $(v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1)$ ist linear unabhängig. \blacksquare

Beispiel 4.6.4 (1) Es gilt $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$.

(II) Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und sei $f \in \text{End}(V)$. Dann ist $f \otimes \text{Id} : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung.

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Dann ist $\mathcal{B} \otimes 1 = (v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1)$ eine Basis von $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ als \mathbb{C} -Vektorraum. Sei $(a_{i,j}) = A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ die Matrix von f in \mathcal{B} .

Dann gilt

$$(f \otimes \text{Id})(v_j \otimes 1) = f(v_j) \otimes 1 = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i \otimes 1.$$

Daraus folgt $B = \text{Mat}_{\mathcal{B} \otimes 1}(f \otimes 1) = A$. Insbesondere gilt

$$\chi_{f \otimes \text{Id}} = \chi_f \text{ und } \text{Rg}(f \otimes 1) = \text{Rg}(f).$$

4.7 Multilineare Abbildungen

Seien U_1, \dots, U_n und W Vektorräume.

Definition 4.7.1 Eine Abbildung $f : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow W$ heißt **n -linear oder multilinear** falls für alle $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ und für alle $i \in [1, n]$ gilt: die Abbildung

$$f(u_1, \dots, u_{i-1}, \bullet, u_{i+1}, \dots, u_n) : U_i \rightarrow W$$

definiert durch $f(u_1, \dots, u_{i-1}, \bullet, u_{i+1}, \dots, u_n)(u_i) = f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$ ist linear.

Definition 4.7.2 Ein Vektorraum E heißt **Tensorprodukt** von U_1, \dots, U_n falls gilt:

1. Es gibt eine n -lineare Abbildung $\pi_E : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow E$ und
2. für jede n -lineare Abbildung $f : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow W$, es gibt genau eine lineare Abbildung $L_f^E : E \rightarrow W$ mit $L_f^E \circ \pi_E = f$.

Satz 4.7.3 Seien E und F zwei Tensorprodukte für U und V . Dann sind E und F isomorph. \square

Beweis. Nach dem ersten Punkt der Definition, gibt es n -lineare Abbildungen $\pi_E : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow E$ und $\pi_F : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow F$. Nach dem zweiten Punkt gibt es eindeutig bestimmte lineare Abbildungen $L_{\pi_F}^E : E \rightarrow F$ und $L_{\pi_E}^F : F \rightarrow E$ mit $\pi_F = L_{\pi_F}^E \circ \pi_E$ und $\pi_E = L_{\pi_E}^F \circ \pi_F$. Wir zeigen, dass $L_{\pi_E}^F$ und $L_{\pi_F}^E$ isomorph sind.

Wir haben eine n -lineare Abbildung $f = L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E \circ \pi_E : U \times V \rightarrow E$ und es gilt $f = L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E \circ \pi_E = L_{\pi_E}^F \circ \pi_F = \pi_E$. Nach dem zweiten Punkt gibt es genau eine Abbildung L_f^E mit $L_f^E \circ \pi_E = f = \pi_E$. Aber wir haben $\text{Id}_E \circ \pi_E = \pi_E$ also $L_f^E = \text{Id}_E$. Wir haben auch $f = L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E \circ \pi_E$ also gilt $L_f^E = L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E$ und es folgt $L_{\pi_E}^F \circ L_{\pi_F}^E = \text{Id}_E$.

Der selbe Beweis, mit E und F vertauscht, zeigt $L_{\pi_F}^E \circ L_{\pi_E}^F = \text{Id}_F$. Es folgt, dass $L_{\pi_E}^F$ und $L_{\pi_F}^E$ Inverse sind. \blacksquare

Satz 4.7.4 $U_1 \otimes_K \dots \otimes_K U_n$ ist ein Tensorprodukt von U_1, \dots, U_n . \square

Beweis. Per Induktion über n . Für $n = 2$ folgt die Behauptung aus dem Satz 4.1.10. Angenommen $U_1 \otimes_K \dots \otimes_K U_{n-1}$ ist ein Tensorprodukt von U_1, \dots, U_{n-1} . Wir zeigen, dass $U_1 \otimes_K \dots \otimes_K U_n$ ein Tensorprodukt von U_1, \dots, U_n ist.

Die Abbildung $\pi : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow U_1 \otimes_K \dots \otimes_K U_n$ definiert durch $\pi(u_1, \dots, u_n) = u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ ist n -linear (Übung). Sei $f : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow W$ eine n -lineare Abbildung. Dann ist $f_{u_n} : U_1 \times \dots \times U_{n-1} \rightarrow W$ definiert durch $f_{u_n}(u_1, \dots, u_{n-1}) = f(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$ eine $n-1$ -lineare Abbildung. Nach Induktionsannahme gibt es eine lineare Abbildung $L_{u_n} : U_1 \otimes_K \dots \otimes_K U_{n-1} \rightarrow W$ mit $L_{u_n}(u_1 \otimes \dots \otimes u_{n-1}) =$

$f(u_1, \cdot, u_n)$. Sei $g : (U_1 \otimes_K \cdots \otimes_K U_{n-1}) \times U_n \rightarrow W$ definiert durch $g(T, u_n) = L_{u_n}(T)$. Diese Abbildung ist bilinear (Übung). Daraus folgt, dass es eine lineare Abbildung $L_f : U_1 \otimes_K \cdots \otimes_K U_n \rightarrow W$ gibt mit $L_f(u_1 \otimes u_{n-1} \otimes u_n) = L_{u_n}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_{n-1}) = f(u_1, \cdots, u_n)$. Da $(u_1 \otimes u_n)$ ein EZS ist, ist L_f eindeutig bestimmt. ■

Definition 4.7.5 Sei $n\text{-Hom}(U_1 \times \cdots \times U_n, W)$ der Untervektorraum von $W^{U_1 \times \cdots \times U_n}$ aller n -linearen Abbildungen.

Satz 4.7.6 Es gilt $n\text{-Hom}(U_1 \times \cdots \times U_n, W) \simeq \text{Hom}_K(U_1 \otimes_K \cdots \otimes_K U_n, W)$. □

Beweis. Sei $\Phi : n\text{-Hom}(U_1 \times \cdots \times U_n, W) \rightarrow \text{Hom}_K(U_1 \otimes_K \cdots \otimes_K U_n, W)$ definiert durch $\Phi(f) = L_f$. Die Abbildung Φ ist linear (Übung). Sei $\Phi' : \text{Hom}_K(U_1 \otimes_K \cdots \otimes_K U_n, W) \rightarrow n\text{-Hom}(U_1 \times \cdots \times U_n, W)$ definiert durch $\Phi'(L) = L \circ \pi$ wobei $\pi : U_1 \times \cdots \times U_n \rightarrow U_1 \otimes_K \cdots \otimes_K U_n$ die kanonische bilineare Abbildung ist. Es gilt $\Phi \circ \Phi'(L) = \Phi(L \circ \pi) = L$ und $\Phi' \circ \Phi(f) = L_f \circ \pi = f$. ■

4.8 Symmetrische und antisymmetrische Tensoren

Definition 4.8.1 Sei V ein K -Vektorraum. Wir setzen $V^{\otimes 0} = K$.

Lemma 4.8.2 Sei $\sigma \in S_n$. Die Abbildung $V^n \rightarrow V^{\otimes n}$ definiert durch $(v_1, \cdots, v_n) \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$ ist n -linear. Es gibt also eine lineare Abbildung $\sigma_{V^{\otimes n}} \in \text{End}(V^{\otimes n})$ mit

$$\sigma_{V^{\otimes n}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Beweis. Übung. ■

Lemma 4.8.3 Es gilt $\tau_{V^{\otimes n}} \sigma_{V^{\otimes n}} = (\tau\sigma)_{V^{\otimes n}}$. □

Beweis. Da $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ ein EZS ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\tau_{V^{\otimes n}} \sigma_{V^{\otimes n}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (\tau\sigma)_{V^{\otimes n}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \tau_{V^{\otimes n}} \sigma_{V^{\otimes n}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \tau_{V^{\otimes n}}(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) \\ &= v_{\tau\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau\sigma(n)} \\ &= (\tau\sigma)_{V^{\otimes n}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n). \end{aligned}$$

Definition 4.8.4 Sei $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ein Vektor $T \in V^{\otimes n}$ heißt **symmetrischer Tensor**, falls für alle $\sigma \in S_n$ gilt $\sigma_{V^{\otimes n}}(T) = T$. Man schreibt $\text{Sym}^n(V)$ für den Unterraum aller symmetrischen Tensoren. Es gilt

$$\text{Sym}^n(V) = \bigcap_{\sigma \in S_n} \text{Ker}(\sigma_{V^{\otimes n}} - \text{Id}_{V^{\otimes n}}).$$

(ii) Ein Vektor $T \in V^{\otimes n}$ heißt **antisymmetrischer Tensor** falls für alle $\sigma \in S_n$ gilt $\sigma_{V^{\otimes n}}(T) = \varepsilon(\sigma)T$. Man schreibt $\text{Alt}^n(V)$ für den Unterraum aller antisymmetrischen Tensoren. Es gilt

$$\text{Alt}^n(V) = \bigcap_{\sigma \in S_n} \text{Ker}(\sigma_{V^{\otimes n}} - \varepsilon(\sigma)\text{Id}_{V^{\otimes n}}).$$

Beispiel 4.8.5 Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis. Dann sind $e_1 \otimes e_1$, $e_2 \otimes e_2$ und $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ symmetrische Tensoren. Der Tensor $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ ist antisymmetrisch.

Bemerkung 4.8.6 Sei K mit $\text{char}(K) = 2$. Dann gilt $\text{Sym}^n(V) = \text{Alt}^n(V)$.

Satz 4.8.7 Sei K mit $\text{char}(K) = 0$

(i) Sei $p_{\text{Sym}} : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ die lineare Abbildung

$$p_{\text{Sym}} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma_{V^{\otimes n}}.$$

Es gilt $\text{Im}(p_{\text{Sym}}) = \text{Sym}^n(V)$ und für $T \in \text{Sym}^n(V)$ gilt $p_{\text{Sym}}(T) = T$.

(ii) Sei $p_{\text{Alt}} : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ die lineare Abbildung

$$p_{\text{Alt}} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sigma_{V^{\otimes n}}.$$

Es gilt $\text{Im}(p_{\text{Alt}}) = \text{Alt}^n(V)$ und für $T \in \text{Alt}^n(V)$ gilt $p_{\text{Alt}}(T) = T$.

(iii) Es gilt $p_{\text{Sym}}^2 = p_{\text{Sym}}$, $p_{\text{Alt}}^2 = p_{\text{Alt}}$ und $p_{\text{Sym}} \circ p_{\text{Alt}} = 0 = p_{\text{Alt}} \circ p_{\text{Sym}}$. □

Beweis. (i) Sei $T \in V^{\otimes n}$. Wir zeigen, dass $p_{\text{Sym}}(T) \in \text{Sym}^n(V)$. Sei $\tau \in S_n$ es gilt (mit $\theta = \tau\sigma$)

$$\begin{aligned} \tau_{V^{\otimes n}}(p_{\text{Sym}}(T)) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \tau_{V^{\otimes n}} \sigma_{V^{\otimes n}}(T) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in S_n} \theta_{V^{\otimes n}}(T) \\ &= p_{\text{Sym}}(T). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $p_{\text{Sym}}(T) \in \text{Sym}^n(V)$. Sei $T \in \text{Sym}^n(V)$. Es gilt

$$p_{\text{Sym}}(T) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma_{V^{\otimes n}}(T) = T \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} 1 = T.$$

(ii) Sei $T \in V^{\otimes n}$. Wir zeigen, dass $p_{\text{Alt}}(T) \in \text{Alt}^n(V)$. Sei $\tau \in S_n$. Es gilt (mit $\theta = \tau\sigma$)

$$\begin{aligned}\tau_{V^{\otimes n}}(p_{\text{Alt}}(T)) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \tau_{V^{\otimes n}} \sigma_{V^{\otimes n}}(T) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in S_n} \varepsilon(\tau) \theta_{V^{\otimes n}}(T) \\ &= \varepsilon(\tau) p_{\text{Alt}}(T).\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $p_{\text{Alt}}(T) \in \text{Alt}^n(V)$. Sei $T \in \text{Alt}^n(V)$. Es gilt

$$p_{\text{Alt}}(T) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sigma_{V^{\otimes n}}(T) = T \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)^2 = T.$$

(iii) Sei $T \in V^{\otimes n}$. Dann ist $p_{\text{Sym}}(T) \in \text{Sym}^n(V)$ und es folgt $p_{\text{Sym}}(p_{\text{Sym}}(T)) = p_{\text{Sym}}(T)$. Analog gilt $p_{\text{Alt}}^2 = p_{\text{Alt}}$. Sei $T \in V^{\otimes n}$. Es gilt

$$\begin{aligned}p_{\text{Alt}}(p_{\text{Sym}}(T)) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sigma_{V^{\otimes n}}(p_{\text{Sym}}(T)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) p_{\text{Sym}}(T) \\ &= p_{\text{Sym}}(T) \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = 0.$$

Die Abbildung $\{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ gerade}\} \rightarrow \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ ungerade}\}$ definiert durch $\sigma \mapsto \sigma s_1$ ist bijektiv (Inverse $\sigma \mapsto \sigma s_1$). Es folgt, dass

$$|\{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ gerade}\}| = |\{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ ungerade}\}| = \frac{n!}{2}.$$

Es gilt also

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma \text{ gerade}} 1 + \sum_{\sigma \in S_n, \sigma \text{ ungerade}} -1 = \frac{n!}{2} - \frac{n!}{2} = 0.$$

Daraus folgt, dass $p_{\text{Alt}} \circ p_{\text{Sym}} = 0$. Analog gilt $p_{\text{Sym}} \circ p_{\text{Alt}} = 0$. ■

Korollar 4.8.8 Es gilt $\text{Sym}^n(V) + \text{Alt}^n(V) = \text{Sym}^n(V) \oplus \text{Alt}^n(V)$.

Beweis. Sei $T \in \text{Sym}^n(V) \cap \text{Alt}^n(V)$. Es gilt $T = p_{\text{Sym}}(T)$ und $T = p_{\text{Alt}}(T)$. Daraus folgt $T = p_{\text{Sym}}(T) = p_{\text{Sym}}(p_{\text{Alt}}(T)) = 0$. ■

5 Algebren

5.1 Algebren

Definition 5.1.1 Ein K -Vektorraum $(A, +, \cdot)$ mit einer bilinearen Abbildung $\times : A \times A \rightarrow A$ so, dass $(A, +, \times)$ ein Ring ist heißt **K -Algebra**. Für $a, b \in A$, wir schreiben $a \times b = ab$.

Die Algebra A heißt **kommutativ** falls $ab = ba$ gilt für alle $a, b \in A$.

Beispiel 5.1.2 Sei $A = \mathbb{R}^2$ und $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$. Dann ist A eine kommutative \mathbb{R} -Algebra.

Lemma 5.1.3 $(M_n(K), +, \cdot, \times)$, wobei \cdot die Skalarmultiplikation von Matrizen ist und \times die Matrixmultiplikation ist, ist eine K -algebra. \square

Beweis. Übung. ■

Definition 5.1.4 (i) Seien A und B zwei K -Algebren. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt **Algebrahomomorphismus** falls f eine lineare Abbildung ist, $f(1_A) = 1_B$ und $f(aa') = f(a)f(a')$ für alle $a, a' \in A$.

(ii) Ein Bijektiver Algebrahomomorphismus heißt **Algebraisomorphismus**.

Beispiel 5.1.5 Sei \mathbb{R}^2 mit Produkt $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x, y) = x + iy$. Dann ist f ein Algebraisomorphismus.

Beispiel 5.1.6 Sei K ein Körper und $A = K[X]$. Dann ist A eine K -Algebra.

Definition 5.1.7 Sei A eine K -Algebra. Ein Element $a \in A$ heißt **invertierbar**, falls es ein Element $b \in A$ gibt mit $ba = ab = 1_A$. Wir schreiben

$$A^\times = \{a \in A \mid a \text{ invertierbar ist}\}.$$

Lemma 5.1.8 Sei $a \in A$ invertierbar. Dann ist $b \in A$ mit $ab = ba = 1_A$ eindeutig bestimmt. \square

Beweis. Seien $b, b' \in A$ mit $ab = ba = 1_A$ und $ab' = b'a = 1_A$. Dann gilt $b = bab' = b'$. ■

Definition 5.1.9 Sei $a \in A$ invertierbar. Das Element $b \in A$ mit $ab = ba = 1_A$ heißt **Inverse** von a und wird a^{-1} bezeichnet.

Beispiel 5.1.10 1. In $A = \mathbb{C}$ als \mathbb{R} -Algebra, sind alle Elemente aus $A \setminus \{0\}$ invertierbar.

2. In $A = M_n(K)$ sind die invertierbaren Elemente die invertierbaren Matrizen.

3. In $K[X]$ sind die invertierbaren Elemente die Polynome $P \neq 0$ mit $\deg(P) = 0$.

Lemma 5.1.11 Sei A eine K -Algebra. Dann ist (A^\times, \times) eine Gruppe. \square

Beweis. Übung. \blacksquare

Korollar 5.1.12 Eine K -Algebra A ist ein Körper genau dann, wenn A kommutativ ist und $A^\times = A \setminus \{0\}$.

Beweis. Sei A ein Körper, dann ist A kommutativ und $A^\times = A \setminus \{0\}$.

Sei A eine kommutative K -Algebra mit $A^\times = A \setminus \{0\}$. Dann ist (A^\times, \times) eine Gruppe. Daraus folgt, dass A ein Körper ist. \blacksquare

5.2 Verknüpfungstafel

Definition 5.2.1 Sei A eine K -Algebra und sei $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ eine Basis von A als K -Vektorraum. Für alle $i, j \in I$ gilt $e_i \cdot e_j \in A$. Es gibt also Skalare $c_{i,j}^k \in K$ mit

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k \in K} c_{i,j}^k e_k.$$

Die Skalare $c_{i,j}^k$ heißen **Strukturkoeffizienten**.

Lemma 5.2.2 Sind alle Strukturkoeffizienten $c_{i,j}^k$ bekannt, dann sind alle Produkte $a \cdot b$ für $a, b \in A$ auch bekannt. \square

Beweis. Seien $a, b \in A$. Dann gibt es Skalare $a_i, b_i \in K$ mit

$$a = \sum_{i \in I} a_i e_i \text{ und } b = \sum_{i \in I} b_i e_i.$$

Für das Produkt $a \cdot b \in A$ gilt

$$a \cdot b = \left(\sum_{i \in I} a_i e_i \right) \cdot \left(\sum_{j \in I} b_j e_j \right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} a_i b_j e_i \cdot e_j = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{k \in I} a_i b_j c_{i,j}^k e_k.$$

Definition 5.2.3 Die Tabelle

$$\begin{array}{c|c} & e_j \\ \hline e_i & e_i \cdot e_j \end{array}$$

heißt **Verknüpfungstafel**.

Beispiel 5.2.4 Sei $A = \mathbb{C}$. Dann ist A eine \mathbb{R} -Algebra und $(1, i)$ ist eine \mathbb{R} -Basis von A . Es gilt

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i, \quad i \cdot 1 = i \quad \text{und} \quad i \cdot i = -1.$$

Es gilt $I = \{1, 2\}$. Die Strukturkoeffizienten $c_{i,j}^k$ sind

$$c_{1,1}^1 = 1, \quad c_{1,1}^2 = 0, \quad c_{1,2}^1 = 0, \quad c_{1,2}^2 = 1, \quad c_{2,1}^1 = 0, \quad c_{2,1}^2 = 1, \quad c_{2,2}^1 = -1, \quad c_{2,2}^2 = 0.$$

Der Verknüpfungstafel ist

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & i \\ \hline 1 & 1 & i \\ i & i & -1. \end{array}$$

5.3 Unteralgebren, Ideale und Quotienten

Definition 5.3.1 Sei A eine K -Algebra. Eine Teilmenge $B \subset A$ heißt **Unteralgebra** falls $1_A \in B$, B ein Unterraum von A ist und für alle $b, b' \in B$ gilt $bb' \in B$.

Definition 5.3.2 Sei A eine K -Algebra. Eine Teilmenge $I \subset A$ heißt **Linksideal** (bzw. **Rechtsideal**, bzw. **Ideal**) falls B ein Unterraum von A ist und für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt $ab \in B$ (bzw. $ba \in B$, bzw. $ba \in B$ und $ab \in B$).

Lemma 5.3.3 Sei $f : A \rightarrow B$ ein Algebromorphismus. Dann ist $f(A) = \text{Im} f$ eine Unteralgebra von B . □

Beweis. Übung. ■

Lemma 5.3.4 Sei A eine Algebra und sei I ein Ideal von A . Seien $a, a' \in A$ und seien $[a], [a']$ die Äquivalenzklassen von a, a' in A/I . Seien $b \in [a]$ und $b' \in [a']$. Dann gilt $[aa'] = [bb']$. □

Beweis. Es gilt $a - b = c \in I$ und $a' - b' = c' \in I$. Daraus folgt

$$bb' = (a - c)(a' - c') = aa' - ac' - ca' + cc'.$$

Da $ac', ca', cc' \in I$ gilt $[aa'] = [bb']$. ■

Lemma 5.3.5 Sei A eine Algebra und sei I ein Ideal von A . Sei $\times : A/I \times A/I \rightarrow A/I$ definiert durch $[a] \times [a'] = [aa']$. Dann ist $(A/I, +, \times)$ eine K -Algebra. □

Beweis. Übung. ■

Definition 5.3.6 Sei A eine Algebra und sei I ein Ideal von A . Die Algebra A/I heißt **Quotientenalgebra**.

Lemma 5.3.7 (1) Sei $f : A \rightarrow B$ ein K -Algebrahomomorphismus. Dann ist $\text{Ker}(f)$ ein Ideal von A .

(11) Sei I ein Ideal von A und sei $p : A \rightarrow A/I$ die kanonische Projektion. Dann ist p ein Algebrahomomorphismus und es gilt $I = \text{Ker} p$. □

Beweis. Übung. ■

Satz 5.3.8 Sei $f : A \rightarrow B$ ein K -Algebrahomomorphismus und sei I ein Ideal von A .

1. Es gibt eine K -Algebrahomomorphismus $\bar{f} : A/I \rightarrow B$ mit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ A/I & & \end{array}$$

genau dann, wenn $I \subset \text{Ker}(f)$.

2. f surjektiv $\Leftrightarrow \bar{f}$ surjektiv.

3. f injektiv $\Leftrightarrow I = \text{Ker} f$. □

Beweis. Nach Satz 7.4.8 im Skript LAI gilt alles außer, dass \bar{f} ein Algebrahomomorphismus ist. Es gilt aber

$$\bar{f}(1_{A/I}) = f \circ p(1_A) = f(1_A) = 1_B \text{ und}$$

$$\bar{f}([a][b]) = \bar{f}([ab]) = \bar{f} \circ p(ab) = f(ab) = \bar{f}([a])\bar{f}([b]).$$

Daraus folgt, dass \bar{f} eine K -Algebrahomomorphismus ist. ■

Beispiel 5.3.9 1. Sei $(P) = \{Q \in K[X] \mid P \text{ teilt } Q\}$. Dann ist (P) ein Ideal von $K[X]$.

2. Sei $\lambda \in K$. Es gilt $K[X]/(X-\lambda) \simeq K$: wir haben ein surjektiver K -Algebrahomomorphismus $f : K[X] \rightarrow K$ definiert durch $f(P) = P(\lambda)$ und es gilt $\text{Ker}(f) = (X-\lambda)$. Daraus folgt, dass $\bar{f} : K[X]/(X-\lambda) \rightarrow K$ ein Isomorphismus ist.

3. Es gilt $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$: wir haben ein surjektiver \mathbb{R} -Algebrahomomorphismus $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(P) = P(i)$ und es gilt $\text{Ker}(f) = (X^2+1)$. Daraus folgt, dass $\bar{f} : K[X]/(X-\lambda) \rightarrow K$ ein Isomorphismus ist.

4. Es gilt $K[X]/(X^2-1) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: wir haben ein surjektiver \mathbb{R} -Algebrahomomorphismus $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch $f(P) = (P(1), P(-1))$ und es gilt $\text{Ker}(f) = (X^2-1)$. Daraus folgt, dass $\bar{f} : \mathbb{R}[X]/(X^2-1) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Isomorphismus ist.

2. Es gilt $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$: wir haben ein surjektiver \mathbb{Q} -Algebrahomomorphismus $f : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ definiert durch $f(P) = P(\sqrt{2})$ und es gilt $\text{Ker}(f) = (X^2-2)$. Daraus folgt, dass $\bar{f} : \mathbb{Q}[X]/(X^2-2) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Isomorphismus ist.

5.4 Produkte

Lemma 5.4.1 Seien A und B zwei K -Algebren. Dann ist $A \times B$ mit $(a, b)(a', b') = (aa', bb')$ eine K -Algebra. \square

Beweis. Übung. \blacksquare

Definition 5.4.2 Seien A und B zwei K -Algebren. Die K -Algebra $A \times B$ mit Produkt $(a, b)(a', b') = (aa', bb')$ heißt **Produktalgebra von A und B** .

5.5 Einschränkung und Erweiterung der Skalare

Lemma 5.5.1 Sei A eine K -Algebra und sei L ein Teilkörper von K . Dann ist A eine L -Algebra. \square

Beweis. Die Addition und Multiplikation sind für beide Algebrastrukturen gleich. Die Skalarmultiplikation als L -Algebra ist die Einschränkung der Skalarmultiplikation als K -Algebra. Es folgt, dass A eine L -Algebra ist. \blacksquare

Definition 5.5.2 Sei A eine K -Algebra und sei L ein Teilkörper von K , dann schreiben wir $A_{(L)}$ für die L -Algebra A .

Satz 5.5.3 Sei A eine K -Algebra und sei L eine Körpererweiterung von K . Dann ist $A \otimes_K L$ eine L -Algebra. \square

Beweis. Nach Satz 4.6.2 ist $A \otimes_K L$ ein L -Vektorraum. Wir definieren ein Produkt über $A \otimes_K L$ wie folgt. Die Abbildung

$$f : A \times L \times A \times L \rightarrow A \otimes_K L$$

definiert durch $f(a, \lambda, b, \mu) = ab \otimes \lambda\mu$ ist K -multilinear (4-linear). Daraus folgt, dass es eine Lineare Abbildung

$$L_f : (A \otimes_K L) \otimes_K (A \otimes_K L) \rightarrow A \otimes_K L$$

mit $L_f(a \otimes \lambda \otimes b \otimes \mu) = ab \otimes \lambda \mu$. Sei $\pi : (A \otimes_K L) \times (A \otimes_K L) \rightarrow (A \otimes_K L) \otimes_K (A \otimes_K L)$ die kanonische bilineare Abbildung und sei

$$m = L_f \circ \pi : (A \otimes_K L) \times (A \otimes_K L) \rightarrow (A \otimes_K L).$$

Diese Abbildung ist bilinear mit $m(a \otimes \lambda, b \otimes \mu) = ab \otimes \lambda \mu$. Mit dieser Multiplikation ist $A \otimes_K L$ eine L -algebra (Übung). ■

Beispiel 5.5.4 (i) Der Körper \mathbb{C} ist eine \mathbb{C} -Algebra. Es ist auch eine \mathbb{R} -Algebra.

(ii) Wir betrachten \mathbb{C} als \mathbb{R} -Algebra. Dann ist $A = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -algebra. Es gilt $\dim_{\mathbb{C}}(A) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Sei $(e_1, e_2) = (1, i)$ eine Basis von \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum. Dann ist $(f_1, f_2) = (e_1 \otimes 1, e_2 \otimes 1)$ eine Basis von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ als \mathbb{C} -Vektorraum und für $xf_1 + yf_2$ und $x'f_1 + y'f_2$ in $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ gilt

$$(xf_1 + yf_2)(x'f_1 + y'f_2) = (xx' - yy')f_1 + (xy' + yx')f_2.$$

5.6 Erzeuger

Lemma 5.6.1 Sei A eine K -Algebra und sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unteralgebren von A . Dann ist

$$B = \bigcap_{i \in I} B_i$$

eine Unteralgebra von A . □

Beweis. Übung. ■

Lemma 5.6.2 Sei A eine K -Algebra und sei E eine Teilmenge von A . Dann gibt es eine minimale K -Unteralgebra von A welche E enthält. □

Beweis. Sei $(B_i)_{i \in I}$ die Familie von allen Unteralgebren mit $E \subset B_i$. Dann ist

$$B = \bigcap_{i \in I} B_i$$

die minimale K -Unteralgebra von A welche E enthält. ■

Definition 5.6.3 Sei A eine K -Algebra und sei E eine Teilmenge von A . Die minimale K -Unteralgebra von A welche E enthält heißt **die von E erzeugte Unteralgebra** von A .

Definition 5.6.4 Eine Teilmenge E von A heißt **erzeugend** falls A die von E erzeugte Unteralgebra von A ist.

Beispiel 5.6.5 Sei $A = K[X]$ und $E = \{X\}$. Dann ist E erzeugend.

Lemma 5.6.6 Sei E erzeugend in A .

1. Sei $f : B \rightarrow A$ ein Algebromorphismus. Dann ist f genau dann surjektiv, wenn $E \subset \text{Im} f$.

2. Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : A \rightarrow B$ zwei Algebromorphismen. Dann gilt $f = g$ genau dann, wenn $f(e) = g(e)$ für alle $e \in E$. \square

Beweis. 1. Falls es surjektiv ist gilt $E \subset \text{Im} f$. Umgekehrt ist das Bild $\text{Im} f$ eine Unteralgebra die E enthält. Es folgt, dass $A \subset \text{Im} f$.

2. Wenn $f = g$ gilt $f(e) = g(e)$ für alle $e \in E$. Umgekehrt, sei $h = f - g$. Dann ist h linear. Sei $I = \text{Ker} h$. Wir zeigen, dass A' eine Unteralgebra von A ist. Es gilt $h(1) = f(1) - g(1) = 1 - 1 = 0$. Es folgt $1 \in A'$. Seien $a, a' \in A'$. Es gilt $f(a) = g(a)$ und $f(a') = g(a')$. Es folgt $h(aa') = f(aa') - g(aa') = f(a)f(a') - g(a)g(a') = 0$. Die Unteralgebra A' enthält E . Es folgt $A \subset A'$ und $h = 0$, also $f = g$. \blacksquare

Lemma 5.6.7 Sei A eine K -Algebra und sei $(I_j)_{j \in J}$ eine Familie von Ideale von A . Dann ist

$$I = \bigcap_{j \in J} I_j$$

ein Ideal von A . \square

Beweis. Übung. \blacksquare

Lemma 5.6.8 Sei A eine K -Algebra und sei E eine Teilmenge von A . Dann gibt es ein minimales Ideal von A welches E enthält. \square

Beweis. Sei $(I_j)_{j \in J}$ die Familie von alle Ideale mit $E \subset I_j$. Dann ist

$$I = \bigcap_{j \in J} I_j$$

das minimale Ideal von A welches E enthält. \blacksquare

Definition 5.6.9 Sei A eine K -Algebra und sei E eine Teilmenge von A . Das minimale Ideal von A welches E enthält heißt **das von E erzeugte Ideal** von A und wird (E) bezeichnet.

Lemma 5.6.10 Sei A eine kommutative K -Algebra und seien $a_1, \dots, a_n \in A$. Es gilt

$$(a_1, \dots, a_n) = \{b_1 a_1 + \dots + b_n a_n \in A \mid b_1, \dots, b_n \in A\}.$$

Beweis. Übung. \blacksquare

Lemma 5.6.11 Sei A eine K -Algebra und sei $(a_j)_{j \in J}$ eine Familie von Elementen aus A . Es gilt

$$(a_j \mid j \in J) = \langle b_j a_j c_j \in A \mid b_j, c_j \in A \text{ für } j \in J \rangle.$$

Beweis. Sei $I = \langle b_j a_j c_j \in A \mid b_j, c_j \in A \text{ für } j \in J \rangle$. Wir zeigen, dass $I = (a_j \mid j \in J)$.

Sei $a \in I$. Dann ist a eine lineare Kombination von $b_j a_j c_j$ mit $b_j, c_j \in A$. Da $a_j \in (a_j \mid j \in J)$ gilt $b_j a_j c_j \in (a_j \mid j \in J)$ und es folgt $a \in (a_j \mid j \in J)$.

Umgekehrt gilt $a_j \in I$ für alle $j \in J$. Wir zeigen, dass I ein Ideal ist. Per Definition ist I ein Unterraum. Sei $a \in I$ und $b, c \in A$. Dann ist a eine lineare Kombination von Vektoren von der Form $b_j a_j c_j$ wobei $b_j, c_j \in A$. Es gilt, dass ba (bzw. ac) eine lineare Kombination von Vektoren der Form $(bb_j)a_j c_j$ (bzw. $b_j a_j (c_j c)$) ist und also in I . Es folgt dann, dass $(a_j \mid j \in J) \subset I$. ■

5.7 Polynome

Sei A eine K -Algebra und sei

$$A^{(\mathbb{N})} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow A \mid f(n) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist $A^{(\mathbb{N})}$ ein K -Vektorraum.

Definition 5.7.1 Sei $e_n : \mathbb{N} \rightarrow K$ definiert durch $e_n(i) = \delta_{i,n}$. Dann gilt $e_n \in A^{(\mathbb{N})}$.

Lemma 5.7.2 Sei $f \in A^{(\mathbb{N})}$. Dann gilt

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) e_n.$$

Beweis. Übung. ■

Definition 5.7.3 Wir definieren auf $A^{(\mathbb{N})}$ eine Multiplikation. Für $f, g \in A^{(\mathbb{N})}$, sei $f \cdot g$ definiert durch

$$f \cdot g : i \mapsto \sum_{k=0}^i f(k) g(i-k).$$

Lemma 5.7.4 $(A^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit $1_{A^{(\mathbb{N})}} = e_0$. □

Beweis. Übung. ■

Notation 5.7.5 Als e_0 ein Eins für die Multiplikation ist schreiben wir $e_0 = 1$. Wir schreiben auch X für e_1 .

Lemma 5.7.6 Es gilt $X^n = e_n$. □

Beweis. Übung. ■

Notation 5.7.7 Für $f \in A^{(\mathbb{N})}$ gilt

$$f = \sum_n f(n)e_n = \sum_n f(n)X^n.$$

Wir schreiben

$$f = \sum_n a_n X^n,$$

wobei $a_n \in A$ ist nicht null nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

2. Wir schreiben $A[X]$ für $A^{(\mathbb{N})}$ und nennen $A[X]$ **Polynomring in X mit Koeffizienten in A** . Elemente in $A[X]$ heißen **Polynome**.

Lemma 5.7.8 Es gilt $X^n \cdot X^m = X^{n+m}$. □

Beweis. Übung. ■

Definition 5.7.9 Sei $f = \sum_n a_n X^n \in A[X]$.

1. Der **Grad** von f ist definiert als

$$\deg(f) = \begin{cases} -\infty & \text{fall } f = 0, \\ \max\{n \mid a_n \neq 0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Das Polynom f heißt **normiert** falls $\deg(f) = n \geq 0$ und $a_n = 1$.

Lemma 5.7.10 Es gilt

1. $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

2. $\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$. □

Beweis. Übung. ■

Definition 5.7.11 1. Sei $b \in A$. Man definiert $\text{ev}_b : A[X] \rightarrow A$ die **Einsetzung** von $f = \sum_n a_n X^n$ in b als

$$\text{ev}_b(f) = \sum_n a_n b^n \in A.$$

Man schreibt oft $f(b)$ für $\text{ev}_b(f)$.

2. $b \in A$ heißt **Nullstelle** von f wenn $f(b) = 0$.

Beispiel 5.7.12 Sei $A = K[X]$. Dann ist $A[Y] = K[X][Y] = K[X, Y]$ die Menge alle Polynome in die zwei Variablen X und Y . z.b. ist $f = X^2 Y^2 + XY + X + 1 \in K[X, Y]$. Per Induktion nach n kann man Polynome in n Variablen definieren: $K[X_1, \dots, X_n] = K[X_1][X_2][\dots][X_n]$.

Bemerkung 5.7.13 Analog kann man $A[X]$ für A ein Ring definieren. Dann ist $A[X]$ ein Ring.

5.8 Graduierte Algebren

Definition 5.8.1 Sei A eine K -algebra und seien U und V zwei Teilmenge von A . Dann schreiben wir

$$UV = \{uv \in A \mid u \in U, v \in V\}.$$

Definition 5.8.2 Sei A eine K -Algebra. Eine **Graduierung** von A ist eine Familie $(A_n)_{n \geq 0}$ von Unterräumen von A so, dass

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n \text{ und } A_i A_j \subset A_{i+j}$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Eine K -Algebra mit einer Graduierung heißt **graduierte K -Algebra**.

Beispiel 5.8.3 1. Sei A eine K -Algebra und sei $A_0 = A$ und $A_n = 0$ für alle $n > 0$. Dann ist A eine graduierte K -Algebra. Diese Graduierung heißt die **triviale Graduierung**.

2. Sei $A = K[X]$ und $A_n = \{P \in A \mid \deg(P) = n\} \cup \{0\}$. Dann ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Graduierung von A .

Definition 5.8.4 Seien A und B zwei graduierte Algebren. Ein Algebrehomomorphismus $f : A \rightarrow B$ heißt **graduiert** falls $f(A_n) \subset B_n$ für alle $n \geq 0$.

Definition 5.8.5 Sei A eine Graduierte K -Algebra.

(1) Eine Unter algebra B von A heißt **graduierte Unter algebra** falls

$$B = \bigoplus_{n \geq 0} (B \cap A_n).$$

(11) Ein Linksideal (bzw. Rechtsideal, bzw. Ideal) I von A heißt **graduiertes Linksideal** (bzw. **graduiertes Rechtsideal**, bzw. **graduiertes Ideal**) falls

$$I = \bigoplus_{n \geq 0} (I \cap A_n).$$

Lemma 5.8.6 Sei A eine graduierte K -Algebra und I ein graduiertes Ideal. Dann ist A/I eine graduierte Algebra und $p : A \rightarrow A/I$ ein graduiertes Algebrehomomorphismus. □

Beweis. Sei $(A_n)_{n \geq 0}$ die Graduierung und sei $p : A \rightarrow A/I$ die kanonische Projektion. Wir zeigen, dass $(p(A_n))_{n \geq 0}$ eine Graduierung von A/I ist. Sei $a_n \in A_n$ für alle n so, dass $a_n \neq 0$ nur für endlich viele n und

$$\sum_n p(a_n) = 0.$$

Es gilt $\sum_n a_n \in I$. Da $I = \bigoplus_n (I \cap A_n)$ gilt $a_n \in I \cap A_n$ und $p(a_n) = 0$ für alle n . Daraus folgt $\sum_n p(A_n) = \bigoplus_n p(A_n)$. Da p surjektiv ist gilt

$$A/I = \bigoplus_{n \geq 0} p(A_n).$$

Seien $a_i \in A_i$ und $a_j \in A_j$ dann gilt $p(a_i)p(a_j) = p(a_i a_j) \in p(A_i A_j) \subset p(A_{i+j})$. ■

Lemma 5.8.7 Sei $f : A \rightarrow B$ ein graduierter Algebrehomomorphismus. Dann ist $I = \text{Ker } f$ ein graduiertes Ideal. □

Beweis. Übung. ■

Definition 5.8.8 1. Sei A eine graduierte K -Algebra. Ein Element $a \in A_n$ heißt homogen von Grad n .

2. Sei $a \in A$. Es gilt

$$a = \sum_{n \neq 0} a_n$$

wobei $a_n \in A_n$ und a_n eindeutig bestimmt ist. Das Element a_n heißt **Komponente von Grad n von a** .

Lemma 5.8.9 Sei A eine graduierte K -Algebra und sei I ein Ideal. Dann ist I genau dann graduiert, wenn für alle $a \in I$ gilt $a_n \in I$ (wobei a_n die Komponente von Grad n von a ist). □

Beweis. Angenommen I ist graduiert. Dann gilt $a \in I = \bigoplus_n (I \cap A_n)$ also

$$a = \sum_n b_n$$

wobei $b_n \in I \cap A_n$. Es folgt, dass $b_n = a_n$ und $a_n \in I$.

Umgekehrt. Wir zeigen, dass I graduiert ist. Es genügt zu zeigen, dass $I = \sum_n (I \cap A_n)$. Sei $a \in I$. Es gilt $a = \sum_n a_n$ und $a_n \in I$. Es folgt, dass $a_n \in I \cap A_n$ ist und $a \in \sum_n (I \cap A_n)$. ■

Lemma 5.8.10 Sei A eine graduierte K -Algebra.

1. Sei E eine Teilmenge von A welche aus homogene Elemente besteht. Dann ist (E) ein graduiertes Ideal.

2. Sei I ein graduiertes Ideal. Dann gibt es eine Teilmenge E welche aus homogene Elemente besteht mit $I = (E)$. □

Beweis. 1. Sei $I' = \bigoplus_n (I \cap A_n)$. Wir zeigen, dass I' ein Ideal ist. Es ist ein Unterraum (direkte Summe von Unterräumen). Sei $a = \sum_n a_n \in I'$ i.e. $a_n \in I \cap A_n$ für alle n und sei $b = \sum_n b_n \in A$. Es gilt

$$ab = \sum_k \left(\sum_{n+m=k} a_n b_m \right) \text{ und } ba = \sum_k \left(\sum_{n+m=k} b_m a_n \right).$$

Da $a_n \in I \cap A_n$ und $b_m \in A_m$ gilt $a_n b_m, b_m a_n \in I \cap A_{n+m}$ und $ab, ba \in I'$. Da alle Elemente aus E homogen sind gilt auch $E \subset I'$. Es folgt $I \subset I'$. Es folgt, dass I ein graduirtes Ideal ist.

2. Sei $E = \{a \mid a \in I \text{ und } a \text{ homogen}\}$. Nach dem obigen Lemma gilt $I = (E)$. ■

5.9 Tensor Algebra

Definition

Lemma 5.9.1 Sei V ein K -Vektorraum. Die Abbildung $V^{\otimes n} \times V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes(n+m)}$ definiert durch $(T, T') \mapsto T \otimes T'$ ist bilinear. □

Beweis. Übung. ■

Definition 5.9.2 1. Wir Setzen $T_n(V) = V^{\otimes n}$.

2. Sei V ein K -Vektorraum. Die **Tensoralgebra** $T(V)$ von V ist

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T_n(V).$$

Bemerkung 5.9.3 1. Die Tensoralgebra $T(V)$ ist ein K -Vektorraum.

2. Ein Vektor $T \in T(V)$ ist der Form

$$T = \sum_{n \geq 0} T_n$$

wobei $T_n \in T_n(V)$ und $T_n \neq 0$ nur für endlich viele n .

Definition 5.9.4 Seien $T, T' \in T(V)$ mit

$$T = \sum_{n \geq 0} T_n \text{ und } T' = \sum_{m \geq 0} T'_m,$$

wobei $T, T' \in T_n(V)$. Wir setzen

$$T \cdot T' = \sum_{n, m \geq 0} T_n \otimes T'_m.$$

Notation 5.9.5 Wir schreiben $T \otimes T'$ für $T \cdot T'$.

Lemma 5.9.6 $(T(V), +, \cdot, \otimes)$ ist eine K -Algebra. □

Beweis. Nach Lemma 5.9.1 ist das Produkt bilinear. Da das Tensorprodukt assoziativ ist, ist das Produkt assoziativ. Es gilt $t_0(V) = K$ und für $1 \in K = T_0(V) \subset T(A)$ gilt $1 \otimes T = T \otimes 1 = T$. Es folgt, dass 1 ein Eins für $T(A)$ ist. ■

Lemma 5.9.7 Die Familie $(T_n(V))_{n \geq 0}$ ist eine Graduierung von $T(V)$. □

Beweis. Es gilt $T_n(V) \cdot T_m(V) \subset T_{n+m}(V)$. ■

Bemerkung 5.9.8 Es gibt eine injektive lineare Abbildung $\varrho : V \simeq T_1(V) \subset T(V)$.

Lemma 5.9.9 Die Teilmenge $\varrho(V) \subset T(V)$ ist erzeugend. □

Beweis. Übung. ■

Universelle Eigenschaft

Satz 5.9.10 Sei A eine K -Algebra und $f : V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau ein Algebramorphismus $T_f : T(V) \rightarrow A$ mit $f = T_f \circ \varrho$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & A \\ \varrho \downarrow & \nearrow T_f & \\ T(V) & & \end{array}$$

Beweis. Seien T_f und T'_f zwei solche Algebramorphismen. Dann gilt $T_f(\varrho(v)) = T'_f(\varrho(v))$ für alle $v \in V$. Da $\varrho(V)$ erzeugend ist gilt $T_f = T'_f$.

Die Abbildung $V^n \rightarrow A$ definiert durch $(v_1, \dots, v_n) \mapsto f(v_1) \cdots f(v_n)$ ist n -linear. Es folgt, dass es eine lineare Abbildung $L_n : T_n(V) \rightarrow A$ gibt mit $L_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n)$. Sei $L_0 = \text{Id}_K$ und sei $T_f : T(V) \rightarrow A$ definiert durch

$$T_f(T) = \sum_{n \geq 0} L_n(T_n)$$

wobei $T = \sum_{n \geq 0} T_n$ mit $T_n \in T_n(V)$. Es gilt $T_f(\varrho(v)) = L_1(v) = f(v)$.

Wir zeigen, dass T_f ein Algebramorphismus ist. Die Abbildung T_f ist linear. Es gilt $T_f(1) = L_0(1) = 1$ und für $T = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ und $T' = w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$ gilt

$$\begin{aligned} T_f(T \otimes T') &= T_f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) \\ &= L_{n+m}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) \\ &= f(v_1) \cdots f(v_n) f(w_1) \cdots f(w_m) \\ &= L_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) L_m(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) \\ &= T_f(T) \otimes T_f(T'). \end{aligned}$$

Da die reine Tensoren ein EZS von $T(A)$ sind folgt von dem folgenden Lemma, dass T_f ein Algebramorphismus ist.

Lemma 5.9.11 Seien A und B zwei K -Algebren und sei $H : A \rightarrow B$ eine lineare Abbildung so, dass $H(1_A) = 1_B$ und für ein EZS $(a_i)_{i \in I}$ von A gilt $H(a_i a_j) = H(a_i)H(a_j)$. Dann ist H ein Algebramorphismus. \square

Beweis. Seien $a, a' \in A$. Dann gibt es Skalare $\lambda_i, \mu_j \in K$ mit

$$a = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \text{ und } a' = \sum_{j \in I} \mu_j a_j.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} H(aa') &= H\left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i \mu_j a_i a_j\right) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i \mu_j H(a_i a_j) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \lambda_i \mu_j H(a_i) H(a_j) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} H(\lambda_i a_i) H(\mu_j a_j) \\ &= \left(\sum_{i \in I} H(\lambda_i a_i)\right) \left(\sum_{j \in I} H(\mu_j a_j)\right) \\ &= H\left(\sum_{i \in I} \lambda_i a_i\right) H\left(\sum_{j \in I} \mu_j a_j\right) \\ &= H(a)H(a'). \end{aligned}$$

Korollar 5.9.12 Seien V und W zwei K -Vektorräume und sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau ein Algebramorphismus $T(f)$ so, dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \varrho_V \downarrow & & \downarrow \varrho_W \\ T(V) & \xrightarrow{T(f)} & T(W). \end{array}$$

Die Abbildung $T(f)$ ist graduert.

Beweis. Existenz folgt aus dem obigen Satz für die lineare Abbildung $f \circ \varrho_W : V \rightarrow T(W)$. Wir zeigen, dass $T(f)$ graduert ist. Es genügt zu zeigen, dass für $v_1, \dots, v_n \in V$ gilt $T(f)(v_1 \cdots v_n) \in T_n(W)$. Aber es gilt $T(f)(v_1 \cdots v_n) = T(f)(v_1) \cdots T(f)(v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n) \in T_n(W)$. \blacksquare

5.10 Symmetrische Algebra

Definition

Definition 5.10.1 Sei V ein K -Vektorraum. Die **Symmetrische Algebra** $\text{Sym}(V)$ ist die Quotientenalgebra

$$\text{Sym}(V) = T(V)/I \text{ wobei } I = (v \otimes v' - v' \otimes v \mid v, v' \in V).$$

Für $a, b \in \text{Sym}(V)$ schreiben wir ab für das Produkt.

Lemma 5.10.2 Das Ideal $I = (v \otimes v' - v' \otimes v \mid v, v' \in V)$ ist ein graduiertes Ideal von $T(V)$. Sei $p : T(V) \rightarrow \text{Sym}(V)$ die kanonische Projektion. Die Familie $(p(T_n(V)))_{n \geq 0}$ ist eine Graduierung von $\text{Sym}(V)$. \square

Beweis. Alle Elemente $v \otimes v' - v' \otimes v$ sind homogen von Grad 2. Es folgt von Lemma 5.8.10.1, dass I graduiert ist. Es folgt, dass die Familie $(p(T_n(V)))_{n \geq 0}$ eine Graduierung von $\text{Sym}(V)$ ist. \blacksquare

Definition 5.10.3 Wir schreiben $\text{Sym}_n(V) = p(T_n(V))$.

Bemerkung 5.10.4 Es gilt $\text{Sym}^n(V) \neq \text{Sym}_n(V)$. Zum Beispiel haben wir $\text{Sym}^n(V)$ nur für $\text{char}(K) = 0$ definiert und $\text{Sym}_n(K)$ ist für alle K definiert.

Lemma 5.10.5 Die lineare Abbildung $\theta = p \circ \varrho : V \rightarrow T(V) \rightarrow \text{Sym}(V)$ ist injektiv. \square

Beweis. Die Abbildung ϱ ist injektiv. Es genügt zu zeigen, dass $\varrho(V) \cap I = 0$. Es gilt $\varrho(V) \subset T_1(V)$ und es gilt $I \cap T_1(V) = 0$. \blacksquare

Satz 5.10.6 Die Algebra $\text{Sym}(V)$ ist eine kommutative Algebra. \square

Beweis. Seien $v, v' \in V$. Wir schreiben $[v]$ für die Äquivalenzklasse von $v \in T(V)$ in $\text{Sym}(V)$. Es gilt $[v][v'] = [v \otimes v']$ (das Produkt in $T(V)$ von v und v' ist $v \otimes v'$). Es folgt

$$[v][v'] = [v \otimes v'] = [v' \otimes v] = [v'][v].$$

Der Beweis folgt aus den zwei folgenden Lemma

Lemma 5.10.7 Die Familie $([v])_{v \in V} = \theta(V)$ ist erzeugend. \square

Beweis. Die Familie $\varrho(V)$ ist erzeugend in $T(V)$ und $p : T(V) \rightarrow \text{Sym}(V)$ ist surjektiv. Es folgt, dass $\theta(V) = p(\varrho(V))$ erzeugend ist. \blacksquare

Lemma 5.10.8 Sei A eine K -Algebra und E eine erzeugende Teilmenge mit $ee' = e'e$ für alle $e, e' \in E$. Dann ist A kommutativ. \square

Beweis. Sei $A' = \{a \in A \mid ae = ea \text{ für alle } e \in E\}$. Es gilt $E \subset A'$. Wir zeigen, dass A' eine Unter algebra ist. Es gilt $1_A e = e = e 1_A$ für alle $e \in E$. Es folgt $1_A \in A'$. Seien $a, b \in A'$. Es gilt

$$(ab)e = a(be) = a(eb) = (ae)b = (ea)b = e(ab).$$

Es folgt $ab \in A'$. Daraus folgt, dass $A' = A$. Insbesondere gilt $ae = ea$ für alle $a \in A$.

Sei $B = \{b \in A \mid ab = ba \text{ für alle } a \in A\}$. Es gilt $E \subset B$. Wir zeigen, dass B eine Unter algebra ist. Es gilt $1_A a = a = a 1_A$ für alle $a \in A$. Es folgt $1_A \in B$. Seien $b, b' \in B$. Es gilt

$$(bb')a = b(b'a) = b(ab') = (ba)b' = (ab)b' = a(bb').$$

Es folgt $bb' \in B$. Daraus folgt, dass $B = A$ und dass A kommutativ ist. \blacksquare

Universelle Eigenschaft

Satz 5.10.9 Sei $f : V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung mit $f(v)f(v') = f(v')f(v)$ für alle $v, v' \in V$. Dann gibt es genau ein Algebramorphismus $S_f : \text{Sym}(V) \rightarrow A$ mit $f = S_f \circ \theta$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & A \\ \theta \downarrow & \nearrow S_f & \\ \text{Sym}(V) & & \end{array}$$

Beweis. Seien S_f und S'_f zwei solche Algebramorphismen. Dann gilt $S_f(\theta(v)) = S'_f(\theta(v))$ für alle $v \in V$. Da $\theta(V)$ erzeugend ist gilt $S_f = S'_f$.

Nach dem Satz 5.9.10 gibt es ein Algebramorphismus $T_f : T(V) \rightarrow A$ mit $T_f \circ \varrho = f$. Wir zeigen, dass $I \subset \text{Ker}(T_f)$. Seien $v, v' \in V$, es gilt

$$T_f(v \otimes v') = T_f(v)T_f(v') = f(v)f(v') = f(v')f(v) = T_f(v')T_f(v) = T_f(v' \otimes v).$$

Nach dem Satz 5.3.8.1, gibt es ein Algebramorphismus $S_f : \text{Sym}(V) \rightarrow A$ mit $S_f \circ p = T_f$

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{T_f} & A \\ p \downarrow & \nearrow S_f & \\ \text{Sym}(V) & & \end{array}$$

Es gilt $S_f \circ \theta = S_f \circ p \circ \varrho = T_f \circ \varrho = f$. ■

Korollar 5.10.10 Seien V und W zwei K -Vektorräume und sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau ein Algebramorphismus $S(f)$ so, dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \theta_V \downarrow & & \downarrow \theta_W \\ S(V) & \xrightarrow{S(f)} & S(W). \end{array}$$

Die Abbildung $S(f)$ ist graduiert.

Beweis. Existenz folgt aus dem obigen Satz für die lineare Abbildung $f \circ \theta_W : V \rightarrow S(W)$. Wir zeigen, dass $S(f)$ graduiert ist. Es genügt zu zeigen, dass für $v_1, \dots, v_n \in V$ gilt $S(f)(v_1 \cdots v_n) \in \text{Sym}_n(W)$. Aber es gilt $S(f)(v_1 \cdots v_n) = S(f)(v_1) \cdots S(f)(v_n) \in \text{Sym}_n(W)$. ■

Symmetrische Tensoren und symmetrische Algebra

Satz 5.10.11 Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) = 0$. Die Komposition

$$\Phi_n : \text{Sym}^n(V) \subset T_n(V) \xrightarrow{p} \text{Sym}_n(V)$$

ist ein Isomorphismus von K -Vektorräume. □

Beweis. Sei I das Ideal $I = (v \otimes v' - v' \otimes v \mid v, v' \in V)$ und sei $I_n = I \cap T_n(V)$. Die Einschränkung der Quotientabbildung $p : T(V) \rightarrow \text{Sym}(V)$ auf $T_n(V)$ ist

$$p_n : T_n(V) \rightarrow \text{Sym}_n(V) = T_n(V)/(I \cap T_n(V)) = T_n(V)/I_n.$$

Lemma 5.10.12 Es gilt $I_n = \langle v_1 \otimes \cdots \otimes (v_i \otimes v_{i+1} - v_{i+1} \otimes v_i) \otimes \cdots \otimes v_n \mid v_i \in V \text{ für } i \in [1, n] \rangle$. □

Beweis. Folgt aus Lemma 5.6.11. ■

Lemma 5.10.13 Sei $\sigma \in S_n$, es gilt $p \circ \sigma = p$. □

Beweis. Da $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ ein EZS ist, genügt es zu zeigen, dass

$$p(\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) = p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Da σ ein Produkt von Elementaretranspositionen ist, genügt es zu zeigen, dass

$$p(s_i(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) = p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$$

für alle $i \in [1, n-1]$. Es gilt

$$p(s_i(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) = p(v_1 \otimes (v_{i+1} \otimes v_i) \otimes \cdots \otimes v_n) = p(v_1 \otimes (v_i \otimes v_{i+1}) \otimes \cdots \otimes v_n) = p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Für $n \geq 0$ haben wir die lineare Abbildung $T_n(V) \rightarrow \text{Sym}^n(V)$ definiert. Wir schreiben $p_{\text{Sym},n}$ für diese Abbildung.

Korollar 5.10.14 Es gilt $p \circ p_{\text{Sym},n} = p$.

Lemma 5.10.15 Es gilt $I_n \subset \text{Ker } p_{\text{Sym},n}$ □

Beweis. Es gilt

$$p_{\text{Sym},n}(v_1 \otimes \cdots \otimes (v_i \otimes v_{i+1} - v_{i+1} \otimes v_i) \otimes \cdots \otimes v_n) = p_{\text{Sym},n}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) - p_{\text{Sym},n}s_1((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) = 0 \text{ und}$$

Es folgt $I_n \subset \text{Ker } p_{\text{Sym},n}$ ■

Daraus folgt, dass es eine lineare Abbildung $\bar{p}_{\text{Sym},n} : \text{Sym}_n(V) \rightarrow \text{Sym}^n(V)$ gibt mit $\bar{p}_{\text{Sym},n} \circ p_n = p_{\text{Sym},n}$. Wir zeigen, dass $\Phi_n \circ \bar{p}_{\text{Sym},n} = \text{Id}_{\text{Sym}_n(V)}$ und dass $\bar{p}_{\text{Sym},n} \circ \Phi_n = \text{Id}_{\text{Sym}^n(V)}$.

Sei $T \in \text{Sym}^n(V)$. Es gilt $T = p_{\text{Sym},n}(T)$ und

$$\bar{p}_{\text{Sym},n} \circ \Phi_n(T) = \bar{p}_{\text{Sym},n}(p_n(T)) = p_{\text{Sym},n}(T) = T.$$

Sei $[T] = p_n(T) \in \text{Sym}_n(V)$ wobei $T \in T_n(V)$. Es gilt

$$\Phi_n \circ \bar{p}_{\text{Sym},n}([T]) = \Phi_n(\bar{p}_{\text{Sym},n}(p_n(T))) = \Phi_n(p_{\text{Sym},n}(T)) = p(p_{\text{Sym},n}(T)) = p(T) = [T].$$

Bemerkung 5.10.16 1. Für $\text{char}(K) = 0$ gibt es ein Isomorphismus von K -Vektorräume

$$\bigoplus_{n \geq 0} \text{Sym}^n(V) \simeq \text{Sym}(V).$$

Aber der Unterraum $\bigoplus_{n \geq 0} \text{Sym}^n(V)$ ist keine Unter-algebra von $T(V)$. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und (e_1, e_2, e_3, e_4) die kanonische Basis. Dann gilt $a = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \text{Sym}^2(V)$ und $b = e_3 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_3 \in \text{Sym}^2(V)$. Aber

$$ab = e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_4 \otimes e_3 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_3 \otimes e_4 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_4 \otimes e_3 \notin \text{Sym}^4(V).$$

Es gilt $s_2(ab) \neq ab$.

2. Für $K = \mathbb{F}_2$ ist die Abbildung $\Phi_2 : \text{Sym}^2(V) \rightarrow \text{Sym}_2(V)$ nicht injektiv (und auch nicht surjektiv). Da $1 = -1$ in \mathbb{F}_2 gilt

$$\Phi_2(v \otimes v' + v' \otimes v) = p(v \otimes v' - v' \otimes v) = 0.$$

Symmetrische Algebra und Polynome

Bemerkung 5.10.17 Nach der Konstruktion von $K[X_1, \dots, X_n]$ ist das System $(X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n})_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von $K[X_1, \dots, X_n]$ (Übung).

Satz 5.10.18 Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Dann gibt es ein Algebraisomorphismus

$$S(V) \simeq K[X_1, \dots, X_n].$$

Beweis. Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V . Sei $f : V \rightarrow K[X_1, \dots, X_n]$ die lineare Abbildung definiert durch $f(v_i) = X_i$ für alle $i \in [1, n]$. Nach dem Satz 5.10.9 gibt es ein Algebrahomomorphismus $S_f : S(V) \rightarrow K[X_1, \dots, X_n]$ mit $S_f \circ \theta = f$. Wir zeigen, dass S_f ein Isomorphismus ist.

Da (v_1, \dots, v_n) erzeugend ist, ist das System $(v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n})_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}}$ ein EZS von $S(V)$. Wir zeigen, dass es eine Basis ist. Seien $\lambda_{i_1, \dots, i_n} \in K$ mit

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_1, \dots, i_n} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} = 0.$$

Es gilt

$$0 = S_f \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_1, \dots, i_n} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \right) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_1, \dots, i_n} S_f(v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n}) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}.$$

Es folgt, dass $\lambda_{i_1, \dots, i_n} = 0$ und $(v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n})_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}}$ ist eine Basis. Die Abbildung S_f ist also bijektiv. ■

Korollar 5.10.19 Sei V ein K -Vektorraum und sei $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ eine Basis. Dann ist $(e_1^{i_1} \cdots e_n^{i_n})_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von $S(V)$.

5.11 Äußere Algebra

Definition

Definition 5.11.1 Sei V ein K -Vektorraum. Die **äußere Algebra** $\bigwedge(V)$ ist die Quotientenalgebra

$$\bigwedge(V) = T(V)/J \text{ wobei } J = (v \otimes v \mid v \in V).$$

Für $a, b \in \bigwedge(V)$ schreiben wir $a \wedge b$ für das Produkt.

Lemma 5.11.2 Das Ideal $J = (v \otimes v \mid v \in V)$ ist ein graduiertes Ideal von $T(V)$. Sei $p : T(V) \rightarrow \bigwedge(V)$ die kanonische Projektion. Die Familie $(p(T_n(V)))_{n \geq 0}$ ist eine Graduierung von $\bigwedge(V)$. □

Beweis. Alle Elemente $v \otimes v$ sind homogen von Grad 2. Es folgt von Lemma 5.8.10.1, dass J graduiert ist. Es folgt, dass die Familie $(p(T_n(V)))_{n \geq 0}$ eine Graduierung von $\bigwedge(V)$ ist. ■

Definition 5.11.3 Wir schreiben $\bigwedge^n(V) = p(T_n(V))$.

Lemma 5.11.4 Die lineare Abbildung $\nu = p \circ \varrho : V \rightarrow T(V) \rightarrow \bigwedge(V)$ ist injektiv. □

Beweis. Die Abbildung ϱ ist injektiv. Es genügt zu zeigen, dass $\varrho(V) \cap J = 0$. Es gilt $\varrho(V) \subset T_1(V)$ und es gilt $J \cap T_1(V) = 0$. ■

Lemma 5.11.5 Die Familie $([v])_{v \in V} = \nu(V)$ ist erzeugend. □

Beweis. Die Familie $\varrho(V)$ ist erzeugend in $T(V)$ und $p : T(V) \rightarrow \bigwedge(V)$ ist surjektiv. Es folgt, dass $\nu(V) = p(\varrho(V))$ erzeugend ist. ■

Universelle Eigenschaft

Satz 5.11.6 Sei $f : V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung mit $f(v)^2 = 0$ für alle $v \in V$. Dann gibt es genau ein Algebramorphismus $\bigwedge_f : \text{bigwedge}(V) \rightarrow A$ mit $f = \bigwedge_f \circ \nu$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & A \\ \nu \downarrow & \nearrow \bigwedge_f & \\ \bigwedge(V) & & \end{array}$$

Beweis. Seien \bigwedge_f und \bigwedge'_f zwei solche Algebramorphismen. Dann gilt $\bigwedge_f(\nu(v)) = \bigwedge'_f(\nu(v))$ für alle $v \in V$. Da $\nu(V)$ erzeugend ist gilt $\bigwedge_f = \bigwedge'_f$.

Nach dem Satz 5.9.10 gibt es ein Algebramorphismus $T_f : T(V) \rightarrow A$ mit $T_f \circ \varrho = f$. Wir zeigen, dass $J \subset \text{Ker}(T_f)$. Sei $v \in V$, es gilt

$$T_f(v \otimes v) = T_f(v)T_f(v) = f(v)^2 = 0.$$

Nach dem Satz 5.3.8.1, gibt es ein Algebramorphismus $S_f : \bigwedge(V) \rightarrow A$ mit $\bigwedge_f \circ p = T_f$

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{T_f} & A \\ p \downarrow & \nearrow \bigwedge_f & \\ \bigwedge(V) & & \end{array}$$

Es gilt $\bigwedge_f \circ \nu = \bigwedge_f \circ p \circ \varrho = T_f \circ \varrho = f$. ■

Korollar 5.11.7 Seien V und W zwei K -Vektorräume und sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau ein Algebramorphismus $\bigwedge(f)$ so, dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \nu_V \downarrow & & \downarrow \nu_W \\ \bigwedge(V) & \xrightarrow{\bigwedge(f)} & \bigwedge(W). \end{array}$$

Die Abbildung $\bigwedge(f)$ ist graduiert.

Beweis. Existenz folgt aus dem obigen Satz für die lineare Abbildung $f \circ \varrho_W : V \rightarrow T(W)$ (weil $f(v)^2 = f(v) \wedge f(v) = 0$ gilt). Wir zeigen, dass $\bigwedge(f)$ graduiert ist. Es genügt zu zeigen, dass für $v_1, \dots, v_n \in V$ gilt $\bigwedge(f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) \in \bigwedge_n(W)$. Aber es gilt $\bigwedge(f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \bigwedge(f)(v_1) \wedge \dots \wedge \bigwedge(f)(v_n) \in \bigwedge^n(W)$. ■

Korollar 5.11.8 Seien $f : V \rightarrow W$ und $g : U \rightarrow V$ zwei lineare Abbildungen. Es gilt $\bigwedge(f \circ g) = \bigwedge(f) \circ \bigwedge(g)$.

Beweis. Die Abbildung $\bigwedge(f) \circ \bigwedge(g) : \bigwedge(U) \rightarrow \bigwedge(W)$ ist ein Algebrhomomorphismus. Für $u \in U$ gilt $\bigwedge(f) \circ \bigwedge(g)(u) = \bigwedge(f)(g(u)) = f(g(u)) = (f \circ g)(u)$. Da es genau ein Algebrhomomorphismus $(\bigwedge(f \circ g))$ gibt mit dieser Eigenschaft gilt $\bigwedge(f \circ g) = \bigwedge(f) \circ \bigwedge(g)$. ■

Rechnungsregeln

Lemma 5.11.9 Seien $v, v' \in V$, es gilt $v \wedge v = 0$ und $v' \wedge v = -v \wedge v'$. □

Beweis. Da $v \otimes v \in J$ gilt $v \wedge v = [v \otimes v] = 0$. Es gilt also $(v + v') \wedge (v + v') = 0$. Es folgt $0 = v \wedge v + v \wedge v' + v' \wedge v + v' \wedge v$. Die zweite Gleichung folgt ■

Lemma 5.11.10 Seien $v_1, \dots, v_{n+1} \in V$. Es gilt

$$v_{n+1} \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_n = (-1)^n v_1 \wedge \dots \wedge v_n \wedge v_{n+1}.$$

Beweis. Per Induktion nach n . Für $n = 1$ folgt die Gleichung vom obigen Lemma. Induktionsannahme: es gilt $v_{n+1} \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_n = (-1)^n v_1 \wedge \dots \wedge v_n \wedge v_{n+1}$. Seien $v_1, \dots, v_{n+2} \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned} v_{n+2} \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_n \wedge v_{n+1} &= (-1)^n v_1 \wedge \dots \wedge v_n \wedge v_{n+2} \wedge v_{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} v_1 \wedge \dots \wedge v_n \wedge v_{n+1} \wedge v_{n+2}. \end{aligned}$$

Lemma 5.11.11 Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\sigma \in S_n$ mit $v_i = v_j$ für ein Paar (i, j) mit $i \neq j$. Dann gilt

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = 0.$$

Beweis. Da $v_i = v_j$ gilt $v_i \wedge v_j = 0$. Es folgt

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = (-1)^{j-i+1} v_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{v_i \wedge v_j}_{=0} \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_{j-1} \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_n = 0.$$

Korollar 5.11.12 Sei $a = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Dann gilt $a \wedge a = 0$.

Lemma 5.11.13 Seien $a \in \bigwedge^n(V)$ und $b \in \bigwedge^m(V)$. Es gilt $b \wedge a = (-1)^{nm} a \wedge b$. □

Beweis. Seien $a = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ und $b = v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_m$. Wir zeigen $b \wedge a = (-1)^{nm} a \wedge b$ per Induktion nach m . Die Gleichung für $m = 1$ folgt aus Lemma 5.11.10. Induktionsannahme: $b \wedge a = (-1)^{nm} a \wedge b$ für $a = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ und $b = v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_m$. Sei $b' = v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_m \wedge v'_{m+1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} b' \wedge a &= b \wedge v'_{m+1} \wedge a \\ &= (-1)^n b \wedge a \wedge v'_{m+1} \\ &= (-1)^n (-1)^{nm} a \wedge b \wedge v'_{m+1} \\ &= (-1)^{n(m+1)} a \wedge b'. \end{aligned}$$

Seien $a \in \bigwedge^n(V)$ und $b \in \bigwedge^m(V)$. Dann sind a und b lineare Kombinationen von reine Tensoren:

$$a = \sum \lambda_{v_1, \dots, v_n} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \text{ und } b = \sum \mu_{v'_1, \dots, v'_m} v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_m.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} b \wedge a &= \left(\sum \mu_{v'_1, \dots, v'_m} v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_m \right) \wedge \left(\sum \lambda_{v_1, \dots, v_n} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \right) \\ &= \sum \sum \lambda_{v_1, \dots, v_n} \mu_{v'_1, \dots, v'_m} v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \wedge v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_m \\ &= (-1)^{nm} \sum \sum \lambda_{v_1, \dots, v_n} \mu_{v'_1, \dots, v'_m} v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_m \wedge v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \\ &= (-1)^{nm} a \wedge b. \end{aligned}$$

Lemma 5.11.14 Sei A eine K -Algebra und seien (a_1, \dots, a_n) Vektoren von A so, dass $a_i^2 = 0$ für alle $i \in [1, n]$ und $a_i a_j = -a_j a_i$ für alle $i \neq j \in [1, n]$. Dann gilt $a^2 = 0$ für alle $a \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. \square

Beweis. Wir schreiben

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j a_i a_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j a_i a_j \\ &= 0 + \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (a_i a_j + a_j a_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.11.15 Das Lemma ist noch wahr für unendliche EZS.

Satz 5.11.16 Sei $a \in \bigwedge^{2n+1}(V)$. Dann gilt $a \wedge a = 0$. \square

Beweis. Folgt aus dem obigen Lemma mit reine Tensoren als EZS. \blacksquare

Satz 5.11.17 1. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\sigma \in S_n$. Es gilt

$$v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

2. Sei $T \in T_n(V)$ und $\sigma \in S_n$. Es gilt

$$[\sigma(T)] = \varepsilon(\sigma)[T].$$

Beweis. 1. Da alle $\sigma \in S_n$ als Produkt von elementare Transpositionen geschrieben werden können, genügt es zu zeigen, dass

$$v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) v_1 \wedge \dots \wedge v_n$$

gilt für $\sigma = s_i$ mit $i \in [1, n-1]$. Es gilt

$$\begin{aligned} v_{s_i(1)} \wedge \dots \wedge v_{s_i(n)} &= v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge v_{i+2} \wedge \dots \wedge v_n \\ &= -v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge v_{i+2} \wedge \dots \wedge v_n \\ &= \varepsilon(s_i) v_1 \wedge \dots \wedge v_n. \end{aligned}$$

2. Wir schreiben

$$T = \sum \lambda_{v_1, \dots, v_n} v_1 \otimes \dots \otimes v_n.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} [\sigma(T)] &= \sum \lambda_{v_1, \dots, v_n} [\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)] \\ &= \sum \lambda_{v_1, \dots, v_n} [v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}] \\ &= \sum \lambda_{v_1, \dots, v_n} v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(n)} \\ &= \varepsilon(\sigma) \sum \lambda_{v_1, \dots, v_n} v_1 \wedge \dots \wedge v_n \\ &= \varepsilon(\sigma)[T]. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.11.18 Es gilt nicht immer $a \wedge a = 0$. Für $V = \mathbb{R}^4$ und $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die kanonische Basis. Wir werden später zeigen, dass $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Es gilt also

$$(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) \wedge (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0.$$

Satz 5.11.19 Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim V = d$ und sei (v_1, \dots, v_n) ein System von Vektoren in V mit $n > d$. Dann gilt $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = 0$. \square

Beweis. Sei $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ eine Basis von V . Wir schreiben

$$v_j = \sum_{i=1}^d a_{i,j} e_i \text{ für alle } j \in [1, n].$$

Da $n > d$ gilt $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = 0$ für alle Folgen (i_1, \dots, i_n) . Es gilt also

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \dots \wedge v_n &= \left(\sum_{i_1=1}^d a_{i_1,1} e_{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^d a_{i_n,n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d (a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n}) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Korollar 5.11.20 Sei $d = \dim V$. Es gilt $\bigwedge^n(V) = 0$ für $n > d$.

Alternierende Abbildungen

Definition 5.11.21 Sei A eine K -Algebra und sei $f : V^n \rightarrow A$ eine Abbildung. Die Abbildung f heißt **alternierend** wenn f multilinear ist und $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ sobald es Indizes $i \neq j$ mit $v_i = v_j$ gibt.

Beispiel 5.11.22 Die Abbildung $\det : V^n \rightarrow K$ ist alternierend.

Satz 5.11.23 Sei $f : V^n \rightarrow A$ eine alternierende Abbildung. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f_\wedge : \bigwedge^n(V) \rightarrow A$ mit $f_\wedge(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = f(v_1, \dots, v_n)$. \square

Beweis. Eindeutigkeit: seien f_\wedge und f'_\wedge zwei solche Abbildungen. Es gilt $f_\wedge(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = f(v_1, \dots, v_n) = f'_\wedge(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$. Da $(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$ ein EZS ist folgt, dass $f_\wedge = f'_\wedge$.

Existenz: Da f multilinear ist, gibt es ein $L_f : V^\otimes \rightarrow A$ mit $L_f(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_1, \dots, v_n)$. Per Definition gilt $\bigwedge^n(V) = V^{\otimes n} / (J \cap V^{\otimes n})$. Wir zeigen, dass für $T \in J \cap T_n(V)$ gilt $L_f(T) = 0$. Nach Lemma 5.6.11 gilt

$$T = \sum_{x, v_1, \dots, v_{n-2}} v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes x \otimes x \otimes v_{k+1} \otimes v_{n-2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} L_f(T) &= \sum_{x, v_1, \dots, v_{n-2}} L_f(v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes x \otimes x \otimes v_{k+1} \otimes v_{n-2}) \\ &= \sum_{x, v_1, \dots, v_{n-2}} f(v_1, \dots, v_k, x, x, v_{k+1}, v_{n-2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es gibt also eine lineare Abbildung $f_\wedge : \bigwedge^n(V) \rightarrow A$ mit $f_\wedge([T]) = L_f(T)$. Für $v_1, \dots, v_n \in V$ gilt

$$f_\wedge(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = L_f(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_1, \dots, v_n).$$

Beispiel 5.11.24 Sei $V = \mathbb{R}^n$ und seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren. Wir schreiben

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \text{ für alle } i \in [1, n] \text{ und } A = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Abbildung $\det : V^n \rightarrow K$ definiert durch $\det(v_1, \dots, v_n) = \det(A)$ multilinear und alternierend. Es folgt, dass es eine lineare Abbildung

$$\det_\wedge : \bigwedge^n(V) \rightarrow K$$

gibt mit $\det_\wedge(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \det(v_1, \dots, v_n) = \det(A)$.

Korollar 5.11.25 Sei (e_1, \dots, e_n) ein System von Vektoren in V . Es gilt

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ ist linear unabhängig} \Leftrightarrow e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq 0.$$

Beweis. Für $n > d$ ist (e_1, \dots, e_n) nie linear unabhängig und es gilt immer $e_1 \wedge \dots \wedge e_n = 0$. Ohne Beschränkung können wir annehmen, dass $n \leq d$.

Angenommen (e_1, \dots, e_n) sei linear unabhängig. Wir ergänzen (e_1, \dots, e_n) in eine Basis $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_d)$ von V . Für alle Systeme (v_1, \dots, v_n) von Vektoren schreiben wir

$$v_j = \sum_{i=1}^d a_{i,j} e_i \text{ für alle } j \in [1, n].$$

Die Abbildung $f : V^n \rightarrow K$ definiert durch

$$f(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{i,j})_{i,j \in [1,n]}$$

ist multilinear und Alternierend. Es gibt also eine lineare Abbildung $f_\wedge : \bigwedge^n(V) \rightarrow K$ mit $f_\wedge(v_1, \dots, v_n) = \det(A)$. Insbesondere gilt

$$f_\wedge(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \det(e_1, \dots, e_n) = \det(I_n) = 1 \neq 0.$$

Daraus folgt, dass $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq 0$.

Umgekehrt nehmen wir an, dass (e_1, \dots, e_n) linear abhängig ist. Es gibt also Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ nicht alle null mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0.$$

Sei $j \in [1, n]$ mit $\lambda_j \neq 0$. Es gilt

$$e_j = - \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} e_i.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} e_1 \wedge \dots \wedge e_n &= e_1 \wedge \dots \wedge e_{j-1} \wedge \left(- \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} e_i \right) \wedge e_{j+1} \wedge \dots \wedge e_n \\ &= - \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} e_1 \wedge \dots \wedge e_{j-1} \wedge e_i \wedge e_{j+1} \wedge \dots \wedge e_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Basis

Satz 5.11.26 Sei (e_1, \dots, e_d) eine Basis von V und sei $n \leq d$. Das System

$$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n})_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq d}$$

ist eine Basis von $\bigwedge^n(V)$. □

Beweis. Das System $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n})_{i_1, \dots, i_n \in [1, d]}$ ist eine Basis von $V^{\otimes n} = T_n(V)$. Es folgt, dass $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n})_{i_1, \dots, i_n \in [1, d]}$ ein EZS von $\bigwedge^n(V)$ ist. Es gilt auch, für $\sigma \in S_n$:

$$e_{\sigma(i_1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(i_n)} = \varepsilon(\sigma) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}.$$

Das System $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n})_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq d}$ ist also ein EZS. Wir zeigen, dass es linear unabhängig ist. Seien $(\lambda_{i_1, \dots, i_n} \in K$ Skalare mit

$$\sum_{i_1 < \dots < i_n} \lambda_{i_1, \dots, i_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = 0.$$

Für $v_1, \dots, v_n \in V$ schreiben wir

$$v_j = \sum_{i=1}^d a_{i,j} e_i \text{ für alle } j \in [1, n].$$

Für eine Folge $1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq d$ betrachten wir die Abbildung $f : V^n \rightarrow K$ definiert durch

$$f(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{j_k, l})_{k, l \in [1, n]}.$$

Diese Abbildung ist multilinear und Alternierend. Es gibt also eine lineare Abbildung $f_\wedge : \bigwedge^n(V) \rightarrow K$ mit $f_\wedge(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{l_k, l})_{k, l \in [1, n]}$. Für f gilt

$$f_\wedge(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (j_1, \dots, j_n) = (i_1, \dots, i_n) \\ = & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$0 = \sum_{i_1 < \dots < i_n} \lambda_{i_1, \dots, i_n} f_\wedge(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}) = \lambda_{j_1, \dots, j_n}.$$

Es folgt, dass $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n})_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq d}$ eine Basis von $\bigwedge^n(V)$ ist. ■

Korollar 5.11.27 Sei V endlich-dimensional. Dann ist $\bigwedge(V)$ eine endlich-dimensionale Algebra.

Antisymmetrische Tensoren und äußere Algebra

Satz 5.11.28 Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) = 0$. Die Komposition

$$\Phi_n : \text{Alt}^n(V) \subset T_n(V) \xrightarrow{p} \bigwedge^n(V)$$

ist ein Isomorphismus von K -Vektorräume. □

Beweis. Sei J das Ideal $J = (v \otimes v \mid v \in V)$ und sei $J_n = J \cap T_n(V)$. Die Einschränkung der Quotientabbildung $p : T(V) \rightarrow \bigwedge^n(V)$ auf $T_n(V)$ ist

$$p_n : T_n(V) \rightarrow \bigwedge^n(V) = T_n(V)/(J \cap T_n(V)) = T_n(V)/J_n.$$

Lemma 5.11.29 Es gilt $J_n = \langle (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n \mid v_i \in V \text{ für } i \in [1, n]) \rangle$. □

Beweis. Folgt aus Lemma 5.6.11. ■

Lemma 5.11.30 Sei $\sigma \in S_n$, es gilt $p \circ \sigma = \varepsilon(\sigma)p$. □

Beweis. Folgt aus dem Satz 5.11.17. ■

Für $n \geq 0$ haben wir die lineare Abbildung $T_n(V) \rightarrow \text{Alt}^n(V)$ definiert. Wir schreiben $p_{\text{Alt},n}$ für diese Abbildung.

Korollar 5.11.31 Es gilt $p \circ p_{\text{Alt},n} = p$.

Lemma 5.11.32 Es gilt $J_n \subset \text{Ker } p_{\text{Alt},n}$ □

Beweis. Übung. ■

Daraus folgt, dass es eine lineare Abbildung $\bar{p}_{\text{Alt},n} : \bigwedge^n(V) \rightarrow \text{Alt}^n(V)$ gibt mit $\bar{p}_{\text{Alt},n} \circ p_n = p_{\text{Alt},n}$. Wir zeigen, dass $\Phi_n \circ \bar{p}_{\text{Alt},n} = \text{Id}_{\text{Alt}^n(V)}$ und dass $\bar{p}_{\text{Alt},n} \circ \Phi_n = \text{Id}_{\bigwedge^n(V)}$.

Sei $T \in \text{Sym}^n(T)$. Es gilt $T = p_{\text{Alt},n}(T)$ und

$$\bar{p}_{\text{Alt},n} \circ \Phi_n(T) = \bar{p}_{\text{Alt},n}(p_n(T)) = p_{\text{Alt},n}(T) = T.$$

Sei $[T] = p_n(T) \in \bigwedge^n(V)$ wobei $T \in T_n(V)$. Es gilt

$$\Phi_n \circ \bar{p}_{\text{Alt},n}([T]) = \Phi_n(\bar{p}_{\text{Alt},n}(p_n(T))) = \Phi_n(p_{\text{Alt},n}(T)) = p(p_{\text{Alt},n}(T)) = p(T) = [T].$$

Bemerkung 5.11.33 1. Für $\text{char}(K) = 0$ gibt es ein Isomorphismus von Vektorräumen

$$\bigoplus_{n \geq 0} \text{Alt}^n(V) \simeq \bigwedge(V).$$

Aber der Unterraum $\bigoplus_{n \geq 0} \text{Alt}^n(V)$ ist keine Unteralgebra von $T(V)$. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und (e_1, e_2, e_3, e_4) die kanonische Basis. Dann gilt $a = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \in \text{Alt}^2(V)$ und $b = e_3 \otimes e_4 - e_4 \otimes e_3 \in \text{Alt}^2(V)$. Aber

$$ab = e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_4 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_3 \otimes e_4 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_4 \otimes e_3 \notin \text{Alt}^4(V).$$

Es gilt $s_2(ab) \neq -ab$.

2. Für $K = \mathbb{F}_2$ ist die Abbildung $\Phi_2 : \text{Alt}^2(V) \rightarrow \bigwedge_2(V)$ nicht injektiv (und auch nicht surjektiv).

6 Kombinatorischer Exkurs

6.1 Abbildungen

Definition 6.1.1 1. Seien E und F zwei Mengen, wir schreiben

$$\mathcal{F}(E, F) = \{f : E \rightarrow F\}$$

für die Menge aller Abbildungen von E nach F .

2. Sei E eine endliche Menge. Wir schreiben $|E|$ für die Anzahl der Elemente in E .

Satz 6.1.2 Es gilt

$$|\mathcal{F}([1, n], [1, d])| = d^n.$$

Beweis. Die Abbildung f ist durch die Folge $(f(1), \dots, f(n))$ eindeutig bestimmt. Für alle $f(i)$ haben d Auswahlen. Es folgt $|\mathcal{F}([1, n], [1, d])| = d^n$. ■

Definition 6.1.3 1. Sei $\text{Inj}(E, F)$ die Menge aller injektiven Abbildungen von E nach F .

2. Sei $\text{Surj}(E, F)$ die Menge aller surjektiven Abbildungen von E nach F .

3. Sei $\text{Bij}(E, F)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von E nach F .

Satz 6.1.4 Es gilt

$$|\text{Inj}([1, n], [1, d])| = \begin{cases} \frac{d!}{(d-n)!} & \text{für } n \leq d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Die Abbildung f ist durch die Folge $(f(1), \dots, f(n))$ eindeutig bestimmt. Für $f(1)$ haben d Auswahlen, für $f(2)$ haben wir $d-1$ Auswahlen weil $f(2) \neq f(1)$... Es folgt (Per Induktion!)

$$|\text{Inj}([1, n], [1, d])| = d(d-1) \cdots (d-n+1) = \frac{d!}{(d-n)!}.$$

Korollar 6.1.5 Es gilt

$$|\text{Bij}([1, n], [1, n])| = n!.$$

Lemma 6.1.6 Seien E und F zwei endliche Mengen. Sei $\Phi : E \rightarrow F$ eine Abbildung. Es gilt

$$|E| = \sum_{f \in F} |\Phi^{-1}(f)|.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass gilt

$$E = \coprod_{f \in F} \Phi^{-1}(f).$$

Wir zeigen zuerst, dass es eine disjunkte Vereinigung ist. Sei $e \in \Phi^{-1}(f) \cap \Phi^{-1}(f')$. Dann gilt $f = \Phi(e) = f'$ und $\Phi^{-1}(f) = \Phi^{-1}(f')$.

Sei $e \in E$ und $f = \Phi(e)$. Dann gilt $e \in \Phi^{-1}(f)$. ■

Definition 6.1.7 1. Sei $\text{Steig}([1, n], [1, d])$ die Menge aller steigenden Abbildungen von $[1, n]$ nach $[1, d]$.

2. Sei $\text{Ssteig}([1, n], [1, d])$ die Menge aller streng steigenden Abbildungen von $[1, n]$ nach $[1, d]$.

3. Sei $\mathcal{P}_n(E)$ die Menge aller Teilmengen $F \subset E$ mit n Elementen.

Satz 6.1.8 Es gilt

$$|\text{Steig}([1, n], [1, d])| = |\mathcal{P}_n([1, d])| = \begin{cases} \frac{d!}{(d-n)!n!} & \text{für } n \leq d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. 1. Für $n > d$ sind alle Mengen leer. Angenommen $n \leq d$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \text{Inj}([1, n], [1, d]) \rightarrow \mathcal{P}_n([1, d])$$

definiert durch $\Phi(f) = f([1, n])$. Da f injektiv ist, hat $f([1, n])$ genau n Elemente und die Abbildung Φ ist wohl definiert.

Sei $F \subset [1, d]$ mit n Elementen. Wir bestimmen $\Phi^{-1}(F)$. Wir schreiben

$$F = \{i_1 < \dots < i_n\} \subset [1, d].$$

Eine Abbildung $f : [1, n] \rightarrow [1, d]$ ist genau dann in $\Phi^{-1}(F)$, wenn

$$\{f(1), \dots, f(n)\} = f([1, n]) = F = \{i_1, \dots, i_n\}.$$

Die Abbildung f ist also durch eine Bijektion $[1, n] \rightarrow F$ bestimmt. Es gilt $n!$ solche Abbildungen. Daraus folgt

$$|\Phi^{-1}(F)| = n!.$$

Aus dem Lemma folgt

$$|\text{Inj}([1, n], [1, d])| = \sum_{F \in \mathcal{P}_n([1, d])} n! = n! |\mathcal{P}_n([1, d])| \text{ und } |\mathcal{P}_n([1, d])| = \frac{d!}{(d-n)!n!}.$$

Eine streng steigende Abbildung ist injektiv. Es gilt also $\text{Sstreig}([1, n], [1, d]) \subset \text{Inj}([1, n], [1, d])$. Wir zeigen, dass $\Phi|_{\text{Sstreig}([1, n], [1, d])} : \text{Sstreig}([1, n], [1, d]) \rightarrow \mathcal{P}_n([1, d])$ eine Bijektion ist. Sei $F \subset [1, d]$ mit n Elemente. Wir schreiben

$$F = \{i_1 < \dots < i_n\} \subset [1, d].$$

Es gibt genau eine streng steigende Abbildung $f : [1, n] \rightarrow [1, d]$ mit $f([1, n]) = F$: Die Abbildung $f(k) = i_k$. ■

Definition 6.1.9 Wir schreiben

$$\binom{d}{n} = \begin{cases} \frac{d!}{(d-n)!n!} & \text{für } n \leq d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Korollar 6.1.10 Es gilt

$$|\text{Steig}([1, n], [1, d])| = \binom{d+n-1}{n}.$$

Beweis. Sei $\Psi : \text{Steig}([1, n], [1, d]) \rightarrow \text{Ssteig}([1, n], [1, n+d-1])$ definiert durch $\psi(f)(k) = f(k) + k - 1$.

Für $k \in [1, n]$ gilt $\psi(f)(k) = f(k) + k - 1 \leq d + n - 1$. Wir zeigen, dass $\Psi(f)$ streng steigend ist. Sei $i < j$ es gilt $\Psi(f)(i) = f(i) + i - 1 \leq f(j) + i - 1 < f(j) + j - 1 = \psi(f)(j)$. Die Abbildung Ψ ist also wohl definiert.

Wir zeigen, dass Ψ injektiv ist. Seien f und f' mit $\Psi(f) = \Psi(f')$. Dann gilt für alle $k \in [1, n]$:

$$f(k) = \Psi(f)(k) - k + 1 = \Psi(f')(k) - k + 1 = f'(k).$$

Es folgt $f = f'$ und Ψ ist injektiv.

Wir zeigen, dass Ψ surjektiv ist. Sei $g \in \text{Ssteig}([1, n], [1, n+d-1])$. Dann gilt $1 \leq g(1) < g(2) < \dots < g(n) < d + n - 1$. Wir zeigen $g(k) \geq k$ per Induktion nach k . Für $k = 1$ gilt $g(1) \geq 1$. Angenommen $g(k) \geq k$. Es gilt $g(k+1) > g(k)$ also $g(k+1) \geq g(k) + 1 \geq k + 1$. Wir zeigen $g(k) \leq d + n - 1$ per absteigende Induktion nach k . Es gilt $g(n) \leq d + n - 1$. Angenommen $g(k+1) \leq d + k$. Es gilt $g(k) \leq g(k+1) - 1 \leq d + k - 1$.

Wir setzen $f(k) = g(k) + 1 - k$. Es gilt $f(k) \geq k + 1 - k = 1$ und $f(k) \leq d + k - 1 + 1 - k = d$. Wir zeigen, dass f steigen ist. Es gilt $f(k+1) = g(k+1) + 1 - k - 1 \leq g(k) + 1 - k = f(k)$. Es gilt also $f \in \text{Steig}([1, n], [1, d])$ und $\Psi(f) = g$.

Es folgt, dass Ψ eine Bijektion ist. ■

6.2 Formeln

Lemma 6.2.1 Es gilt

$$\binom{d}{n} = \binom{d}{d-n} \text{ und } \binom{d}{n} + \binom{d}{n+1} = \binom{d+1}{n+1}.$$

Beweis. Übung. ■

Satz 6.2.2 Sei A eine K -Algebra und seien $a, b \in A$ mit $ab = ba$. Für alle $d \geq 0$ gilt

$$(a+b)^d = \sum_{n=0}^d \binom{d}{n} a^n b^{d-n}.$$

Beweis. Wir zeigen das folgende Lemma

Lemma 6.2.3 Seien $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in A$ so, dass alle Elemente a_i und b_i kommutieren. Es gilt

$$(a_1 + b_1) \cdots (a_d + b_d) = \sum_{F \subset [1,d]} a_F b_{F^c}$$

wobei

$$a_F = \prod_{i \in F} a_i \text{ und } b_{F^c} = \prod_{i \notin F} b_i.$$

Beweis. Per Induktion nach d . Für $d = 1$ ist es wahr. Angenommen gilt

$$(a_1 + b_1) \cdots (a_d + b_d) = \sum_{F \subset [1,d]} a_F b_{F^c}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{d+1} (a_i + b_i) &= \left(\sum_{F \subset [1,d]} a_F b_{F^c} \right) (a_{d+1} + b_{d+1}) \\ &= a_{d+1} \sum_{F \subset [1,d]} a_F b_{F^c} + b_{d+1} \sum_{F \subset [1,d]} a_F b_{F^c} \\ &= \sum_{F \subset [1,d+1], d+1 \in F} a_F b_{F^c} + \sum_{F \subset [1,d+1], d+1 \notin F} a_F b_{F^c}. \end{aligned}$$

Das Lemma folgt. ■

Das Lemma mit $a_1 = \dots = a_d = a$ und $b_1 = \dots = b_d = b$ gibt den Satz:

$$(a+b)^d = \sum_{n=0}^d \sum_{F \subset \mathcal{P}_n([1,d])} a^n b^{d-n} = \sum_{n=0}^d \binom{d}{n} a^n b^{d-n}.$$

Korollar 6.2.4 Es gilt

$$\sum_{n=0}^d \binom{d}{n} = 2^d \text{ und } \sum_{n=0}^d (-1)^k \binom{d}{n} = 0.$$

Lemma 6.2.5 Sei p eine Primzahl. Dann teilt p alle $\binom{p}{k}$ für $k \in [1, p-1]$. □

Beweis. Übung. ■

Korollar 6.2.6 Sei p eine Primzahl und K ein Körper mit $\text{char}(K) = p$. Sei A eine K -Algebra und seien $a, b \in A$ mit $ab = ba$. Für alle $d \geq 0$ gilt

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

6.3 Basen und Dimension

Satz 6.3.1 Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim V = d$. Es gilt

$$\dim T_n(V) = d^n, \dim \text{Sym}_n(V) = \binom{d+n-1}{n}, \dim \bigwedge^n(V) = \binom{d}{n} \text{ und } \dim \bigwedge(V) = 2^d.$$

Beweis. Sei $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ eine Basis von V .

Dann ist $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n})_{i_1, \dots, i_n \in [1, d]}$ eine Basis von $T_n(V)$. Die Folge (i_1, \dots, i_n) definiert genau eine Abbildung $f : [1, n] \rightarrow [1, d]$ dank $f(k) = i_k$. Es gibt also $|\mathcal{F}([1, n], [1, d])| = d^n$ Elemente in der Basis.

Dann ist $(e_{i_1} \cdots e_{i_n})_{i_1 \leq \dots \leq i_n \in [1, d]}$ eine Basis von $\text{Sym}_n(V)$. Die Folge (i_1, \dots, i_n) definiert genau eine Abbildung steigende Abbildung $f : [1, n] \rightarrow [1, d]$ dank $f(k) = i_k$. Es gibt also $|\text{Steig}([1, n], [1, d])| = \binom{d+n-1}{n}$ Elemente in der Basis.

Dann ist $(e_{i_1} \cdots e_{i_n})_{i_1 < \dots < i_n \in [1, d]}$ eine Basis von $\bigwedge^n(V)$. Die Folge (i_1, \dots, i_n) definiert genau eine Abbildung streng steigende Abbildung $f : [1, n] \rightarrow [1, d]$ dank $f(k) = i_k$. Es gibt also $|\text{Ssteig}([1, n], [1, d])| = \binom{d}{n}$ Elemente in der Basis.

Es gilt

$$\dim \bigwedge(V) = \sum_{n=0}^d \dim \bigwedge^n(V) = \sum_{n=0}^d \binom{d}{n} = 2^d.$$

7 Bilineare und sesquilineare Formen

7.1 Definition

Definition 7.1.1 1. Seien V und W zwei K -Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $B : V \times W \rightarrow K$ heißt **Bilinearform**.

2. Ein Bilinearform B heißt **symmetrisch**, wenn $V = W$ und $B(v, w) = B(w, v)$ für alle $v, w \in V$.

3. Ein Bilinearform B heißt **antisymmetrisch**, wenn $V = W$ und $B(v, w) = -B(w, v)$ für alle $v, w \in V$.

4. Ein Bilinearform B heißt **alternierend**, wenn $V = W$ und $B(v, v) = 0$ für alle $v \in V$.

Definition 7.1.2 1. Sei σ ein Körperautomorphismus von K und seien V und W zwei K -Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt **σ -linear**, wenn

$$f(\lambda v + \mu v') = \sigma(\lambda)f(v) + \sigma(\mu)f(v')$$

gilt für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $v, v' \in V$.

2. Seien V und W zwei K -Vektorräume. Eine Abbildung $B : V \times W \rightarrow K$ heißt **sesquilinear Form**, wenn

- für alle $w \in W$, $B(\cdot, w) : V \rightarrow K$ linear ist und
- für alle $v \in V$, $B(v, \cdot) : W \rightarrow K$ σ -linear und

3. Eine sesquilineare Form B heißt **hermitsch**, wenn $W = V$ und $B(w, v) = \sigma(B(v, w))$ für alle $v, w \in V$ gilt.

4. Eine sesquilineare Form B heißt **antihermitsch**, wenn $W = V$ und $B(w, v) = -\sigma(B(v, w))$ für alle $v, w \in V$ gilt.

Beispiel 7.1.3 1. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n = W$. Für $v = (x_1, \dots, x_n)$ und $w = (y_1, \dots, y_n)$ setzen wir

$$B_1(v, w) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Dann ist B_1 eine symmetrische Bilinearform.

2. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^{2n}$. Für $v = (x_1, \dots, x_{2n})$ und $w = (y_1, \dots, y_{2n})$ setzen wir

$$B_2(v, w) = x_1 y_{2n} + \dots + x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_{n+1} - x_{2n} y_1.$$

Dann ist B_2 eine antisymmetrische und alternierende Bilinearform.

3. Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $V = K^2$. $v = (x_1, x_2)$ und $w = (y_1, y_2)$ setzen wir

$$B_3(v, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Dann ist B_2 eine symmetrische und eine antisymmetrische Bilinearform aber nicht alternierend: $B_3((1, 0), (1, 0)) = 1 \neq 0$.

4. Sei $K = \mathbb{C}$ und $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation: $\sigma(z) = \bar{z}$. Dann ist σ ein Körperautomorphismus. Für $v = (x_1, \dots, x_n)$ und $w = (y_1, \dots, y_n)$ setzen wir

$$B_4(v, w) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Dann ist B_4 eine hermitesche σ -sesquilinear form.

5. Sei $K = \mathbb{C}$ und $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation: $\sigma(z) = \bar{z}$. Dann ist σ ein Körperautomorphismus. Für $v = (x_1, \dots, x_{2n})$ und $w = (y_1, \dots, y_{2n})$ setzen wir

$$B_4(v, w) = x_1 \bar{y}_{2n} + \dots + x_n \bar{y}_{n+1} - x_{n+1} \bar{y}_{n+1} - x_{2n} \bar{y}_1.$$

Dann ist B_4 eine antihermitesche σ -sesquilinear form.

6. Sei V ein K -Vektorraum und sei $W = V^\vee$. Sei $B = \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^\vee \rightarrow K$ definiert durch

$$B(v, \varphi) = \langle v, \varphi \rangle = \varphi(v).$$

Dann ist B eine Bilinearform.

Bemerkung 7.1.4 Da $\sigma = \text{Id}_K$ ein Körperautomorphismus ist, sind alle bilineare Formen auch $\sigma = \text{Id}_K$ -sesquilinear.

Lemma 7.1.5 Sei $B : V \times W \rightarrow K$ mit $V = W$.

1. Sei B (anti)symmetrisch. Dann gilt $B = 0$ oder $\sigma = \text{Id}_K$.

2. Sei B (anti)Hermitisch. Dann gilt $B = 0$ oder $\sigma^2 = \text{Id}_K$. □

Beweis. Es gilt $\sigma(1) = 1$ und $\sigma(-1) + \sigma(1) = \sigma(0) = 0$. Es folgt $\sigma(-1) = -1$. Sei $\varepsilon = \pm 1$. Es gilt also $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon$.

1. Seien v, w mit $B(v, w) \neq 0$ und $\lambda \in K$. Es gilt

$$\sigma(\lambda)B(v, w) = B(v, \lambda w) = \varepsilon B(\lambda w, v) = \varepsilon \lambda B(w, v) = \varepsilon^2 \lambda B(v, w) = \lambda B(v, w).$$

Es folgt $\sigma(\lambda) = \lambda$.

2. Seien v, w mit $B(v, w) \neq 0$ und $\lambda \in K$. Es gilt

$$\lambda B(v, w) = B(\lambda v, w) = \varepsilon \sigma(B(w, \lambda v)) = \varepsilon \sigma(\varepsilon \sigma(B(\lambda v, w))) = \varepsilon^2 \sigma^2(\lambda) \sigma^2(B(v, w)).$$

Für $\lambda = 1$ gilt $\sigma^2(B(v, w)) = B(v, w)$ und es folgt $\sigma^2(\lambda) = \lambda$. ■

Lemma 7.1.6 1. Sei B eine alternierende Bilinearform. Dann ist B antisymmetrisch.

2. Sei $\text{char}(K) \neq 2$ und sei B eine antisymmetrische Bilinearform. Dann ist B alternierend. □

Beweis. 1. Seien $v, w \in V$. Es gilt $B(v, v) = B(w, w) = B(v + w, v + w) = 0$. Aus der Linearität folgt

$$0 = B(v + w, v + w) = B(v, v) + B(v, w) + B(w, v) + B(w, w).$$

Es folgt $B(v, w) = -B(w, v)$.

2. Sei $v \in V$. Es gilt $B(v, v) = -B(v, v)$ also $2B(v, v) = 0$. Weil $2 \neq 0$ ($\text{char}(K) \neq 2$) gilt $B(v, v) = 0$. ■

7.2 Matrizen

Definition 7.2.1 Sei $B : V \times W \rightarrow K$ eine Bilinearform oder eine σ -Sesquilinearform und seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ Basen von V und W . Dann heißt die Matrix

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B) = (B(v_i, w_j)) = \begin{pmatrix} B(v_1, w_1) & \cdots & B(v_1, w_m) \\ \vdots & & \vdots \\ B(v_n, w_1) & \cdots & B(v_n, w_m) \end{pmatrix}$$

die Matrix von B bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{B}' . Für $V = W$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ schreiben wir $M_{\mathcal{B}}(B) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B)$.

Beispiel 7.2.2 1. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n = W$. Für $v = (x_1, \dots, x_n)$ und $w = (y_1, \dots, y_n)$ setzen wir

$$B_1(v, w) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ die kanonische Basis. Dann gilt $M_{\mathcal{B}}(B_1) = I_n$.

2. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^{2n}$. Für $v = (x_1, \dots, x_{2n})$ und $w = (y_1, \dots, y_{2n})$ setzen wir

$$B_2(v, w) = x_1 y_{2n} + \dots + x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_{n+1} - x_{2n} y_1.$$

Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ die kanonische Basis. Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}}(B_2) = \begin{pmatrix} & & & 0 & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & & & \\ \vdots & -1 & \vdots & & 0 & \\ -1 & \cdots & 0 & & & \end{pmatrix}$$

3. Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $V = K^2$. $v = (x_1, x_2)$ und $w = (y_1, y_2)$ setzen wir

$$B_3(v, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ die kanonische Basis. Dann gilt $M_{\mathcal{B}}(B_3) = I_2$.

4. Sei $K = \mathbb{C}$ und $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation: $\sigma(z) = \bar{z}$. Dann ist σ ein Körperautomorphismus. Für $v = (x_1, \dots, x_n)$ und $w = (y_1, \dots, y_n)$ setzen wir

$$B_4(v, w) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ die kanonische Basis. Dann gilt $M_{\mathcal{B}}(B_4) = I_n$.

Lemma 7.2.3 Sei B eine Bilinearform (bzw. eine σ -Sesquilinearform), seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ Basen von V und W und seien

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ wobei } v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \text{ und } w = \sum_{j=1}^m y_j w_j.$$

Dann gilt $B(v, w) = X^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} Y$ bzw. $B(v, w) = X M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \sigma(Y)$. □

Beweis. Folgt aus der Linearität. ■

Definition 7.2.4 Sei $M \in M_n(K)$ eine Matrix.

1. Die Matrix M heißt symmetrisch, wenn $M^T = M$.
2. Die Matrix M heißt antisymmetrisch, wenn $M^T = -M$.
3. Die Matrix M heißt alternierend, wenn $M^T = -M$ und die Hauptdiagonal null ist i. e. $m_{i,i} = 0$ für alle $i \in [1, n]$ wobei $M = (m_{i,j})$.
4. Sei $M = (m_{i,j}) \in M_{m,n}(K)$ eine Matrix und σ ein Körperautomorphismus. Wir setzen $\sigma(M) = (\sigma(m_{i,j}))$.
5. Die Matrix M heißt hermitsch, wenn $M^T = \sigma(M)$ und $\sigma^2 = \text{Id}_K$.
6. Die Matrix M heißt antihermitsch, wenn $M^T = -\sigma(M)$ und $\sigma^2 = \text{Id}_K$.

Lemma 7.2.5 Sei σ ein Körperautomorphismus und seien $M \in M_{m,n}(K)$ und $N \in M_{n,p}(K)$. Dann gilt

$$\sigma(MN) = \sigma(M)\sigma(N).$$

Beweis. Übung. ■

Lemma 7.2.6 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform und sei \mathcal{B} eine Basis.

Die Bilinearform B ist genau dann symmetrisch (bzw. antisymmetrisch, bzw. alternierend, bzw. hermitsch, bzw. antihermitsch) wenn $M_{\mathcal{B}}(B)$ symmetrisch (bzw. antisymmetrisch, bzw. alternierend, bzw. hermitsch, bzw. antihermitsch) ist. □

Beweis. Übung. ■

Lemma 7.2.7 Seien $M, M' \in M_{n,m}(K)$ mit $X^T M Y = X^T M' Y$ für alle $X \in M_{n,1}(K)$ und $Y \in M_{m,1}(K)$. Dann gilt $M = M'$. □

Beweis. Übung. ■

Satz 7.2.8 (Basis Wechsel) 1. Seien \mathcal{B} und \mathcal{C} Basen von V und seien \mathcal{B}' und \mathcal{C}' Basen von W . Sei B eine σ -Sesquilinearform, dann gilt

$$M_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(B) = Q^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(B) \sigma(P)$$

wobei $Q = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}_V)$ und $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{B}'}(\text{Id}_W)$.

2. Insbesondere für $V = W$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ und $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ gilt

$$M_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(B) = Q^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(B) \sigma(Q).$$

Beweis. Seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{C} = (v'_1, \dots, v'_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ und $\mathcal{C}' = (w'_1, \dots, w'_m)$. Für $v \in V$ und $w \in W$ schreiben wir

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} \quad \text{wobei}$$

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n x'_i v'_i \quad \text{und} \quad w = \sum_{j=1}^m y_j w_j = \sum_{j=1}^m y'_j w'_j.$$

Dann gilt $X = QX'$ und $Y = PY'$. Daraus folgt

$$X'^T M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'} \sigma(Y') = B(v, w) = X^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \sigma(Y) = X'^T Q^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \sigma(P) \sigma(Y').$$

Aus dem obigen Lemma folgt, dass $M_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'} = Q^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \sigma(P)$. ■

Korollar 7.2.9 (Basis Wechsel) 1. Seien \mathcal{B} und \mathcal{C} Basen von V und seien \mathcal{B}' und \mathcal{C}' Basen von W . Sei B eine Bilinearform, dann gilt

$$M_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(B) = Q^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(B) P$$

wobei $Q = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}_V)$ und $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{B}'}(\text{Id}_W)$.

2. Insbesondere für $V = W$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ und $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ gilt

$$M_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(B) = Q^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(B) Q.$$

Definition 7.2.10 1. Seien $M, N \in M_n(K)$. Die Matrizen M und N sind **σ -kongruent** wenn es eine invertierbare Matrix Q gibt mit $N = Q^T M \sigma(Q)$.

2. Seien $M, N \in M_n(K)$. Die Matrizen M und N sind **kongruent** wenn es eine invertierbare Matrix Q gibt mit $N = Q^T M Q$.

Lemma 7.2.11 Die σ -Kongruenzrelation und die Kongruenzrelation sind Äquivalenzrelationen. □

Beweis. Übung. ■

Korollar 7.2.12 Sei B eine σ -Sesquilinearform und seien \mathcal{B} und \mathcal{B}' Basen von V und W . Dann hängt $\text{Rg}(M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B))$ nicht von \mathcal{B} und \mathcal{B}' ab.

Definition 7.2.13 Sei B eine σ -Sesquilinearform und seien \mathcal{B} und \mathcal{B}' Basen von V und W . Dann heißt $\text{Rg}(M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B))$ **der Rank von B** .

7.3 Orthogonalität

Definition 7.3.1 Sei $B : V \times W \rightarrow W$ eine σ -Sesquilinearform.

1. Zwei Vektoren $v \in V$ und $w \in W$ sind **orthogonale** wenn $B(v, w) = 0$. Wir schreiben $v \perp w$.

2. Die σ -Sesquilinearform B heißt **reflexiv** wenn $W = V$ und

$$B(v, w) = 0 \Leftrightarrow B(w, v) = 0$$

für alle $v, w \in V$.

3. Eine σ -Sesquilinearform B heißt **links-ausgeartet** wenn es ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit

$$B(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in W.$$

4. Eine σ -Sesquilinearform B heißt **rechts-ausgeartet** wenn es ein Vektor $w \in W \setminus \{0\}$ gibt mit

$$B(v, w) = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

5. Eine σ -Sesquilinearform B heißt **links nicht ausgeartet** wenn gilt

$$(B(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in W) \Rightarrow v = 0.$$

5. Eine σ -Sesquilinearform B heißt **rechts nicht ausgeartet** wenn gilt

$$(B(v, w) = 0 \text{ für alle } v \in V) \Rightarrow w = 0.$$

6. Eine σ -Sesquilinearform B heißt **rechts ausgeartet** wenn sie links und rechts nicht ausgeartet ist.

Lemma 7.3.2 Symmetrische, antisymmetrische, alternierende, hermitsche und anti-hermitsche Formen sind reflexiv. □

Beweis. Übung. ■

Bemerkung 7.3.3 Für B eine reflexive Bilinearform sind die Bedingungen links ausgeartet und rechts ausgeartet äquivalent.

Lemma 7.3.4 Sei K ein Körper:

1. Sei $X \in M_{d,1}(K)$ eine Matrix mit $X^T Y = 0$ für alle $Y \in M_{d,1}(K)$. Dann gilt $X = 0$.

1. Sei $Y \in M_{d,1}(K)$ eine Matrix mit $X^T Y = 0$ für alle $X \in M_{d,1}(K)$. Dann gilt $Y = 0$. □

Beweis. 1. Sei (e_1, \dots, e_d) die kanonische Basis des K^d . Es gilt $e_i \in M_{d,1}(K)$ und für $X^T = (x_1, \dots, x_n)$ gilt

$$0 = X^T e_i = x_i.$$

Es folgt $X = 0$.

2. Es gilt $(X^T Y)^T = Y^T X$. Nach 1. gilt $Y = 0$. ■

Satz 7.3.5 Sei $B : V \times W \rightarrow K$ eine σ -Sesquilinearform und seien \mathcal{B} und \mathcal{B}' Basen von V .

1. Es gilt: B ist links nicht ausgeartet $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B)^T$ ist injektiv. Insbesondere gilt $\dim V \leq \dim W$.

2. Es gilt: B ist rechts nicht ausgeartet $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B)$ ist injektiv. Insbesondere gilt $\dim V \geq \dim W$.

3. Es gilt: B ist nicht ausgeartet $\Leftrightarrow \det M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) \neq 0$. Insbesondere gilt $\dim V = \dim W$. □

Beweis. Sei $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Für $v \in V$ und $w \in W$ schreiben wir $X \in M_{n,1}(K)$ und $Y \in M_{m,1}(K)$ die Koordinaten-Vektoren von v und w bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{B}' .

1. Sei $v \in V$ mit $B(v, w) = 0$ für alle $w \in W$. Dann gilt $B(v, w) = X^T M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) \sigma(Y)$. Es folgt, dass

$$X^T M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) \sigma(Y) = 0$$

für alle $Y \in M_{m,1}(K)$ wobei $d = \dim V$. Sei $Z = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B)^T X$. Es gilt

$$Z^T Y = X^T M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) \sigma(Y) = 0$$

für alle $Y \in M_{m,1}(K)$. Aus dem obigen Lemma folgt $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B)^T X = Z = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} B \text{ ist links nicht ausgeartet} &\Leftrightarrow v = 0 \\ &\Leftrightarrow X = 0 \\ &\Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B)^T \text{ ist injektiv.} \end{aligned}$$

Da $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B)^T \in M_{m,n}(K)$ ist, folgt $n \leq m$.

2. Sei $w \in W$ mit $B(v, w) = 0$ für alle $v \in V$. Dann gilt $B(v, w) = X^T M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) \sigma(Y)$. Es folgt, dass

$$X^T M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) \sigma(Y) = 0$$

für alle $X \in M_{n,1}(K)$ wobei $d = \dim V$. Sei $Z = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) Y$. Es gilt

$$X^T Z = X^T M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) \sigma(Y) = 0$$

für alle $X \in M_{n,1}(K)$. Aus dem obigen Lemma folgt $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) Y = Z = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} B \text{ ist rechts nicht ausgeartet} &\Leftrightarrow w = 0 \\ &\Leftrightarrow Y = 0 \\ &\Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) \text{ ist injektiv.} \end{aligned}$$

Da $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(B) \in M_{n,m}(K)$ ist, folgt $m \leq n$.

3. Folgt aus 1. und 2. ■

Definition 7.3.6 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine reflexive σ -Sesquilinearform. Sei M eine Teilmenge von V .

1. Die Teilmenge M von V ist **orthogonale**, falls $B(v, w) = 0$ für alle $v, w \in M$ mit $v \neq w$.

2. Die Teilmenge M von V ist **orthonormale**, falls M orthogonal ist und $B(v, v) = 1$ für alle $v \in M$.

1. Die Teilmenge M von V ist **isotrope**, falls $B(v, w) = 0$ für alle $v, w \in M$.

Beispiel 7.3.7 1. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n = W$. Für $v = (x_1, \dots, x_n)$ und $w = (y_1, \dots, y_n)$ setzen wir

$$B_1(v, w) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Dann ist die kanonische Basis eine orthogonale (und auch orthonormale) Teilmenge.

2. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^{2n}$. Für $v = (x_1, \dots, x_{2n})$ und $w = (y_1, \dots, y_{2n})$ setzen wir

$$B_2(v, w) = x_1 y_{2n} + \dots + x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_{2n} - x_{2n} y_1.$$

Dann ist $M = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ eine isotrope Teilmenge (Unterraum) wobei $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2n})$ die kanonische Basis ist.

Definition 7.3.8 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine reflexive σ -Sesquilinearform. Sei M eine Teilmenge von V . Der **Orthogonalraum** von M ist definiert durch

$$M^\perp = \{v \in V \mid v \perp w \text{ für alle } w \in M\}.$$

Wir schreiben auch v^\perp statt $\{v\}^\perp$.

Lemma 7.3.9 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine reflexive σ -Sesquilinearform. Sei M eine Teilmenge von V . Dann ist M^\perp ein Unterraum von V . □

Beweis. Übung. ■

Definition 7.3.10 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine reflexive σ -Sesquilinearform. Wir schreiben $\text{Ker}(B) = V^\perp$. Es ist ein Unterraum von V .

Satz 7.3.11 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine reflexive σ -Sesquilinearform. Dann ist B genau dann nicht ausgeartet, wenn $\text{Ker}(B) = 0$. □

Beweis. Sei $v \in V$ mit $B(v, w) = 0$ für alle $w \in V$. B ist genau dann nicht ausgeartet, wenn $v = 0$. Aber es gilt $v \in \text{Ker}(B)$. Der Satz folgt. ■

Bemerkung 7.3.12 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine reflexive σ -Sesquilinearform. Sei M eine Teilmenge von V . Es gilt $\text{Ker}(B) \subset M^\perp$.

Definition 7.3.13 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine reflexive σ -Sesquilinearform. Ein Unterraum $U \subset V$ ist **nicht ausgeartet** wenn $U \cap U^\perp = 0$.

Satz 7.3.14 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine reflexive σ -Sesquilinearform. Sei $\dim V < \infty$ und sei U nicht ausgeartet. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$. \square

Beweis. Die Summe ist eine direkte Summe per Definition. Sei $n = \dim U$ und sei $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von U . Sei

$$\Phi : V \rightarrow K^n$$

definiert durch $\Phi(v) = (B(v, u_1), \dots, B(v, u_n))$. Die Abbildung Φ ist linear und $\text{Ker}(\Phi) = U^\perp$. Nach dem Rangsatz gilt

$$\dim U^\perp = \dim \text{Ker} \Phi = \dim V - \text{Rg}(\Phi) \geq d - n.$$

Es folgt, dass $\dim(U \oplus U^\perp) \geq n + d - n = d$ und den Satz folgt. \blacksquare

Beispiel 7.3.15 1. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^{2n} = W$. Für $v = (x_1, \dots, x_{2n})$ und $w = (y_1, \dots, y_{2n})$ setzen wir

$$B_1(v, w) = x_1 y_1 + \dots + x_{2n} y_{2n}.$$

Sei $U = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$. Dann gilt $U^\perp = \langle e_{n+1}, \dots, e_{2n} \rangle$ und $U \cap U^\perp = 0$. Der Unterraum U ist nicht ausgeartet. Es gilt $V = U \oplus U^\perp$.

2. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^{2n}$. Für $v = (x_1, \dots, x_{2n})$ und $w = (y_1, \dots, y_{2n})$ setzen wir

$$B_2(v, w) = x_1 y_{2n} + \dots + x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_{n+1} - x_{2n} y_1.$$

Sei $U = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$. Dann gilt $U^\perp = U$. Der Unterraum U ist ausgeartet. Es gilt $V \neq U + U^\perp$ und die Summe ist keine direkte Summe.

Satz 7.3.16 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine reflexive σ -Sesquilinearform und sei U ein Unterraum.

1. Es gilt $\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$.

2. Angenommen B sei nicht ausgeartet. Dann gilt $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$. \square

Beweis. 1. Sei $n = \dim U$, $d = \dim V$ und sei $\mathcal{B}_U = (u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von U . Sei

$$\Psi : V \rightarrow K^n$$

definiert durch $\Psi(v) = (B(v, u_1), \dots, B(v, u_n))$. Die Abbildung Ψ ist linear. Es gilt

$$v \in U^\perp \Leftrightarrow \Psi(v) = 0.$$

Insbesondere gilt $U^\perp = \text{Ker}\Psi$. Es folgt

$$\dim U^\perp = \dim \text{Ker}\Psi = d - \text{Rg}(\Psi) \geq d - n.$$

2. Sei $n = \dim U$, $d = \dim V$ und sei $\mathcal{B}_U = (u_1, \dots, u_n)$ eine Basis von U . Wir ergänzen in $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_d)$ eine Basis von V . Sei

$$\Phi : V \rightarrow K^d$$

definiert durch $\Phi(v) = (B(v, u_1), \dots, B(v, u_d))$. Die Abbildung Φ ist linear. Sei \mathcal{B}' die kanonische Basis des K^d . Es gilt $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\Phi) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B)$. Es gilt

$$v \in U^\perp \Leftrightarrow \Phi(v) = (0, \dots, 0, B(v, u_{n+1}), \dots, B(v, u_d)).$$

Insbesondere gilt $U^\perp = \Phi^{-1}(\langle e_{n+1}, \dots, e_d \rangle)$. Da B nicht ausgeartet ist folgt, dass Φ bijektiv ist. Es folgt $\dim U^\perp = d - n$. ■

7.4 Dualräume

Definition 7.4.1 1. Sei W ein K -Vektorraum, wir schreiben

$$W_\sigma^\vee = \{f : W \rightarrow K \mid f \text{ ist } \sigma\text{-linear}\}.$$

2. Sei $f : V \rightarrow W$ eine σ -lineare Abbildung. Der Kern von f ist

$$\text{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

Lemma 7.4.2 Sei $f : V \rightarrow W$ σ -linear.

1. Es gilt: f injektiv $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = 0$

2. Angenommen $\dim V = \dim W < \infty$. Es gilt: f injektiv $\Leftrightarrow f$ bijektiv $\Leftrightarrow f$ surjektiv. □

Beweis. Übung. ■

Satz 7.4.3 Sei $B : V \times W \rightarrow K$ eine σ -Sesquilinearform und seien

$$\Phi_B : V \rightarrow W_\sigma^\vee \text{ und } \Psi_B : W \rightarrow V^\vee$$

definiert durch $\Phi_B(v)(w) = B(v, w)$ und $\Psi_B(w)(v) = B(v, w)$. Dann ist Φ_B linear und Ψ_B ist σ -linear. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Ker}\Phi_B &= \{v \in V \mid B(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in W\} \text{ und} \\ \text{Ker}\Psi_B &= \{w \in W \mid B(v, w) = 0 \text{ für alle } v \in V\}. \end{aligned}$$

Beweis. Übung. ■

Korollar 7.4.4 Seien V und W endlich-dimensionale K -Vektorräume und sei $B : V \times W \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete σ -Sesquilinearform. Dann sind $\Phi_B : E \rightarrow F^\vee$ und $\Psi_B : W \rightarrow V^\vee$ bijektiv.

Beweis. Es gilt $\text{Ker}\Phi_B = 0$ und $\text{Ker}\Psi_B = 0$. Da alle Vektorräume der Dimension $\dim V$ sind, sind Φ_B und Ψ_B bijektiv. ■

7.5 Quadratische Formen

Definition 7.5.1 Eine Abbildung $Q : V \rightarrow K$ heißt quadratische Form wenn

- $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ und
- $B : V \times V \rightarrow K$ definiert durch $B(v, w) = Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$ ist eine Bilinearform.

Die Bilinearform B heißt **die Polariesierung von Q** . Wenn B nicht ausgeartet ist heißt Q **nicht ausgeartet**.

Bemerkung 7.5.2 Sei Q eine quadratische Form und B die Polariesierung.

1. Die Polariesierung B ist symmetrisch.
2. Es gilt $B(v, v) = 2Q(v)$.
3. Für $\text{char}(K) = 2$ ist also B auch alternierend.
4. Für $\text{char}(K) \neq 2$ ist jede symmetrische Bilinearform die Polariesierung einer quadratischen Form: Sei B eine Bilinearform. Dann ist B die Polariesierung von $Q(v) = \frac{1}{2}B(v, v)$.

7.6 Adjungiert

Satz 7.6.1 Sei $B : V \times W \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete σ -Sesquilinearform und sei $f \in \text{End}(V)$. Dann gibt es genau ein Endomorphismus $f^* \in \text{End}(W)$ mit

$$B(f(v), w) = B(v, f^*(w))$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$. □

Beweis. Sei $w \in W$. Wir zeigen, dass es ein Vektor $f^*(w)$ gibt mit $B(f(v), w) = B(v, f^*(w))$ für alle $v \in V$. Die Abbildung $\varphi : V \rightarrow K$ definiert durch $\varphi(v) = B(f(v), w)$ ist linear. Es gilt also $\varphi \in V^\vee$. Nach Korollar 7.4.4 gibt es ein $f^*(w) \in W$ mit $\Psi_B(f^*(w)) = \varphi$. Es folgt

$$B(v, f^*(w)) = \Psi_B(f^*(w))(v) = \varphi(v) = B(f(v), w)$$

für alle $v \in V$.

Wir zeigen, dass $f^*(w)$ eindeutig bestimmt ist. Seien $f^*(w)$ und $f'^*(w)$ zwei Vektoren in W mit $B(v, f^*(w)) = B(f(v), w) = B(v, f'^*(w))$. Es gilt

$$B(v, f^*(w) - f'^*(w)) = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Da B nicht ausgeartet ist gilt $f^*(w) - f'^*(w) = 0$ und $f^*(w) = f'^*(w)$. Die Abbildung $w \mapsto f^*(w)$ ist also wohl definiert. Wir zeigen, dass f^* linear ist. Seien $w, w' \in W$ und $\lambda, \mu \in K$. Es gilt für alle $v \in V$:

$$\begin{aligned} B(v, f^*(\lambda w + \mu w')) &= B(f(v), \lambda w + \mu w') \\ &= \sigma(\lambda)B(f(v), w) + \sigma(\mu)B(f(v), w') \\ &= \sigma(\lambda)B(v, f^*(w)) + \sigma(\mu)B(v, f^*(w')) \\ &= B(v, \lambda f^*(w) + \mu f^*(w')). \end{aligned}$$

Da B nicht ausgeartet ist folgt, dass $f^*(\lambda w + \mu w') = \lambda f^*(w) + \mu f^*(w')$ und dass f^* linear ist. ■

Definition 7.6.2 Sei $B : V \times W \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete σ -Sesquilinearform und sei $f \in \text{End}(V)$. Der Endomorphismus $f^* \in \text{End}(W)$ mit

$$B(f(v), w) = B(v, f^*(w))$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$ heißt f^* **der adjungierte Endomorphismus von f** .

Beispiel 7.6.3 Sei $B : V \times V^\vee \rightarrow K$ definiert durch $B(v, \varphi) = \varphi(v)$. Dann ist B nicht ausgeartet (Übung). Sei $f \in \text{End}(V)$ und $f^* \in \text{End}(V^\vee)$. Es gilt

$$f^\vee(\varphi)(v) = \varphi(f(v)) = B(f(v), \varphi) = B(v, f^*(\varphi)) = f^*(\varphi)(v).$$

Insbesondere gilt $f^* = f^\vee$.

Satz 7.6.4 Sei $B : V \times W \rightarrow K$ eine nicht ausgeartete σ -Sesquilinearform. Seien \mathcal{B} und \mathcal{B}' Basen von V und W . Sei $f \in \text{End}(V)$ und $f^* \in \text{End}(W)$ und seien $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ und $A^* = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^*)$. Dann gilt

$$\sigma(A^*) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B)^{-1} A M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B) \text{ oder } A^* = \sigma^{-1}(M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B)^{-1} A M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B)).$$

Beweis. Sei $v \in V$ und $w \in W$. Wir schreiben $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ und

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ wobei } v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \text{ und } w = \sum_{j=1}^m y_j w_j.$$

Dann gilt

$$(AX)^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \sigma(Y) = B(f(v), w) = B(v, f^*(w)) = X^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \sigma(A^* Y).$$

Aus Lemma 7.2.7 folgt $A^T M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(B) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \sigma(A^*)$. ■

Beispiel 7.6.5 1. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n = W$. Für $v = (x_1, \dots, x_n)$ und $w = (y_1, \dots, y_n)$ setzen wir

$$B_1(v, w) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Sei $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ und sei A die Matrix von f in der kanonischen Basis des \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$A^* = A^T.$$

2. Sei $K = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{C}^n$. Für $v = (x_1, \dots, x_n)$ und $w = (y_1, \dots, y_n)$ setzen wir

$$B_3(v, w) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Sei $f \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ und sei A die Matrix von f in der kanonischen Basis des \mathbb{C}^n . Dann gilt

$$A^* = \bar{A}^T.$$

Endomorphismen die B erhalten

Definition 7.6.6 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine σ -Sesquilinearform. Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ heißt **B -Isometrie** oder **Isometrie für B** falls

$$B(f(v), f(w)) = B(v, w)$$

für alle $v, w \in V$. Wir schreiben

$$\text{Isom}(B, K) = \{f \in \text{End}_K(V) \mid f \text{ ist eine } B\text{-Isometrie}\}.$$

Lemma 7.6.7 Seien $f, g \in \text{Isom}(B, K)$. Dann gilt $f \circ g \in \text{Isom}(B, K)$. □

Beweis. Es gilt

$$B(f \circ g(v), f \circ g(w)) = B(g(v), g(w)) = B(v, w)$$

für alle $v, w \in V$. ■

Satz 7.6.8 Sei B nicht ausgeartet und $f \in \text{Isom}(B, K)$. Dann ist f injektiv. \square

Beweis. Sei $v \in \text{Ker}(f)$. Es gilt

$$0 = B(0, f(w)) = B(f(v), f(w)) = B(v, w)$$

für alle $w \in V$. Da B nicht ausgeartet ist folgt, dass $v = 0$. Es folgt, dass f injektiv ist. \blacksquare

Korollar 7.6.9 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ nicht ausgeartet mit $\dim V < \infty$ und $f \in \text{Isom}(B, K)$. Dann ist f bijektiv und $f^{-1} \in \text{Isom}(B, K)$.

Beweis. Die Abbildung f ist injektiv und also bijektiv, weil V endlich-dimensional ist. Es gilt

$$B(f^{-1}(v), f^{-1}(w)) = B(f(f^{-1}(v)), f(f^{-1}(w))) = B(v, w).$$

Es folgt, dass $f^{-1} \in \text{Isom}(B, K)$. \blacksquare

Korollar 7.6.10 Sei $B : V \times V \rightarrow K$ nicht ausgeartet mit $\dim V < \infty$. Die Teilmenge $\text{Isom}(B, K)$ ist eine Untergruppe von $\text{GL}(V)$.

Definition 7.6.11 1. Für B symmetrisch und nicht ausgeartet heißt eine B -Isometrie **orthogonal**. Man schreibt $O(B, K)$ für $\text{Isom}(B, K)$.

2. Für B Hermitsch und nicht ausgeartet heißt B -Isometrie **unitär**. Man schreibt $U(B, K)$ für $\text{Isom}(B, K)$.

3. Eine alternierende nicht ausgeartet Bilinearform B heißt **symplektisch**.

1. Für B symplektisch heißt eine B -Isometrie **symplektisch**. Man schreibt $\text{Sp}(B, K)$ für $\text{Isom}(B, K)$.

Standard symmetrische Bilinearform des K^n

Definition 7.6.12 1. Sei $(\cdot, \cdot) : K^n \times K^n \rightarrow K$ die nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform definiert durch

$$B((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Diese Form heißt die standard Bilinearform des \mathbb{R}^n .

2. Die Gruppe $O((\cdot, \cdot), K)$ heißt **die Orthogonalgruppe**. Wir schreiben $O_n(K) = O((\cdot, \cdot), K)$.

Satz 7.6.13 Sei $A \in M_n(K)$. Sei (\cdot, \cdot) das standard Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n . Die folgende Aussage sind äquivalent:

1. $A^T A = I_n$.
2. A ist invertierbar und $A^{-1} = A^T$.
3. $A \in O_n(K)$.
4. Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $(K^n, (,))$.
5. Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $(K^n, (,))$. □

Beweis. $(1 \Leftrightarrow 2)$. Folgt aus den elementaren Eigenschaften invertierbarer Matrizen.

$(1 \Leftrightarrow 3)$. Seien $X, Y \in K^n$. Es gilt $(X, Y) = X^T Y$. Es gilt also

$$\begin{aligned} A \in O_n(K) &\Leftrightarrow (AX, AY) = (X, Y) \text{ für alle } X, Y \in K^n \\ &\Leftrightarrow (AX)^T (AY) = X^T Y \text{ für alle } X, Y \in K^n \\ &\Leftrightarrow A^T A = I_n. \end{aligned}$$

$(3 \Leftrightarrow 4)$. Sei $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des K^n . Wir betrachten das System $\mathcal{B}' = (Ae_1, \dots, Ae_n)$. Das System \mathcal{B}' besteht aus den Spalten von A . Für $A \in O_n(K)$ ist \mathcal{B}' eine Basis (weil A invertierbar ist) und es gilt

$$(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j)$$

und es folgt, dass \mathcal{B}' eine orthonormale Basis ist. Umgekehrt, angenommen \mathcal{B}' sei eine Orthonormale Basis. Es gilt

$$B(Ae_i, Ae_j) = \delta_{i,j} = B(e_i, e_j).$$

Seien $X, Y \in K^n$ mit $X = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ und $Y = (y_1, \dots, y_n) = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$. Es gilt

$$(AX, AY) = \left(\sum_{i=1}^n x_i Ae_i, \sum_{j=1}^n y_j Ae_j \right) = \sum_{i,j=1}^n (Ae_i, Ae_j) = \sum_{i,j=1}^n (e_i, e_j) = (X, Y).$$

Es folgt $A \in O_n(K)$.

$(3 \Leftrightarrow 5)$. Wegen $A^T A = I_n$ gilt auch $AA^T = I_n$. Dann verfahren wir wie im Beweis von $(3 \Leftrightarrow 4)$. ■

Korollar 7.6.14 Sei \mathcal{B} die kanonische Basis des K^n und \mathcal{B}' eine Basis. Dann gilt

$$\mathcal{B}' \text{ ist orthonormal für } (,) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_K), \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_K) \in O_n(K).$$

Beweis. Sei $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ und $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$. Es gilt $\mathcal{B}' = (Ae_1, \dots, Ae_n)$ wobei $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_{K^n})$ und $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_{K^n})$. Aus dem Satz folgt $A \in O_n(K) \Leftrightarrow \mathcal{B}'$ ist orthonormal. ■