Analysis III WS 13/14

Singhof

25. Oktober 2013

Kapitel I: Maß- und Integrationstheorie

1. Quader und Figuren

Bez. Sei X eine Menge. Mit $\mathscr{P}(X)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X.

Wünschenswert wäre eine Abbildung $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(0) $\mu(\emptyset) = 0$.

(1) Ist Q ein Quader in $\mathbb{R}^n$ mit den Kantenlängen $c_1, \dots, c_n$, so ist $\mu(Q) = c_1 \cdot \ldots \cdot c_n$.

(2) Sind $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ paarweise disjunkt, so ist

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ .$$

(3) Sind $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ kongruent zueinander, so ist $\mu(A) = \mu(B)$.

Eine solche Abbildung gibt es aber nicht, wie aus dem Banach-Tarski-Paradoxon folgt, für dessen Beweis man allerdings das Auswahlaxiom braucht. Dieses „Paradoxon" besagt:

Seien $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ zwei beliebige Mengen mit nicht-leerem Inneren, $n \geq 1$. Dann gibt es Mengen $C_1, C_2, \dots, D_1, D_2, \dots \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- A ist die disjunkte Vereinigung von $C_1, C_2, \dots$.
- B ist die disjunkte Vereinigung von $D_1, D_2, \dots$.
- C_i ist kongruent zu D_i für alle i.

Wenn es also ein μ wie oben gäbe, so hätten alle Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die ein nichtleeres Innere haben, dasselbe Volumen! Deswegen müssen wir in einem komplizierten Prozess definieren, wann eine Menge „messbar" ist, also ein Volumen besitzt.

Seien $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} a \leq b : \quad &\Leftrightarrow \quad a_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \dots, n \\ a < b : \quad &\Leftrightarrow \quad a_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ist $a \leq b$, so sei $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x < b\}$. Eine solche Menge heißt ein (achsenparalleler, halboffener) *Quader* in $\mathbb{R}^n$.
Ist $a \leq b$, aber nicht $a < b$, so ist $[a, b[= \emptyset$.
Die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathscr{Q}^n$ bezeichnet.
Für $[a, b[\in \mathscr{Q}^n$ sei

$$\lambda^n([a, b[) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Eine Vereinigung von endlich vielen Quadern in $\mathbb{R}^n$ heiße *Figur* in $\mathbb{R}^n$. Es sei $\mathscr{F}^n$ die Menge aller Figuren in $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei X eine Menge und $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$.
$\mathscr{R}$ heißt ein *Ring von Teilmengen* von X, falls gilt:

(1) $\emptyset \in \mathscr{R}$.

(2) Sind $A, B \in \mathscr{R}$, so ist $A \cup B \in \mathscr{R}$.

(3) Sind $A, B \in \mathscr{R}$, so ist $A \setminus B \in \mathscr{R}$.

Satz 1. $\mathscr{F}^n$ ist ein Ring von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei X eine Menge, $\mathscr{R}$ ein Ring von Teilmengen von X. Eine Abbildung $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt ein *Prämaß* auf $\mathscr{R}$, falls gilt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu(A) \geq 0 \;\; \forall\, A \in \mathscr{R}$.

(3) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{R}$ paarweise disjunkt und ist $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathscr{R}$, so ist $\mu(\bigcup\limits_{m} A_m) = \sum\limits_{m} \mu(A_m)$.

Satz 2. Es gibt genau ein Prämaß λ^n auf $\mathscr{F}^n$ mit

$$\lambda^n([a, b\,[) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) \;\; \forall\, [a, b\,[\in \mathscr{Q}^n.$$

2. σ-Algebren und Maße

Def. Sei X eine Menge und $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Dann heißt $\mathscr{A}$ eine *σ-Algebra* in X, wenn gilt:

(1) $\mathscr{A}$ ist ein Ring von Teilmengen von X.

(2) $X \in \mathscr{A}$

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathscr{A}$.

Lemma 1. Der Durchschnitt von beliebig vielen σ-Algebren in X ist eine σ-Algebra in X.

Satz 1 und Bezeichnung. Zu jeder Teilmenge $\mathscr{A}$ von $\mathscr{P}(X)$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{A})$ in X, die $\mathscr{A}$ enthält.

Beispiel: Sei X ein metrischer Raum, $\mathscr{T}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X. Die Elemente der σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{T})$ heißen die *Borel-Mengen* von X.
$\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{T})$ enthält alle offenen, alle abgeschlossenen und sehr viele weitere Mengen.

Def. Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X. Ein *Maß* auf $\mathscr{A}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $\mu(A) \geq 0 \;\; \forall\, A \in \mathscr{A}$

(3) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ paarweise disjunkt, so $\mu(\bigcup\limits_{m} A_m) = \sum\limits_{m} \mu(A_m)$.

Bem. Ein Prämaß auf einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ ist ein Maß auf $\mathscr{A}$.

Def. a) Ein Paar $(X, \mathscr{A})$, bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ in X, heißt ein *Messraum*.
b) Ein Tripel $(X, \mathscr{A}, \mu)$ heißt ein *Maßraum*, wenn $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum und μ ein Maß auf $\mathscr{A}$ ist.

Satz 2. (Maßfortsetzungssatz von Carathéodory)
Sei X eine Menge, $\mathscr{R}$ ein Ring von Teilmengen von X, μ ein Prämaß auf $\mathscr{R}$. Dann kann μ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{R})$ fortgesetzt werden.

Konstruktion dieser Fortsetzung:

1. Schritt: Wir setzen die Abbildung μ zu einer Abbildung $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fort:

Für $A \subseteq X$ sei $U(A)$ die Menge aller Folgen (B_m) in $\mathscr{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Sei

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) \mid (B_m) \in U(A)\} .$$

Ist $U(A) = \emptyset$, so ist dies als $\mu^*(A) = \infty$ zu interpretieren.
Im Allgemeinen ist μ^* kein Maß auf $\mathscr{P}(X)$.

2. Schritt: $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist ein sogenanntes *äußeres Maß* auf X, d.h. μ^* hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu^*(A) \geq 0$ für alle $A \subseteq X$.

(3) Ist $A \subseteq B \subseteq X$, so ist $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(4) Ist (A_m) eine Folge in $\mathscr{P}(X)$, so ist $\mu^*(\bigcup_m A_m) \leq \sum_m \mu^*(A_m)$.

3. Schritt: Ist μ^* ein beliebiges äußeres Maß auf X, so nennt man ein $A \in \mathscr{P}(X)$ *μ^*-messbar*, falls gilt: Für jedes $Q \in \mathscr{P}(X)$ ist

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) .$$

Man zeigt dann:

(a) Die Menge $\mathscr{R}^*$ aller μ^*-messbaren Teilmengen von X ist eine σ-Algebra.

(b) $\mu^* \mid \mathscr{R}^*$ ist ein Maß auf $\mathscr{R}^*$.

4. Schritt: Ist μ ein Prämaß auf $\mathscr{R}$ und μ^* das im 1. Schritt definierte äußere Maß auf X, so ist $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{R}^*$. Weil $\mu^* \mid \mathscr{R}^*$ ein Maß auf $\mathscr{R}^*$ ist, so ist erst recht $\mu^* \mid \boldsymbol{\sigma}(\mathscr{R})$ ein Maß auf $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{R})$, welches μ fortsetzt.-

Def. Ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathscr{R}$ von Teilmengen von X heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ in $\mathscr{R}$ gibt, so dass gilt:

(1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$

(2) $X = \bigcup_m A_m$

(3) $\mu(A_m) < \infty \;\; \forall\, m \in \mathbb{N}$.

Satz 3. Ist $\mathscr{R}$ ein Ring von Teilmengen einer Menge X und μ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathscr{R}$, so kann μ auf genau eine Weise zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathscr{A}(\mathscr{R})$ fortgesetzt werden.

3. Das Lebesgue-Maß

Mit $\mathscr{T}^n$ bezeichnen wir die Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die sogenannte *Topologie* von $\mathbb{R}^n$. Sei $\mathscr{B}^n = \boldsymbol{\sigma}(\mathscr{T}^n)$. Die Elemente von $\mathscr{B}^n$ heißen die *Borel-Mengen* in $\mathbb{R}^n$.

Auf dem Ring $\mathscr{F}^n$ haben wir das Prämaß λ^n. Dieses ist σ-endlich, lässt sich also nach §2 zu einem eindeutig bestimmten Maß auf $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{F}^n)$ fortsetzen, das wieder mit λ^n bezeichnet wird und das nach §1, Satz 2 durch seine Werte auf $\mathscr{Q}^n$ bestimmt ist.

Satz 1. $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{F}^n) = \mathscr{B}^n$.

Damit folgt:

Satz 2. Es gibt genau ein Maß λ^n auf der Menge $\mathscr{B}^n$ der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^n$, so dass für jeden Quader $[a, b\,[\in \mathscr{Q}^n$ gilt:

$$\lambda^n([a, b\,[) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

λ^n heißt das *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und $A \in \mathscr{B}^n$, so ist $f^{-1}(A) \in \mathscr{B}^n$.

Lemma 2 und Def. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, so erhält man ein Maß μ auf $\mathscr{B}^n$ durch

$$\mu(B) := \lambda^n(f^{-1}(B))\,.$$

Man schreibt $\mu =: f(\lambda^n)$ und nennt $f(\lambda^n)$ das *Bildmaß* von λ^n unter f.

Def. Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Translation*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $T(x) = x + a \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 3. Das Maß λ^n ist translationsinvariant, d.h. für jede Translation T ist $T(\lambda^n) = \lambda^n$.