

Analysis III, Wintersemester 2013-2014, Prof. Dr. Singhof

Marten Lienen

16. Januar 2014

Kapitel 1

Maß- und Integrationstheorie

§1 Quader und Figuren

§2 σ -Algebren und Maße

§3 Das Lebesgue-Maß

§4 Messbare Funktionen

§5 Integrationstheorie

§6 Vertauschbarkeit des Integrals mit Grenzprozessen

§7 Der Satz von Fubini

§8 Die Transformationsformel

§9 Die Räume L^p

Kapitel 2

Vektoranalysis

§10 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

§11 Zusammenhängende metrische Räume

Beweis. Beweisskizze als Hilfestellung für Übung:

- a) Sei M zusammenhängend. Sei $x_0 \in M$. Sei $A := \{x \in M \mid \text{es gibt einen Weg } w : [0, 1] \rightarrow M \text{ mit } w(0) = x_0 \text{ und } w(1) = x\}$.
Zu zeigen: $A = M$. Dann ist $A \neq \emptyset$, denn $x_0 \in A$.

A ist **offen in** M Sei $a \in A$. Nach der Folgerung aus Satz 1 von §10 besitzt a eine Umgebung U in M , die homöomorph zu \mathbb{R}^n ist. Ist $x \in U$, so gibt es einen Weg w in U mit $w(0) = a$, $w(1) = x$. Es gibt einen Weg v von x_0 nach a . Deshalb gibt es auch einen Weg von x_0 nach x .

A ist **abgeschlossen in** M Weil M zusammenhängend ist, folgt $A = M$.

- b) Ähnlich

- c) folgt direkt aus b)

□

§12 Kompakte metrische Räume

Definition. Ist X eine Menge und ist $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ eine Menge von Teilmengen von X so heißt $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ eine Überdeckung von X , wenn $X = \cup_{i \in \Lambda} A_i$.

Definition. Sei X ein metrischer Raum und $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ eine Überdeckung von X . Dann heißt $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von X , wenn alle A_i offen in X sind.

Definition. Ein metrischer Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, wenn also gilt: Ist $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von X , so gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$ mit $X = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$.

Bemerkung. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X ist genau dann kompakt, wenn gilt: Sind $A_i (i \in \Lambda)$ offene Teilmengen von X mit $A \subseteq \cup_{i \in \Lambda} A_i$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$ mit $A \subseteq A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$.

Satz 1. Seien X, Y metrische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Ist K eine kompakte Teilmenge von X , so ist $f(K)$ kompakt.

Beweis. Seien $A_i (i \in \Lambda)$ offene Teilmengen von Y mit $f(K) \subseteq \cup_{i \in \Lambda} A_i$. Weil f stetig ist, ist $f^{-1}(A_i)$ offen in $X \forall i \in \Lambda$. Es ist $K \subseteq f^{-1}(\cup_{i \in \Lambda} A_i) = \cup_{i \in \Lambda} f^{-1}(A_i)$. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$ mit $K \subseteq f^{-1}(A_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{i_n})$. Daraus folgt

$$f(K) \subseteq f(f^{-1}(A_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{i_n})) = f(f^{-1}(A_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(A_{i_n})) = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n} \quad (2.1)$$

□

Satz 2. Jede abgeschlossene Teilmenge A eines kompakten metrischen Raumes X ist kompakt.

Beweis. Seien $A_i (i \in \Lambda)$ offene Teilmengen von X mit $A \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$. Die A_i zusammen mit $X \setminus A$ bilden eine offene Überdeckung von X . Weil X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung von X , d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$ mit $X = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n} \cup (X \setminus A) \Rightarrow A \setminus A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$. \square

Satz 3. Jede kompakte Teilmenge A eines metrischen Raumes X ist abgeschlossen in X .

Beweis. Zeige $X \setminus A$ ist offen in X . Sei $x \in X \setminus A$. Wir wollen zeigen: $X \setminus A$ ist Umgebung von x in X . Ist $y \in A$, so ist $y \neq x$; deswegen gibt es offene Teilmengen U_y und V_y von X mit $x \in U_y$, $y \in V_y$ und $U_y \cap V_y = \emptyset$. Dann ist $A \subseteq \bigcup_{y \in A} V_y$. Weil A kompakt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $y_1, \dots, y_n \in A$ mit $A \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} = V$. Sei $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$. Dann ist U eine offene Umgebung von x mit $U \cap V = \emptyset$, also $U \subseteq X \setminus A$. \square

Satz 4. Seien X, Y metrische Räume; X sei kompakt und $f : X \rightarrow Y$ sei stetig und bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig. Deswegen ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir zeigen: Ist A abgeschlossen in X , so ist $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ abgeschlossen in Y . Nach Satz 2 ist A abgeschlossen \Rightarrow nach Satz 1 ist $f(A)$ kompakt \Rightarrow nach Satz 3 $f(A)$ ist abgeschlossen in Y . \square

Definition. Sei X ein metrischer Raum, (x_n) eine Folge in X und $a \in X$. Dann heißt a ein Häufungspunkt von (x_n) , wenn es eine Teilfolge von (x_n) gibt, die gegen a konvergiert; äquivalent dazu: Wenn es für jede Umgebung U von a in X unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n \in U$.

Satz 5. Sei X ein metrischer Raum. Äquivalent sind:

- a) X ist kompakt
- b) Jede Folge in X besitzt einen Häufungspunkt in X
- c) X ist vollständig und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_n, \dots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$

Beweis. a) \Rightarrow b): Sei X kompakt und (x_n) eine Folge in X . Sei F_n der Abschluss der Menge $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ in X . Wir werden zeigen, dass $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$. (Ein Element von $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ ist ein Häufungspunkt von (x_n))

Angenommen, es sei $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$. Sei $A_n := X \setminus F_n$. Dann ist A_n offen in X und $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \bigcap_n (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcap_n F_n = X$. Deswegen bilden die A_n mit $n \in \mathbb{N}$ eine offene Überdeckung von X . Weil X kompakt ist, gibt es $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $X = A_{n_1} \cup \dots \cup A_{n_k}$. Für $n \geq m$ ist $F_n \subseteq F_m$, also $A_n \supseteq A_m$. Ist $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, so ist also $X = A_{n_0} \Rightarrow F_{n_0} = \emptyset$, Widerspruch, da $x_{n_0} \in F_{n_0}$.

b) \Rightarrow c): Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in X . Dann besitzt (x_n) einen Häufungspunkt a , d.h. eine Teilfolge von (x_n) konvergiert gegen a . Nach Aufgabe 40 konvergiert (x_n) gegen a . Deswegen ist X vollständig.

Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen X ist nicht die Vereinigung von endlich vielen Kugeln von Radius ε . Dann definiert man induktiv eine Folge (x_n) in X , so dass gilt: Ist $n \neq m$, so ist $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Dann kann (x_n) keinen Häufungspunkt besitzen, Widerspruch.

c) \Rightarrow a): Sei $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ offene Überdeckung von X . Angenommen, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung. Wir werden induktiv eine Folge (B_n) von Kugeln vom Radius $\frac{1}{2^n}$ definieren, von denen jede nicht durch endlich viele A_i überdeckt wird:

$n = 0$ Nach Voraussetzung wird X von endlich vielen Kugeln vom Radius 1 überdeckt. Von diesen kann eine nicht von endlich vielen A_i überdeckt werden; nenne sie B_0 .

$n - 1 \rightarrow n$ Sei bereits B_{n-1} konstruiert. Weil X von endlich vielen Kugeln vom Radius $\frac{1}{2^n}$ überdeckt wird, gibt es unter diesen eine, die nicht von endlich vielen der A_i überdeckt wird und nicht-leeren Schnitt mit B_{n-1} hat. B_n habe den Mittelpunkt x_n . Wegen $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$ ist $d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$. Ist also $n \leq p < q$, so $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p-1}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-2}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

Deswegen ist (x_n) eine Cauchy-Folge, konvergiert also gegen ein $a \in X$. Es gibt ein $i_0 \in \Lambda$ mit $a \in A_{i_0}$. Da A_{i_0} offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq A_{i_0}$. Für großes n ist $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ und $B_n \subseteq B_\varepsilon(a)$. Daher ist B_n für großes n in A_{i_0} enthalten, Widerspruch. \square

Satz 6 (Heine-Borel). Für eine Teilmenge X von \mathbb{R}^n sind äquivalent:

- a) X ist kompakt
- b) X ist beschränkt und abgeschlossen in \mathbb{R}^n

Beweis. a) \Rightarrow b): Ist X kompakt, so ist X abgeschlossen in \mathbb{R}^n nach Satz 3. Nach Satz 5 wird X durch endlich viele Kugeln vom Radius 1 überdeckt, ist also beschränkt.

b) \Rightarrow a): Weise Bedingung c) vom Satz 5 nach:

- X ist vollständig: Sei (x_m) eine Cauchy-Folge in X . Weil \mathbb{R}^n vollständig ist, konvergiert (x_m) gegen ein $a \in \mathbb{R}^n$. Weil X abgeschlossen in \mathbb{R}^n ist, ist $a \in X$.

- Weil X beschränkt ist, wird X für jedes $\varepsilon > 0$ durch endlich viele $B_\varepsilon(x_i)$ überdeckt.

□

Definition. Ein metrischer Raum X heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt $a \in X$ eine kompakte Umgebung in X besitzt.

Beispiel. • \mathbb{R}^n ist lokalkompakt, aber nicht kompakt

- Jede Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist lokalkompakt

§13 Tangentialräume und Orientierungen

Definition. Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und $a \in M$. Ein Element $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a , wenn es ein offenes Intervall I in \mathbb{R} mit $0 \in I$ und eine C^1 -Abbildung $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit:

- $\psi(I) \in M$
- $\psi(0) = a$
- $\psi'(0) = v$

Mit $T_a(M)$ bezeichnet man die Menge aller Tangentialvektoren an M im Punkt a und nennt $T_a(M)$ den Tangentialraum an M in a .

Satz 1. Sei M eine n -dimensionaler linearer Teilraum von \mathbb{R}^n .

- $T_a(M)$ ist ein n -dimensionaler linearer Teilraum von \mathbb{R}^n
- Sei $\varphi : W \rightarrow V$ eine Karte von M und $a \in V$. Sei $b \in W$ mit $\varphi(b) = a$. Dann ist $T_a(M) = \text{Bild}(D\varphi(b)) = \{D\varphi(b) \cdot u \mid u \in \mathbb{R}^n\}$
- Sei U eine offene Umgebung von a in \mathbb{R}^n und sei $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ eine Submersion mit $M \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$. Dann ist:

$$T_a(M) = \text{Kern}(Dg(a)) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Dg(a) \cdot v = 0\} \quad (2.2)$$

Beweis. Analysis II, §16, Satz 5

□

Beispiel.

$$M = S^{N-1} \quad (2.3)$$

Sei $U = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \neq 0\}$ und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = x_1^2 + \dots + x_N^2 - 1$. Dann ist $S^{N-1} = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

$$Dg(x) = 2x^T \quad (2.4)$$

Nach Satz 1c) ist $T_a(S^{N-1}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid 2a^T v = 0\} = a^\perp$.

Beispiel. Sei M ein n -dimensionaler affiner Teilraum von \mathbb{R}^N , d.h. es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^N$ und einen n -dimensionalen linearen Teilraum E von \mathbb{R}^N mit $M = x_0 + E$. Dann ist M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^N : Sei $h : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ ein linearer Isomorphismus. Sei $\varphi(y) := x_0 + h(y)$, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ ist $D\varphi(y) \cdot u = h(u)$. Deswegen ist φ eine Karte von M mit $\varphi(\mathbb{R}^n) = M$. Sei $a \in M$ und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(b) = a$. Nach Satz 1b) ist $T_a(M) = \text{Bild}(D\varphi(b)) = \text{Bild}(h) = E$.

Beispiel. Sei M wie im vorigen Beispiel und sei U offen in M . Dann ist U eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^N und für $a \in U$ ist $T_a(U) = E$.

Definition. Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und $a \in M$. Ein Element $v \in \mathbb{R}^N$ heißt Normalenvektor an M in a , wenn $\langle v \mid w \rangle = 0 \forall w \in T_a(M)$. Die Menge aller Normalenvektoren an M in a wird mit $N_a(M)$ bezeichnet und heißt der Normalenraum an M in a .

$$N_a(M) = T_a(M)^\perp \quad (2.5)$$

Dies ist ein $(N - n)$ -dimensionaler Teilraum von \mathbb{R}^N .

Beispiel.

$$N_a(S^{n-1}) = \mathbb{R} \cdot a \quad (2.6)$$

Definition. Sei M eine Hyperfläche in \mathbb{R}^N . Ein Einheitsnormalenfeld auf M ist eine stetige Abbildung $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\nu(a) \in N_a(M)$ und $\|\nu(a)\|_2 = 1 \forall a \in M$.

Beispiel. Auf S^{N-1} gibt es zwei Normalfelder: ν_+ und ν_-

$$\nu_+(a) := a, \nu_-(a) := -a \quad (2.7)$$

Definition. Seien U, V offen in \mathbb{R}^n und $\varphi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. φ heißt orientierungserhalten, wenn $\det(D\varphi(x)) > 0$.

Definition. Sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^N mit $n \geq 1$.

- a) Zwei Karten $\varphi_1 : W_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2 : W_2 \rightarrow V_2$ von M heißen gleichorientiert, wenn die Parametertransformation $\tau(\varphi_1, \varphi_2)$ orientierungserhalten ist.
- b) Ein Atlas \mathcal{A} von M heißt orientiert, wenn je zwei seiner Karten gleich orientiert sind.
- c) M heißt orientierbar, wenn M einen orientierten Atlas besitzt.
- d) Zwei Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{B} von M heißen äquivalent, wenn jede Karte von \mathcal{A} mit jeder Karte von \mathcal{B} gleichorientiert ist.
- e) Eine Äquivalenzklasse σ orientierter Atlanten von M heißt eine Orientierung von M . Man nennt dann (M, σ) eine orientierte Untermannigfaltigkeit.