Analysis III WS 13/14

Singhof

15. Oktober 2013

Kapitel I: Maß- und Integrationstheorie

1. Quader und Figuren

Bez. Sei X eine Menge. Mit $\mathscr{P}(X)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X.

Wünschenswert wäre eine Abbildung $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(0) $\mu(\emptyset) = 0$.

(1) Ist Q ein Quader in $\mathbb{R}^n$ mit den Kantenlängen $c_1, \ldots, c_n$, so ist $\mu(Q) = c_1 \cdot \ldots \cdot c_n$.

(2) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ paarweise disjunkt, so ist

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) .$$

(3) Sind $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ kongruent zueinander, so ist $\mu(A) = \mu(B)$.

Eine solche Abbildung gibt es aber nicht, wie aus dem Banach-Tarski-Paradoxon folgt, für dessen Beweis man allerdings das Auswahlaxiom braucht. Dieses ,,Paradoxon" besagt:

Seien $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ zwei beliebige Mengen mit nicht-leerem Inneren, $n \geq 1$. Dann gibt es Mengen $C_1, C_2, \ldots, D_1, D_2, \ldots \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- A ist die disjunkte Vereinigung von $C_1, C_2, \ldots$.
- B ist die disjunkte Vereinigung von $D_1, D_2, \ldots$.
- C_i ist kongruent zu D_i für alle i.

Wenn es also ein μ wie oben gäbe, so hätten alle Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die ein nichtleeres Innere haben, dasselbe Volumen! Deswegen müssen wir in einem komplizierten Prozess definieren, wann eine Menge ,,messbar" ist, also ein Volumen besitzt.

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} a \leq b : \quad &\Leftrightarrow \quad a_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \\ a < b : \quad &\Leftrightarrow \quad a_i < b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ist $a \leq b$, so sei $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x < b\}$. Eine solche Menge heißt ein (achsenparalleler, halboffener) *Quader* in $\mathbb{R}^n$.
Ist $a \leq b$, aber nicht $a < b$, so ist $[a, b[= \emptyset$.
Die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathscr{Q}^n$ bezeichnet.
Für $[a, b[\in \mathscr{Q}^n$ sei

$$\lambda^n([a, b[) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Eine Vereinigung von endlich vielen Quadern in $\mathbb{R}^n$ heiße *Figur* in $\mathbb{R}^n$. Es sei $\mathscr{F}^n$ die Menge aller Figuren in $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei X eine Menge und $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$.
$\mathscr{R}$ heißt ein *Ring von Teilmengen* von X, falls gilt:

(1) $\emptyset \in \mathscr{R}$.

(2) Sind $A, B \in \mathscr{R}$, so ist $A \cup B \in \mathscr{R}$.

(3) Sind $A, B \in \mathscr{R}$, so ist $A \setminus B \in \mathscr{R}$.

Satz 1. $\mathscr{F}^n$ ist ein Ring von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei X eine Menge, $\mathscr{R}$ ein Ring von Teilmengen von X. Eine Abbildung $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt ein *Prämaß* auf $\mathscr{R}$, falls gilt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu(A) \geq 0 \;\; \forall\, A \in \mathscr{R}$.

(3) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{R}$ paarweise disjunkt und ist $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathscr{R}$, so ist $\mu(\bigcup\limits_{m} A_m) = \sum\limits_{m} \mu(A_m)$.

Satz 2. Es gibt genau ein Prämaß λ^n auf $\mathscr{F}^n$ mit

$$\lambda^n([a, b\,[) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) \;\; \forall\, [a, b\,[\in \mathscr{Q}^n.$$