Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2012/13

Wilhelm Singhof

1. Die reellen Zahlen

Mathematische Objekte (z.B. Zahlen, Funktionen, Punkte oder Geraden in der Ebene, ...) können zu *Mengen* zusammengefasst werden. Ist M eine Menge und a ein mathematisches Objekt, so schreibt man $a \in M$, wenn a zu M gehört und nennt a ein *Element* von M; andernfalls schreibt man $a \notin M$.

Beispiel: Sei M die Menge, die aus den beiden natürlichen Zahlen 1 und 2 besteht. Man schreibt $M = \{1, 2\}$. Es ist $1 \in M$, $3 \notin M$.

Sind M und N zwei Mengen und ist jedes Element von N auch Element von M, so nennt man N eine *Teilmenge* von M und schreibt $N \subseteq M$. Zwei Mengen M und N heißen *gleich* (in Zeichen $M = N$), wenn sie dieselben Elemente enthalten, also genau dann, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ ist.

Die Menge, die keine Elemente enthält, nennt man die *leere Menge*; sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Für jede Menge M ist $\emptyset \subseteq M$.

Die *reellen Zahlen* sind eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit zwei Rechenvorschriften, die je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ und ein Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, wobei ferner eine Teilmenge $\mathbb{R}_{>0}$ von $\mathbb{R}$ ausgezeichnet ist, deren Elemente die *positiven Zahlen* heißen (wir schreiben $x > 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$), so dass die folgenden drei Gruppen I, II, III von Axiomen erfüllt sind:

I. Algebraische Axiome:

I.a) **Kommutativgesetze:** $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$.
I.b) **Assoziativgesetze:** $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(xy)z = x(yz)$.
I.c) **Null und Eins:** Es gibt Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und $x + 0 = x$ und $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
I.d) **Inverse Elemente:** Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$; zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gibt es eine Zahl $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$.
I.e) **Distributivgesetz:** $x(y + z) = xy + xz$.

Statt ,, $\mathbb{R}$ erfüllt die Axiome I.a) - I.e)" sagt man kurz: ,, $\mathbb{R}$ ist ein Körper ".

II. Anordnungsaxiome:

II.a) Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt genau eine der folgenden 3 Möglichkeiten:

$$x > 0\ ,\ x = 0\ ,\ -x > 0.$$

II.b) Ist $x > 0$ und $y > 0$, so ist $x + y > 0$ und $xy > 0$.

Bevor wir III formulieren können, müssen wir einige Bemerkungen zu den Axiomengruppen I und II machen:

(1) $1 > 0$.

Bew.: Nach I.c) ist $1 \neq 0$. Nach II.a) ist daher entweder $1 > 0$ oder $-1 > 0$. Angenommen, es wäre $-1 > 0$, so wäre $(-1) \cdot (-1) > 0$ nach II.b), also, da $(-1) \cdot (-1) = 1$ nach I., auch $1 > 0$. Damit wäre gleichzeitig $1 > 0$ und $-1 > 0$, im Widerspruch zu II.a). Deswegen ist die Annahme $-1 > 0$ falsch, und es gilt $1 > 0$.

(2) Die Elemente $x \in \mathbb{R}$ mit $-x > 0$ heißen *negativ*. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so schreiben wir $x < y$ oder $y > x$, falls $y - x > 0$.
Insbesondere bedeutet $x < 0$, dass $-x > 0$, also dass x negativ ist.
Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt nach II.a) genau eine der folgenden Möglichkeiten:

$$x > y \ , \ x = y \ , \ x < y.$$

(3) Ist $x < 0$ und $y < 0$, so ist $xy > 0$.

(4) Ist $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$, so ist $x^2 > 0$.

(5) Sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $y < z$, so ist $x < z$.

(6) Ist $x < y$ und $z > 0$, so $xz < yz$.
Ist $x < y$ und $z < 0$, so $xz > yz$.

(7) Ist $x < 0$ und $z > 0$, so ist $xz < 0$.

(8) Ist $x > 0$, so ist $x^{-1} > 0$.

(9) Ist $x < y$ und $z \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $x + z < y + z$.

(10) Ist $0 < x < y$, so ist $y^{-1} < x^{-1}$.

(11) Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so schreiben wir $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$. Für $x \leq y$ schreiben wir auch $y \geq x$.

(12) Ist $0 < x < y$, so ist $x^2 < y^2$.
Sind $x, y > 0$ und ist $x^2 < y^2$, so ist $x < y$.

Def. Ist $x \in \mathbb{R}$, so sei

$$| x | := \begin{cases} x & , \text{ falls } x \geq 0, \\ -x & , \text{ falls } x < 0. \end{cases}$$

$| x |$ heißt der *Absolutbetrag* von x.

(13) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $| -x | = | x | \geq 0$; ist $x \neq 0$, so ist $| x | > 0$.
$| x - y |$ ist, anschaulich gesprochen, der Abstand zwischen x und y.

(14) $x \leq | x |$.

(15) Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $| xy | = | x | \cdot | y |$.

(16) **Dreiecksungleichung:** $| x + y | \leq | x | + | y |$.

(17) $| \, | x | - | y | \, | \leq | x - y |$.

(18) Es ist $0 < 1 < 2 = 1 + 1 < 3 = 2 + 1 < \ldots$. Diese Zahlen sind also alle voneinander verschieden. Die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet; ihre Elemente heißen *natürliche Zahlen*.
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Die Menge $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}$ heißt die Menge der *ganzen Zahlen*, und $\mathbb{Q} := \{\frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}\}$ heißt die Menge der *rationalen Zahlen*. $\mathbb{Q}$ erfüllt die Axiome I und II.

Kommentar hierzu: Sind M und N zwei Mengen, so sei $M \cup N$ die Menge, die aus allen Elementen besteht, die in M oder in N (oder in beiden) liegen. $M \cup N$ heißt die *Vereinigung* von M und N.

$M \cap N$ sei die Menge, die aus allen Elementen besteht, die in M und in N liegen. $M \cap N$ heißt der *Durchschnitt* von M und N.

$\{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: $-x \in \mathbb{N}$.
Also $\{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\} = \{-1, -2, -3, \ldots\} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt M *nach oben beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c$ für alle $x \in M$. Ein solches c heißt eine *obere Schranke* von M.
M heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq d$ für alle $x \in M$. Ein solches d heißt eine *untere Schranke* von M.
M heißt *beschränkt*, wenn es nach oben und unten beschränkt ist.
Wenn es eine kleinste obere Schranke c von M gibt (d.h. c ist obere Schranke und jedes $c' \in \mathbb{R}$ mit $c' < c$ ist keine obere Schranke von M), so heißt c das *Supremum* von M; schreibe $c =: \sup M$. Wenn es eine größte untere Schranke d von M gibt, so heißt d das *Infimum* von M; schreibe $d =: \inf M$.

III. Vollständigkeitsaxiom: Ist M eine nicht-leere nach oben beschränkte Menge, so besitzt M ein Supremum.

Satz 1: Ist $a \in \mathbb{R}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq a$.

Satz 2: Ist $b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq b$.

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es ein $x_o \in M$ gibt mit $x \leq x_o$ für alle $x \in M$, so heißt x_o das *Maximum* von M; schreibe $x_o =: \max M$. Entsprechend definiert man das *Minimum* $\min M$.

Bem. a) Wenn $\max M$ existiert, so ist M nach oben beschränkt, und $\max M = \sup M$.
b) Wenn M nach oben beschränkt ist und $\sup M \in M$ gilt, so ist $\sup M$ das Maximum von M.

Bez. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *(abgeschlossenes Intervall)*

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *(offenes Intervall)*

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *(halboffenes Intervall)*

$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ *(halboffenes Intervall)*

Bem. Wir werden in §4 sehen: Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so gibt es genau ein $b \geq 0$ mit $b^n = a$. Wir schreiben

$$b =: \sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} .$$

Nach (4) gilt: Ist $a < 0$ und ist n gerade, so gibt es kein $b \in \mathbb{R}$ mit $b^n = a$. Ist $a > 0$ und ist n ungerade, so ist

$$(-\sqrt[n]{a})^n = -a .$$

2. Folgen und ihre Grenzwerte

Def. Sind X und Y Mengen, so ist eine *Abbildung* von X in Y eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man schreibt dafür

$$f : X \to Y\,.$$

Def. Ist Y eine Menge, so ist eine *Folge in* Y eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to Y$; man schreibt oft a_n statt $a(n)$ und spricht von der „ Folge (a_n)" statt von der Folge a.
Statt „ Folge in $\mathbb{R}$" sagen wir kurz „ Folge".
Gelegentlich lassen wir auch zu, dass eine Folge a auf einer Teilmenge $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$ von $\mathbb{Z}$ statt auf $\mathbb{N}$ definiert ist und reden dann von der Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$.

Def. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und sei $b \in \mathbb{R}$. Die Folge heißt *konvergent* gegen b, falls gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\mid a_n - b \mid < \epsilon$ für alle $n \geq N$.
Man nennt dann b den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge (a_n) und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ oder „ $a_n \to b$ für $n \to \infty$".

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

Satz 1. Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beispiel (1): Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a_n := a \;\forall\; n \in \mathbb{N}$. Dann heißt (a_n) eine *konstante Folge*. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiel (2): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Beispiel (3): Sei $a_n := (-1)^n$. Dann konvergiert (a_n) nicht.

Beispiel (4): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Def. Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Bem. Genau dann ist (a_n) beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mid a_n \mid \leq M \;\forall\; n \in \mathbb{N}$.

Satz 2. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Def. Eine Folge (a_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt eine *Nullfolge*.

Bem. Sei (a_n) eine Folge. Genau dann ist $a_n \to a$, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

Satz 3. Ist (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkte Folge, so ist $(a_n b_n)$ Nullfolge.

Satz 4. (Rechenregeln für Grenzwerte) (a_n) und (b_n) seien Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$.
1) $a_n + b_n \to a + b$, $a_n - b_n \to a - b$.
2) $a_n b_n \to ab$.
3) Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n, und $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.

Beispiel (5): $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{3n^2 + 1} = \dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} \to \dfrac{1}{3}$

Satz 5. Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen, $a_n \to a$, $b_n \to b$. Falls $a_n \geq b_n$ für fast alle n, so ist $a \geq b$.

Satz 6. (Bernoullische Ungleichung) Sei $x \geq -1$. Dann gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 7. Für $| a |< 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, und für $| a |> 1$ divergiert die Folge (a^n).

Def. Eine Folge (a_n) heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1} \ \forall \ n$. Sie heißt *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1} \ \forall \ n$. Entsprechend: *(streng) monoton fallend*

Satz 8. Ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, so ist (a_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{ a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beispiel: Neuer Beweis für $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, falls $0 \leq x < 1$:
Sei $a_n := x^n$. Dann ist (a_n) eine monoton fallende beschränkte Folge, die nach Satz 8 gegen ein a konvergiert. Für jedes n ist $a_{n+1} = x \cdot a_n$. Übergang zum Limes liefert $a = x \cdot a$, also $a = 0$.

Def. Sei $(n_k)_{k\geq 1}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in einer Menge X, so erhält man durch $k \mapsto a_{n_k}$ eine neue Folge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ in X, die eine *Teilfolge* von (a_n) heißt.

Bem. a) Eine Teilfolge einer beschränkten Folge ist beschränkt.
b) Wenn (a_n) gegen a konvergiert, so auch jede Teilfolge von (a_n).

Satz 9. Jede Folge (a_n) reeller Zahlen enthält eine monotone Teilfolge.

Beweisidee: Wir nennen eine natürliche Zahl m eine Gipfelstelle, wenn $a_n < a_m$ für alle $n > m$. Wenn es unendlich viele Gipfelstellen gibt, so bilden diese eine monoton fallende Teilfolge. Wenn es nur endlich viele Gipfelstellen gibt, so gibt es eine monoton wachsende Teilfolge.

Satz 10. (Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

(Satz 10 folgt sofort aus Satz 8 und Satz 9.)

Satz 11. (Konvergenzkriterium von Cauchy)
Sei (a_n) eine Folge. Dann sind äquivalent:

(1) (a_n) ist konvergent.

(2) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $| a_m - a_n |< \epsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N$ und $n \geq N$.

(Die Implikation (1)$\Rightarrow$(2) ist ganz leicht. Ist umgekehrt (2) erfüllt, so zeigt man zuerst, dass die Folge beschränkt ist und wendet dann den Satz von Bolzano-Weierstraß an, um die Konvergenz zu folgern.)

3. Reihen

Das Summenzeichen: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so schreibt man

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + \ldots + a_n \ .$$

Statt k darf man auch jeden anderen Buchstaben (außer a und n) nehmen.

Allgemeiner: Sind $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und sind $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so schreibt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \ .$$

Noch allgemeiner: Ist M eine endliche Menge und ist für jedes $k \in M$ eine reelle Zahl a_k gegeben, so ist $\sum\limits_{k \in M} a_k$ die Summe aller Zahlen a_k mit $k \in M$.

Def. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $s_n := a_1 + \ldots + a_n$. Wenn die Folge (s_n) konvergiert, so sagt man, dass *die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert* und schreibt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ für ihren Grenzwert. Wenn (s_n) divergiert, so sagt man, dass *die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergiert*. Die Zahlen s_n heißen die *Partialsummen* von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Hat man allgemeiner eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ reeller Zahlen, so spricht man von der Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Satz 1. Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist (a_n) eine Nullfolge.

Konvention: Wir setzen $x^0 := 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere auch für $x = 0$.

Beispiel (1): Die *geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für $|\, x \,| < 1$ und divergiert für $|\, x \,| \geq 1$. Denn für $x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}.$$

Deswegen gilt für $|\, x \,| < 1$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

Beispiel (2): Die *harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, denn

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \frac{1}{9} + \cdots \ .$$

Beispiel (3): $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots=1$. Denn $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Satz 2. (Kriterium von Leibniz) Sei $(b_n)_{n\geq n_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$.

Der Beweis geht folgendermaßen: Ist s_n die n-te Partialsumme, so überlegt man, dass

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots\ldots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0 \ .$$

Daraus folgert man, dass die Folge der s_n konvergiert und dass sie den Grenzwert einschachteln.

Beispiel (4): $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots$ konvergiert nach Satz 2.

Def. Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ konvergiert.

Satz 3. Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

(Dies folgt aus dem Konvergenzkriterium von Cauchy.)

Bem.1. $\sum a_n$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Folge der Partialsummen von $\sum \mid a_n \mid$ beschränkt ist.

Bem.2. Wenn $\sum a_n$ absolut konvergiert, so ist $\mid \sum a_n \mid \leq \sum \mid a_n \mid$.

Satz 4. (Majorantenkriterium) Seien (a_n) und (c_n) Folgen mit $\mid a_n \mid \leq c_n \ \forall \ n$. Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. (Man nennt dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ eine *konvergente Majorante* von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.)

Beispiel (5): Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert, denn die Reihe aus Beispiel (3) ist eine konvergente Majorante.

Beispiel (6): Sei $k\in\mathbb{N}$ fest mit $k\geq 2$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$.

Satz 5. (Quotientenkriterium) Es gebe ein $q\in\mathbb{R}$ mit $0<q<1$, so dass $a_n\neq 0$ und $\frac{\mid a_{n+1}\mid}{\mid a_n \mid}\leq q$ für fast alle n . Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beispiel (7): Für $n\in\mathbb{N}$ setzt man $n! := 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ (gelesen: n-*Fakultät*) und $0! := 1$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,x^n$ konvergiert nach Satz 5 absolut für jedes $x\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,x^n}$$

Bem.3. Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent, so ist $\sum (a_n+b_n)$ konvergent und $\sum (a_n+b_n)=\sum a_n+\sum b_n$.
Ist $\sum a_n$ konvergent und $\lambda\in\mathbb{R}$, so ist $\sum(\lambda a_n)$ konvergent und $\sum(\lambda a_n)=\lambda\sum a_n$.

Beispiel (8): $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + - \cdots$ ist konvergent und hat die Summe 0. Die Umordnung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}_{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} + \underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}}_{-\frac{1}{6}} + \frac{1}{7} + \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}}_{-\frac{1}{8}} + + - \cdots$$

ist nach dem Leibniz- Kriterium ebenfalls konvergent, hat aber eine Summe, die $> \frac{1}{2}$ ist. Und die Umordnung

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{17} + \cdots$$

ist divergent.

Def. Seien X und Y Mengen und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) f heißt *surjektiv* oder Abbildung von X *auf* Y, wenn es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.

b) f heißt *injektiv* oder *eineindeutig*, wenn gilt: Sind $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$, so ist $f(x) \neq f(x')$.

c) f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist, wenn es also für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.

Satz 6. (Kommutativität absolut konvergenter Reihen) Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und σ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf sich. Setze $b_n := a_{\sigma(n)}$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Bem. Man kann beweisen: Ist $\sum a_n$ eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, so gilt:

a) Es gibt eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\sum a_{\sigma(n)}$ divergiert.

b) Ist $w \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\sum a_{\sigma(n)} = w$.

Bem. Man kann für absolut konvergente Reihen auch Assoziativität und Distributivität zeigen; siehe etwa W. Walter: Analysis I. Wir brauchen im Augenblick nur einen Spezialfall (Satz 8).

Binomialkoeffizienten: Man definiert für $n, k \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq k$ und $0 \leq k \leq n$ den *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bem. a) $\binom{n}{0} = 1\,, \binom{n}{n} = 1\,, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

b) Für $k > 0$ ist $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$.

c) $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

d) Für $n, k \in \mathbb{Z}$ und $0 < k \leq n$ gilt $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. Insbesondere ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$. Pascalsches Dreieck!

e) $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Satz 7. (Binomischer Lehrsatz) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

(Auch richtig, wenn x, y in einem beliebigen Körper liegen.)

Satz 8. (Ausmultiplizieren absolut konvergenter Reihen) Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, und sei

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Satz 9. (Additionstheorem für die Exponentialfkt.)

$$\exp(x+y) = \exp x \, \exp y \ \ \forall \, x, y \in \mathbb{R}.$$

Dies folgt aus Satz 7 und Satz 8.

4. Stetige Funktionen

Allgemeines über Abbildungen:

I. Bezeichnungen:

- Ist X eine Menge, so bezeichnet man mit id_X oder id die Abbildung $x \mapsto x$ von X in sich (*identische Abbildung* von X).
- Sind X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen, so erhält man eine Abbildung $g \circ f : X \to Z$ durch $g \circ f(x) := g(f(x))$.

- Sind X, Y Mengen und ist $f : X \to Y$ eine Bijektion, so bezeichnet man das Element von X, das von f auf y abgebildet wird, mit $f^{-1}(y)$. Damit erhält man eine Bijektion $f^{-1} : Y \to X$. Es gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X,$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y,$$
$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

II. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Ist $A \subseteq X$, so sei $f(A) := \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y | \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$.
Ist $U \subseteq Y$, so sei $f^{-1}(U) := \{x \in X | f(x) \in U\}$.
Ist $y \in Y$, so sei $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X | f(x) = y\}$.
Das schreibt man auch, wenn f nicht bijektiv ist!

- Sind $U, V \subseteq Y$, so ist

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V),$$
$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

- Sind $A, B \subseteq X$, so ist

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B),$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

- Ist $U \subseteq Y$, so ist $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$. Ist f surjektiv, so gilt Gleichheit.
- Ist $A \subseteq X$, so ist $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Ist f injektiv, so gilt Gleichheit.

III. Sind X, Y Mengen, so ist

$$X \times Y := \{(x, y) | x \in X \ , y \in Y\} \ .$$

Man schreibt $X^2 := X \times X$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Ebene.
Ist $D \subseteq X$ und $f : D \to Y$ eine Abbildung, so heißt

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) | x \in D\} \subseteq X \times Y$$

der *Graph* von f.

Ist $D \subseteq \mathbb{R}$, so heißt eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf D definierte *Funktion*.

Def. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann heißt f *stetig in* x_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt: Ist $x \in D$ und $| \ x - x_0 \ | < \delta$, so ist $| \ f(x) - f(x_0) \ | < \epsilon$. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Bem. f ist genau dann in x_0 stetig, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft:

$$| \ f(x_0 + h) - f(x_0) \ | < \epsilon$$

für alle $h \in \mathbb{R}$, für die $| \ h \ | < \delta$ und $x_0 + h \in D$.

Beispiel (1): Ist $c \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = c \,\forall\, x \in \mathbb{R}$, so ist f stetig.

Beispiel (2): Ist $f = id_{\mathbb{R}}$, also $f(x) = x \,\forall\, x \in \mathbb{R}$, so ist f stetig.

Bezeichnung: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt, dass $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

Satz 1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig in x_0.

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Beispiel (3): Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$. Dann ist f nicht stetig in 0.

Bez. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann definiert man $f + g : D \to \mathbb{R}$ durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$; entsprechend $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$ (letzteres, falls $g(x) \neq 0$
$\forall\, x \in D$).

Satz 2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind $f + g$, $f - g$, fg und, falls g keine Nullstellen in D hat, auch $\frac{f}{g}$ stetig.

Beispiel (4): Sind $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ feste Zahlen und definiert man $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, so ist f stetig. Eine solche Funktion heißt *Polynom(funktion)*.

Beispiel (5): Sind $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ fest und ist $D := \{x \in \mathbb{R} \mid\ b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \neq 0\}$,so erhält man durch

$$f(x) := \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Sie heißt *gebrochen-rationale Funktion.*

Beispiel (6): Die Funktion exp:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist stetig.

Dafür benutzen wir:

Satz 3. Ist $R_{N+1}(x) := \exp x - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$, so ist

$$\mid R_{N+1}(x) \mid \leq 2 \frac{\mid x \mid^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{für alle } x \text{ mit } \mid x \mid \leq 1 + \frac{N}{2}.$$

Def. $e := \exp(1)$.

Aus Satz 3. folgt: $\mid e - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \mid \leq \frac{2}{(N+1)!}$ für alle $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Damit kann man e mit gewünschter Genauigkeit berechnen:

$$e = 2,71828\ldots\ .$$

Satz 4. Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \in E$ für alle $x \in D$. Definiert man $h : D \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := g(f(x))$, so ist h stetig.

Satz 5. (Zwischenwertsatz) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei γ eine reelle Zahl, die zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$.

Bezeichnungen: Außer den bisher betrachteten (offenen, abgeschlossenen oder halboffenen) Intervallen, die wir auch als *eigentliche Intervalle* bezeichnen, betrachtet man auch *uneigentliche Intervalle*, nämlich die Mengen der Form (mit $a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcl}
[\, a, \infty[\, := \mathbb{R}_{\geq a} := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} & , & \text{abg. uneigentliches Intervall} \\
]-\infty, a] := \mathbb{R}_{\leq a} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} & , & \text{abg. uneigentliches Intervall} \\
]\, a, \infty[\, := \mathbb{R}_{> a} := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} & , & \text{offenes uneigentliches Intervall} \\
]-\infty, a[\, := \mathbb{R}_{< a} := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} & , & \text{offenes uneigentliches Intervall} \\
]-\infty, \infty[:= \mathbb{R} & , & \text{offenes u. abg. uneig. Intervall.}
\end{array}$$

Als *Intervall* bezeichnen wir ein eigentliches oder ein uneigentliches Intervall. Ein eigentliches abgeschlossenes Intervall heißt *kompaktes Intervall.*

Der folgende Satz ist eine Umformulierung des Zwischenwertsatzes:

Satz 6. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall oder eine einpunktige Menge.

Satz 7. Ist I ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nimmt f auf I sein Maximum und sein Minimum an. (D.h.: Es gibt $x_0, x_1 \in I$ mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für alle $x \in I$.

Def. Sei $D \in \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f *monoton wachsend*, wenn gilt: Sind $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$, so ist $f(x_1) \leq f(x_2)$. Entsprechend definiert man monoton fallende, streng monoton wachsende und streng monoton fallende Funktionen.

Bem. Eine streng monotone Funktion ist injektiv. Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, so ist $J := f(I)$ ein Intervall nach Satz 6. Die Abbildung $x \mapsto f(x)$ ist eine Bijektion von I auf J. Die Umkehrabbildung ist eine Abbildung $f^{-1} : J \to I$. Schreibe $g(x) := f^{-1}(x)$, $g : J \to \mathbb{R}$. Graph(g) entsteht aus Graph(f) durch Spiegeln an der Geraden $\{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Ist f streng monoton wachsend (fallend), so auch g.

Satz 8. Die Umkehrfunktion einer auf einem Intervall definierten streng monotonen stetigen Funktion ist stetig.

Beispiel (7): a) Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$, streng monoton wachsend und stetig. Sie nimmt beliebig große und kleine Werte an, ist also bijektiv. Die Umkehrabbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach Satz 8 stetig. Schreibe: $g(x) =: \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}$.
b) Ist n eine gerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f(x) = x^n$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ist stetig.
Beachte: Für gerades n ist $\sqrt[n]{x}$ nur für $x \geq 0$ definiert, und dann ist $\sqrt[n]{x} \geq 0$.

5. Die komplexen Zahlen

Auf $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ definiert man eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$$

Damit wird $\mathbb{R}^2$ zu einem Körper, den man mit $\mathbb{C}$ bezeichnet und dessen Elemente die *komplexen Zahlen* heißen.

Bemerkungen und Bezeichnungen:

(1) Es ist $(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0)$ und $(x, 0) \cdot (u, 0) = (xu, 0)$. Indem man x mit $(x, 0)$ identifiziert, wird $\mathbb{R}$ zu einem Teilkörper von $\mathbb{C}$. Schreibe von nun an immer x statt $(x, 0)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(2) Ist $i := (0, 1)$, so ist $i^2 = (-1, 0) = -1$. Für $y \in \mathbb{R}$ ist $i \cdot y = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$. Daher gilt für $(x, y) \in \mathbb{C} : (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$. Schreibe von nun an immer $x + iy$ statt (x, y).

(3) Man stellt sich die Punkte von $\mathbb{C}$ als die Punkte der Ebene vor.

(4) Ist $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so schreibe

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Re}(z) := x & (\textit{Realteil} \text{ von } z) \\ \mathrm{Im}(z) := y & (\textit{Imaginärteil} \text{ von } z.) \end{array}$$

Beachte: Der Imaginärteil einer komplexen Zahl ist eine reelle Zahl!
Ist $z \in \mathbb{C}$, so gilt: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = z$.

(5) Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so heißt $\overline{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*. Sie entsteht aus z durch Spiegeln an der reellen Achse. Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} (a) & \overline{\overline{z}} = z \\ (b) & \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \\ (c) & \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \\ (d) & \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \end{array}$$

(6) Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$$

eine nicht-negative reelle Zahl. Sei

$$\mid z \mid := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$$

Dann heißt $\mid z \mid$ der *Absolutbetrag* von z; er ist der Abstand zwischen 0 und z.
Für $z \neq 0$ ist $\mid z \mid > 0$ und $z \cdot \dfrac{\overline{z}}{\mid z \mid^2} = \dfrac{z\overline{z}}{\mid z \mid^2} = \dfrac{\mid z \mid^2}{\mid z \mid^2} = 1$, also

$$\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\mid z \mid^2}}$$

Insbesondere gilt: Ist $\mid z \mid= 1$ (das heißt, dass z auf dem Kreis mit Radius 1 um 0 liegt), so ist $z^{-1} = \overline{z}$.

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\mid \overline{z} \mid=\mid z \mid$.

Satz 1: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $\mid zw \mid=\mid z \mid \cdot \mid w \mid$

b) $\mid z + w \mid\leq\mid z \mid + \mid w \mid$ (Dreiecksungleichung).

Def. Sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt (z_n) *konvergent* gegen z_0, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mid z_n - z_0 \mid< \epsilon$ für alle $n \geq N$. Schreibe dann $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ oder $z_n \to z_0$.

Satz 2. Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Genau dann ist (z_n) konvergent, wenn die reellen Folgen $(\mathrm{Re}\,(z_n))_n$ und $(\mathrm{Im}\,(z_n))_n$ konvergieren, und dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Satz 3. (Cauchy-Kriterium für Folgen komplexer Zahlen)

Für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ sind äquivalent:

(1) (z_n) ist konvergent.

(2) Zu jedem $\epsilon > 0$ ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $\mid z_n - z_m \mid< \epsilon \; \forall \, n, m \geq N$.

Bem. Die Rechenregeln für Grenzwerte reeller Folgen (§2, Satz 4) gelten für komplexe Folgen unverändert.

Def. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $s_N := a_1 + \ldots + a_N$.

a) Wenn die Folge $(s_N)_N$ konvergiert, so heißt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

b) Wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ konvergiert, so heißt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

Bem. Auch in $\mathbb{C}$ gilt: Absolut konvergente Reihen sind konvergent. Majorantenkriterium, Quotientenkriterium und die Sätze 6 (Komm.) und 7 (Ausmult.) von §3 bleiben unverändert richtig. Insbesondere ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ absolut konvergent; durch $\exp(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ erhält man eine Abbildung $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Für $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Def. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $x_0 \in D$. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt *stetig in* z_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

Ist $z \in D$ und $\mid z - z_0 \mid< \delta$, so ist $\mid f(z) - f(z_0) \mid< \epsilon$.

f heißt *stetig*, wenn es in jedem Punkt von D stetig ist.

Beispiel: Definiere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) := \overline{z}$. Dann ist $f$stetig.

Satz 4. Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$ sind äquivalent:

(1) f ist stetig in z_0.

(2) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.
D.h.: Für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0$ ist $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Bem. Die Rechenregeln für stetige Funktionen (§4, Sätze 2 und 4) bleiben im Komplexen richtig. Insbesondere sind Polynomfunktionen (mit komplexen Koeffizienten) stetige Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$, und gebrochen-rationale Funktionen sind überall dort stetig, wo sie definiert sind.
Der Beweis der Stetigkeit der Exponentialfunktion zeigt, dass auch $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist.

6. Die wichtigsten Funktionen

Bezeichnungen: a) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty :\Leftrightarrow \text{ Zu jedem } C \in \mathbb{R} \text{ ex. } N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n \geq C \text{ für alle } n \geq N.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty :\Leftrightarrow \text{ Zu jedem } C \in \mathbb{R} \text{ ex. } N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n \leq C \text{ für alle } n \geq N.$$

b) Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nicht nach oben beschränkt ist, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, so sei

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a :\Leftrightarrow \text{ Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \text{ ist } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Entsprechend definiert man, was $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ bedeutet.

Bem. Ist $a \in \mathbb{R}$, so bedeutet $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mid f(x) - a \mid < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $x \geq M$.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ bedeutet, dass es für jedes $C \in \mathbb{R}$ ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) \geq C$ für alle $x \in D$ mit $x \geq M$.

6.1. Die Exponentialfunktion. Die Abb. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist def. durch

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Wir wissen bereits:

> Diese Reihe konvergiert absolut;
>
> $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \ \ \forall\, z, w \in \mathbb{C}$;
>
> exp ist stetig;
>
> $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,718\ldots$

Durch Einschränkung erhält man eine ebenfalls mit exp bezeichnete Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) $\exp(0) = 1$.

(2) Für $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

(3) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) > 0$.

(4) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.

(5) $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^m} = \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^m \exp(x) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(8) Für $z \in \mathbb{C}$ ist $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$.

(9) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $\mid \exp(ix) \mid = 1$.

Also liegt $\exp(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$ auf der Kreislinie K mit Radius 1 und Mittelpunkt 0.
Wir werden später sehen: Legt man auf K von 1 aus im Gegenuhrzeigersinn einen Weg mit der Länge x zurück, so endet man im Punkt $\exp(ix)$.

6.2. Der Logarithmus

Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig ist mit $\exp(\mathbb{R}) =]\,0, \infty[$, so ex. nach §4 die Umkehrfunktion $\log :]\,0, \infty[\to \mathbb{R}$; sie ist ebenfalls stetig.

(1) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\log(\exp(x)) = x$; für $x > 0$ ist $\exp(\log(x)) = x$.

(2) $\log(\,]\,0, \infty[\,) = \mathbb{R}$.

(3) log ist streng monoton wachsend.

(4) Für $x, y > 0$ ist $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(5) $\log(1) = 0$

(6) Für $x > 0$ ist $\log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} \log x = -\infty$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$.

6.3. Die allgemeine Potenz. Sei $a > 0$ eine feste Zahl.

(1) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\exp(n \log a) = \exp(\log(a^n)) = a^n$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\exp(-n \log a) = \exp(n \log \frac{1}{a}) = (\frac{1}{a})^n = a^{-n}$.

(3) Sei $x \in \mathbb{Q}$, also $x = \frac{n}{m}$ mit $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(\exp(x \log a))^m = \exp(mx \log a) = \exp(n \log a) = a^n = (a^x)^m$.
Weil die Funktion $t \mapsto t^m$ von $[\,0, \infty[$ in sich streng monoton wachsend ist, folgt:

$$\exp(x \log a) = a^x \;\forall\, x \in \mathbb{Q}.$$

Def. Sei $a > 0$. Für $z \in \mathbb{C}$ sei $a^z := \exp(z \log a)$.

(4) Für $z \in \mathbb{C}$ ist $e^z = \exp(z \log e) = \exp z$.

(5) Ist $a > 0$ und sind $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $(a^x)^y = a^{xy}$ und $a^{x+y} = a^x a^y$.

(6) Sind $a, b > 0$ und ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $(ab)^x = a^x b^x$ und $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$.

6.4. Die trigonometrischen Funktionen.

Def. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\cos x := \mathrm{Re}\,(e^{ix})$ und $\sin x := \mathrm{Im}\,(e^{ix})$.

(1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

(2) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

Weil die Exponentialfunktion im Komplexen stetig ist, sind die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

(3) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$.

(Dabei schreibt man $\sin^2 x := (\sin x)^2$ usw.)

(4) $\cos(-x) = \cos x$ und $\sin(-x) = -\sin x$.

(5) **Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:**

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y\ ,$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y\ .$$

(6) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\ ,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\ .$$

(7) **Restgliedabschätzung:** Ist $0 \le x \le 2$, so ist

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \le \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \quad \text{für } n \ge 0\,,$$

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \le \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{für } n \ge 1\,.$$

Beispiel (1) Für $0 < x \le 2$ ist $|\sin x - x| \le \frac{x^3}{6}$, also insbes.
$\sin x \ge x - \frac{x^3}{6} = x(1 - \frac{x^2}{6}) \ge x(1 - \frac{4}{6}) = \frac{1}{3}x > 0$.

Beispiel (2) Für $0 \le x \le 2$ ist $|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2})| \le \frac{x^4}{24}$, also insbes.
$|\cos 2 + 1| \le \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos 2 \le -\frac{1}{3}$.

(8) Die Funktion cos hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

Dies folgt mit Beispiel (1) und (2) aus dem Zwischenwertsatz und aus der Tatsache, dass cos in $[\,0, 2\,]$ streng monoton fallend ist. Diese Tatsache ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

Lemma. Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$.

Def. Die Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ ist dadurch definiert, das $\frac{\pi}{2}$ die Nullstelle von cos im Intervall $[0, 2]$ ist. ($\pi = 3{,}14...$)

(9) $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$.

(10) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin x \;\forall x \in \mathbb{R}$.
„cos und sin haben die *Periode* 2π".

(11) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ und $\sin(x + \pi) = -\sin x \;\forall x \in \mathbb{R}$.

(12) $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ und $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \;\forall x \in \mathbb{R}$.

(13) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(14) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Def. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sei $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$.
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sei $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$.

6.5. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

(1) Die Funktion cos ist im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Sei $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion.

(2) Die Funktion sin ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Sei $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion.

(3) Die Funktion tan ist im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Sei $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion.

6.6. Noch einmal die Exponentialfunktion.

(1) $\exp(2\pi i) = 1$, $\exp(\pi i) = -1$, $\exp(\frac{1}{2}\pi i) = i$, $\exp(\frac{3}{2}\pi i) = -i$.

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$.
„exp hat die Periode $2\pi i$."

(3) Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt: $\exp(ix) = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Ist $z \in \mathbb{C}$, so existieren $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$ mit
$$z = re^{i\varphi}.$$

(5) Seien $r, s \geq 0$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Setzt man
$$z := re^{i\varphi}, \; w := se^{i\psi},$$
so ist $zw = rse^{i(\varphi + \psi)}$. Das heißt: „ Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert werden."

(6) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(7) Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$, so gibt es genau n verschiedene Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.

(8) Insbesondere gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau n Zahlen w mit $w^n = 1$. Sie heißen die *n-ten Einheitswurzeln* und sind von der Form
$$e^{\frac{2\pi ik}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$
Sie bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

7. Differenzialrechnung

Def. Eine Teilmenge D von $\mathbb{R}$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $x \in D$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $]\, x-\varepsilon\,, x+\varepsilon\,[\subseteq D$.

Beispiele. Ein offenes Intervall ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.
Ist A eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$, so ist $\mathbb{R} \smallsetminus A$ offen.

Bem. Eine Teilmenge D von $\mathbb{R}$ ist genau dann offen, wenn D die Vereinigung von offenen Intervallen ist.

Def. Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert (in $\mathbb{R}$), so heißt f im Punkt x_0 *differenzierbar*; man schreibt $f'(x_0)$ für diesen Grenzwert und nennt ihn die *Ableitung* von f im Punkt x_0. Manchmal schreibt man $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $\dot{f}(x_0)$ o.ä. statt $f'(x_0)$.

Ist f in jedem Punkt von D differenzierbar, so heißt f differenzierbar in D. Dann ist $f' : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Beispiel (1) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion mit dem Wert c. Dann ist f differenzierbar und $f'(x) = 0$.

Beispiel (2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$. Dann ist f differenzierbar und $f'(x) = 1$.

Beispiel (3) $\exp' x = \exp x$.

Beispiel (4) $\cos' x = -\sin x$.

Satz 1. Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so ist f in x_0 stetig.

Satz 2. (Rechenregeln für das Ableiten) Sei D offen in $\mathbb{R}$, und $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar.

a) $f + g$ ist differenzierbar und $(f+g)' = f' + g'$.

b) fg ist differenzierbar und $(fg)' = f'g + fg'$.

c) Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist cf differenzierbar und $(cf)' = cf'$.

d) Ist $g(x) \neq 0 \; \forall\, x \in D$, so ist $\dfrac{f}{g}$ differenzierbar und $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$.

Beispiel (5) Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $p_n : D_n \to \mathbb{R}$ definiert durch $p_n(x) := x^n$, wobei $D_n = \mathbb{R}$ für $n \geq 0$, $D_n = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ für $n < 0$.
Dann ist p_n differenzierbar und ${p_n}'(x) = nx^{n-1}$.

Folgerung. Polynome sind differenzierbar. Gebrochen rationale Funktionen sind überall, wo sie definiert sind, differenzierbar.

Satz 3. (Kettenregel) Seien D, E offen in $\mathbb{R}$ und seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$, so dass man $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ bilden kann. Sei f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beispiel (6) $\sin' x = \cos x$

Beispiel (7) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Satz 4. (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei D ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei $x_0 \in D$, sei f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$. Sei g die Umkehrfunktion von f. Dann ist g in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beispiel (8) $\log'(x) = \dfrac{1}{x}$ für $x > 0$.

Folgerung. $e = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^n$.

Beweis: $1 = \log'(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \log\big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^n$

$\Rightarrow e = \exp(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^n$.

Beispiel (9) $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Beispiel (10) $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $-1 < x < 1$.

Beispiel (11) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest und $f :]\,0, \infty\,[\to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$. Dann ist $f'(x) = (\exp(\alpha \log x)) \cdot \dfrac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

Beispiel (12) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(x) > 0 \;\forall\, x \in D$. Definiert man $g : D \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = \log(f(x))$, so ist $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Man nennt $\dfrac{f'}{f}$ die *logarithmische Ableitung* von f.

Def. Sei D offen in $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Ist f differenzierbar in D und f' differenzierbar in x_0, so heißt f *zweimal differenzierbar* in x_0; schreibe $f''(x_0) := (f')'(x_0)$. Und so weiter.
$f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, ...

8. Anwendungen der Differenzialrechnung

Def. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f in x_0 ein *lokales Maximum* hat, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass gilt: Ist $x \in D$ mit $\mid x - x_0 \mid < \epsilon$, so ist $f(x_0) \geq f(x)$.
Entsprechend: f hat in x_0 ein *lokales Minimum*.
Wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum hat, so sagen wir, dass f in x_0 ein *lokales Extremum* besitzt.

Satz 1. Sei $f :]\,a, b\,[\to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in]\,a, b\,[$ eine Stelle, an der f differenzierbar ist und ein lokales Extremum besitzt. Dann ist $f'(x_0) = 0$.

Def. Ist D offen in $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in D$ und $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 eine *kritische Stelle* von f.

Bem. Satz 1. besagt also: Wenn f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum besitzt, so ist x_0 eine kritische Stelle von f. Die Umkehrung gilt nicht: Ist $f(x) = x^3$, so ist $f'(0) = 0$, aber f hat in 0 kein lokales Maximum oder Minimum.

Satz 2. (Satz von Rolle) Sei $f : \; [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]a, b[$ differenzierbar ist, und sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x \in]a, b[$ mit $f'(x) = 0$.

Satz 3. (Mittelwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig; f sei differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gibt es ein $x \in]a, b[$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz 4. Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = 0 \; \forall x \in]a, b[$. Dann ist f konstant.

Anwendung: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $g(x) := \frac{f(x)}{e^x}$. Dann ist $g'(x) = 0$; daher gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = c$.

Satz 5. Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

a) $f'(x) > 0 \; \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend.

b) $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend.

Satz 6. Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x \in]a, b[$, und sei f zweimal differenzierbar in x mit

$$f'(x) = 0, f''(x) > 0 \quad [\text{bzw.} f''(x) < 0].$$

Dann besitzt f in x ein lokales Minimum [bzw. lokales Maximum].

Def. Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn gilt:
Sind $P, Q \in M$, so ist die Verbindungsstrecke von P und Q eine Teilmenge von M.

Def. Sei I ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn die Menge

$$M_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \geq f(x)\}$$

konvex ist.

Beispiel: Sei $f(x) = \mid x \mid \; \forall x \in \mathbb{R}$. Dann ist f konvex.

Satz 7. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar auf $]a, b[$. Genau dann ist f konvex, wenn $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in]a, b[$.

Satz 8. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig; beide seien differenzierbar in $]a, b[$. Dann existiert $x \in]a, b[$ mit

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(x).$$

Bem. Ist $g(x) = x \; \forall x$, so erhält man den gewöhnlichen Mittelwertsatz.

Satz 9. (1. Regel von l'Hôpital) Seien $f, g :]\,a, b\,[\to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, $x_0 \in]\,a, b\,[$ und $f(x_0) = 0 = g(x_0)$. f und g seien in $]\,a, b\,[\setminus \{x_0\}$ differenzierbar, und es sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in]\,a, b\,[\setminus \{x_0\}$.
Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

Bem. Dabei ist auch $\lim\limits_{x \to x_0} \ldots = \pm\infty$ zugelassen. Ein entsprechender Satz gilt für $\lim\limits_{x \to \infty} \ldots$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \ldots$.
Ähnliche Bemerkungen gelten für den folgenden Satz.

Satz 10. (2. Regel von l'Hôpital) Sei $x_0 \in]\,a, b\,[$, und seien $f, g :]\,a, b\,[\setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Ferner sei $g'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in]\,a, b\,[\setminus \{x_0\}$.
Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und die beiden Grenzwerte stimmen überein.

9. Integralrechnung

Def. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gibt, so dass f auf jedem Intervall $]x_{k-1}, x_k[, k = 1, \ldots, n$, konstant ist, so heißt f eine *Treppenfunktion* auf $[a, b]$. Mit $\mathcal{T}[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

Bem.1. a) Ist $f \in \mathcal{T}[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist $cf \in \mathcal{T}[a, b]$.
b) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$, so ist $f + g \in \mathcal{T}[a, b]$.
Daher ist $\mathcal{T}[a, b]$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums aller Abbildungen von $[a, b]$ in $\mathbb{R}$.

Def. Ist $f \in \mathcal{T}[a, b]$, ist $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und f konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ mit dem Wert c_k für $k = 1, \cdots, n$, so schreibt man $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$.

Bem.2. a) Ist $f \in \mathcal{T}[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so $\displaystyle\int_a^b (cf)(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$.

b) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$, so ist $\displaystyle\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$.

Also ist die Abbildung $\mathcal{T}[a, b] \to \mathbb{R}$, die durch $f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$ gegeben ist, $\mathbb{R}$-linear.

c) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a,b]$ mit $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x) \;\; \forall\, x \in [a,b]$), so ist
$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Def. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. (Es gibt also ein $M \in \mathbb{R}$ mit $\mid f(x) \mid \leq M$ für alle $x \in [a,b]$.)

$$\int\limits_a^{b\;*} f(x)\,dx := \inf\Big\{ \int\limits_a^b \psi(x)\,dx \;\mid\; \psi \in \mathcal{T}[a,b]\,,\; f \leq \psi \Big\},$$

$$\int\limits_{a\;*}^{b} f(x)\,dx := \sup\Big\{ \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \;\mid\; \varphi \in \mathcal{T}[a,b]\,,\; \varphi \leq f \Big\}.$$

Diese beiden Zahlen heißen das *Ober-* bzw. *Unterintegral* von f.

Bem.3. Die Menge $\mathcal{T}_f := \{\psi \in \mathcal{T}[a,b] \;\mid\; \psi \geq f\}$ ist nicht leer, z.B. enthält sie die konstante Funktion mit Wert M. Für jedes $\psi \in \mathcal{T}_f$ ist $\psi \geq -M$. Daher ist $\Big\{ \int\limits_a^b \psi(x)\,dx \;\mid\; \psi \in \mathcal{T}[a,b]\,,\; \psi \geq f \Big\} \neq \emptyset$, und nach Bem.2.c) ist $\int\limits_a^b \psi(x)\,dx \geq -M(b-a) \;\; \forall\, \psi \in \mathcal{T}_f$.

Daher existiert $\int\limits_a^{b\;*} f(x)\,dx = \inf\Big\{ \int\limits_a^b \psi(x)\,dx \;\mid\; \psi \in \mathcal{T}_f \Big\}$.

Ebenso existiert $\int\limits_{a\;*}^{b} f(x)\,dx$.

Def. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *(Riemann-)integrierbar*, wenn $\int\limits_a^{b\;*} f(x)\,dx = \int\limits_{a\;*}^{b} f(x)\,dx$. Den gemeinsamen Wert bezeichnet man mit $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ und nennt ihn das *(bestimmte) Integral* von f (über $[a,b]$).
Statt x kann jeder andere Buchstabe (außer f, d, a, b) verwendet werden.

Bem.4. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ gibt mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int\limits_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx \leq \epsilon.$$

Satz 1. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $c \in \mathbb{R}$.
a) cf ist integrierbar und

$$\int\limits_a^b (cf)(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

b) $f + g$ ist integrierbar und

$$\int\limits_a^b (f+g)(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

c) Ist $f \leq g$, so ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Satz 2. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

a) $\max\{f, g\}$ ist integrierbar.

b) f^2 ist integrierbar.

c) $f \cdot g$ ist integrierbar.

Satz 3. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $M := \sup\{|f(x)| \,\big|\, a \leq x \leq b\}$. Dann ist $|\, f \,|$ integrierbar und

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leq M \cdot (b-a).$$

Satz 4. Sei $a < c < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Genau dann ist f integrierbar, wenn $f\big|\,[a,c]$ und $f\big|\,[c,b]$ integrierbar sind, und dann ist

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Bez. Man setzt $\int\limits_a^a f(x)\,dx := 0$ und für $a < b$:

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx := -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Satz 5. Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Def. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$.

Bem. Eine gleichmäßig stetige Funktion ist stetig.
Die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}\,, f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Satz 6. Eine auf einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Dieser Satz wird benutzt, um zu zeigen:

Satz 7. Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Satz 8. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in [a,b]$. Definiere $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int\limits_c^x f(t)\,dt.$$

Dann ist F stetig.

Satz 9. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $c \in I$ und definiert man $F : I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int\limits_c^x f(t)\,dt$$

(was nach Satz 7. möglich ist), so ist F differenzierbar und $F' = f$.

Def. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von f, wenn $F' = f$.

Bem. Nach §8, Satz 4. unterscheiden sich zwei Stammfunktionen von f um eine Konstante.

Satz 10. (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)
Sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bez. Ist F eine Stammfunktion von f, so schreibt man $\int f(x)\,dx = F(x)$.

Satz 11. (Partielle Integration) Sei I ein offenes Intervall, $a, b \in I$. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f', g' stetig. Dann ist

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Beispiele:

$$\int x\,e^x\,dx = (x-1)\,e^x$$
$$\int \log x\,dx = x\log x - x$$
$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\,(x - \sin x\,\cos x)$$

Satz 12.(Substitutionsregel) Seien I, J offene Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Sei $\varphi : J \to I$ differenzierbar und φ' sei stetig.

a) Ist F eine Stammfunktion von f, so ist die Funktion $F \circ \varphi$ Stammfunktion von $x \mapsto f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

b) Sind $a, b \in J$, so gilt:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Wichtiger Spezialfall: Ist $\varphi : I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, φ' stetig, so

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log|\varphi(x)|.$$

Beispiel: $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|$.

Beispiel: $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$.

Beispiel: Ist $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, so $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(1-n)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}$

Beispiel: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} - \arccos x)$.
Deswegen hat ein Halbkreis vom Radius 1 die Fläche $\frac{\pi}{2}$.

Beispiel: Wir wollen $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ für $n > 1$ bestimmen. Es ist

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\ .$$

Wir nehmen induktiv an, dass wir schon eine Stammfunktion von $\displaystyle\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}$ kennen; dann müssen wir noch eine Stammfunktion von $\displaystyle\frac{x^2}{(x^2+1)^n}$ finden. Mit partieller Integration finden wir

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(1-n)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\ ,$$

und wir sind fertig nach Induktion.

Durch solche Überlegungen sieht man: Ist f eine gebrochen-rationale Funktion und kann man die Nullstellen des Nenners finden, so findet man eine Stammfunktion von f. Sie setzt sich zusammen aus gebrochen-rationalen Funktionen und den Funktionen log und arctan.

10. Uneigentliche Integrale

Def. 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und sei $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $0 < \delta < b - a$, so kann man $\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$ bilden. Wenn $\lim\limits_{\delta\searrow 0}\displaystyle\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$ in $\mathbb{R}$ existiert, so schreibt man $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ für den Grenzwert und sagt, dass das *uneigentliche Integral* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *konvergiert.* Andernfalls sagt man, dass $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ divergiert.

Beispiel: Für $c \geq 1$ divergiert $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^c}$; für $0 < c < 1$ konvergiert $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^c}$ und ist $= \frac{1}{1-c}$.

Def. 2. Ist $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ stetig, so schreibt man $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\delta\searrow 0}\displaystyle\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$, wenn dieser Grenzwert existiert.

Def. 3. Ist $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig, so schreibt man $\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\epsilon,\delta \searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^{b-\delta} f(x)\,dx\,,$ wenn dieser Grenzwert existiert.

Dies ist genau dann der Fall, wenn für ein (und damit jedes) $c \in]a,b[$ gilt, dass $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ und $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ im Sinne von Def.1 und Def.2 existieren; es ist dann

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Wenn $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konvergiert, so ist es $= \lim\limits_{\delta \searrow 0} \int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\,dx\,,$ aber dieser Grenzwert kann existieren, ohne dass $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konvergiert.

Beispiel: Für $-1 < x < 1$ ist $\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \log(1-x^2)$.

Für $0 < \delta < 1$ ist also $\int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{2x}{x^2-1}\,dx = 0$, aber $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-1}\,dx$ existiert nicht.

Def. 4. Ist $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ stetig, so schreibt man $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx := \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$ wenn dieser Grenzwert existiert.

Beispiel: $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$. Also $\int\limits_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-b} + 1$ und $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} (-e^{-b}+1) = 1$.

Def. 5. Ist $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ stetig, so schreibt man

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ b\to\infty}} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx\,,$$

wenn dies existiert.

Def. 6. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so schreibt man $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int\limits_a^b f(x)\,dx\,,$ wenn dies existiert.

Beispiel: Für $a > 0$ ist $\int\limits_{-a}^a x\,dx = 0$, also $\lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^a x\,dx = 0$, aber $\int\limits_{-\infty}^\infty x\,dx$ konvergiert nicht.

Satz 1. Sei $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ stetig. Genau dann konvergiert $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx\,,$ wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $M \geq a$, so dass $|\int\limits_s^t f(x)\,dx| < \epsilon$ für alle s,t mit $M \leq s < t$.

Beispiel: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert.

(Wegen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist dieses Integral an der unteren Grenze nicht uneigentlich. Später: $= \frac{\pi}{2}$.)

Def.7. Das Integral $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ konvergiert.

Satz 2. Wenn $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ absolut konvergiert, so konvergiert es.

Beispiel: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert nicht absolut.

Satz 3. (Majorantenkriterium) Seien $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig mit $|g(x)| \leq f(x)$ für alle $x \in [a, \infty[$. Wenn $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ konvergiert, so konvergiert $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ absolut.

Beispiel: Aus dem Beispiel nach Def.4 folgt mit dem Majorantenkriterium, dass $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$ konvergiert. Wir werden später sehen, dass es den Wert $\sqrt{\pi}$ hat.

Bem. Bei der Definition von $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ muss man nicht die Stetigkeit von f voraussetzen. Es genügt, dass f für jedes b mit $b > a$ über $[a, b]$ integrierbar ist. Dies ist z.B. dann erfüllt, wenn f monoton ist.

Satz 4. (Integralkriterium für Reihen) Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0 \ \ \forall\, x$. Dann sind äquivalent:

(1) $\sum\limits_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert.

(2) $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

Beispiel: Für $c > 0$ konvergiert $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^c}$ genau dann, wenn $c > 1$. Nach Satz 2 konvergiert $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^c}$ genau dann, wenn $c > 1$.

11. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Def. Sei D eine Menge und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, $n \in \mathbb{N}$. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für jedes $x \in D$, so sagen wir, dass die Funktionenfolge (f_n) *punktweise* gegen f *konvergiert.*

Def. Sei D eine Menge und seien f und f_n Funktionen von D nach $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen f, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Satz 1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei (f_n) eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$. Dann ist die Grenzfunktion f von (f_n) stetig.

Beispiel: Definiere $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := x^n$. Die f_n sind stetig und konvergieren punktweise gegen die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$, die nicht stetig ist.

Def. Seien f_n Funktionen, die auf einer Menge D definiert sind. Für $x \in D$ sei $s_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} f_n(x)$. Wenn die Folge (s_n) gleichmäßig konvergiert, so sagen wir, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig konvergiert.*

Folgerung aus Satz 1. Eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen hat eine stetige Summe.

Satz 2. Seien f_n auf der Menge D definierte Funktionen, $n \in \mathbb{N}$. Für jedes n gebe es ein $a_n \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \leq a_n$ für alle $x \in D$. Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig.

Satz 3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Satz 4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, und $f_n' :]a,b[\to \mathbb{R}$ sei stetig. Die Folge (f_n) konvergiere punktweise gegen die Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, und die Folge (f_n') sei gleichmäßig konvergent. Dann gilt:

a) Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig.

b) f ist differenzierbar.

c) $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \;\; \forall\, x \in]a,b[$.

Beispiel: Definiere $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann ist $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$, d.h. (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen 0. Alle f_n sind differenzierbar; es ist $f_n'(x) = \cos nx$. Insbesondere ist $f_n'(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Daher konvergiert (f_n') nicht punktweise gegen 0.

12. Potenzreihen und die Taylor-Formel

Def. Sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt f *n-mal stetig differenzierbar* oder *von der Klasse* C^n, wenn f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist.

Ist f unendlich oft differenzierbar, so sagt man, dass f *von der Klasse* C^∞ ist.
Man sagt: f ist *von der Klasse* C^0,wenn f stetig ist.

Satz 1. (Taylor-Formel) Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^{n+1}. Sind $a, x \in I$, so gilt:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

wobei $R_{n+1}(x) := \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_a^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt.$

Def. Unter einer *komplexen Potenzreihe* verstehen wir eine Funktion der Form

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \ ,$$

wobei $a, c_0, c_1, c_2, \ldots$ feste komplexe Zahlen sind. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die diese Reihe konvergiert.

Bez. Für $a \in \mathbb{C}$ und $r \geq 0$ sei

$$B_r(a) := \big\{ z \in \mathbb{C} \big| \, |z-a| < r \big\},$$

$$\overline{B}_r(a) := \big\{ z \in \mathbb{C} \big| \, |z-a| \leq r \big\}.$$

Ferner sei $B_\infty(a) := \mathbb{C}$ und $\overline{B}_\infty(a) := \mathbb{C}$

Def. Sei $\sum\limits_n c_n(z-a)^n$ eine komplexe Potenzreihe. Dann heißt

$$r := \sup \Big\{ |z-a| \ \Big| \ \sum_n c_n(z-a)^n \text{ ist konvergent} \Big\}$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.
(Dabei sind auch $r = 0$ und $r = \infty$ zugelassen. Letzteres bedeutet, dass $\{\ldots\}$ nach oben unbeschränkt ist.)

Satz 2. Sei r der Konvergenzradius von $\sum\limits_n c_n(z-a)^n$. Dann gilt:

a) Die Potenzreihe $\sum\limits_n c_n(z-a)^n$ konvergiert absolut auf $B_r(a)$. Für $z \in B_r(a)$ sei $f(z) := \sum\limits_n c_n(z-a)^n$.

b) Ist $0 \leq \rho < r$, so konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig auf $\overline{B}_\rho(a)$.

c) Sie konvergiert für kein z, das nicht in $\overline{B}_r(a)$ liegt.

d) Auf $B_r(a)$ ist die Funktion f stetig.

Satz 3. Sei $\sum\limits_n c_n(z-a)^n$ eine komplexe Potenzreihe mit $c_n \neq 0$ für fast alle n.
Wenn $r := \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ existiert, so ist r der Konvergenzradius der Potenzreihe.
(Dabei ist auch $r = \infty$ zugelassen.)

Def. Unter einer *reellen Potenzreihe* verstehen wir eine Funktion der Form

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \ ,$$

wobei $a, c_0, c_1, c_2, \ldots$ feste reelle Zahlen sind. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die diese Reihe konvergiert.

Man kann eine solche reelle Potenzreihe auch als komplexe Potenzreihe auffassen. Sei r ihr Konvergenzradius. Die reelle Potenzreihe konvergiert, falls $x \in]a-r, a+r[$; sie divergiert, falls $x \notin [a-r, a+r]$.

Satz 4. Sei $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$.

a) Auf $]a-r, a+r[$ ist f unendlich oft differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n (x-a)^{n-1} \, .$$

(,,Potenzreihen dürfen gliedweise differenziert werden.")

b)
$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Satz 5. Für $-1 < x < 1$ gilt:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots \, .$$

Satz 6. (Abelscher Grenzwertsatz) Gegeben sei eine reelle Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit dem Konvergenzradius 1. Ferner sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. Definiert man $f :]-1, 1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, so ist f auch an der Stelle 1 stetig.

Folgerung. $\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$.

Satz 7. Für $-1 \le x \le 1$ gilt:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots \, .$$

Insbesondere ist

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots \, .$$

Satz 8. (Binomische Reihe) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $-1 < x < 1$ ist

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n .$$

Dabei setzt man $\binom{\alpha}{0} := 1$ und $\binom{\alpha}{n} := \frac{1}{n!}\,\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Spezialfälle: Für $-1 < x < 1$ ist

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots .$$

Für den Beweis von Satz 8 benutzen wir

Satz 9. (Satz von Bernstein) Sei $r > 0$ und sei $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ von der Klasse C^∞. Es gebe ein $K \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$f^{(n)}(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in]-r, r[\text{ und alle } n \geq K\ .$$

Dann gilt für alle $x \in]-r, r[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(0)\, x^n\ .$$