

13. MEHRGITTERVERFAHREN

Die Methode der finiten Elemente führt auf ein lineares Gleichungssystem (12.1) mit sehr großer und dünn besetzter Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ (typischerweise $N \sim 10^4$ bei zweidimensionalen und 10^6 bei dreidimensionalen Problemen). Die direkte Lösung mit Gauß-Elimination oder Cholesky-Zerlegung kostet unter Ausnutzung der Bandstruktur

Dimension	Bandbreite	Operationen
2	\sqrt{N}	$N(\sqrt{N})^2 = N^2$
3	$N^{2/3}$	$N(N^{2/3})^2 = N^{7/3}$

Als Alternative bieten sich die in Kapitel 7 diskutierten iterativen Verfahren an. Da A symmetrisch und positiv definit ist, kann das Verfahren der konjugierten Gradienten verwendet werden. Die Konvergenz lässt sich nach Satz 7.15 mit Hilfe der Konditionszahl abschätzen:

$$\kappa_2(A) \approx \frac{1}{h^2} \approx \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^{-2} = N & \text{2D,} \\ \left(\frac{1}{N^{1/3}}\right)^{-2} = N^{2/3} & \text{3D} \end{cases}$$

In diesem Kapitel stellen wir eine weitere Klasse von Iterationsverfahren vor, die sogenannten Mehrgitterverfahren (Fedorenko 1961, A. Brandt 1972, Hackbusch 1976, ...). Der Aufwand zur Lösung des linearen Gleichungssystems zu einer Genauigkeit, die größer als der Diskretisierungsfehler durch die Methode der finiten Elemente ist, beträgt nur $O(N)$, mit einer moderaten Konstante von typischerweise 10–20. Die wesentliche Idee ist wie folgt: Klassische Iterationsverfahren wie das Jacobi- oder Gauß-Seidel-Verfahren konvergieren zwar sehr langsam, sie glätten jedoch den Fehler. Die Gleichung für den Fehler kann daher näherungsweise auf einem gröberen Gitter gelöst werden.

Als Modellproblem betrachten wir die Poisson-Gleichung (11.10) auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$ mit homogenen Dirichlet-Randwerten ($g \equiv 0$). Die Diskretisierung mit finiten Elementen auf einem regelmäßigen Dreiecksgitter (rechtwinklige Dreiecke mit Seitenlänge $h = \frac{1}{n+1}$) führt auf das lineare Gleichungssystem

$$A\mu = b, \quad A = \frac{1}{h^2}(T \otimes I + I \otimes T), \quad T = \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{n,n} \quad (13.1)$$

(Übung).

13.1 Klassische Iterationsverfahren – Splittingverfahren

Zur nicht singulären Matrix A sei eine Zerlegung

$$A = B - C$$

derart gegeben, dass lineare Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrix B leicht zu lösen sind. Insbesondere verlangen wir stets, dass B invertierbar ist. Es ist dann

$$A\mu = b \iff B\mu = C\mu + b.$$

Algorithmus 13.1 Splittingverfahren

Wähle einen Startwert μ^0 , setze $k = 0$

repeat

 löse $B\mu^{k+1} = C\mu^k + b$

 setze $k = k + 1$

until Konvergenz

Fixpunktiteration hierauf angewendet liefert das in Algorithmus 13.1 angegebene allgemeine Splittingverfahren. Falls die Folge $\{\mu^k\}_{k \geq 0}$ gegen ein μ konvergiert, dann löst μ offensichtlich das lineare Gleichungssystem $A\mu = b$.

Ist eine Zerlegung

$$A = D - L - U = \begin{array}{c} \diagdown \quad \triangle \quad \diagup \end{array}$$

mit einer Diagonalmatrix D und strikter unterer bzw. oberer Dreiecksmatrix L bzw. U gegeben, so entspricht die Wahl von $B = D$ dem **Jacobi-** oder **Gesamtschrittverfahren** und die Wahl von $B = D - L$ dem **Gauß-Seidel-** oder **Einzelschrittverfahren**. Im Modellproblem der Poisson-Gleichung auf dem Einheitsquadrat mit Gitterweite $h = \frac{1}{n+1}$ lautet wegen $u_{ij} = 0$ für $(x_i, y_j) \in \Gamma$ die Iterationsvorschrift des Jacobi-Verfahrens

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{1}{4} (u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k) + \frac{h^2}{4} b_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

und die des Gauß-Seidel-Verfahrens

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{1}{4} (u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k) + \frac{h^2}{4} b_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Die Berechnung von u_{ij}^{k+1} erfolgt hierbei durch Verwendung der bereits berechneten Näherungen, wenn man diese in der Reihenfolge der Nummerierung durchläuft (hier von links unten nach rechts oben).

Die Konvergenz von Splittingverfahren kann wie beim Banach'schen Fixpunktsatz 4.3 analysiert werden. Ist μ die exakte Lösung, so gilt für den Fehler $e^k = \mu^k - \mu$

$$Be^{k+1} = Ce^k \iff e^{k+1} = B^{-1}Ce^k =: Me^k$$

mit der Iterationsmatrix M . Das Verfahren konvergiert also genau dann, wenn $\|M\| < 1$ in irgendeiner Norm ist. Nach Satz 6.8 ist dies äquivalent dazu, dass für den Spektralradius $\rho(M) < 1$ gilt, also alle Eigenwerte von M im Inneren des Einheitskreises liegen. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz 4.3 wissen wir auch, dass die Konvergenz um so schneller ist, je kleiner $\|M\|$, oder je kleiner der betragsgrößte Eigenwert ist.

Speziell für unser Modellproblem kann man die Konvergenzrate explizit berechnen.

Lemma 13.1. *Es seien ν_j die Eigenwerte von T mit zugehörigen normierten Eigenvektoren w_j . Die Eigenwerte von $I \otimes T + T \otimes I$ sind $\nu_j + \nu_k$ mit Eigenvektoren $w_j \otimes w_k$, $j, k = 1, \dots, n$.*

Zur Erinnerung: Das Kronecker-Produkt $A \otimes B$ zweier Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ und $B \in \mathbb{C}^{p,q}$ ist definiert durch

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp,nq}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(I \otimes T + T \otimes I)(w_j \otimes w_k) &= w_j \otimes Tw_k + Tw_j \otimes w_k \\ &= w_j \otimes (\nu_k w_k) + (\nu_j w_j) \otimes w_k \\ &= (\nu_k + \nu_j)(w_j \otimes w_k)\end{aligned}$$

nach den Rechenregeln für Kronecker-Produkte.

Dies sind alle Eigenwerte, denn $\{w_j\}_{j=1}^n$ ist eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n und deshalb ist $\{w_j \otimes w_k\}_{j,k=1}^n$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^{n^2} . \square

Beim Modellproblem (13.1) gehört zum Jacobi-Verfahren die Iterationsmatrix

$$J = D^{-1}(L + U) = \frac{1}{4}(I \otimes T_0 + T_0 \otimes I), \quad T_0 = \text{tridiag}(1, 0, 1).$$

Korollar 13.2. Die Eigenwerte von J sind $(\nu_k + \nu_l)/4$ und die zugehörigen Eigenvektoren sind $w_k \otimes w_l$, wobei

$$\nu_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad w_k = \left(\sin \frac{jk\pi}{n+1} \right)_{j=1}^n, \quad k = 1, \dots, n,$$

Beweis. Man rechnet leicht mit Hilfe der Additionstheoreme nach, dass (ν_k, w_k) die Eigenpaare von T_0 sind (Übung). Somit folgt die Behauptung aus Lemma 13.1. \square

Für den Spektralradius folgt mit $h = \frac{1}{n+1}$

$$\rho(J) = \frac{1}{4}(\nu_1 + \nu_1) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{n+1} + \cos \frac{\pi}{n+1} \right) = \cos \frac{\pi}{n+1} \approx 1 - \frac{1}{2}(\pi h)^2.$$

Die Konvergenz ist also sehr langsam, falls n groß bzw. h klein ist. Als Übung überlege man sich, dass man etwa $n^2/10$ Iterationen benötigt, um den Fehler um den Faktor 10 zu reduzieren.

Eine Verallgemeinerung des Jacobi-Verfahrens erhält man durch Einführung eines **Relaxationsparameters** ω :

$$\frac{1}{\omega} D \mu^{k+1} = \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) D + L + U \right] \mu^k + b, \quad 0 < \omega < 1.$$

Man nennt dieses Verfahren auch **gedämpftes** Jacobi-Verfahren. Korollar 13.2 zeigt, dass die Iterationsmatrix

$$J_\omega = (1 - \omega)I + \omega J$$

die Eigenwerte

$$\lambda_{k,l} = 1 - \omega + \frac{\omega}{4}(\nu_k + \nu_l), \quad k, l = 1, \dots, n$$

mit zugehörigen Eigenvektoren $w_k \otimes w_l$ hat. Speziell für $\omega = \frac{1}{2}$ ist

$$\begin{aligned}\lambda_{n,n} &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(-1 - 1) \approx 0, \\ \lambda_{1,1} &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1 + 1) \approx 1.\end{aligned}$$

Fehlerkomponenten zu hochfrequenten Eigenvektoren werden im gedämpften Jacobi-Verfahren stark reduziert, glatte Eigenvektoren jedoch kaum. Allerdings können glatte Funktionen auch auf gröberen Gittern gut approximiert werden, während man für hochfrequente Funktionen auch ein feines Gitter benötigt. Auf dieser Idee beruhen **Mehrgitterverfahren**.

Da man beim Gauß-Seidel-Verfahren einen “größeren Teil” der Matrix A in der Matrix B verwendet, kann man auch schnellere Konvergenz erhoffen. Die Iterationsmatrix hat die Form

$$G = (D - L)^{-1}U = (I - D^{-1}L)^{-1}(D^{-1}U) =: (I - \tilde{L})^{-1}\tilde{U}.$$

Hierbei sind \tilde{L} bzw. \tilde{U} der untere bzw. obere Dreiecksteil der Jacobi-Matrix $J = D^{-1}(L + U)$.

Lemma 13.3. *Im Modellproblem sind die Eigenwerte von $\alpha\tilde{L} + \frac{1}{\alpha}\tilde{U}$ unabhängig von α .*

Beweis. Für $S = \text{diag}(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ und $T_0 = \text{tridiag}(1, 0, 1)$ ist

$$ST_0S^{-1} = \text{tridiag}\left(\alpha, 0, \frac{1}{\alpha}\right).$$

Da die Eigenwerte dieser Matrix unabhängig von α sind, gilt dasselbe auch für

$$\alpha\tilde{L} + \frac{1}{\alpha}\tilde{U} = (S \otimes S) \frac{1}{4} (I \otimes T_0 + T_0 \otimes I) (S^{-1} \otimes S^{-1}).$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung. Nach Lemma 13.3 treten die Eigenwerte von J in \pm Paaren auf, d. h. ist λ ein Eigenwert, dann auch $-\lambda$ (Übung).

Lemma 13.4. *Die Eigenwerte von G sind Null oder Quadrate der Eigenwerte von J .*

Beweis. Wir betrachten für festes $\lambda \neq 0$ das charakteristische Polynom von G :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - G) &= \det(\lambda I - (I - \tilde{L})^{-1}\tilde{U}) = \det(I - \tilde{L})^{-1} \det(\lambda(I - \tilde{L}) - \tilde{U}) \\ &= \det(I - \tilde{L})^{-1} \det(\sqrt{\lambda}I) \det\left(\sqrt{\lambda}I - \sqrt{\lambda}\tilde{L} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\tilde{U}\right) \\ &\stackrel{\text{Lem. 13.3}}{=} \lambda^{N/2} \det(\sqrt{\lambda}I - J), \end{aligned}$$

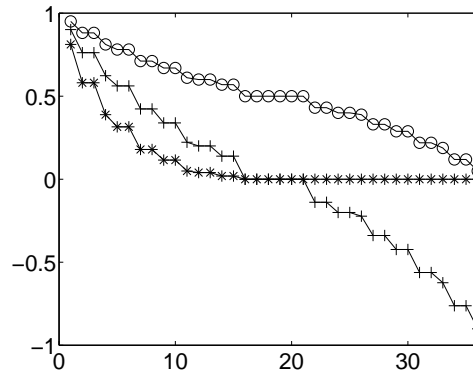
wobei wir in der Rechnung überall denselben Zweig von $\sqrt{\lambda}$ verwenden. Es ist also $\sqrt{\lambda}$ Eigenwert von J und damit nach Korollar 13.2 reell und nicht negativ.

Dass G zusätzlich Eigenwerte 0 hat ist offensichtlich, da \tilde{U} eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. □

Es ist also

$$\rho(G) = \rho(J)^2 \approx 1 - (\pi h)^2.$$

Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert damit zwar doppelt so schnell wie das Jacobi-Verfahren, aber immer noch viel zu langsam. Wie beim Jacobi-Verfahren werden nur die Fehlerkomponenten zu den glatten (niederfrequenten) Eigenvektoren schlecht reduziert. In Abbildung 13.1 ist die Aussage des Lemmas noch einmal graphisch dargestellt.

Abb. 13.1: Eigenwerte von J (+), $J_{1/2}$ (o) und G (*).

13.2 Zweigitterverfahren

Wir betrachten das elliptische Randwertproblem

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$$

und dessen Diskretisierung mit finiten Elementen

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

wobei $V_h \subset V$ ein Teilraum der Dimension $N_h < \infty$ ist.

Beim Zweigitterverfahren startet man mit einer Näherung u_h^0 und wendet einige wenige Iterationen des gedämpften Jacobi- oder des Gauß-Seidel-Verfahrens an, um eine verbesserte Näherung \bar{u}_h zu erhalten. Für den Fehler $e_h = u_h - \bar{u}_h$ dieser Näherung gilt

$$a(e_h, v_h) = \ell(v_h) - a(\bar{u}_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Im Fehler e_h sind nur noch “glatte” Fehlerkomponenten groß, daher genügt es, die Fehlergleichung auf einem größeren Gitter, etwa mit der Gitterweite $H = 2h$ zu lösen:

$$a(e_H, v_H) = \ell(v_H) - a(\bar{u}_h, v_H) \quad \forall v_H \in V_H. \quad (13.2)$$

Dies entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems kleinerer Dimension (bei unserem zweidimensionalen Modellproblem um den Faktor 4 kleiner). Durch Addition der Korrektur ergibt sich die verbesserte Näherung

$$u_h^1 = \bar{u}_h + e_H.$$

Rechnerische Durchführung

Es seien $\varphi_j^h \in V_h$ die (Knoten-) Basisfunktionen zum feinen Gitter, $\varphi_i^H \in V_H$ die zum groben Gitter. Die Knoten auf den Gittern bezeichnen wir wie bisher mit a_j^h bzw. a_j^H . Wir setzen voraus, dass das grobe Gitter durch eine echte Vergrößerung aus der ursprünglichen Triangulierung hervorgegangen ist, d. h.

$$V_H \subset V_h \subset V.$$

Unter dieser Voraussetzung ist $\varphi_i^H \in V_h$, kann also in der Basis von V_h dargestellt werden. Es gibt eine $N_H \times N_h$ Matrix $R = (r_{ij})$, so dass

$$\varphi_i^H = \sum_j r_{ij} \varphi_j^h.$$

Die Matrix R kann durch Interpolation berechnet werden. Nach Definition der Knotenbasis gilt

$$\varphi_i^h(a_j^h) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N_h$$

und jedes $v_h \in V_h$ kann als

$$v_h = \sum_i v(a_i^h) \varphi_i^h$$

geschrieben werden. Durch Koeffizientenvergleich folgt daraus

$$r_{ij} = r_{ij}^h = \varphi_i^H(a_j^h), \quad i = 1, \dots, N_H, \quad j = 1, \dots, N_h.$$

In der Grobgittergleichung (13.2) schreiben wir die einzelnen Funktionen in der Basisdarstellung:

$$\begin{aligned} v_H &= \sum_i \nu_i \varphi_i^H = \sum_{i,j} \nu_i r_{ij} \varphi_j^h, \\ e_H &= \sum_i \epsilon_i \varphi_i^H = \sum_{i,j} \epsilon_i r_{ij} \varphi_j^h, \\ \bar{u}_h &= \sum_i \bar{\mu}_i \varphi_i^h. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$a(e_H, v_H) = \sum_{k,i} \epsilon_k \nu_i a(\varphi_k^H, \varphi_i^H) = \nu^T A_H \epsilon,$$

wobei A_H die Steifigkeitsmatrix für die grobe Triangulierung ist. Für diese gilt

$$a(\varphi_k^H, \varphi_i^H) = \sum_{l,j} r_{kl} r_{ij} a(\varphi_l^h, \varphi_j^h) = (R A_h R^T)_{ki},$$

also $A_H = R A_h P$ mit $P = R^T$. Analog erhält man für den Lastvektor

$$\ell(v_H) = \sum_i \nu_i \underbrace{\ell(\varphi_i^H)}_{(b_H)_i} = \sum_{i,j} \nu_i r_{ij} \underbrace{\ell(\varphi_j^h)}_{(b_h)_i} = \nu^T R b_h$$

oder $b_H = R b_h$. Insgesamt ist die Fehlergleichung äquivalent zu

$$\nu^T A_H \epsilon = \nu^T R b_h - \nu^T R A_h \bar{\mu} \quad \forall \nu \in R^{N_H}$$

oder

$$A_H \epsilon = R(b_h - A_h \bar{\mu}).$$

Die Korrektur wird durch

$$u_h^1 = \bar{u}_h + e_H = \sum_i \bar{\mu}_i \varphi_i^h + \sum_{i,j} \epsilon_i r_{ij} \varphi_j^h = \sum_i (\bar{\mu}_i + \sum_j p_{ij} \epsilon_j) \varphi_i^h$$

oder

$$u_h^1 = \sum_i \mu_i^1 \varphi_i^h \quad \text{mit} \quad \mu^1 = \bar{\mu} + P \epsilon$$

berechnet.

Algorithmus 13.2 Zweigitteralgorithmus (ein Zyklus)

Wähle einen Startwert μ_h^0
 Glättungsschritte (gedämpftes Jacobi, Gauß-Seidel): $\mu_h^0 \rightarrow \bar{\mu}_h$
 Berechne Defekt: $d_h = b_h - A_h \bar{\mu}_h$
 Grobgitterkorrektur: $A_H \epsilon_H = R d_h$, $A_H = R A_h P$
 Korrektur: $\mu_h^1 = \bar{\mu}_h + P \epsilon_H$

13.3 Mehrgitterverfahren

Der Idee des Zweigitterverfahrens lässt sich auch rekursiv anwenden: Statt die Grobgittergleichung exakt zu lösen, kann auch sie durch ein oder zwei Iterationen des Zweigitterverfahrens zu den Gittern mit Gitterweiten H und $2H$ gelöst werden. Ebenso kann man auf dem Gitter zu $2H$ verfahren und dies solange fortführen, bis das resultierende lineare Gleichungssystem so klein ist, dass es leicht direkt zu lösen ist. Dazu benötigen wir finite-Element-Räume

$$V_{h_0} \subset V_{h_1} \subset \dots \subset V_{h_l} \subset \dots \subset V_{h_L}$$

($\dim V_{h_l} = N_l$) zu den Gitterweiten

$$h_0 > h_1 > \dots > h_l > \dots > h_L.$$

Das allgemeine Mehrgitterverfahren zu Lösung von

$$A_{h_l} \mu_{h_l} = b_{h_l},$$

welches wir abkürzend als

$$A_l \mu_l = b_l, \quad A_{l-1} = R_l^{l-1} A_l P_{l-1}^l, \quad P_{l-1}^l = (R_l^{l-1})^T$$

schreiben, liefert Algorithmus 13.3. Die Variablen tragen hierbei bis zu drei Indizes:

- l die Gitterebene,
- k den Iterationszähler,
- m die Teilschritte innerhalb einer Iteration.

Für einen Aufruf mit $l = 1$ reduziert sich der Mehrgitteralgorithmus auf den Zweigitteralgorithmus. Die Grobgitterkorrektur wird dann exakt durchgeführt. Bei mehr als zwei Ebenen erfolgt die Grobgitterkorrektur nur näherungsweise. Das Mehrgitterverfahren kann daher als gestörtes Zweigitterverfahren interpretiert werden.

Zur Konstruktion von Startwerten verwendet man die in Algorithmus 13.4 formulierte geschachtelte Iteration (nested iteration):

Typischerweise gilt

$$\|u_l^1 - u_l\| < \|u_l - u\|,$$

der Fehler in der Startnäherung ist also bereits kleiner als der Diskretisierungsfehler. Der Rechenaufwand für die nichtrekursiven Schritte ist in Algorithmus 13.3 ebenfalls angegeben. In unserem Modellproblem ist $c = 5$. Bezeichnen wir den Aufwand für einen Aufruf von $\text{MGV}(l)$ mit M_l , so ist ohne Nachglätten

$$M_l = C N_l + M_{l-1}, \quad C \approx 20.$$

Algorithmus 13.3 Mehrgitteralgorithmus (ein Zyklus)

```

 $\mu_l^{k+1} = \text{MGV}(l, b_l, \mu_l^k)$ 
1) Glättungsschritte (gedämpftes Jacobi, Gauß-Seidel):  $\bar{\mu}_l^k = \mathcal{S}_{h_l}^{\nu_1} \mu_l^k$   $cN_l$ 
2) Berechne Defekt:  $d_l^k = b_l - A_l \bar{\mu}_l^k$   $cN_l$ 
3) Restriktion:  $d_{l-1}^k = R_l^{l-1} d_l^k$   $cN_l$ 
if  $l > 1$  then
    4)  $\epsilon_{l-1}^k = \text{MGV}(l-1, d_{l-1}^k, 0)$ 
       oder evtl.  $\epsilon_{l-1}^{k,1} = \text{MGV}(l-1, d_{l-1}^k, 0)$ ,  $\epsilon_{l-1}^k = \text{MGV}(l-1, d_{l-1}^k, \epsilon_{l-1}^{k,1})$ 
else
    4) löse  $A_0 \epsilon_0^k = d_0^k$  direkt
end if
5) Korrektur:  $\mu_l^{k,2} = \bar{\mu}_l^k + P_{l-1}^l \epsilon_{l-1}^k$   $cN_l$ 
6) Nachglätten (z. B.  $\nu_2$  Gauß-Seidel-Iterationen):  $\mu_l^{k,3} = \mathcal{S}_h^{\nu_2} \mu_l^{k,2}$   $cN_l$ 
Setze  $\mu_l^{k+1} = \mu_l^{k,3}$ 

```

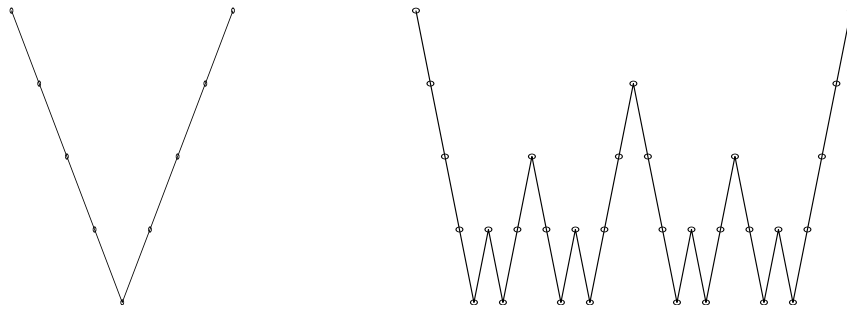


Abb. 13.2: Schematische Darstellung des V- und W-Zyklus auf 5 Gittern

Algorithmus 13.4 Startwerte für den Mehrgitteralgorithmus

```

 $\mu_l^1 = \text{NI}(l, b_l)$ 
if  $l = 0$  then
    Löse  $A_0 \mu_0 = b_0$ ; Return
else
     $\mu_{l-1} = \text{NI}(l-1, b_{l-1})$ 
    Prolongation:  $\mu_l^0 = P_{l-1}^l \mu_{l-1}$ 
    Mehrgitterverfahren:  $\mu_l^1 = \text{MGV}(l, b_l, \mu_l^0)$ 
end if

```

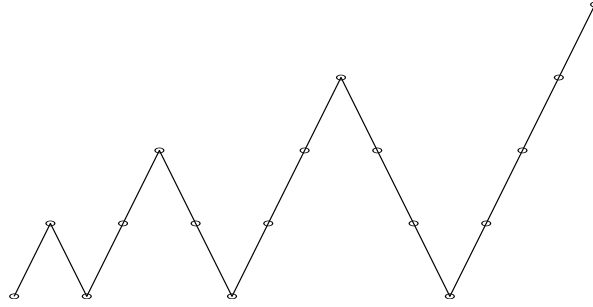


Abb. 13.3: Geschachtelte Iteration für den V-Zyklus

Durch Einsetzen erhält man im zweidimensionalen Fall für ein regelmäßiges Gitter für $N_l \approx 4N_{l-1}$

$$\begin{aligned} M_L &= \sum_{l=1}^L CN_l + M_0 = CN_L \sum_{l=0}^{L-1} 4^{-l} + M_0 \\ &\leq CN_L \frac{1}{1 - 4^{-1}} + M_0 = \frac{4}{3} CN_L + M_0, \end{aligned}$$

wobei M_0 vernachlässigt werden kann. Im dreidimensionalen Fall ist $N_l \approx 8N_{l-1}$, wodurch sich die Konstante $8/7$ ergibt. Für die geschachtelte Iteration berechnet sich der Aufwand zu

$$M_0 + \sum_{l=1}^L (cN_l + M_l) \leq (L+1)M_0 + \frac{4}{3}cN_L + \frac{4}{3}\frac{4}{3}CN_L \approx 2CN_L.$$

Damit ist der Aufwand, der wie oben bemerkt ja genügt, um u_L mit geringerem Fehler als dem Diskretisierungsfehler zu berechnen, im Allgemeinen kleiner als der für das Erstellen des linearen Gleichungssystems.

Das Ziel für den Rest des Kapitels ist nun, die Konvergenz von Mehrgitterverfahren zu verstehen. Insbesondere wird gezeigt, dass Mehrgitterverfahren Konvergenzrate < 1 unabhängig von h haben. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

13.4 Skalen von Normen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix mit Eigenwerten $\lambda_i > 0$ und zugehörigen normierten Eigenvektoren v_i . Für

$$x = \sum_{i=1}^N \xi_i v_i$$

ist dann

$$A^s x = \sum_{i=1}^N \xi_i A^s v_i = \sum_{i=1}^N \xi_i \lambda_i^s v_i, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Zum Euklid'schen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{R}^N definieren wir eine Skala von Normen.

Definition 13.5. Für $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch und positiv definit und $s \in \mathbb{R}$ wird in \mathbb{R}^N die Norm

$$\|x\|_s = \langle x, A^s x \rangle^{1/2}$$

erklärt.

Da die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis bilden, ist

$$\langle x, A^s x \rangle = \left\langle \sum_j \xi_j v_j, \sum_i \xi_i \lambda_i^s v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \lambda_i^s$$

und somit

$$\|x\|_s = \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \lambda_i^s \right)^{1/2} = \|A^{s/2} x\|.$$

Offensichtlich ist $\|\cdot\|_0$ die Euklid-Norm und $\|\cdot\|_1$ die Energienorm zu A .

Lemma 13.6. Die Normen $\|\cdot\|_s$ haben folgende Eigenschaften:

(a) *Logarithmische Konvexität:* Es gilt

$$\|x\|_s \leq \|x\|_r^{1/2} \|x\|_t^{1/2} \quad \text{für } s = \frac{r+t}{2}.$$

(b) *Monotonie:* Ist $\alpha > 0$ der kleinste Eigenwert von A , so gilt

$$\alpha^{-s/2} \|x\|_s \leq \alpha^{-t/2} \|x\|_t \quad \text{für } s \leq t.$$

(c) *Shifttheorem:* Aus $Ax = b$ folgt

$$\|x\|_{s+2} = \|b\|_s \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. Eine Funktion g heißt logarithmisch konvex, wenn die Abbildung $x \mapsto \log g(x)$ konvex ist.

Beweis. (a) Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung liefert für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $s = (r+t)/2$

$$|\langle x, A^s y \rangle| = |\langle A^{r/2} x, A^{t/2} y \rangle| \leq \|A^{r/2} x\| \cdot \|A^{t/2} y\| = \|x\|_r \|y\|_t.$$

Setzen wir hier $x = y$, so folgt (a).

(b) Wegen $\lambda_i \geq \alpha$ für alle i ist für $t \geq s$

$$\|x\|_t^2 = \langle x, A^t x \rangle = \sum_i \xi_i^2 \lambda_i^t = \sum_i \xi_i^2 \lambda_i^s \lambda_i^{t-s} \geq \sum_i \xi_i^2 \lambda_i^s \alpha^{t-s} = \alpha^{t-s} \|x\|_s^2.$$

(c) Es ist $\langle x, A^{s+2} x \rangle = \langle Ax, A^s Ax \rangle = \langle b, A^s b \rangle$. □



Abb. 13.4: Reguläre Verfeinerung eines Dreiecks

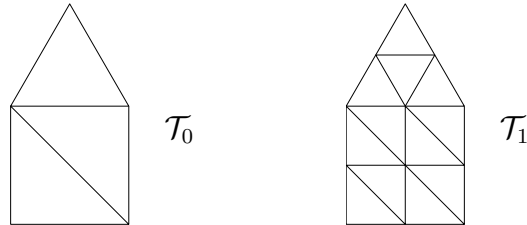


Abb. 13.5: Reguläre Verfeinerung einer Triangulierung

13.5 Gitterabhängige Normen

In diesem Abschnitt gehen wir wie früher von einem elliptischen Randwertproblem auf einem konvexen Polygon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in schwacher Formulierung mit $V = H^1(\Omega)$ oder $V = H_0^1(\Omega)$ aus. Die Randwertaufgabe ist dann H^2 -regulär, vgl. Abschnitt 12.6.

Es sei \mathcal{T}_0 eine (Grund-) Triangulierung des Gebietes Ω in Dreiecke. \mathcal{T}_1 sei eine “reguläre” Verfeinerung von \mathcal{T}_0 , d. h. jedes Dreieck in \mathcal{T}_0 wird in vier Dreiecke unterteilt, deren zusätzliche Ecken durch Seitenhalbierung entstehen, vgl. Abbildung 13.4 und 13.5.

Des Weiteren sei \mathcal{T}_2 eine reguläre Verfeinerung von \mathcal{T}_1 , usw. Bei einer so entstandenen Triangulierung \mathcal{T}_l ist jedes auftretende Dreieck ähnlich zu einem Dreieck in \mathcal{T}_0 . Insbesondere ist der Quotient zwischen Durchmesser und Inkreisradius beschränkt durch eine Konstante, die nur von \mathcal{T}_0 abhängt.

Sei h_l der maximale Durchmesser von Dreiecken in \mathcal{T}_l . Nach Konstruktion ist $h_l = h_{l-1}/2$, $l = 1, \dots, L$. Wir beschränken uns hier auf lineare finite Elemente. In diesem Fall entsprechen die Knoten den Ecken a_j^l . Im Unterschied zu früher skalieren wir nun die Funktionen der Knotenbasis $\{\varphi_i^l\}$ zum finite-Element-Raum $V_l = V_{h_l}$ gemäß

$$\varphi_i^l(a_j^l) = \frac{1}{h} \delta_{ij}, \quad h = h_l.$$

Den oberen Index l lassen wir weg, wenn die zugehörige Triangulierung aus dem Zusammenhang klar ist. Mit diesen Bezeichnungen ist nun

$$v_h = \sum_{i=1}^N h v_h(a_i) \varphi_i.$$

Häufig identifiziert man den Vektor

$$\mathbb{R}^N \ni (h v_h(a_i))_{i=1}^N \stackrel{id}{=} v_h \in V_h.$$

Die Steifigkeitsmatrix bezeichnen wir wie bisher mit

$$A_h = (a_{ij})_{i,j=1}^N, \quad a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i).$$

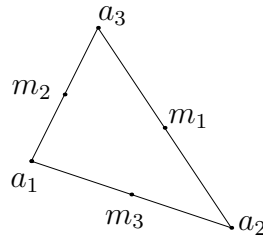


Abb. 13.6: Bezeichnung der Ecken und Seitenmitten eines Dreiecks

Dieselbe Bezeichnung wie für die Abbildungsmatrix bezüglich der Basis $\{\varphi_i\}$ verwenden wir auch für die lineare Abbildung $A_h : V_h \rightarrow V_h$. Damit ist

$$\begin{aligned} \langle A_h v_h, w_h \rangle &= a(v_h, w_h), \\ \|v_h\|_0^2 &= h^2 \sum_{i=1}^N v_h(a_i)^2 && \text{Quadrat der Euklid-Norm von } (hv_h(a_i))_{i=1}^N, \\ \langle v_h, w_h \rangle &= h^2 \sum_{i=1}^N v_h(a_i)w_h(a_i) && \text{Euklid-Skalarprodukt.} \end{aligned}$$

Lemma 13.7. *Es gibt Konstanten c_0, C_0 unabhängig von $h = h_0, h_1, \dots$, so dass*

$$c_0 \|v_h\|_{0,\Omega} \leq \|v_h\|_0 \leq C_0 \|v_h\|_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h,$$

d. $h \cdot \|\cdot\|_0$ ist gleichmäßig in h zur $L^2(\Omega)$ -Norm äquivalent.

Beweis. Wir verwenden die folgende Quadraturformel, die für quadratische Polynome auf Dreiecken exakt ist (Übung):

$$\|v_h\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_h^2 dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{3} \sum_{i=1}^3 v_h(m_i^K)^2,$$

wobei $|K|$ die Fläche von K und m_i die Seitenmittelpunkte bezeichnet, nummeriert wie in Abbildung 13.6 dargestellt.

Nach Konstruktion der Triangulierung gilt

$$c^* h^2 \leq |K| \leq C^* h^2.$$

Andererseits ist nach Definition

$$\|v_h\|_0^2 = h^2 \sum_{i=1}^N v_h(a_i)^2.$$

Weil v_h stückweise linear ist, gilt in jedem Dreieck

$$\begin{bmatrix} v_h(m_1) \\ v_h(m_2) \\ v_h(m_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_h(a_1) \\ v_h(a_2) \\ v_h(a_3) \end{bmatrix}.$$

Da die Matrix unabhängig von h invertierbar ist, folgt die Behauptung. \square

Wir verwenden nun die Steifigkeitsmatrix A_h zum Aufbau der Normenskala:

$$\|v_h\|_s^2 = \|A_h^{s/2} v_h\|_0^2 = \langle v_h, A_h^s v_h \rangle,$$

insbesondere für $s = 1$

$$\|v_h\|_1^2 = \langle v_h, A_h v_h \rangle = a(v_h, v_h).$$

Aus Definition 11.22 wissen wir, dass bei einem V -elliptischen Randwertproblem die Energienorm zur $H^1(\Omega)$ -Norm äquivalent ist:

Korollar 13.8. *Es existieren Konstanten c_1, C_1 unabhängig von h , so dass*

$$c_1 \|v_h\|_{1,\Omega} \leq \|v_h\|_1 \leq C_1 \|v_h\|_{1,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h.$$

Bemerkung. Für $s = 2, 3, \dots$ ist dies nicht mehr richtig, da $V_h \not\subset H_2(\Omega)$.

Lemma 13.9. (*“Inverse Abschätzung”*)

Es existiert eine Konstante C unabhängig von h , so dass

$$\|v_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{h} \|v_h\|_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\|v_h\|_{1,\Omega}^2 = \|v_h\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial v_h}{\partial x_1} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial v_h}{\partial x_2} \right\|_{0,\Omega}^2.$$

Bei linearen finiten Elementen folgt aus

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N h v_h(a_i) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\sum_{r=1}^3 h v_h(a_r^K) \frac{\partial \varphi_r^K}{\partial x_j} \right)^2 dx, & \left| \frac{\partial \varphi_r^K}{\partial x_j} \right| &\leq \frac{C}{h^2} \\ &\stackrel{CSU}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} 3 \frac{C^2}{h^4} |K| \sum_{r=1}^3 h^2 |v_h(a_r^K)|^2, & |K| &\leq \hat{C} h^2 \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{h^2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{r=1}^3 h^2 v_h(a_r^K)^2 \\ &\leq \frac{C'}{h^2} \sum_{i=1}^N h^2 v_h(a_i)^2 \\ &= \frac{C'}{h^2} \|v_h\|_0^2 \\ &\leq \frac{C'}{h^2} C_0^2 \|v_h\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

die Behauptung. □

Mit diesen Normäquivalenzen kann man den kleinsten und größten Eigenwert der Steifigkeitsmatrix abschätzen:

Lemma 13.10. *Es existieren Konstanten c, C unabhängig von h , so dass*

$$\lambda_{\min}(A_h) \geq c > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_{\max}(A_h) \leq \frac{C}{h^2}.$$

Beweis. Für Hermitesche Matrizen gilt bekanntlich

$$\lambda_{\min}(A_h) = \min_{0 \neq x \in \mathbb{R}^N} \frac{\langle x, A_h x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \min_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{\|v_h\|_1^2}{\|v_h\|_0^2} \geq \frac{c_1^2}{C_0^2} \min_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{\|v_h\|_{1,\Omega}^2}{\|v_h\|_{0,\Omega}^2} \geq \frac{c_1^2}{C_0^2} =: c$$

sowie analog

$$\lambda_{\max}(A_h) = \max_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{\|v_h\|_1^2}{\|v_h\|_0^2} \leq \frac{C_1^2}{c_0^2} \max_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{\|v_h\|_{1,\Omega}^2}{\|v_h\|_{0,\Omega}^2} \leq \frac{C_1^2}{c_0^2} \frac{C^2}{h^2}.$$

Hierbei sind c_j, C_j die Konstanten aus den vorangegangenen Hilfssätzen. □

13.6 Konvergenz des Zweigitterverfahrens

Die meisten Konvergenzbeweise für Mehrgitterverfahren haben die folgende Struktur: Bezeichnen wir wie in Algorithmus 13.3 den Glättungsoperator mit \mathcal{S} , so kombiniert man eine *Glättungseigenschaft*

$$\|\mathcal{S}^\nu v_h\|_X \leq ch^{-\beta} \frac{1}{\nu^\gamma} \|v_h\|_Y$$

mit einer *Approximationseigenschaft*

$$\|v_h - u_{2h}\|_Y \leq ch^\beta \|v_h\|_X,$$

wenn u_{2h} die Grobgitternäherung von v_h ist. Das Produkt der beiden Faktoren ist dann für großes ν kleiner als eins und zwar unabhängig von h .

In der Situation von Abschnitt 13.5 betrachten wir die Iteration

$$x^{k+1} = \left(I - \frac{1}{\omega} A_h\right) x^k \quad \text{mit} \quad \omega = \lambda_{\max}(A_h).$$

Lemma 13.11. (*Glättungseigenschaft*)

Es gilt

$$\|x^\nu\|_2 \leq \frac{C}{\nu} h^{-2} \|x^0\|_0.$$

Beweis. A_h habe die Eigenwerte λ_i mit zugehörigen Eigenvektoren v_i , wobei $\|v_i\| = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^0 &= \sum_i \xi_i v_i, & \|x^0\|_0^2 &= \sum_i \xi_i^2, \\ x^1 &= \sum_i \xi_i \left(1 - \frac{1}{\omega} \lambda_i\right) v_i, \\ x^\nu &= \sum_i \xi_i \left(1 - \frac{1}{\omega} \lambda_i\right)^\nu v_i. \end{aligned}$$

Für die Norm gilt wegen der Orthogonalität der Eigenvektoren

$$\begin{aligned}\|x^\nu\|_2^2 &= \langle x^\nu, A_h^2 x^\nu \rangle = \sum_i \xi_i^2 \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega}\right)^{2\nu} \lambda_i^2 \\ &= \omega^2 \sum_i \xi_i^2 \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega}\right)^{2\nu} \left(\frac{\lambda_i}{\omega}\right)^2 \\ &\leq \omega^2 \max_{0 \leq \theta \leq 1} \theta^2 (1 - \theta)^{2\nu} \sum_i \xi_i^2.\end{aligned}$$

Das Maximum wird für $\theta = (\nu + 1)^{-1}$ angenommen, so dass

$$\theta(1 - \theta)^\nu \leq \frac{1}{\nu + 1} \left(\frac{\nu}{\nu + 1}\right)^\nu = \frac{1}{\nu} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}} \leq \frac{1}{\nu e}.$$

Hieraus folgt schließlich

$$\|x^\nu\|_2 \leq \omega \frac{1}{\nu e} \|x^0\|_0.$$

Die Behauptung folgt aus $\omega = \lambda_{\max}(A_h) \leq C/h^2$ nach Lemma 13.10. \square

Lemma 13.12. (*Approximationseigenschaft*)

Sei $H = 2h$. Zu $v_h \in V_h$ sei $u_H \in V_H$ die Lösung von

$$a(u_H, w_H) = a(v_h, w_H) \quad \forall w_H \in V_H.$$

(u_H ist die Ritz-Projektion von v_h : $u_H = R_H v_h$, d. h. die Orthogonalprojektion bezüglich $a(\cdot, \cdot)$.)

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|u_H - v_h\|_1 &\leq CH \|v_h\|_2, \\ \|u_H - v_h\|_0 &\leq CH \|u_H - v_h\|_1.\end{aligned}$$

Beweis. Die zweite Ungleichung wurde unter der Voraussetzung der H^2 -Regularität schon früher mit dem Nitsche-Trick gezeigt, vgl. den Beweis von Satz 12.7.

Beim Beweis der ersten Ungleichung geht man ähnlich wie bei Céa's Lemma (Satz 11.4) vor:

$$\begin{aligned}\alpha \|u_H - v_h\|_1^2 &\leq a(u_H - v_h, u_H - v_h) \\ &= -a(u_H - v_h, v_h) && \text{da } u_H \in V_H \\ &= -\langle u_H - v_h, A_h v_h \rangle \\ &\leq \|u_H - v_h\|_0 \|A_h v_h\|_0 && \text{Cauchy-Schwarz} \\ &\leq C_0 \|u_H - v_h\|_0 \|v_h\|_2 && \text{Lemma 13.7} \\ &\leq CH C_0 \|u_H - v_h\|_1 \|v_h\|_2,\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Abschätzung die zweite Ungleichung verwendet haben. \square

Basierend auf diesen beiden Lemmas können wir nun die Konvergenz des Zweigitterverfahrens zeigen. Zur Erinnerung: Das Zweigitterverfahren bestand aus folgenden Schritten:

(a) Glätten: Ausgehend von $\bar{u}_h^{0,0} = u_h^0$ berechne

$$\bar{u}_h^{0,j+1} = \left(I - \frac{1}{\omega} A_h\right) \bar{u}_h^{0,j} + \frac{1}{\omega} b_h, \quad j = 0, \dots, \nu - 1 \quad \bar{u}_h = \bar{u}_h^{0,\nu}.$$

(b) Defekt: $d_h = b_h - A_h \bar{u}_h$.

(c) Grobgittergleichung: $A_H e_H = R d_h$.

(d) Korrektur: $u_h^1 = \bar{u}_h + P e_H$.

Satz 13.13. (Hackbusch, 1976) Für das Zweigitterverfahren gilt

$$\|u_h^1 - u_h\|_0 \leq \frac{C}{\nu} \|u_h^0 - u_h\|_0,$$

wobei C unabhängig ist von h und der Anzahl ν der Glättungsschritte.

Beweis. Aus $A_h u_h = b_h$ folgt zunächst

$$u_h^{0,k+1} - u_h = \left(I - \frac{1}{\omega} A_h\right) (u_h^{0,k} - u_h)$$

und daraus

$$\bar{u}_h - u_h = \left(I - \frac{1}{\omega} A_h\right)^\nu (u_h^0 - u_h).$$

Lemma 13.11 liefert die Abschätzung

$$\|\bar{u}_h - u_h\|_2 \leq \frac{C'}{\nu} h^{-2} \|u_h^0 - u_h\|_0. \quad (13.3)$$

Nach Definition der Grobgitterkorrektur (13.2) ist

$$a(\bar{u}_h + e_H, w_H) = \ell(w_H) \quad \forall w_H \in V_H$$

und außerdem

$$a(u_h, w_H) = \ell(w_H) \quad \forall w_H \in V_H \subset V_h.$$

Hieraus ergibt sich

$$a(e_H, w_H) = a(u_h - \bar{u}_h, w_H) \quad \forall w_H \in V_H,$$

d. h. e_H ist Ritz-Projektion von $u_h - \bar{u}_h$. Aus Lemma 13.12 schließt man nun mit (13.3) und $H = 2h$

$$\|e_H - (u_h - \bar{u}_h)\|_0 \leq C H^2 \|u_h - \bar{u}_h\|_2 \leq 4 C' C \frac{1}{\nu} \|u_h^0 - u_h\|_0$$

bzw. $\|u_h^1 - u_h\|_0 \leq \frac{C}{\nu} \|u_h^0 - u_h\|_0$. □

Der Satz liefert also Konvergenz bei hinreichend vielen Glättungsschritten.

13.7 Konvergenz des W-Zyklus

Beim W-Zyklus im Mehrgitterverfahren mit $l + 1$ Gittern ($\mathbf{MGV}(l)$) wird nach Glättung und Defektberechnung die Grobgittergleichung durch zwei Aufrufe von $\mathbf{MGV}(l - 1)$ gelöst, bevor die Korrektur und ein eventuelles Nachglätten erfolgen. Bezeichnen wir mit ρ_l den Reduktionsfaktor des Mehrgitterverfahrens mit $l + 1$ Gittern, so gilt

$$\|u_l^1 - u_l\|_0 \leq \rho_l \|u_l^0 - u_l\|_0.$$

Hinreichend für Konvergenz wäre $\rho_l \leq \rho < 1$ für alle l . Für die gedämpfte Jacobi-Glättung ist

$$\|\bar{u}_l - u_l\|_0 = \|(I - \frac{1}{\omega_l} A_h)^\nu (u_l^0 - u_l)\|_0 \leq \|u_l^0 - u_l\|_0 \quad \text{da } \omega_l = \lambda_{\max}(A_l). \quad (13.4)$$

Lemma 13.14. *Für den Reduktionsfaktor ρ_l des W-Zyklus mit $l + 1$ Gittern gilt*

$$\rho_l \leq \rho_1 + \rho_{l-1}^2(1 + \rho_1).$$

Beweis. Sei \hat{u}_l das Ergebnis des Zweigitterverfahrens gestartet mit u_l^0 . Aus Satz 13.13 wissen wir, dass

$$\|\hat{u}_l - u_l\|_0 \leq \rho_1 \|u_l^0 - u_l\|_0, \quad \rho_1 \leq \frac{C}{\nu} \frac{C_0}{c_0}.$$

Wir vergleichen die aus der tatsächlichen Grobgitterkorrektur berechnete Näherung u_l^1 mit der aus der exakten (aber nicht verfügbaren) Grobgitterkorrektur resultierenden Näherung \hat{u}_l . Die berechnete Korrektur setzt sich dann aus der exakten Korrektur und dem Fehler auf Ebene $l - 1$ zusammen.

Mit der Dreiecksungleichung folgt mit (13.4) für den Fehler der Grobgitterkorrektur bei exakter Rechnung

$$\|\hat{u}_l - \bar{u}_l\|_0 \leq \|\hat{u}_l - u_l\|_0 + \|u_l - \bar{u}_l\|_0 \leq (1 + \rho_1) \|u_l^0 - u_l\|_0.$$

Andererseits ist

$$\|u_l^1 - \hat{u}_l\|_0 \leq \rho_{l-1}^2 \|\bar{u}_l - \hat{u}_l\|_0,$$

so dass für den Gesamtfehler gilt

$$\|u_l^1 - u_l\|_0 \leq \|u_l^1 - \hat{u}_l\|_0 + \|\hat{u}_l - u_l\|_0 \leq (\rho_{l-1}^2(1 + \rho_1) + \rho_1) \|u_l^0 - u_l\|_0.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz 13.15. *Falls für den Reduktionsfaktor des Zweigitterverfahrens $\rho_1 \leq \frac{1}{5}$ gilt, so ist beim W-Zyklus*

$$\rho_l \leq \frac{5}{3} \rho_1 \leq \frac{1}{3} \quad l = 2, 3, \dots$$

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Induktion nach l . Für $l = 1$ ist die Behauptung richtig. Angenommen, sie gilt für ein l . Dann ist nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 13.14

$$\rho_l \leq \rho_1 + \rho_{l-1}^2(1 + \rho_1) \leq \rho_1 + \frac{1}{3} \frac{5}{3} \rho_1 \left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{3} \rho_1.$$

Damit ist die Behauptung für alle l gezeigt. □

13.8 Konvergenz in der Energienorm

Wir betrachten hier ein Mehrgitterverfahren mit $l + 1$ Gittern ($\text{MGV}(l)$), in dem zur Lösung der Grobgittergleichung ein Aufruf von $\text{MGV}(l - 1)$ erfolgt. Zum Glätten verwenden wir wieder das gedämpfte Jacobi -Verfahren

$$u_l^{0,k+1} = \left(I - \frac{1}{\omega_l} A_l\right) u_l^{0,k} + \frac{1}{\omega_l} b_l =: S_l u_l^{0,k} + \frac{1}{\omega_l} b_l, \quad \omega_l = \lambda_{\max}(A_l).$$

Den Index l lassen wir im Folgenden weg, wenn das zu Grunde liegende Gitter aus dem Zusammenhang klar ist.

Als Maß für die Glattheit von Funktionen in V_l definieren wir

$$\beta(v) := 1 - \frac{1}{\omega_l} \frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_1^2}, \quad 0 \neq v \in V_l, \quad \beta(0) := 1.$$

Für alle $v \in V_l$ gilt $0 \leq \beta(v) \leq 1$, denn für $v = \sum_i \xi_i v_i$, mit normierten Eigenvektoren v_i zu Eigenwerten λ_i , $i = 1, \dots, N$ ist

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(A)} \frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_1^2} = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)} \frac{\sum_i \xi_i^2 \lambda_i^2}{\sum_i \xi_i^2 \lambda_i} = \frac{\sum_i \xi_i^2 \left(\lambda_i / \lambda_{\max}(A)\right)^2}{\sum_i \xi_i^2 \left(\lambda_i / \lambda_{\max}(A)\right)} \leq 1.$$

Der Konvergenzbeweis basiert auf der Heuristik, dass für glatte Funktionen $\|v\|_2 \gtrsim \|v\|_1$, so dass in diesem Fall $\beta \approx 1$, während für nicht glatte Funktionen $\|v\|_2 \gg \|v\|_1$, also $\beta \approx 0$ gilt.

Ziel dieses Abschnittes ist es, Konvergenz in der Energienorm

$$\|v_l\|_a = a(v_l, v_l)^{1/2} = \langle v_l, A_l v_l \rangle^{1/2} = \|v\|_1$$

zu zeigen.

Lemma 13.16. *Für die Jacobi-Glättung gilt*

$$\|S_l^\nu v\|_a \leq (\beta(S_l^\nu v))^\nu \|v\|_a \quad \forall v \in V_l.$$

Beweis. Sei $v = \sum_i \xi_i v_i$, wobei v_i normierter Eigenvektor von A_l zum Eigenwert λ_i ist, d. h. $\|v_i\| = 1$. Mit $\mu_i = 1 - \frac{\lambda_i}{\omega}$ erhält man

$$\begin{aligned} \|S_l^\nu v\|_a^2 &= \sum_i \lambda_i \mu_i^{2\nu} \xi_i^2 \\ &\leq \left(\sum_i \lambda_i \mu_i^{2\nu+1} \xi_i^2 \right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \left(\sum_i \lambda_i \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2\nu+1}} && \text{Hölder'sche Ungleichung} \\ &= \|S_l^{\nu+\frac{1}{2}} v\|_a^{2\frac{2\nu}{2\nu+1}} \|v\|_a^{2\frac{1}{2\nu+1}}. \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Die Hölder'sche Ungleichung lautet

$$\sum_i |a_i b_i| \leq \left(\sum_i |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_i |b_i|^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mit anderen Worten:

$$\|S_l^\nu v\|_a^{2\nu+1} \leq \|S_l^{\nu+\frac{1}{2}} v\|_a^{2\nu} \|v\|_a. \quad (13.5)$$

Für $w = S^\nu v$ erhalten wir nach Division von (13.5) durch $\|w\|_a^{2\nu}$

$$\|S_l^\nu v\|_a \leq \left(\frac{\|S_l^{1/2} w\|_a}{\|w\|_a} \right)^{2\nu} \|v\|_a.$$

Die Jacobi-Iterationsmatrix $S_l = I - \frac{1}{\omega} A_l$ ist symmetrisch und kommutiert mit A_l . Daher gilt

$$\begin{aligned} \|S_l^{1/2} w\|_a^2 &= \langle S_l^{1/2} w, A_l S_l^{1/2} w \rangle = \langle w, A_l S_l w \rangle \\ &= \langle w, A_l w \rangle - \frac{1}{\omega_l} \langle w, A_l^2 w \rangle \\ &= \left(1 - \frac{1}{\omega_l} \frac{\|w\|_2^2}{\|w\|_1^2} \right) \|w\|_1^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt wegen $\|w\|_1 = \|w\|_a$. □

Lemma 13.17. *Für den Fehler $\hat{u}_l - u_l$ nach exakter Grobgitterkorrektur gilt*

$$\|\hat{u}_l - u_l\|_a \leq \min(1, c\sqrt{1 - \beta(\bar{u}_l - u_l)}) \|\bar{u}_l - u_l\|_a.$$

Beweis. Es ist $\hat{u}_l = \bar{u}_l + \hat{e}_{l-1}$, wobei \hat{e}_{l-1} die exakte Grobgitterkorrektur ist. Aus dem Konvergenzbeweis für das Zweigitterverfahren (Satz 13.13) wissen wir, dass \hat{e}_{l-1} die Ritz-Projektion von $u_l - \bar{u}_l$ ist. Daher gilt

$$\|u_l - \bar{u}_l\|_a^2 = \|\hat{e}_{l-1}\|_a^2 + \|u_l - \bar{u}_l - \hat{e}_{l-1}\|_a^2 = \|\hat{e}_{l-1}\|_a^2 + \|u_l - \hat{u}_l\|_a^2.$$

Somit ist

$$\|\hat{u}_l - u_l\|_a \leq \|\bar{u}_l - u_l\|_a.$$

Andererseits folgt aus Lemma 13.12

$$\begin{aligned} \|u_l - \bar{u}_l - \hat{e}_{l-1}\|_a &\leq 2Ch \|\bar{u}_l - u_l\|_2 \\ &\leq c \frac{1}{\sqrt{\omega_l}} \|\bar{u}_l - u_l\|_2 \\ &= c \sqrt{1 - \beta(\bar{u}_l - u_l)} \|\bar{u}_l - u_l\|_a \end{aligned} \quad \omega_l = \lambda_{\max}(A_l) \leq \frac{C}{h^2}$$

nach Definition von β . □

Lemma 13.18. *(Rekursionsformel)*

Für den Reduktionsfaktor ρ_l des Mehrgitterverfahrens in der Energienorm gilt

$$\rho_l^2 \leq \max_{0 \leq \beta \leq 1} \beta^{2\nu} [\rho_{l-1}^{2\mu} + (1 - \rho_{l-1}^{2\mu}) \min(1, c^2(1 - \beta))],$$

wobei $\mu = 1$ beim V-Zyklus und $\mu = 2$ beim W-Zyklus und c die Konstante aus Lemma 13.17 ist.

Beweis. Aus Lemma 13.16 folgt

$$\|\bar{u}_l - u_l\|_a \leq \beta^\nu \|u_l^0 - u_l\|_a, \quad \beta = \beta(\bar{u}_l - u_l).$$

Aus Lemma 13.17 folgt mit demselben β

$$\|\hat{u}_l - u_l\|_a \leq \min(1, c\sqrt{1-\beta}) \|\bar{u}_l - u_l\|_a. \quad (13.6)$$

\hat{e}_{l-1} ist die Ritz-Projektion von $u_l - \bar{u}_l$, d. h.

$$a(\hat{e}_{l-1}, w_{l-1}) = a(u_l - \bar{u}_l, w_{l-1}) \quad \forall w_{l-1} \in V_{l-1}.$$

$\hat{u}_l = \bar{u}_l + \hat{e}_{l-1}$ erfüllt somit die Orthogonalitätsrelation

$$a(\hat{u}_l - u_l, w_{l-1}) = 0 \quad \forall w_{l-1} \in V_{l-1}.$$

Diese verwenden wir insbesondere für $w_{l-1} = \hat{e}_{l-1} = \hat{u}_l - \bar{u}_l$ und $w_{l-1} = -\hat{e}_{l-1} + e_{l-1} = u_l^1 - \hat{u}_l$. Hierbei ist e_{l-1} die Mehrgitterapproximation an die Grobgitterkorrektur. Mit dem Satz von Pythagoras folgt dann

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_l - u_l\|_a^2 + \|\hat{u}_l - \bar{u}_l\|_a^2 &= \|\bar{u}_l - u_l\|_a^2 \\ \|\hat{u}_l - u_l\|_a^2 + \|u_l^1 - \hat{u}_l\|_a^2 &= \|u_l^1 - u_l\|_a^2 \end{aligned} \quad (13.7)$$

und daraus

$$\begin{aligned} \|u_l^1 - u_l\|_a^2 &= \|\hat{u}_l - u_l\|_a^2 + \|u_l^1 - \hat{u}_l\|_a^2 \\ &\leq \|\hat{u}_l - u_l\|_a^2 + \rho_{l-1}^{2\mu} \|\bar{u}_l - \hat{u}_l\|_a^2 \\ &= (1 - \rho_{l-1}^{2\mu}) \|\hat{u}_l - u_l\|_a^2 + \rho_{l-1}^{2\mu} \|\bar{u}_l - u_l\|_a^2 \end{aligned} \quad (13.7)$$

$$\leq [(1 - \rho_{l-1}^{2\mu}) \min\{1, c^2(1-\beta)\} + \rho_{l-1}^{2\mu}] \|\bar{u}_l - u_l\|_a^2 \quad (13.6)$$

$$\leq [\%] \beta^{2\nu} \|u_l^0 - u_l\|_a^2 \quad \text{Lemma 13.16}$$

mit $\mu = 1$ für den V-Zyklus und $\mu = 2$ für den W-Zyklus. □

Satz 13.19. (Konvergenz)

Für den V- oder W-Zyklus gilt

$$\|u_l^1 - u_l\|_a \leq \rho_l \|u_l^0 - u_l\|_a$$

mit

$$\rho_l \leq \rho := \left(\frac{c^2}{c^2 + 2\nu} \right)^{1/2} < 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei c unabhängig von l und ν ist.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Induktion, wobei $\mu = 1$ beim V-Zyklus und $\mu = 2$ beim W-Zyklus ist. Wegen $\rho_0 = 0$ ist die Behauptung für $l = 0$ richtig. Nehmen wir an, sie ist richtig für ein $l - 1 \geq 0$. Nach Induktionsannahme gilt dann

$$\rho_{l-1}^2 \leq \frac{c^2}{c^2 + 2\nu}.$$

Die Abbildung

$$x \mapsto x + (1 - x) \min\{1, c\sqrt{1 - \beta}\}$$

ist monoton wachsend. Nach Lemma 13.18 gilt

$$\begin{aligned} \rho_l^2 &\leq \max_{0 \leq \beta \leq 1} \left\{ \beta^{2\nu} \left[\left(\frac{c^2}{c^2 + 2\nu} \right) + \left[1 - \left(\frac{c^2}{c^2 + 2\nu} \right) \right] \min(1, c^2(1 - \beta)) \right] \right\} \\ &\leq \frac{c^2}{c^2 + 2\nu} \max_{0 \leq \beta \leq 1} \{ \beta^{2\nu} [1 + 2\nu(1 - \beta)] \} \\ &\leq \frac{c^2}{c^2 + 2\nu}, \end{aligned}$$

denn man rechnet leicht nach, dass das Maximum bei $\beta = 1$ angenommen wird. \square

13.9 Fehler bei geschachtelter Iteration

Bei der in Algorithmus 13.4 angegebenen Startwertbestimmung berechnet man u_0 auf dem größten Gitter (Level 0). Für $l = 1, 2, \dots, L$ nimmt man $u_l^0 = Pu_{l-1}^m$ als Startwert für $m \geq 1$ Mehrgitteriterationen (V- oder W-Zyklen). In der Praxis genügt häufig $m = 1$.

Satz 13.20. Falls für die Mehrgitterkonvergenzrate $\rho^m \leq \frac{1}{3}$ gilt, so ist

$$\|u_l^m - u_l\|_a \leq c \frac{3\rho^m}{1 - 2\rho^m} h_l |u|_{2,\Omega} \leq ch_l |u|_{2,\Omega},$$

wobei c unabhängig von l ist.

Beweis. (Induktion nach l .) Für $l = 0$ ist die Behauptung wegen $u_0^m = u_0$ richtig. Nehmen wir an, die Fehlerabschätzung gilt für ein $l - 1$. Wegen $h_{l-1} = 2h_l$ ist dann

$$\|u_{l-1}^m - u_{l-1}\|_a \leq c \frac{3\rho^m}{1 - 2\rho^m} 2h_l |u|_{2,\Omega}.$$

Nach Satz 12.6 über den Diskretisierungsfehler ist

$$\|u_l - u\|_a \leq ch_l |u|_{2,\Omega}, \quad \|u_{l-1} - u\|_a \leq c2h_l |u|_{2,\Omega}.$$

Es gilt dann wegen $u_l^0 = u_{l-1}$ und nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \|u_l^m - u_l\|_a &\leq \rho^m \|u_l^0 - u_l\|_a \\ &= \rho^m \|u_{l-1}^m - u_l\|_a \\ &\leq \rho^m (\|u_{l-1}^m - u_{l-1}\|_a + \|u_{l-1} - u\|_a + \|u - u_l\|_a) \\ &\leq \rho^m \left(c \frac{3\rho^m}{1 - 2\rho^m} 2h_l + 3c h_l \right) |u|_{2,\Omega} \\ &= \rho^m c \frac{3}{1 - 2\rho^m} h_l |u|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Mit $\rho^m \leq \frac{1}{3}$ schließt man daraus die Behauptung. \square

Bemerkung. Bei der Methode der finiten Elemente gilt für den Fehler

$$\|u_l - u\|_a \leq \tilde{C} h_l |u|_{2,\Omega}.$$

Er hat damit dieselbe Größenordnung.

