Algebra

N. Perrin

Düsseldorf
Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen

1.1 Wiederholung

1.1.1 Gruppen, Untergruppen

Definition 1.1.1 Eine **Gruppe** ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ so, dass

1. Es existiert ein **neutrales Element** e in G mit $e \cdot x = x \cdot e = x$ für alle $x \in G$.
2. Die Verknüpfung ist **assoziativ** *i.e.* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ für alle $x, y, z \in G$.
3. jedes $x \in G$ hat ein **inverses Element** $y \in G$ mit $x \cdot y = y \cdot x = e$.

Definition 1.1.2 Eine Gruppe G heißt **kommutativ** oder **abelsch** falls $x \cdot y = y \cdot x$ gilt für alle $x, y \in G$.

Beispiel 1.1.3 1. $\mathbb{Z}$ mit $+$ ist eine Gruppe.

2. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\text{Restklassen modulo } n\}$. Dann ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $+$ eine Gruppe.

3. Sei K ein Körper. Dann ist $\mathrm{GL}_n(K)$ mit Matrixmultiplikation eine Gruppe.

4. S_n die Permutationsgruppe mit $\circ$ der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung ist eine Gruppe.

Lemma 1.1.4 Sei G eine Gruppe und seien x, y, z Elemente in G.

1. Das neutrale Element e_G ist eindeutig bestimmt.

2. Das inverse Element x^{-1} von x ist eindeutig bestimmt.

3. $xy = xz \Rightarrow y = z$ und $yx = zx \Rightarrow y = z$,

4. $(x^{-1})^{-1} = x$.

5. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. □

Beweis. Siehe LAI. ■

Bemerkung 1.1.5 Sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Aus 5. folgt per Induktion, dass $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$. Wir schreiben x^{-n} für $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$ also ist x^n für alle $n \in \mathbb{Z}$ definiert und es gilt $x^n x^m = x^{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Lemma 1.1.6 Seien G und G' zwei Gruppen und sei $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$. Dann ist $G \times G'$ mit diesem Produkt eine Gruppe. □

Beweis. Übung. ■

Definition 1.1.7 Seien G und G' zwei Gruppen. Das Produkt $G \times G'$ mit Verknüpfung $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$ heißt **Produkt-Gruppe** von G und G'.

Definition 1.1.8 Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subset G$ heißt **Untergruppe** von G falls gilt:

1. $1 \in H$,
2. $x, y \in H \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$.

Lemma 1.1.9 Eine Untergruppe ist eine Gruppe. □

Beweis. Siehe LAI. ■

Beispiel 1.1.10 1. Sei G eine Gruppe. Dann ist $H = \{e_G\}$ die **Trivialuntergruppe** eine Untergruppe von G.

2. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \mid n \text{ teilt } m\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

3. Sei K ein Körper. Dann ist $\mathrm{SL}_n(K)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$.

1.1.2 Gruppenhomomorphismen

Definition 1.1.11 Seien G und G' zwei Gruppen. Eine Abbildung $f : G \to G'$ heißt **Gruppenhomomorphismus** falls für alle $x, y \in G$ gilt $f(xy) = f(x)f(y)$.

Beispiel 1.1.12 1. die Abbildung $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \times)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

2. Sei K ein Körper. Dann ist $\det : \mathrm{GL}_n(K) \to (K^\times, \times) = (K \setminus \{0\}, \times)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Lemma 1.1.13 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus dann gilt für alle $x \in G$

$$f(e_G) = e_{G'} \text{ und } f(x^{-1}) = f(x)^{-1}.$$

Beweis. Siehe LAI. ■

Definition 1.1.14 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, dann heißt die Teilmenge $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ von G der **Kern** von f.

Lemma 1.1.15 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei H eine Untergruppe von G und H' eine Untergruppe von G'.

1. Dann sind $f(H)$ und $f^{-1}(H')$ Untergruppen von G' und G.

2. Für $H' = \{e_{G'}\}$ ist $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(H')$ eine Untergruppe von G.

3. Für $H = G$ ist das Bild $f(G)$ von f eine Untergruppe von G' □

Beweis. Siehe Übungsblatt 0. ■

Beispiel 1.1.16 Die Signatur $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Wir Schreiben $A_n = \mathrm{Ker}\varepsilon$ für die **Alternierende Gruppe**. Die Gruppe A_n ist eine Untergruppe von S_n.

Lemma 1.1.17 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$. □

Beweis. Siehe LAI. ■

Definition 1.1.18 Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus $f : G \to G'$ heißt **Isomorphismus** oder **Gruppenisomorphismus**. Wenn $G' = G$ heißt ein Gruppenisomorphismus **Gruppenautomorphismus** oder **Automorphismus**.

Lemma 1.1.19 Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Dann ist $\mathrm{Int}_g : G \to G$ definiert durch $\mathrm{Int}_g(h) = ghg^{-1}$ ein Gruppenautomorphismus. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 0. ■

Definition 1.1.20 Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Dann heißt Int_g **innerer Gruppenhomomorphismus** oder **Konjugation mit** g. Gruppenautomorphismen, die nicht dieser From sind heißen **äußere Automorphismen**.

1.1.3 Recht und Links Klassen

Definition 1.1.21 Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe. Man definiert die Relation $\sim$ durch

$$g' \sim g \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ mit } g' = gh.$$

Lemma 1.1.22 Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation und die Klasse eines Element $g \in G$ ist die Teilmenge $\bar{g} = [g] = gH = \{gh \in G \mid h \in H\}$. Die Äquivalenzklassen heißen **Linksklassen**. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 0. ∎

Definition 1.1.23 Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe.

1. Die Menge aller Äquivalenzklassen heißt **Quotient von G nach H** und ist G/H bezeichnet.

2. Die **kanonische Projektion** ist die Abbildung $G \to G/H$ definiert durch $g \mapsto \bar{g} = [g] = gH$.

Bemerkung 1.1.24 Analog kann man die Äquivalenzrelation $g' \sim_R g \Leftrightarrow \exists h \in H$ mit $g' = hg$ definieren. Die Äquivalenzklassen heißen **Rechtsklassen** $Hg = \{hg \in G \mid h \in H\}$ und die Menge aller Rechtsklassen ist $H\backslash G$. Man kann auch die kanonische Projektion $G \to H\backslash G$ durch $g \mapsto Hg$ definieren.

Satz 1.1.25 Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G.

1. Es gilt $gH \cap gH' \neq \emptyset \Rightarrow gH = g'H$ (m.a.W. $gH \neq g'H \Rightarrow gH \cap gH' = \emptyset$).

2. Es gilt $G = \bigcup_{gH \in G/H} gH$. □

Beweis. Siehe LAI. Wir geben trozdem einen Beweis.

1. Sei $gh \in gH \cap g'H$. Dann gibt es $h' \in H'$ mit $gh = g'h'$. Sei $gh'' \in gH$. Dann gilt $gh'' = ghh^{-1}h'' = g'h'h^{-1}h'' \in g'H$ also $gH \subset g'H$. Analog gilt $g'H \subset gH$.

2. Sei $g \in G$. Dann gilt $g \in gH$. Umgekehrt gilt $gH \subset G$. ∎

Korollar 1.1.26 (Satz von Lagrange) Es gilt $|G| = |G/H||H|$.

Beweis. Die Gruppe G ist die disjunkte Vereinnigung aller gH für $gH = \bar{g} \in G/H$ also gilt

$$|G| = \sum_{\bar{g} \in G/H} |gH|.$$

Aber die Abbildungen $gH \to g'H$ und $g'H \to gH$ definiert durch $a \mapsto g'g^{-1}a$ und $a \mapsto gg'^{-1}a$ sind inverse von einander. Es gilt also $|gH| = |g'H|$ für alle $g, g' \in G$ und insbesondere für $g' = e_G$ gilt $|gH| = |H|$. Daraus folgt $|G| = \sum_{\bar{g} \in G/H} |gH| = \sum_{\bar{g} \in G/H} |H| = |G/H||H|$. ∎

Definition 1.1.27 Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G.

1. Die **Ordnung** von G ist $|G|$ die Anzahl aller Elementen in G (die **Mächtigkeit** von G).

2. Der **Index** von H in G ist $[G : H] = |G/H|$.

Korollar 1.1.28 Sie G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe. Dann sind die Ordnung $|H|$ und der Index $[G : H]$ von H Teiler der Ordnung $|G|$ von G.

1.2 Normalteiler

Definition 1.2.1 Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe H von G heißt **Normalteiler** falls für alle $g \in G$ gilt $gHg^{-1} \subset H$. Man schreibt $H \triangleleft G$.

Bemerkung 1.2.2 Eine Untergruppe H ist genau dann ein Normalteiler wenn gilt $ghg^{-1} \in H$ für alle $g \in G$ und alle $h \in H$.

Lemma 1.2.3 Jede Untergruppe einer abelschen Gruppe G ist normal. □

Beweis. Klar. ■

Lemma 1.2.4 Eine Untergruppe H ist genau dann Normalteiler, wenn $gH = Hg$ für alle $g \in G$. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 0. ■

Beispiel 1.2.5 1. Die triviale Untergruppe $\{e_G\}$ und die Gruppe G sind Normalteiler von G: $\{e_G\} \triangleleft G$ und $G \triangleleft G$.

2. $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$.

3. $\mathrm{SL}_n(K) \triangleleft \mathrm{GL}_n(K)$ aber $\mathrm{SO}_n(K) \not\triangleleft \mathrm{GL}_n(K)$.

Lemma 1.2.6 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und seien $H \triangleleft G$ und $H' \triangleleft G'$.

1. Dann ist $f^{-1}(H') \triangleleft G$. Insbesondere gilt $\mathrm{Ker} f \triangleleft G$.

2. Falls f sujektiv ist, gilt $f(H) \triangleleft G'$. □

Beweis. 1. Sei $g \in G$ und $h \in f^{-1}(H')$. Dann gilt $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1} \in H'$ also $ghg^{-1} \in f^{-1}(H')$.

2. Sei $g' \in G'$ und $h' \in f(H)$. Dann gibt es ein $h \in H$ mit $h' = f(h)$. Da f surjektiv ist gibt es ein $g \in G$ mit $f(g) = g'$. Dann gilt $g'h'g'^{-1} = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(ghg^{-1}) \in f(H)$. ■

Satz 1.2.7 Sei $H \triangleleft G$. Dann ist die Verknüpfung $G/H \times G/H \to G/H$, $(\bar{g}, \bar{g}') \mapsto \overline{gg'}$ wohl definiert und G/H ist mit dieser Verknüpfung einer Gruppe. Außerdem ist die kanonische Projektion $G \to G/H$ ein Gruppenhomomorphismus. □

Beweis. Seien $a, b \in G$ mit $\bar{a} = \bar{g}$ und $\bar{b} = \bar{g}'$. Wir zeigen, dass $\overline{ab} = \overline{gg'}$. Sei $h \in H$ mit $a = gh$ und $h' \in H$ mit $b = g'h'$. Da $g'H = Hg'$ gibt es $h'' \in H$ mit $hg' = gh''$. Es gilt

$$\overline{ab} = abH = ghg'h'H = gg'h''h'H = gg'H = \overline{gg'}.$$

Die Verknüpfung ist also wohl definiert.

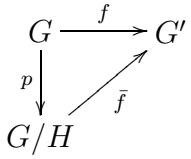
Es gilt $\bar{g}\bar{e}_G = \overline{ge_G} = \bar{g}$ und analog gilt $\bar{e}_G\bar{g} = \bar{g}$ also gilt $\bar{e}_G = e_{G/H}$. Es gilt $\bar{g}(\bar{g}'\bar{g}'') = \bar{g}\overline{g'b''} = \overline{g(g'g'')} = \overline{(gg')g''} = \overline{gg'}\bar{g}'' = (\bar{g}\bar{g}')\bar{g}''$. Es gilt $\bar{g}\overline{g^{-1}} = \overline{gg^{-1}} = \overline{e_G}$ und analog $\overline{g^{-1}}\bar{g} = \overline{e_G}$. Daraus folgt auch, dass die kanonische Projektion ein Guppenhomomorphismus ist. ∎

Definition 1.2.8 Sei H ein Normalteiler von G. Die Gruppe G/N heißt **Quotientgruppe** von G nach H.

Beispiel 1.2.9 Die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist die Quotientgruppe von $\mathbb{Z}$ nach $n\mathbb{Z}$.

Satz 1.2.10 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, sei H ein Normalteiler von G und sei $p : G \to G/H$ die kanonische Projektion.

1. Es gibt ein eindeutig bestimmter Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : G/H \to G'$ so, dass das Diagram



kommutiert, genau dann wenn $H \subset \mathrm{Ker}f$.

Angenommen $H \subset \mathrm{Ker}f$ und sei $\bar{f}$ wie in 1.

2. Die Abbildung $\bar{f}$ ist genau dann injektiv, wenn $H = \mathrm{Ker}f$.

3. Die Abbildung $\bar{f}$ ist genau dann surjektiv, wenn f surjektiv ist. □

Beweis. 1. Sei $\bar{f}$ wie oben und sei $h \in H$. Dann gilt $f(h) = \bar{f} \circ p(h)$. Aber $p(h) = [h] = hH = H = [e_G] = e_{G/H}$. Daraus folgt $f(h) = \bar{f}(e_{G/H}) = e_{G'}$ da $\bar{f}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Es folgt $H \subset \mathrm{Ker}f$.

Umgekehrt sei $H \subset \mathrm{Ker}f$. Sei $g \in G$, wir setzen $\bar{f}([g]) = f(g)$ (die ist die einzige Mögligkeit so, dass das Diagram kommutiert, dies zeigt, dass $\bar{f}$ eindeutig bestimt ist). Sei g' mit $[g'] = [g]$. Es gibt $h \in H$ mit $g' = gh$ und es gilt $f(g') = f(gh) = f(g)f(h) = f(g)e_{G'} = f(g)$. Also ist die Abbildung $\bar{f}$ wohl definiert. Außerdem gilt $\bar{f}([g][g']) = \bar{f}([gg']) = f(gg') = f(g)f(g') = \bar{f}([g])\bar{f}([g'])$ und $\bar{f}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Darüber hinaus gilt $\bar{f} \circ p(g) = \bar{f}([g]) = f(g)$ und das Diagram ist kommutativ.

2. Sei $\bar{f}$ injektiv. Dann gilt $\mathrm{Ker}\bar{f} = \{e_{G/H}\}$. Sei $g \in \mathrm{Ker}f$. Es gilt $\bar{f}([g]) = e_{G'}$ also $[g] \in \mathrm{Ker}\bar{f}$ und da $\bar{f}$ injetiv ist, gilt $[g] = e_{G/H}$. Es folgt $gH = [g] = e_{G/H} = H$ und $g \in H$. Also $\mathrm{Ker}f \subset H$ und da $H \subset \mathrm{Ker}f$ folgt $H = \mathrm{Ker}f$.

Umgekehrt sei $H = \mathrm{Ker}f$ und sei $[g] \in \mathrm{Ker}\bar{f}$. Es gilt $f(g) = \bar{f}([g]) = e_{G'}$ also $g \in \mathrm{Ker}f = H$. Es folgt $[g] = H = e_{G/H}$ und $\bar{f}$ ist injektiv.

3. Sei f surjektiv und sei $g' \in G'$. Dann gibt es $g \in G$ mit $f(g) = g'$. Es gilt $\bar{f}([g]) = f(g) = g'$ also ist $\bar{f}$ auch surjektiv.

Umgelehrt, sei $\bar{f}$ surjektiv und sei $g' \in G'$. Es gibt $[g] \in G/H$ mit $\bar{f}([g]) = g'$. Daraus folgt $f(g) = \bar{f}([g]) = g'$ und f ist surjektiv. ∎

Korollar 1.2.11 Sei $f : G \to G'$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Dann gilt $G/\mathrm{Ker}f \simeq G'$.

Beispiel 1.2.12 1. Es gilt $\mathrm{GL}_n(k)/\mathrm{SL}_n(K) \simeq k^\times$ (der Kernel des surjektiven Gruppenhomomorphismus $\det : \mathrm{GL}_n(k) \to k^\times$ ist $\mathrm{SL}_n(k)$).

2. Es gilt $\mathbb{C}^\times/S^1 \simeq \mathbb{R}_{>0}$ (der Kernel des surjektiven Gruppenhomomorphismus $|\cdot| : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_{>0}$ ist S^1).

3. Es gilt $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ (der Kernel des surjektiven Gruppenhomomorphismus $r \mapsto e^{2i\pi r}$ ist $\mathbb{Z}$).

4. Es gilt $S_n/A_n \simeq \{\pm 1\}$ (der Kernel des surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ ist A_n).

Definition 1.2.13 Ein Diagram $1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} G' \longrightarrow 1$ heißt **exakte Sequenz**,

- wenn alle Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind,
- wenn i injektiv ist,
- wenn f surjektiv ist und
- wenn $i(H) = \mathrm{Ker}f$.

Bemerkung 1.2.14 Falls $1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} G' \longrightarrow 1$ eine exakte Sequenz ist, gilt $G' \simeq G/H$.

Beispiel 1.2.15 Es gibt (Siehe Übungsblatt 1) eine exakte Sequenz

$$1 \to A_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to S_3 \to \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

Definition 1.2.16 Eine Gruppe G heißt **einfach** falls G und $\{e_G\}$ die einzige Normalteiler von G sind.

Beispiel 1.2.17 1. Die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann einfach, wenn p eine Primzahl ist (Siehe Übungsblatt 1).

2. Später zeigen wir, dass die Gruppe $A_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\})$ einfach für $n \geq 5$ ist.

Definition 1.2.18 Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe. Der **Normalisator** $N_G(H)$ von H in G ist

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Lemma 1.2.19 Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe.

1. Der Normalisator $N_G(H)$ ist eine Untergruppe von G.

2. Es gilt $H \triangleleft N_G(H)$ (also H ist Normalteiler in $N_G(H)$).

3. Sei K eine Untergruppe von G mit $H \triangleleft K$. Dann gilt $K \subset N_G(H)$ (*i.e.* $N_G(H)$ ist die größte Untergruppe von G mit $H \triangleleft N_G(H)$). □

Beweis. 1. Es gilt $e_G H e_G^{-1} = e_G H e_G = H$ also $e_G \in N_G(H)$. Seien $a, b \in N_G(H)$. Dann gilt $aHa^{-1} = H$ und $bHb^{-1} = H$ also $b^{-1}Hb = H$. Daraus folgt

$$(ab^{-1})H(ab^{-1})^{-1} = ab^{-1}Hba^{-1} = aHa^{-1} = H$$

und $ab^{-1} \in N_G(H)$ und $N_G(H)$ ist eine Untergruppe von G.

2. Klar.

3. Sei K eine Untergruppe mit $H \triangleleft K$. Sei $k \in K$. Dann gilt $kH^{-1} \subset K$. Da K eine Gruppe ist gilt auch $k^{-1} \in K$ also $k^{-1}Hk \subset H$ und mit Linksmultiplikation mit k und Rechtsmultiplikation mit k^{-1} folgt $H \subset kHk^{-1}$. Daraus folgt $kHk^{-1} = H$ und $k \in N_G(H)$. ■

Beispiel 1.2.20 Sei $G = S_3$ und sei $H = \{(123) = \mathrm{Id}, (213)\}$ und $A_3 = \{(123) = \mathrm{Id}, (231), (312)\}$. Dann sind H und A_3 Untergruppe von G und es gilt (siehe Übungsblatt 1)

$$N_G(H) = H \text{ und } N_G(A_3) = S_3.$$

Satz 1.2.21 (Erster Isomorphiesatz) Sei G eine Gruppe, $H \triangleleft G$ ein Normalteiler von G und $K \subset G$ eine Untergruppe von G.

1. Dann gilt $HK = KH$, $KH \subset G$ ist eine Untergruppe, $H \triangleleft KH$ und $K \cap H \triangleleft K$.

2. Die Abbildung $f : K/(K \cap H) \to KH/H$ definiert durch $k(K \cap H) \mapsto kH$ ist ein Isomorphismus also

$$K/(K \cap H) \simeq KH/H.$$

Beweis. 1. Sei $h \in H$ und $k \in K$. Da H ein Normalteiler ist, gilt $khk^{-1} \in H$ und es folgt $kh \in Hk \subset HK$. Daraus folgt $KH \subset HK$. Analog gilt $k^{-1}hk \in H$ und $hk \in kH \subset KH$. Daraus folgt $HK \subset KH$ und $KH = HK$.

Da $e_G \in H$ und $e_G \in K$ gilt $e_G \in KH$. Seien $k, k' \in K$ und $h, h' \in H$ so, dass $kh, k'h' \in KH$. Es gilt $kh(k'h')^{-1} = khh'^{-1}k'^{-1} \in KHK = KKH = KH$. Daraus folgt, dass KH eine Untergruppe ist.

Da H ein Normalteiler ist, gilt $gHg^{-1} \subset H$ für alle $g \in G$. Insbesondere für alle $g \in KH$ und es folgt $H \triangleleft KH$.

Sei $g \in H \cap K$ und $k \in K$. Es gilt $kgk^{-1} \in K$ und da H ein Normalteiler ist, gilt auch $kgk^{-1} \in H$. Also $kgk^{-1} \in H \cap K$ und $H \cap K \triangleleft K$.

2. Sei $f : K \to KH/H$ die Abbildung definiert durch $f(k) = kH$. Seien $k, k' \in K$. Es gilt $f(kk') = kH \cdot k'H = kk'H = f(kk'$ also ist f ein Gruppenhomomorphismus. Seien $k \in K$ und $h \in H$. Dann gilt $f(k) = kH = khH$ und f ist surjektiv. Sei $k \in K \cap H$. Dann gilt $f(k) = kH = H = e_{KH/H}$ also $H \cap K \subset \mathrm{Ker}f$. Sei $k \in K\mathrm{Ker}f$. Dann gilt $kH = f(k) = H$ und $k \in H$ also $k \in K \cap H$. Es folgt $H \cap K = \mathrm{Ker}f$. Nach Korollar 1.2.11 folgt, dass $K/(H \cap K) \simeq KH/H$. ∎

Satz 1.2.22 (Zweiter Isomorphiesatz) Sei G eine Gruppe und seien $H \triangleleft G$ und $K \triangleleft G$ mit $K \subset H$.

1. Dann gilt $K \triangleleft H$ und $H/K \triangleleft G/K$.

2. Die Abbildung $f : (G/K)/(H/K) \to G/H$ definiert durch $gK \cdot H/K \mapsto gH$ ist ein Isomorphismus also

$$(G/K)/(H/K) \simeq G/H.$$

Beweis. 1. Sei $h \in H \subset G$. Da $K \triangleleft G$ gilt $hKh^{-1} = K$ und $K \triangleleft H$.

Die Teilmenge $H/K \subset G/K$ ist $\pi_K(H)$, wobei $\pi : G \to G/K$ die kanonische Projektion ist. Da $H \triangleleft G$ und π surjektiv folgt, dass $H/K \triangleleft G/K$.

2. Die kanonische Projektion $\pi_H : G \to G/H$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und es gilt $K \subset H = \mathrm{Ker}\pi_H$. Daraus folgt, dass es ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $F = \bar{\pi}_H : G/K \to G/H$ gibt mit $\pi_H = \pi_K \circ F$ also $F([g]_K) = [g]_H$.

Wir zeigen, dass $\mathrm{Ker}F = H/K$. Daraus folt, dass es ein Gruppenisomorphismus $\bar{F} : (G/K)/(H/K) \to G/H$ gibt mit $\bar{F}([[g]_K]_{H/K}) = [g]_H$. Sei $[g]_K \in \mathrm{Ker}F$. Dann gilt $[e_G]_H = F([g]_K) = [g]_H$ also $g \in H$ und $[g]_K \in H/K$. Umgekehrt, sei $[g]_K \in H/K$ also $[g]_K = [h]_K$ für ein $h \in H$ *i.e.* es gibt ein $k \in K$ mit $g = hk$. Da $K \subset H$ gilt $g \in H$. Daraus folgt $[g]_H = [e_G]_H$ und $F([g]_K) = [g]_H = [e_G]_H$ also $[g]_K \in \mathrm{Ker}F$. Umgekehrt, sei $[g]_K \in \mathrm{Ker}F$. Es gilt $[g]_H = F([g]_K) = [e_G]_H$ also $g \in H$. Daraus folgt $[g]_K \in H/K$. ∎

1.3 Zentrum

Definition 1.3.1 Sei G eine Gruppe.

1. **Das Zentrum** einer Gruppe G ist die Menge

$$Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G\}.$$

2. Sei $X \subset G$ eine Teilmenge. Der **Zentralisator** von G ist die Teilmenge

$$Z_G(X) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in X\}.$$

Bemerkung 1.3.2 Es gilt $Z(G) = Z_G(G)$.

Beispiel 1.3.3 1. Sei G eine kommutative Gruppe. Dann gilt $Z(G) = G$.

2. Sei $G = S_n$. Dann gilt $Z(S_n) = \{\mathrm{Id}\}$ (Siehe Übungsblatt 2) für $n \geq 3$.

Lemma 1.3.4 Sei G eine Gruppe und $X \subset G$ eine Teilmenge.

1. Der Zentralisator $Z_G(X)$ ist eine Untergruppe.

2. Das Zentrum $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G und $Z_G(X)$ und ist abelsch.

3. Es gilt $G/Z(G) \simeq \{\text{innere Automorphismen}\}$.

4. Falls $G/Z(G)$ zyklisch ist (siehe Definition 1.4.2 unten), gilt $G = Z(G)$ also G ist abelsch. □

Beweis. 1. Es gilt $e_G x = x e_G$ für alle $x \in G$ also ist $e_G \in Z_G(X)$. Seien $g, h \in Z_G(X)$. Es gilt $gx0xg$ und $hx = xh$ für alle $x \in X$. Daraus folgt $xh^{-1} = h^{-1}x$ für alle $x \in X$ und $xgh^{-1} = gxh^{-1} = gh^{-1}x$ *i.e.* $gh^{-1} \in Z_G(X)$.

2. Nach der Definition gilt $Z(G) \subset Z_G(X)$. Sei $z \in Z(G)$ und $g \in G$. Es gilt $gzg^{-1} = gg^{-1}z = z$ also $gzg^{-1} \in Z(G)$. Daraus folgt, dass $Z(G)$ ein Normalteiler in G und $Z_G(X)$ ist. Seien $z, z' \in Z(G)$. Es gilt $zz' = z'z$ also $Z(G)$ ist abelsch.

3. Sei $f : G \to \{\text{innere Automorphismen}\}$ definiert durch $f(g) = \mathrm{Int}_g$. Diese Abbildung ist surjectiv und es gilt $f(gh) = \mathrm{Int}_{gh} = \mathrm{Int_g} \circ \mathrm{Int}_h$ (es gilt $\mathrm{Int}_g \circ \mathrm{Int}_h(g') = \mathrm{Int}_g(hg'h^{-1} = ghg'h^{-1}g^{-1} = (gh)g'(gh)^{-1} = \mathrm{Int}_{gh}(g'))$. Die Abbildung ist also ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Sei $g \in \mathrm{Ker}(f)$. Es gilt $\mathrm{Int}_g = \mathrm{Id}$ also $\mathrm{Int}_g(h) = h$ für alle $h \in G$. Dies ist äquivalent zu $ghg^{-1} = h$ für alle $h \in H$ und auch zu $gh = hg$ für alle $h \in G$. Also $\mathrm{Ker}(f) = Z(G)$.

4. Seien $g, h \in G$ und sei $\pi : G \to G/Z(G)$ die kanonische projektion. Da $G/Z(G)$ zyklisch ist gibt es ein $a \in G$ mit $G/Z(G) = \langle [a] \rangle$. Insbesondere gibt es $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $[g] = [a]^n$ und $[h] = [a^m]$. Es gibt also $z, z' \in Z(G)$ mit $g = a^n z$ und $h = a^m z'$. Daraus folgt $gh = a^n z a^m z' = a^m z' a^n z = hg$ und G ist kommutativ. ■

1.4 Erzeuger und Zyklische Gruppe

Lemma 1.4.1 Sei G eine Gruppe.

1. Sei $(H_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen von G. Dann ist $\bigcap_{i \in I} H_i$ eine Untergruppe von G.

2. Sei A eine Teilmenge von G. Dann gibt es eine kleinste Untergruppe H mit $A \subset H$. □

Beweis. 1. Siehe Übungsblatt 1.

2. Sei $(H_i)_i$ die Familie aller Untergruppen von G die A enthalten (diese Familie ist nicht leer da G eine solche Gruppe ist). Dann ist $H = \bigcap_{i\in I} H_i$ die minimale Untergruppe die A enthält ∎

Definition 1.4.2 1. Sei G eine Gruppe und A eine Teilmenge von G. Die kleinste Untergruppe die A enthält heißt **die von A erzeugte Untergruppe** und ist $\langle A\rangle$ geschrieben. Falls A nur einelementig ist: $A = \{g\}$ schreibt man $\langle A\rangle = \langle g\rangle$.

2. Eine Teilmenge A einer Gruppe G heißt **erzeugend** (man sagt auch A **erzeugt** G) falls $G = \langle A\rangle$.

3. Eine Gruppe G heißt **zyklisch** falls es ein Element $g \in G$ gibt mit $G = \langle g\rangle$.

Beispiel 1.4.3 1. Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch und 1 erzeugt $\mathbb{Z}$.

2. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Die Gruppe $(\mathbb{Z}/n, +)$ ist zyklisch und $\bar{1}$ erzeugt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3. Die einfache Transpositionen $(s_i)_{i\in[1,n-1]}$ definiert durch

$$s_i(k) = \begin{cases} k & \text{für } k \notin \{i, i+1\} \\ i+1 & \text{für } k = i \\ i & \text{für } k = i+1 \end{cases}$$

erzeugen S_n *i.e.* $S_n = \langle s_i \mid i \in [1, n-1]\rangle$ (Siehe LAII).

Lemma 1.4.4 Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Es gilt $\langle g\rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. □

Beweis. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Da $\langle g\rangle$ eine Gruppe ist und enthält g, gilt $g^{-1} \in \langle g\rangle$ und $g^n \in \langle g\rangle$ also $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \langle g\rangle$.

Umgekehrt, seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann ist $(g^n)(g^m)^{-1} = g^{n-m} \in \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und $e_G = g^0 \in \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Daraus folt, dass $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von G ist und enthält g. Also $\langle g\rangle \subset \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. ∎

Satz 1.4.5 Sei G eine zyklische Gruppe. Dann ist G isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. □

Beweis. Sei $g \in G$ so, dass $G = \langle g\rangle$. Sei $f : \mathbb{Z} \to G$ definiert durch $f(n) = g^n$. Dies ist ein Gruppenhomomorphismus und nach dem obigen Lemma folgt $f(\mathbb{Z}) = G$. Falls f injektiv ist, ist f ein Isomorphismus und $G \simeq \mathbb{Z}$. Sonst sei $N = \mathrm{Ker} f$. Dann ist N eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ und es folgt $N = n\mathbb{Z}$ für eine $n \in \mathbb{Z}$ (Siehe Übunsblatt 0 oder im Beweis von Korollar 1.4.7). Es folgt (nach Korollar 1.2.11) $G = \mathbb{Z}/N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ∎

Korollar 1.4.6 Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe mit $|G| = p$.

1. Sei $g \in G$ mit $g \neq e_G$. Dann gilt $G \simeq \langle g\rangle$.

2. Es gilt $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Beweis. 1. Sei $H = \langle g \rangle$. Dann gilt $e_G, g \in H$ also $|H| \geq 2$. Nach dem Satz von Lagrange gilt $|H|$ teilt p also $|H| = p = |G|$ und $H = G$.

2. Folgt vom obigen Satz. ∎

Korollar 1.4.7 Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch.

Beweis. Die Gruppe G ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Es wurde im Übungsblatt 0 gezeigt, dass die Untergruppen zyklisch sind. Wir geben dennoch einen Beweis.

Angenommen $G = \mathbb{Z}$. Sei H eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$. Falls $H = \{0\}$ sind wir fertig. Sonst ist $H \cap \mathbb{Z}_{>0} \neq \emptyset$. Sei $m = \min\{r \in H \mid r > 0\}$. Sei $n \in H$. Dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in [0, m-1]$ mit $n = km + r$. Da H eine Gruppe ist gilt $r = n - km \in H$ und da m minimal war, gilt $r = 0$. Daraus folgt $H = m\mathbb{Z}$.

Sei $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und sei H eine Untergruppe von G. Sei $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = G$ die kanonische Projektion. Dann ist $\pi^{-1}(H)$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ also gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $\pi^{-1}(H) = m\mathbb{Z}$. Da die kanonische Projektion surjektiv ist, folgt $H = \pi(\pi^{-1}(H)) = \pi(m\mathbb{Z}) = \{k[m] = [mk] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$. ∎

1.5 Ordung eines Elements

Definition 1.5.1 Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Die **Ordnung** $\mathrm{ord}(g)$ von g ist die Ordung der Gruppe $\langle g \rangle$.

Lemma 1.5.2 Es gilt $\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid g^k = e_G\} = \mathrm{ord}(g)\mathbb{Z}$ (wir setzen $\infty\mathbb{Z} = \{0\}$). □

Beweis. Nach Satz 1.4.5 ist die Gruppe $\langle g \rangle$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Im ersten Fall gilt $\mathrm{ord}(g) = \infty$ und im zweiten Fall gilt $\mathrm{ord}(g) = n$. Außerdem ist die Abbildung $\mathbb{Z} \to \langle g \rangle$ bzw. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \langle g \rangle$ definiert durch $k \mapsto g^k$ bzw. $[k] \mapsto g^k$ ein Isomorphismus.

Im ersten Fall gilt $\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid g^k = e_G\} = \{0\}$. Im zweiten Fall gilt $\{k \in \mathbb{Z} \mid g^k = e_G\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid [k] = 0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$. ∎

Lemma 1.5.3 Sei G eine Gruppe und $g \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) = n < \infty$. Dann gilt

$$\mathrm{ord}(g^m) = \frac{n}{\mathrm{ggT}(m, n)}$$

für alle $m \in \mathbb{Z}$. □

Beweis. Seien $d = \mathrm{ggT}(m, n)$, $m' = \frac{m}{d} \in \mathbb{Z}$ und $n' = \frac{n}{d} \in \mathbb{Z}$. Sei $s = \mathrm{ord}(g^m)$. Es gilt $g^{ms} = (g^m)^s = e_G$. Also gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $ms = kn$. Es folgt $m's = n'k$. Da $\mathrm{ggT}(m', n') = 1$ folgt $n' | s$.

Es gilt $(g^m)^{n'} = g^{mn'} = g^{m'dn'} = g^{m'n} = (g^n)^{m'} = e_G$. Daraus folgt $s | n'$. Insgesamt folgt $s = n'$. ∎

Korollar 1.5.4 Die erzeugende Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sind die Klassen $[m] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.

Beweis. Sei $[m] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle [m] \rangle$. Dann gilt $[m] = m[1]$ und $\mathrm{ord}([1]) = n$. Daraus folgt $\mathrm{ord}(m) = n/\mathrm{ggT}(m,n)$.

Die Klasse $[m]$ ist aber genau dann erzeugend, wenn $\mathrm{ord}([m]) = n$ also $n/\mathrm{ggT}(m,n) = n$ *i.e.* $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$. ∎

Beispiel 1.5.5 Die erzeugende Klassen in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind $[1]$ und $[3]$.

Korollar 1.5.6 Sei $n \in \mathbb{Z}$. Die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hat für jedes $m|n$ genau eine Untergruppe der Ordnung m: die Gruppe

$$m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[km] \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis. Dies wurde im Übungsblatt 0 bewiesen. Wir geben dennoch einen Beweis. Sei H eine Untergruppe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und sei $d = \min\{k \in \mathbb{Z}_{>0} \mid [k] \in H\}$. Da $[0] = [n] \in H$ gilt $0 < d \leq n$. Sei $[k] \in H$. Wir schreiben $k = da + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \in [0, d-1]$. Es gilt $[k], [d] \in H$ also $[b] = [k] - a[d] \in H$. Da d minimal ist, folgt $b = 0$ und $k \in d\mathbb{Z}$. Es folgt $H = d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[kd] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle [d] \rangle$. Außerdem gilt $\mathrm{ord}([d]) = \frac{n}{\mathrm{ggT}(n,d)} = \frac{n}{d} := m$. ∎

1.6 Derivierte Untergruppe

Definition 1.6.1 Sei G eine Gruppe, seien $g, h \in G$ und seien $H, K \subset G$ Untergruppen.

1. Der **Kommutator** von g und h ist $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

2. **Der Kommutator** $[H,K]$ von H und K ist die Gruppe $[H,K] = \langle [h,k] \mid h \in H \text{ und } k \in K \rangle$.

3. **Die derivierte Gruppe** $D(G)$ von G ist die Gruppe $D(G) = [G,G]$ (manchmal wird $D(G)$ auch (G,G) bezeichnet).

Lemma 1.6.2 Sei G eine Gruppe.

1. $D(G) = \{[g_1,h_1] \cdots [g_n,h_n] \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ und } g_i, h_i \in G\}$.

2. $D(G)$ ist eine Normalteiler in G.

3. $G/D(G)$ ist abelsch.

4. Sei $N \triangleleft G$ mit G/N abelsch. Dann gilt $D(G) \subset N$. Also ist $D(G)$ die kleinste Untergruppe so, dass $G/D(G)$ abelsch ist. □

Beweis. 1. Sei $H = \{[g_1, h_1] \cdots [g_n, h_n] \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ und } g_i, h_i \in G\}$. Es gilt $H \subset D(G)$. Wir zeigen, dass H eine Untergruppe ist. Alle Produkte von Elementen aus H sind noch in H. Es gilt $[g,h]^{-1} = [h,g]$ also ist das Inverses jedes Element aus H noch in H und H ist eine Untergruppe. Daraus folgt $D(G) \subset H$ da $D(G)$ die kleinste Untergruppe die alle Kommutatoren enthält ist.

2. Seien $g, h, k \in G$. Es gilt $k[g,h]k^{-1} = [kgk^{-1}, khk^{-1}]$. Daraus folgt $k[g,h]k^{-1} \in D(G)$ und nach 1. $kD(G)k^{-1} \subset D(G)$.

3. Seien $g, h \in G$. Dann gilt $[ghg^{-1}h^{-1}] = e$ in $G/D(G)$ also $[g][h] = [h][g]$ und $G/D(G)$ ist abelsch.

4. Seien $g, h \in G$. Es gilt $[ghg^{-1}h^{-1}]_N = [g]_N[h]_N[g]_N^{-1}[h]_N^{-1} = [e_G]_N$ da G/N abelsch ist. Daraus folgt $ghg^{-1}h^{-1} \in N$ und $D(G) \subset N$. ∎

1.7 Semidirekte Produkte

Lemma 1.7.1 Seien N und H zwei Gruppen und sei $\Phi : H \to \mathrm{Aut}(N), h \mapsto \Phi_h$ ein Gruppen homomorphismus (wobei $\mathrm{Aut}(N)$ die Gruppe aller Automorphismen von N ist).

Sei $N \rtimes H := N \times_\Phi H := (N \times H, \star)$ mit

$$(n,h) \star (n',h') = (n\Phi_h(n'), hh').$$

Dann ist $N \rtimes H$ eine Gruppe mit neutralem Element (e_N, e_H) und Inverse $(n,h)^{-1} = (\Phi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$. □

Beweis. Es gilt $(e_N, e_H) \star (n,h) = (e_N \Phi_{e_H}(n), e_H h) = (\mathrm{Id}_N(n), h) = (n,h)$ und $(n,h) \star (e_N, e_H) = (n\Phi_h(e_N), he_H) = (n,h)$.

Es gilt $(n,h) \star (\Phi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) = (n\Phi_h(\Phi_{h^{-1}}(n^{-1})), hh^{-1}) = (n\Phi_{hh^{-1}}(n^{-1}), e_H) = (n\mathrm{Id}_N(n^{-1}), e_H) = (nn^{-1}, e_H) = (e_N, e_H)$. Es gilt auch $(\Phi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) \star (n,h) = (\Phi_{h^{-1}}(n^{-1})\Phi_{h^{-1}}(n), h^{-1}h) = (\Phi_{h^{-1}}(n^{-1}n), e_H) = (\Phi_{h^{-1}}(e_G), e_H) = (e_N, e_H)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}(n,h) \star ((n',h') \star (n'',h'')) &= (n,h) \star (n'\Phi_{h'}(n''), h'h'') \\ &= (n\Phi_h(n'\Phi_{h'}(n'')), hh'h'') \\ &= (n\Phi_h(n')\Phi_{hh'}(n''), hh'h'') \\ &= (n\Phi_h(n'), hh') \star (n'',h'') \\ &= ((n,h) \star (n',h')) \star (n'',h'')\end{aligned} \quad .$$

Daraus folgt, dass $N \rtimes H$ eine Gruppe ist. ∎

Definition 1.7.2 Seien N und H zwei Gruppen und sei $\Phi : H \to \mathrm{Aut}(N), h \mapsto \Phi_h$ ein Gruppen homomorphismus. Das heißt die Gruppe $N \rtimes H := N \times_\Phi H := (N \times H, \star)$ mit Produkt $(n,h) \star (n',h') = (n\Phi_h(n'), hh')$ **semidirektes Produkt von** N **und** H **bzg.** Φ.

Beispiel 1.7.3 Sei $\Phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ definiert durch $\Phi_h = \mathrm{Id}_N$ für alle $h \in H$. Dann gilt

$$(n,h) \star (n',h') = (n\Phi_h(n'), hh') = (n\mathrm{Id}_N(n'), hh') = (nn', hh')$$

und das semidirekte Produkt ist die Produktgruppe.

Lemma 1.7.4 Sei $G = N \rtimes H$ und seien $N' = \{(n, e_H) \mid n \in N\}$ und $H' = \{(e_N, h) \mid h \in H\}$.

1. Dann ist H' eine Untergruppe von G und $N' \triangleleft G$.

2. Es gibt isomorphismen $N \simeq N'$ und $H \simeq H'$ definiert durch $n \mapsto (n, e_H)$ und $h \mapsto (e_N, h)$.

3. Es gilt $N' \cap H' = \{e_G\}$ und $G = N'H'$. □

Beweis. 1. Die Abbildung $\pi : G \to H$ definiert durch $\pi(h)$ ist ein Gruppenhomomorphismus und $\mathrm{Ker}\pi = N'$ also $N' \triangleleft G$. Es gilt $e_G \in H'$ und $(e_N, h) \star (e_N, h') = (e_N, hh')$ also H' ist eine Untergruppe von G.

2. Man überprüft leicht, dass diese Abbildungen injektive Gruppenhomomorphismen sind. Per Defnition sind diese Abbildungen surjektiv.

3. Es gilt $N' \cap H' = \{(e_n, e_H)\} = \{e_G\}$ und $(n,h) = (n, e_H) \star (e_N, h)$ also $G = N'H'$. ■

Satz 1.7.5 Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe und $N \triangleleft G$.

1. Falls gilt $N \cap H = \{e_G\}$ und $G = NH$. Dann ist für $\Phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ definiert durch $\Phi_h(n) = hnh^{-1}$ die Abbildung

$$f : N \times_\Phi H \to G,\ (n,h) \mapsto nh$$

ein Isomorphismus.

2. Falls zusätzlich gilt $H \triangleleft G$, so wird der Isomorphismus zu $f : N \times H \to G$. □

Beweis. 1. Es gilt

$$f((n,h) \star (n',h')) = f(n\Phi_h(n'), hh') = nhn'h^{-1}hh' = nhn'h' = f(n,h)f(n',h').$$

Daraus folgt, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist. Da $G = N$ ist diese Abbildung surjektiv. Sei $(n,h) \in \mathrm{Ker}f$. Es gilt $nh = e_G$ also $n = h^{-1}$ und $n \in N \cap H$ also $n = e_G$. Daraus folgt $h = e_G$ und f ist injektiv also ein Isomorphismus.

2. Seien $h \in H$ und $n \in N$. Es gilt $N \ni n^{-1}(hnh^{-1}) = (n^{-1}hn)h^{-1} \in H$ also $n^{-1}hnh^{-1} = e_G$. Es folgt $hn = nh$ und $\Phi_h(n) = n$ und $N \rtimes H = N \times H$. ■

Beispiel 1.7.6 1. Sei $c = (231)$, sei $s = (213)$ und seien $N = A_3 = \{\mathrm{Id}, c, c^2\}$ und $H = \{\mathrm{Id}, s\}$. Da A_3 ein Normalteiler ist, sind $\mathrm{Int}_s : A_3 \to A_3$ und $\mathrm{Int}_{\mathrm{Id}} : A_3 \to A_3$ Gruppenautomorphismen und die Abbildung $\Phi : H \to \mathrm{Aut}(A_3)$, $\Phi_h = \mathrm{Int}_h$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

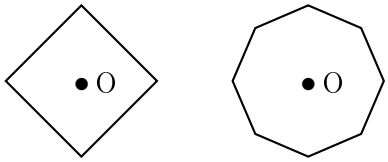
Dank dem obigen Satz zeigt man, dass die Abbildung

$$A_3 \rtimes H \to S_3,\ (n, h) \mapsto nh$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

2. Algemeiner gilt $S_n \simeq A_n \rtimes \{\pm 1\}$.

2. Diedergruppe. Sei R_n ein regelmäßiges Polygon. Zum Beispiel $R_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [0, n-1]\}$.



$n = 4$ $\qquad$ $n = 8$

Sei D_{2n} die Gruppe aller Isometrie die R_n erhalten. Man zeigt, dass D_{2n} genau $2n$ elemente hat. Sei O das Zentrum von R_n und seien $D_1, \cdots, D_n$ die Geraden die durch O und eine Ecke laufen oder die durch O und die Mitte einer Kante laufen. Sei R die Drehung um O von $\frac{2\pi}{n}$ und seien $S_1, \cdots, S_n$ die Spiegelungen an den Geraden $D_1, \cdots, D_n$. Dann gilt

$$D_{2n} = \{\mathrm{Id}, R, \cdots, R^n, S_1, \cdots, S_n\}.$$

Die Gruppe D_{2n} enthält $N = \{\mathrm{Id}, R, \cdots, R^n\}$ und man überprüft leicht, dass $N \triangleleft D_{2n}$. Sei $H = \{\mathrm{Id}, S_1\}$. Dann ist H eine Untergruppe von G. Dank dem obigen Satz zeigt man, dass die Abbildung

$$N \rtimes H \to G,\ (n, h) \mapsto nh$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

1.8 Operation einer Gruppe auf einer Menge

Definition 1.8.1 Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine **Operation von** G **auf** X ist eine Abbildung $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ mit den Eigenschaften:

1. Für alle $x \in X$ gilt $e_G \cdot x = x$.
2. Für alle $g, h \in G$ und alle $x \in X$ gilt $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Beispiel 1.8.2 1. **Die triviale Operation** $G \times X \to X$ definiert durch $g \cdot x = x$ für alle $g \in G$ und $x \in X$.

2. Die **Linkstranslation** $G \times G \to G$ definiert durch $g \cdot h = gh$ (hier ist $X = G$).

2. Die **Linkstranslation auf einem Quotient** $G \times G/H \to G/H$ definiert durch $g \cdot [g']_H = [gh]_H$ (hier ist $X = G/H$ wobei H eine Untergruppe ist).

3. Die **Konjugation** $G \times G \to G$ definiert durch $g \cdot h = ghg^{-1}$ (hier ist $X = G$).

4. $S_n \times [1, n] \to [1, n]$ definiert durch $\sigma \cdot i = \sigma(i)$.

4. $\mathrm{GL}_n(K) \times K^n \to K^n$ definiert durch $A \cdot v = Av$.

Lemma 1.8.3 Sei $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ eine Operation.

1. Dann ist die Abbildung $\Phi(g) : X \to X$ definiert durch $\Phi(g)(x) = g \cdot x$ eine Bijektion von X und die Abbildung

$$\Phi : G \to \mathrm{Bij}(X)$$

definiert durch $g \mapsto \Phi(g)$ ein Gruppenhomomorphismus.

2. Umgekehrt, sei $\Phi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $G \times X \to X$ definiert durch $(g, x) \mapsto g \cdot x = \Phi(g)(x)$ eine Operation. □

Beweis. 1. Wir zeigen, dass $\Phi(gh) = \Phi(g) \circ \Phi(h)$. Es gilt

$$\Phi(gh)(x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = \Phi(g)(h \cdot x) = \Phi(g)\left(\Phi(h)(x)\right) = \left(\Phi(g) \circ \Phi(h)\right)(x).$$

Daraus folgt, dass $\Phi(g) \circ \Phi(g^{-1}) = \mathrm{Id}_X = \Phi(g^{-1}) \circ \Phi(g)$ also ist $\Phi(g)$ bijektiv mit $\Phi(g)^{-1} = \Phi(g^{-1})$ und Φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

2. Es gilt $e_G \cdot x = \Phi(e_G)(x) = \mathrm{Id}_X(x) = x$ und $g \cdot (h \cdot x) = \Phi(g)(\Phi(h)(x)) = (\Phi(g) \circ \Phi(h))(x) = \Phi(gh)(x) = (gh) \cdot x$. ■

Definition 1.8.4 Sei $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ eine Operation von G auf X.

1. Die Operation heißt **transitiv**, falls es für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ gibt mit $g \cdot x = y$.

2. Eine Operation heißt **treu** falls $(g \cdot x = x$ für alle $x \in X) \Rightarrow (g = e_G)$.

3. Sei $x \in X$. Die Menge $G \cdot x = \{g \cdot x \in X \mid g \in G$ heißt **Orbit** oder **Bahn** von $x \in X$.

Man schreibt $X/G = \{G \cdot x | x \in X\}$ für die Menge aler Bahnen. Diese Menge heisst **Quotient von X nach G.**

4. Ein $x \in X$ heißt **Fixpunkt** falls $g \cdot x = x$ für alle $g \in G$. Die Menge aller Fixpunkte ist X^G geschrieben.

5. Für $x \in X$ heißt $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ der **Stabilisator von** x.

6. Allgemeiner heißt für $Y \subset X$ eine Teilmenge $G_Y = \{g \in G \mid g \cdot Y = Y\}$ der **Stabilisator von** Y.

Bemerkung 1.8.5 Die Operation $G \times X \to X$ ist genau dann treu, wenn der Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ (siehe Lemma 1.8.3) injektiv ist.

Beispiel 1.8.6 1. Sei $G \times G \to G$ die Linkstranslation. Dann ist die Operation transitiv und treu. Daraus folgt

Satz 1.8.7 (Satz von Cayley) Sei G eine Gruppe der Ordnung n. Dann ist G eine Untergruppe von S_n. □

Beweis. Sei $L : G \to \mathrm{Bij}(G) \simeq S_n$ definiert durch $g \mapsto (L_g : G \to G, h \mapsto gh)$. Wir zeigen, dass L injektiv ist also dass die Operation treu ist. Sei $g \in \mathrm{Ker}L$. Es gilt $L_g = \mathrm{Id}_G$ also $L_g(h) = h$ für alle $h \in G$. Daraus folgt $gh = h$ und $g = e_G$. ■

2. Sei $G \times G/H \to G/H$ die Linkstranslation auf dem Quotient G/H. Dann ist die Operation transitiv und G_{e_G} der Stabilisator des neutrales Elements ist H.

3. Sei $G \times G \to G$ die Konjugation. Sei $h \subset G$. Dann ist der Stabilisator von h der Zentralisator von h:

$$G_h = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\} = \{g \in G \mid gh = hg\} = Z_G(h).$$

4. Sei $X = \{H \subset G \mid H \text{ ist eine Untergruppe}\}$. Dann ist $G \times X \to X$ definiert durch $g \cdot H = gHg^{-1}$ eine Operation. Es gilt

$$G_H = \{g \in G \mid g \cdot H = H\} = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = N_G(H).$$

Es gilt auch

$$X^G = \{H \in X \mid gHg^{-1} = H \text{ für alle } g \in G\} = \{H \in X \mid H \triangleleft G\}.$$

Definition 1.8.8 Sei $G \times X \to X$ eine Operation. Wir definieren auf X die Relation $x \sim y \Leftrightarrow y \in G \cdot x$.

Proposition 1.8.9 Sei $G \times X \to X$ eine Operation.

1. Die Relation $x \sim y$ ist eine Äquivalenzrelation.

2. Die Äquivalenzklassen sind die Bahnen.

3. Sei $x \in X$. Die Abbildung $G/G_x \to G \cdot x$ definiert durch $[g] \mapsto g \cdot x$ ist wohl definiert und bijektiv.

Beweis. 1. Es gilt $x = e_G \cdot x$ also $x \sim x$ und $\sim$ ist reflexiv.

Seien $x, y \in X$ mit $x \sim y$. Dann gilt $y \in G \cdot x$ also gibt es ein $g \in G$ mit $y = g \cdot x$. Dann gilt $x = g^{-1} \cdot y$ und $x \in G \cdot y$ also $y \sim x$ und $\sim$ ist symmetrisch.

Seien $x, y, z \in X$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gibt es $g, g' \in G$ mit $y = g \cdot x$ und $z = g' \cdot y$. Daraus folgt $z = g'g \cdot x$ und $x \sim z$ also $\sim$ ist transitiv.

2. Sei $x \in X$. Die Äquivalenzklasse von x is $\{y \in X \mid x \sim y\} = \{y \in X \mid y \in G \cdot x\} = G \cdot x$.

3. Seien $g, g' \in G$ mit $[g] = [g']$. Dann gibt es ein $h \in G_x$ mit $g' = gh$. Daraus folgt $g' \cdot x = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x$ und die Abbildung ist wohl definiert. Per Definition einer Bahn ist diese Abbildung surjektiv. Seien $g, g' \in G$ mit $g \cdot x = g' \cdot x$. Dann gilt $x = (g^{-1}g') \cdot x$ und $g^{-1}g' = h \in G_x$. Daraus folgt $g' = gh$ und $[g] = [g']$. Die Abbildung ist injektiv. ∎

Korollar 1.8.10 (Bahnformel) Sei $G \times X \to X$ eine Operation mit G endlich. Es gilt

$$|G \cdot x| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

Beweis. Nach 3. im obigen Proposition gilt $|G/G_x| = |G \cdot x|$. Nach dem Satz von Lagrange gilt $|G/G_x| = [G : G_x] = |G|/|G_x|$. ∎

Satz 1.8.11 (Bahngleichung) Sei $G \times X \to X$ eine Operation mit X endlich. Dann gilt

$$|X| = \sum_{[x] \in X/G} |G \cdot x| = \sum_{[x] \in X/G} [G : G_x].$$

Beweis. Da die Bahnen die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation sind gilt

$$X = \coprod_{[x] \in X/G} G \cdot x.$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Korollar 1.8.12 Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe. Der kleinste Primteiler von $|H|$ sei großer gleich $[G : H]$. Dann ist $H \triangleleft G$

Beweis. Sei p der kleinste Primteiler von $|H|$ und sei $X = G/H$. Sei $H \times X \to X$ die Linksoperation: $h \cdot gH = hgH$. Sei $x \in X$. Nach der Bahnformel ist $|H \cdot x|$ ein Teiler von $|H|$ also $|H \cdot x| = 1$ oder $|H \cdot x| \geq p$. Nach der Bahngleichung gilt

$$p \geq [G : H] = |X| = \sum_{[x] \in X/H} |G \cdot x|.$$

Sei $x = [e_G] \in X$. Dann ist x ein Fixpunkt $|H \cdot x| = |\{x\}| = 1$. Daraus folgt

$$p - 1 \geq \sum_{[x] \in X/H,\ x \neq [e_G]} |G \cdot x|.$$

Da $|G \cdot x| = 1$ oder $|G \cdot x| \geq p$ muss $|G \cdot x| = 1$ für alle $x \in X$ gelten. Also für alle $[g] \in G/H$ gilt $[hg] = [g]$ für alle $h \in G$ *i.e.* $g^{-1}hg \in H$ für alle $g \in G$ und $h \in H$ *i.e.* $H \triangleleft G$. ∎

Beispiel 1.8.13 1. Wenn $[G : H]$ der kleinste Primteiler von $|G|$ ist, ist die Bedingung erfüllt.

2. Insbesondere wenn $[G : H] = 2$ ist die Bedigung erfüllt und $H \triangleleft G$.

Definition 1.8.14 Sei p eine Primzahl. Eine endliche Gruppe G heißt **p-Gruppe** falls $|G| = p^k$ eine Potenz von p ist.

Korollar 1.8.15 Sei G eine p-Gruppe. Dann gilt $|Z(G)| > 1$.

Beweis. Sei $|G| = p^k$. Sei $X = G$ und $G \times X \to X$ die Konjugation. Es gilt $X^G = Z(G)$: sei $z \in Z(G)$. Dann gilt $g \cdot z = gzg^{-1} = z$. Umgekehrt, sei $z \in X^G$. Dann gilt $g \cdot z = z$ für alle $g \in G$ also $gzg^{-1} = z$ für alle $g \in G$ *i.e.* $gz = zg$ für alle $g \in G$. Insbesondere gilt

$$z \in Z(G) \Leftrightarrow |G \cdot x| = 1.$$

Nach der Bahnformel folgt

$$z \in Z(G) \Leftrightarrow p \not| |G \cdot x|.$$

Nach der Bahngleichung gilt

$$p^k = |X| = \sum_{[x] \in X/H} |G \cdot x| = \sum_{[x] \in X/G,\ x \in Z(G)} |G \cdot x| + \sum_{[x] \in X/G,\ x \notin Z(G)} |G \cdot x|$$

also $p^k = |Z(G)| + \sum_{[x] \in X/G,\ x \notin Z(G)} |G \cdot x|$. Alle Terme in der Zweite Summe sind durch p teilbar also muss $|Z(G)|$ durch p teilbar sein. Daraus folgt $|Z(G)| > 1$. ∎

Satz 1.8.16 Sei p eine Primzahl und sei G eine Gruppe der Ordnung p^2. Dann gilt $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

Beweis. Fall 1: Es gebe $g \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) = p^2$. Dann gilt $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \simeq \langle g \rangle = G$.

Fall 2: Für alle $g \in G$ mit $g \neq e_G$ gilt $\mathrm{ord}(g) = p$. Sei $g \in G \setminus \{e_G\}$. Dann gilt $|\langle g \rangle| = p$ also es gibt $h \in G \setminus \langle g \rangle$. Sei $N = \langle g \rangle$ und $H = \langle h \rangle$. Dann $p = |N| = |H|$ der kleinste Primteiler von $|N$ und $|H|$ ist und $p \geq p = [G : N] = [G : H]$ gilt nach Korollar 1.8.12: $N \triangleleft G$ und $H \triangleleft G$. Der Durchschnitt $H \cap N$ ist eine echte Untergruppe von H da $h \in H \setminus N$. Also gilt $|H \cap N||p$ und $|H \cap N| < p$. Daraus folgt $|N \cap H| = 1$ und $N \cap H = \{e_G\}$. Da N und H normal sind gilt $\langle N, H \rangle = NH = HN$. Dies ist eine Untergruppe von G die $N \cup \{h\}$ enthält also $|NH| \geq p + 1$ und $|NH|$ teilt p^2. Daraus folgt $|NH| = p^2$ und $NH = G$. Nach dem Satz 1.7.5 folgt $G \simeq N \times H$ also $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. ∎

Bemerkung 1.8.17 Für Gruppen G der Ordnung $|G| = p^3$ ist die Klassifikation schon schwierieger: siehe Übungblatt 3 für den Fall $|G| = 8 = 2^3$. Die Gruppen der Ordnung 8 sind isomorph zu

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad D_8, \quad \mathbb{H}.$$

1.9 Symmetrische Gruppe

Definition 1.9.1 1. Ein Element $\sigma \in S_n$ heißt **r-Zykel** falls es paarweise verschiedene Elemente $x_1, \cdots, x_r \in [1,n]$ mit

$$\begin{aligned}&\sigma(x_k) = x_{k+1} \text{ für alle } k \in [1, r-1],\\ &\sigma(x_r) = x_1 \text{ und}\\ &\sigma(x) = x \text{ für alle } x \in [1,n] \setminus \{x_1, \cdots, x_r\}.\end{aligned}$$

2. Die Menge $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x_1, \cdots, x_r\}$ heißt **Träger des Zykels**. Die Zahl r ist die **Länge des Zykels**. Wir schreiben $[x_1, \cdots, x_r]$ für den Zykel der Länge r mit Träger $\{x_1, \cdots, x_r\}$.

3. Zwei Zykel σ, σ' heißen **fremd** falls $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathrm{Supp}(\sigma') = \emptyset$.

Bemerkung 1.9.2 Eine Transposition ist ein 2-Zykel.

Satz 1.9.3 1. Fremde Zykeln kommutieren.

2. Jedes $\gamma \in S_n$ ist ein Produkt fremder Zykel. Diese sind eindeutig bis auf Reihenfolge. □

Beweis. 1. Seien σ, σ' fremde Zykel und sei $x \in [1,n]$. Es gilt

$$\sigma(\sigma'(x)) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{für } x \notin \mathrm{Supp}(\sigma) \cup \mathrm{Supp}(\sigma') \\ \sigma(x) & \text{für } x \in \mathrm{Supp}(\sigma) \setminus \mathrm{Supp}(\sigma') \\ \sigma'(x) & \text{für } x \notin \mathrm{Supp}(\sigma') \setminus \mathrm{Supp}(\sigma) \end{array} \right\} = \sigma'(\sigma(x)).$$

2. Sei $H = \langle \gamma \rangle$ die von γ erzeugte Untergruppe. Wir lassen H operieren auf $[1,n]$ durch $\gamma^n \cdot x = \gamma^n(x)$. Seien B eine Bahn, sei $r = |B|$ und sei $x_1 \in B$. Es gilt

$$B = \{x_1, x_2 = \gamma(x_1), \cdots, x_r = \gamma^{r-1}(x_1)\}.$$

Sei $\sigma_B = [x_1, \cdots, x_r]$. Es gilt

$$\gamma = \prod_{B \in [1,n]/H} \sigma_B.$$

Umgekehrt zerlegt jede Faktorisierung $\gamma = \prod_k \sigma_k$ die Menge X in Bahnen gegeben durch die Träger von σ_k. Diese Bahnen und also die Zerlegung ist bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt. ■

Beispiel 1.9.4 Sei $\gamma = (36451872) \in S_8$. Die Bahnen von γ sind $\{1,2,4,5\}$, $\{2,6,8\}$ und $\{7\}$. Es gilt also

$$\gamma = [1345][268][7] = [1345][268].$$

Korollar 1.9.5 Sei $\gamma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ die Zerlegung von γ als Produkt fremder Zykel und sei $r_i = \mathrm{ord}(\sigma_i)$. Dann gilt $\mathrm{ord}(\gamma = \mathrm{kgV}(r_1, \cdots, r_k)$.

Beweis. Seo $d = \mathrm{kgV}(r_1, \cdots, r_k)$. Es gilt $\gamma^d = \sigma_1^d \cdots \sigma_k^d = \mathrm{Id}$ also $\mathrm{ord}(\gamma)|d$. Umgekehrt für a mit $\gamma^a = \mathrm{Id}$ gilt $\mathrm{Id} = \gamma^a = \sigma_1^a \cdots \sigma_k^a$ und da die Träger dijunkt sind gilt $\mathfrak{g}_i^a = \mathrm{Id}$ für alle $i \in [1, k]$ also $r_i | a$. Daraus folgt $\mathrm{kgV}(r_1, \cdots, r_k)|a$. ∎

Lemma 1.9.6 (Konjugationsprinzip) Sei $\sigma = [x_1, \cdots, x_r]$ ein r-Zykel und sei $\gamma \in S_n$. Dann gilt

$$\gamma\sigma\gamma^{-1} = [\gamma(x_1), \cdots, \gamma(x_r)].$$

Beweis. Siehe Übungsblatt 4. ∎

Korollar 1.9.7 Sei $n \geq 0$. Es gilt $S_n = \langle [1,2], [1,2,\cdots,n] \rangle$.

Beweis. Sei $H = \langle [1,2], [1,2,\cdots,n] \rangle$. Sei $\sigma = [1,2,\cdots,n]$. Es gilt $H \ni \sigma^k[1,2]\sigma^{-k} = [\sigma^k(1), \sigma^k(2)] = [k+1, k+2]$. Da die einfache Transpositionen $[i, i+1]$ die Gruppe S_n erzeugen, gilt $H = S_n$. ∎

Definition 1.9.8 Sei $k \geq 0$. Eine Operation $G \times X \to X$ heißt **k-transitiv** falls für $x_1, \cdots x_k \in X$ paarweise verschiedene Elemente und $y_1, \cdots y_k \in X$ paarweise verschiedene Elemente es ein $g \in G$ gibt mit

$$g \cdot x_i = y_i \text{ für alle } i \in [1, k].$$

Beispiel 1.9.9 Sei $S_n \times [1,n] \to [1,n]$ die Operation $\gamma \cdot x = \gamma(x)$. Dann ist diese Operation n-transitiv.

Lemma 1.9.10 Sei $A_n \times [1,n] \to [1,n]$ die Operation gegeben durch $\gamma \cdot x = \gamma(x)$. Dann ist diese Operation $(n-2)$-transitiv. □

Beweis. Seien $x_1, \cdots x_{n-2} \in [1,n]$ paarweise verschieden und $y_1, \cdots y_{n-2} \in [1,n]$ paarweise verschieden. Seien $x_{n-1}, x_n, y_{n-1}, y_n$ so, dass

$$\{x_1, \cdots, x_n\} = [1,n] = \{y_1, \cdots, y_n\}.$$

Da S_n n-transitiv operiert gibt es $\gamma \in S_n$ mit $\gamma(x_i) = y_i$ für alle $i \in [1,n]$. Fall $\gamma \in A_n$ sind wir fertig. Sonst, sei $\gamma' = \gamma \circ [x_{n-1}, x_n]$. Dann gilt $\gamma' \in A_n$ und $\gamma(x_i) = y_i$ für alle $i \in [1, n-2]$.

mente es ein $g \in G$ gibt mit

$$g \cdot x_i = y_i \text{ für alle } i \in [1, k].$$

Satz 1.9.11 1. In S_n sind alle r-Zykel sind konjugiert.

2. Für $n \geq 5$ sind alle 3-Zykel konjugiert in A_n.

3. Jedes Element in A_n ist ein Produkt gerader Anzahl von Transpositionen.

4. Ein r-Zyklus ist genau dann in A_n, wenn r ungerade ist.

5. Die Menge aller 3-Zykel erzeugt A_n. □

Beweis. 1. Seien $\sigma = [x_1, \cdots, x_r]$ und $\sigma' = [y_1, \cdots, y_r]$ zwei r-Zykel. Da S_n n-transitiv operiert, gibt es $\gamma \in S_n$ mit $\gamma(x_i) = y_i$ für alle $i \in [1, r]$. Daraus folgt $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \sigma'$.

2. Sei $\sigma = [x_1, x_2, x_3]$ und $\sigma' = [y_1, y_2, y_3]$. Da $n \geq 5$ gilt $n - 2 \geq 3$. Da A_n $n-2$-transitiv operiert gibt es $\gamma \in A_n$ mit $\gamma(x_i) = y_i$ für alle $i \in [1, 3]$. Daraus folgt $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \sigma'$.

3. Jede Permutation ist ein Produkt von Transpositionen und per Definition von A_n sind Element in A_n Produkt gerader Anzahl von Transpositionen.

4. Sei $\sigma = [x_1, \cdots, x_r]$. Es gilt $\sigma = [x_1, x_2][x_2, x_3] \cdots [x_{r-1}, x_r]$ also ist σ ein Produkt von $r - 1$ Transpositionen und es gilt $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$.

4. Sei $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ oder $[x_1, x_2][x_2, x_3]$ ein Produkt von 2 Transpositionen mit x_1, x_2, x_3, x_4 paarweise verschieden. Es gilt

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] = [x_1, x_3, x_2][x_1, x_3, x_4] \text{ und } [x_1, x_2][x_2, x_3] = [x_1, x_2, x_3]$$

und daraus folgt, dass alle Element in A_n Produkte von 3-Zykel sind. ■

Korollar 1.9.12 Sei $n \geq 2$.

1. Es gilt $D(S_n) = A_n$.

2. Es gilt

$$D(A_n) = \begin{cases} \{\mathrm{Id}\} & \text{für } n = 2, 3 \\ V_4 & \text{für } n = 4 \\ A_n & \text{für } n \geq 5 \end{cases}$$

wobei $V_4 = \{\mathrm{Id}, [12][34], [13][24], [14][23]\}$.

Beweis. 1. Da $S_n/A_n \simeq \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abelsch ist, gilt $D(S_n) \subset A_n$ (Lemma 1.6.2). Für $n = 2$ gilt $A_n = \{\mathrm{Id}\}$ also $A_n \subset D(S_n)$. Für $n \geq 3$ gilt

$$[a, b, c] = [b, c][a, b][b, c][a, b] = [b, c][a, b][b, c]^{-1}[a, b]^{-1} = [[b, c], [a, b]] \in D(S_n).$$

Da A_n von den 3-Zykeln erzeugt ist, gilt $A_n \subset D(S_n)$.

2. Für $n = 2, 3$ ist A_n abelsch also gilt $D(A_n) = \{\mathrm{Id}\}$. Für $n = 4$ gilt $V_4 \triangleleft A_4$ (Siehe Übungsblatt 3) und $A_4/V_4 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist abelsch. Nach Lemma 1.6.2 gilt $D(A_4) \subset V_4$. Umgekehrt gilt für $a, b, c, d \in [1, 4]$ paarweise verschieden:

$$\begin{aligned}[a, b][c, d] &= [a, b, c][a, b, d][a, c, b][a, d, b] \\ &= [a, b, c][a, b, d][a, b, c]^{-1}[a, b, d]^{-1} = [[a, b, c], [a, b, d]] \in D(A_4).\end{aligned}$$

Daraus folgt $V_4 \subset D(A_4)$.

Sei $n \geq 5$, seien $a, b, c \in [1, n]$ paarweise verschieden und seien $x, y \in [1, n] \setminus \{a, b, c\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}[a, b, c] &= [a, b, x][a, c, y][a, x, b][a, y, c] \\ &= [a, b, x][a, c, y][a, b, x]^{-1}[a, c, y]^{-1} = [[a, b, x], [a, c, y]] \in D(A_n).\end{aligned}$$

Es folgt $A_n \subset D(A_n)$ und da $D(A_n) \subset A_n$ ist die Behauptung bewiesen. ∎

Man kann eingentlich das folgende Resultat zeigen (Siehe Übungsblatt 4 für den Fall $n = 5$).

Theorem 1.9.13 Die Gruppe A_n ist einfach für $n \geq 5$. □

1.10 Sylow Sätze

Definition 1.10.1 Sei G eine Gruppe und sei p ein Primteiler von $|G|$ so, dass

$$|G| = p^\alpha m \text{ wobei } p \nmid m.$$

Eine Untergruppe von G der Ordnung p^α heißt **p-Sylowuntergruppe**.

Bemerkung 1.10.2 Sei G ine Gruppe und p eine Primzahl. Eine Untergruppe H ist genau dann eine p-Sylowuntergruppe, wenn H eine p-Gruppe ist und $[G : H]$ und p teilerfremd sind.

Beispiel 1.10.3 Sei p eine Primzahl, sei $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Es gilt

$$|G| = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}) = p^{\frac{n(n-1)}{2}}(p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \cdots (p - 1).$$

Um es zu zeigen, zählen wir die Basen von $\mathbb{F}_p^n$ ab. In $\mathbb{F}_p^n$ gibt es p^n Elemente. Eine Basis ist der Form $(v_1, \cdots, v_n)$. Der erste Basisvektor v_1 kann beliebig in $\mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$ gewählt werden also $p^n - 1$ Möglichkeiten. Der zweite Basisvektor v_2 kann beliebig in $\mathbb{F}_p^n \setminus \langle v_1 \rangle$ gewählt werden also $p^n - p$ Möglichkeiten. Nach Induktion kann v_{k+1} kann beliebig in $\mathbb{F}_p^n \setminus \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ gewählt werden also $p^n - p^k$ Möglichkeiten.

Sei H die Untergruppe von G, welche von oberen Dreieckmatrizen mit 1 auf der Diagonal besteht. Dann gilt

$$|H| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

und H ist eine Sylowuntergruppe von G.

Lemma 1.10.4 Sei G eine Gruppe mit $|G| = n = p^\alpha m$ mit $p \not| m$. Sei H eine Untergruppe von G und sei S eine p-Sylowuntergruppe von G. Dann gibt es ein $g \in G$ so, dass $gSg^{-1} \cap H$ eine p-Sylowuntergruppe von H ist. Insbesondere hat H auch eine p-Sylowuntergruppe. □

Beweis. Sei $X = G/S$. Sei $G \times X \to X$ die Linkstranslation auf dem Quotient $X = G/S$ definiert durch $g \cdot [g'] = [gg']$. Der Stabilisator von $[g] = gS$ ist gSg^{-1} (Siehe Übungsblatt 4).

Per Einschränkung Operiert H auf X durch $H \times X \to X$ mit $h \cdot [g'] = [hg']$. Der Stabilisator $H_{[g]}$ von $[g] = gS$ ist $gSg^{-1} \cap H$ (Siehe Übungsblatt 4).

Die Gruppen $gSg^{-1} \cap H$ sind p-Gruppen, da $|gSg^{-1} \cap H|$ die Ordnung $|S| = p^\alpha$ teilt. Wir zeigen, dass es ein g gibt so, dass $|H/(gSg^{-1} \cap H)| = [H : gSg^{-1} \cap H]$ und p teilerfremd sind.

Falls es nicht der Fall ist gilt nach der Bahnformel $|H \cdot [g]| = |H|/|H_{[g]}| = |H/(gSg^{-1} \cap H)| = [H : gSg^{-1} \cap H]$ und teilt p die Zahl $|H \cdot x|$ für alle $x = [g] \in X$. Nach der Bahngleichung

$$m = |G/S| = |X| = \sum_{[x] \in X/H} |H \cdot x|$$

würde m durch p teilbar sein. Ein Widerspruch. ■

Satz 1.10.5 (Erster Sylowsatz) Sei G eine Gruppe und p ein Primteiler von $|G|$. Dann hat G mindestens eine p-Sylowuntergruppe. □

Beweis. Sei G eine Gruppe und p ein Primteiler von $n = |G|$. Nach dem Satz von Cayley ist G isomorph zu einer Untergruppe von S_n. Die Gruppe S_n ist aber eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ für jeden Körper K dank der Abbildung

$$\sigma \mapsto P_\sigma$$

wobei P_σ die Permutationsmatrix ist: $P_\sigma = (a_{i,j})_{i,j \in [1,n]}$ mit $a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$. Also für $K = \mathbb{F}_p$ ist G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Da $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ eine p-Sylowuntergruppe hat, hat G auch eine p-Sylowuntergruppe nach dem obigen Lemma. ■

Korollar 1.10.6 (Satz von Cauchy) Sei G eine Gruppe und p ein Primteiler von p. Dann gibt es ein Element der Ordnung p.

Beweis. Sei $|G| = p^\alpha m$ mit $p \not| m$ und sei S eine p-Sylowuntergruppe von G. Sei $g \in S \setminus \{e_G\}$. Dann gilt $\mathrm{ord}(g) \neq 0$ und $\mathrm{ord}(g) | p^\alpha$ also $\mathrm{ord}(g) = p^k$ für $k \geq 1$. Dann gilt $\mathrm{ord}(g^{p^{k-1}}) = \frac{p^k}{\mathrm{ggT}(p^k, p^{k-1})} = \frac{p^k}{p^{k-1}} = p$. ■

Korollar 1.10.7 Eine Gruppe G ist genau dann eine p-Gruppe, wenn $\mathrm{ord}(g)$ eine Potenz von p ist für jedes $g \in G$.

Beweis. Sei G eine p-Gruppe. Nach dem Satz von Lagrange ist die Ordnung jedes Element einen Teiler von $|G|$ also eine Potenz von p.

Umgekehrt, sei G eine Gruppe die keine p-Gruppe ist. Dann gibt es einen Primteiler q von $|G|$ mit $p \neq q$ und G hat ein Element der Ordnung q. ∎

Korollar 1.10.8 Sei p eine Primzal und G eine Untergruppe von S_p so, dass p ein Teiler von $|G|$ ist und G eine Transposition enthält. Dann gilt $G = S_p$.

Beweis. Es gilt $|S_p| = p! = pm$ mit $p \not| m$. Da p die Ordnung $|G|$ teilt gilt $|G| = pm'$ mit $p \not| m'$. Sei $\sigma \in G$ der Ordnung p. Wir zeigen, dass σ ein p-Zykel ist. Sei $\sigma = c_1 \cdots c_k$ die Zerlegung von σ in Produkt von r-Zykeln mit disjunkten Träger. Es gilt $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(c_1), \cdots, \mathrm{ord}(c_k))$ nach Korollar 1.9.5. Insberonde muss p die Ordnung $\mathrm{ord}(c_i)$ für ein i teilen. Für so ein i gilt $\mathrm{ord}(c_i) = p$ und c_i ist ein p-Zykel. Also enthält G eine Transposition τ und ein p-Zykel σ'.

Sei $\tau = [a, b]$. Es gibt ein $\gamma \in S_n$ so, dass $\gamma\tau\gamma^{-1} = [1, 2]$ (wähle γ mit $\gamma(a) = 1$ und $\gamma(b) = 2$). Es genügt zu zeigen, dass $G' = \gamma G\gamma^{-1} = S_n$ und es gilt $\gamma G\gamma^{-1} \ni [1, 2], \sigma = \gamma\sigma'\gamma^{-1}$ wobei σ ein p-Zykel ist. Da σ ein p-Zykel ist gibt es ein k mit $\sigma^k(1) = 2$. Außerdem gilt $\sigma^k \in \langle\sigma\rangle \setminus \{\mathrm{Id}\}$ also $1 < \mathrm{ord}(\sigma^k) | \mathrm{ord}(\sigma) = p$. Es gilt also $\mathrm{ord}(\sigma^k) = p$ und $\sigma^k = [1, 2, x_3, \cdots, x_p]$. Sei $\delta \in S_n$ mit $\delta(1) = 1$, $\delta(2) = 2$ und $\delta(x_i) = i$ für alle $i \geq 3$. Dann gilt $\delta[1, 2]\delta^{-1} = [1, 2]$ und $\delta\sigma^k\delta^{-1} = [1, 2, \cdots, p]$. Die Gruppe $G'' = \delta G'\delta^{-1}$ enthält $[1, 2]$ und $[1, 2, \cdots, p]$ also nach Korollar 1.9.7 gilt $G'' = S_p$. Daraus folgt $G' = S_p$ und $G = S_p$. ∎

Korollar 1.10.9 Seien p und q Primzahlen und G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p^k q^l$ mit $k, l \geq 1$ so, dass $q > p^k$. Dann gilt $G \simeq K_q \rtimes K_p$ wobei K_p und K_q beliebege p- und q-Sylowuntergruppen sind.

Beweis. Nach Korollar 1.8.12 gilt $K_q \triangleleft G$. Sei $H = K_p \cap K_q$. Dann ist $|H|$ ein Teiler von $p^k = |K_p|$ und $q^l = |K_q|$ also $|H| = 1$ und $K_q \cap K_p = \{e_G\}$. Daraus folgt, dass die Abbildung $K_q \times K_p \to G$, $(a, b) \mapsto ab$ injektiv ist. Da $|K_p \times K_q| = p^k q^l = |G|$, folgt, dass diese Abbildung eine Bijektion ist also $G = K_q K_p$. Nach dem Satz 1.7.5 folgt $G \simeq K_q \rtimes K_p$. ∎

Satz 1.10.10 (Zweiter Sylowsatz) Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p^\alpha m$ mit $p \not| m$.

1. Sei H eine Untergruppe von G die eine p-Gruppe ist. Dann gibt es S eine p-Sylowuntergruppe von G mit $H \subset S$.

Sei k die Anzahl aller p-Sylowuntergruppen

2. Alle p-Sylowuntergruppe sind zueinander konjuguiert.

3. Es gilt $k || G|$.

4. Es gilt $k \equiv 1 \pmod{p}$ (also k teilt m). □

Korollar 1.10.11 (Vom Satz 1.10.10.2) Sei G eine Gruppe und S ein p-Sylowuntergruppe. Dann gilt

$$S \triangleleft G \Leftrightarrow S \text{ ist der einzige } p\text{-Sylowuntergruppe von } G \Leftrightarrow k = 1.$$

Beweis. Die letze äquivalenz ist klar da k die Anzahl von p-Sylowuntergruppen ist.

($\Rightarrow$). Sei S eine p-Sylowuntergruppe mit $S \triangleleft G$. Sei T eine weitere p-Sylowuntergruppe. Nach Satz 1.10.10.2 gibt es ein $g \in G$ mit $gSg^{-1} = T$. Da aber $S \triangleleft G$, folgt $S = gSg^{-1} = T$.

($\Leftarrow$). Sei S eine p-Sylowuntergruppe und sei $g \in G$. Dann ist gSg^{-1} auch eine p-Sylowuntergruppe. Daraus folgt nach Annahme, dass $gSg^{-1} = S$ und $S \triangleleft G$. ∎

Beispiel 1.10.12 Sei G eine Gruppe der Ordnung 255. Dann ist G nicht einfach. Tatsächlich gilt $255 = 3 \times 5 \times 17$. Sei $p = 17$. Es gilt $|G| = p^\alpha m$ mit $\alpha = 1$ und $m = 3 \times 5 = 15$. Sei k die Anzahl von p-Sylowuntergruppen. Es gilt $k \equiv 1 \pmod p$ und $k|m$. Die Teiler von 15 sind 1, 3, 5 und 15. Da $3, 5, 15 \not\equiv 1 \pmod p$ gilt $k = 1$. Also ist K_{17} die einzige 17-Sylowuntergruppe und also ein Normalteiler. Es folgt, dass G nicht einfach ist.

Beweis vom Satz 1.10.10. Wir zeigen 1. und 2. Sei H eine Untergruppe von G die eine p-Gruppe ist und sei S eine p-Sylowuntergruppe. Nach Lemma 1.10.4 gibt es ein $g \in G$ so, dass $gSg^{-1} \cap H$ eine p-Sylowuntergruppe von H ist. Da H eine p-Gruppe ist, ist eine p-Sylowuntergruppe die ganze Gruppe also $gSg^{-1} \cap H = H$ *i.e.* $H \subset gSg^{-1}$. Die Untergruppe gSg^{-1} hat Ordnung $|S| = p^\alpha$ und ist also eine p-Sylowuntergruppe. Daraus folgt 1.

Falls H eine pSylowuntergruppe ist gilt $H \subset gSg^{-1}$ und $|H| = p^\alpha = |gSg^{-1}|$ und es folgt $H = gSg^{-1}$. Dies zeigt 2.

3. Wir betrachten $X = \{p\text{-Sylowuntergruppen}\}$ und die Operation $G \times X \to X$ definiert durch $g \cdot S = gSg^{-1}$. Nach 2. ist diese Operation Transitiv also gilt $G \cdot S = X$. Nach der Bahnformel folgt, dass $k = |X| = |G \cdot S|$ ein teiler von $|G|$ ist.

4. Sei S eine p-Sylowuntergruppe. Wir betrachten die Einschränkungen der obigen Operation auf S *i.e.* $S \times X \to X$ definiert durch $s \cdot T = sTs^{-1}$. Sei $S \cdot T$ eine Bahn dieser Operation. Nach der Bahnformel teilt $|S \cdot T|$ die Ordnung $|S|$ also gilt

$$|S \cdot T| = \begin{cases} 1 & \text{für } S \cdot T = \{T\} \text{ } i.e. \text{ } T \text{ Fixpunkt oder} \\ pa & \text{für ein } a \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Sei also X^S die Fixpunkte. Es gilt nach der Bahngleichung:

$$|X| = \sum_{[x] \in X/S} |S \cdot x| = \sum_{x \in X^S} |S \cdot x| + \sum_{[x] \in X/S, x \notin X^S} |S \cdot x| = |X^S| + pb.$$

Also gilt $k = |X| \equiv |X^S| \pmod p$. Es genügt zu zeigen, dass $X^S = \{S\}$ also $|X^S| = 1$. Sei $T \in X^S$. Also ist T eine p-Sylowuntergruppe mit $sTs^{-1} = T$ für alle $s \in S$. Sei

$H = \langle S, T\rangle$. Dann sind S und T p-Sylowuntergruppe von H (beide sind schon p-Sylowuntergruppe von G). Außerdem gilt $T \subset N_H(T)$ und weil $sTs^{-1} = T$ für alle $s \in S$ gilt auch $S \subset N_H(T)$. Also gilt $H = \langle S, T\rangle \subset N_H(T)$. Daraus folgt $H = N_H(T)$ *i.e.* $T \lhd H$. Nach Korollar 1.10.11 hat H genau eine p-Sylowuntergruppe. Es folgt $S = T$. ∎

Korollar 1.10.13 (Primärzerlegung abelscher Gruppen) Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Dann ist für jeder Primteiler p von G die p-Sylowuntergruppe K_p von G eindeutig durch

$$K_p = \{g \in G \mid \text{ord}(g) \text{ ist Potenz von } p\}$$

gegeben und es gilt

$$G = \prod_{p \text{ Primteiler von } |G|} K_p.$$

Beweis. Sei K_p eine p-Sylowuntergruppe. Da G abelsch ist K_p ein Normalteiler also ist K_p die einzige p-Sylowuntergruppe. Da $|K_p|$ eine Potenz von p ist gilt $K_p \subset \{g \in G \mid \text{ord}(g) \text{ ist Potenz von } p\}$. Umgekehrt, sei $g \in G$ so, dass ord(g) eine Potenz von p ist. Dann ist $\langle g\rangle$ eine p-Gruppe und also in einer p-Sylowuntergruppe enthalten. Es folgt $g \in K_p$ da K_p die einzige p-Sylowuntergruppe ist.

Seien $p_1, \cdots, p_k$ die Primteiler von $|G|$ und sei $f : \prod_{i=1}^k K_{p_i} \to G$ definiert durch $f(x_1, \cdots, x_k) = x_1 \cdots x_k$. Da G kommutativ ist ist f ein Gruppenhomomorphismus. Sei $(x_1, \cdots, x_k) \in \text{Ker} f$. Dann gilt $x_1 x_2 \cdots x_k = e_G$. Sei ord$(x_i) = p_i^{\alpha_i}$. Es folgt

$$e_G = (x_1 \cdots x_k)^{p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}} = x_1^{p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}}.$$

Da $\text{ggT}(p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = 1$ gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ap_1^{\alpha_1} + bp_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = 1$. Es folgt

$$x_1 = x_1^{ap_1^{\alpha_1} + bp_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}} = e_G.$$

Analog gilt $x_i = e_G$ für alle i und f ist injektiv. Sei

$$|G| = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}.$$

Es gilt $|K_{p_i}| = p_i^{\beta_i}$ und $|\prod_{i=1}^k K_{p_i}| = |G|$. Daraus folgt, dass f bijektiv ist also ein Isomorphismus. ∎

Beispiel 1.10.14 Sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung $|G| = p_1 \cdots p_k$. Dann gilt

$$G \simeq \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \cdots \mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}.$$

Man kann sogar zeigen:

Theorem 1.10.15 Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Dann gibt es Zahlen $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{N}$ mit

$$G \simeq \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}.$$

1.11 Auflösbare Gruppen

Definition 1.11.1 Sei G eine Gruppe. Die **k-te derivierte Untergruppe** $D^k(G)$ ist definiert per Induktion durch

$$D^0(G) = G,\ D^1(G) = D(G) \text{ und } D^{k+1}(G) = D(D^k(G)).$$

Beispiel 1.11.2 1. Für $n \geq 5$ gilt $D^0(S_n) = S_n$, $D^1(S_n) = D(S_n) = A_n$, $D^2(S_n) = D(D(S_n)) = D(A_n) = A_n$ und per Induktion $D^k(S_n) = A_n$ für alle $k \geq 1$.

2. Für $n = 4$ gilt $D^0(S_4) = S_4$, $D^1(S_4) = A_4$, $D^2(S_4) = D(A_4) = V_4$, $D^3(S_4) = D(V_4) = \{\mathrm{Id}\}$ und $D^k(S_4) = \{\mathrm{Id}\}$ für alle $k \geq 3$.

Bemerkung 1.11.3 Sei G eine Gruppe. Es gilt

$$G = D^0(G) \triangleright D^1(G) \triangleright \cdots \triangleright D^k(G) \triangleright D^{k+1}(G) \triangleright \cdots$$

und $D^k(G)/D^{k+1}(G)$ ist abelsch.

Definition 1.11.4 Eine Gruppe G heißt **auflösbar** wenn es eine Folge von Untergruppen $(G_i)_{i\in[1,m]}$ gibt mit

- $G_0 = G$ und $G_m = \{e_G\}$,
- $G_{i+1} \triangleleft G_i$ und
- G_i/G_{i+1} ist abelsch.

Beispiel 1.11.5 1. Sei G abelsch, dann ist G auflösbar mit $G_1 = \{e_G\} \triangleleft G_1 = G$.

2. Die Gruppen S_n und A_n sind für $n \leq 4$ auflösbar mit den Folgen

$$\{\mathrm{Id}\} = A_1 = S_1,\ \ \{\mathrm{Id}\} = A_2 \triangleleft S_2,\ \ \{\mathrm{Id}\} \triangleleft A_3 \triangleleft S_3 \text{ und } \{\mathrm{Id}\} \triangleleft V_4 \triangleleft A_4 \triangleleft S_4.$$

Satz 1.11.6 Eine Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn es ein m gibt mit $D^m(G) = \{e_G\}$. □

Beweis. ($\Leftarrow$). Sei $G_i = D^i(G)$. Dann ist G_i eine Folge von Untergruppen, die die Definition der Auflösbarkeit erfüllt.

($\Rightarrow$). Sei $(G_i)_{i\in[1,m]}$ eine Folge von Untergruppen mit $G_0 = G$, $G_r = \{e_G\}$, $G_{i+1} \triangleleft G_i$ und G_i/G_{i+1} ist abelsch. Wir zeigen, dass $D^i(G) \subset G_i$ per Induktion nach i. Daraus folgt, dass $D^m(G) \subset G_m = \{e_G\}$ also $D^m(G) = \{e_G\}$.

Es gilt $D^0(G) = G = G_0$. Angenommen gilt $D^i(G) \subset G_i$. Da G_i/G_{i+1} abelsch ist gilt $D(G_i) \subset G_{i+1}$. Daraus folgt

$$D^{i+1}(G) = D(D^i(G)) \subset D(G_i) \subset G_{i+1}.$$

Korollar 1.11.7 Die Gruppen S_n und A_n sind für $n \geq 5$ nicht auflösbar.

Beweis. Es gilt $D^k(S_n) = D^k(A_n) = A_n$ für $k \geq 2$ und $n \geq 5$. ∎

Satz 1.11.8 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und sei H eine Untergruppe von G.

1. Es gilt $f(D(H)) = D(f(H))$.

2. Es gilt $f(D^k(G)) \subset D^k(G')$ für alle k.

3. Falls f surjektiv ist, gilt $f(D^k(G)) = D^k(G')$ für alle k. □

Beweis. 1. Folgt aus $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

2. Per Induktion nach k. Es gilt $f(D^0(G)) = f(G) \subset G' = D^0(G')$. Angenommen gilt $f(D^k(G)) \subset D^k(G')$. Dann gilt nach 1. $f(D^{k+1}(G)) = f(D(D^k(G))) = D(f(D^k(G))) \subset D(D^k(G')) = D^{k+1}(G)$.

3. Per Induktion nach k. Es gilt $f(D^0(G)) = f(G) = G' = D^0(G')$. Angenommen gilt $f(D^k(G)) = D^k(G')$. Dann gilt nach 1. $f(D^{k+1}(G)) = f(D(D^k(G))) = D(f(D^k(G))) = D(D^k(G')) = D^{k+1}(G)$. ∎

Korollar 1.11.9 Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe und N ein Normalteiler.

1. Falls G auflösbar ist gilt H, N und G/N sind auflösbar.

2. Die Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn N und G/N auflösbar sind.

Beweis. 1. Sei m mit $D^m(G) = \{e_G\}$. Es gilt $D^m(H) \subset D^m(G)$ also ist H auflösbar. Das gleiche gilt für N. Nach dem obigen Satz mit $f : G \to G/N$ die kanonische Projektion gilt $f(D^m(G)) = D^m(G/N)$ also $D^m(G/N) = \{e_{G/N}\}$.

2. ($\Rightarrow$). Folgt aus 1.

($\Leftarrow$). Seien m und r mit $D^m(N) = \{e_G\}$ und $D^r(G/N) = \{e_{G/N}\}$. Sei $f : G \to G/N$ die kanonische Projektion. Nach dem obigen Satz gilt $f(D^r(G)) = D^r(G/N) = \{e_{G/N}\}$. Also gilt $D^r(G) \subset \mathrm{Ker} f = N$. Daraus folgt $D^{m+r}(G) = D^m(D^r(G)) \subset D^m(N) = \{e_G\}$. ∎

Korollar 1.11.10 Seien $G_1, \cdots, G_r$, H und N Gruppen.

1. Das Produkt $G_1 \times \cdots \times G_r$ ist genau dann auflösbar, wenn G_i für alle $i \in [1, r]$ auflösbar ist.

2. Das semidirekte Produkt $N \rtimes H$ ist genau dann auflösbar, wenn N und H auflösbar sind.

Beweis. Siehe Übungsblatt 5. ∎

Korollar 1.11.11 Jede p-Gruppe ist auflösbar.

Beweis. Siehe Übungsblatt 5. ∎

Satz 1.11.12 Sei G endlich auflösbar. Jede Folge von Untergruppen $(G_i)_{i\in[1,r]}$ mit $G_0 = G$, $G_r = \{e_G\}$, $G_{i+1} \triangleleft G_i$ und G_i/G_{i+1} abelsch lässt sich verfeinern in einer Folge von Untergruppen $(G'_i)_{i\in[1,r]}$ mit

- $G'_0 = G$ und $G'_r = \{e_G\}$,
- $G'_{i+1} \triangleleft G'_i$ und
- $G'_i/G'_{i+1} \simeq \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p_i. □

Beweis. Sei $(G_i)_{i\in[1,r]}$ eine Folge die sich nicht verfeinern lässt aber mit ein k so, dass G_k/G_{k+1} nicht von Primzahlordnung. Sei p ein Primteiler von G_k/G_{k+1} und $x \in G_k/G_{k+1}$ ein Element der Ordnung p ist (Satz von Cauchy). Dann gilt $\{e\} \subsetneq \langle x\rangle \subsetneq G_k/G_{k+1}$. Da G_k/G_{k+1} abelsch ist gilt $\langle x\rangle \triangleleft G_k/G_{k+1}$. Sei $\pi : G_k \to G_k/G_{k+1}$ die kanonische Projektion und $H = \pi^{-1}(\langle x\rangle)$. Es gilt $G_{k+1} \subsetneq H \subsetneq G_k$ und $G_{k+1} \triangleleft H \triangleleft G_k$. Ein Widerspruch zur nicht Verfeinbarkeit. ∎

Beispiel 1.11.13 Es gilt $S_4 \overset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\triangleright} A_4 \overset{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}{\triangleright} V_4 \overset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\triangleright} \{\mathrm{Id}, [12][34]\} \overset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\triangleright} \{\mathrm{Id}\}$.

2 Ringe

2.1 Grundbegriffe

2.1.1 Definition

Definition 2.1.1 1. Ein **Ring** ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+ : R \times R \to R,\ (a,b) \mapsto a+b$ und $\times : R \times R \to R,\ (a,b) \mapsto ab$ so, dass

- $(R,+)$ ist eine kommutative Gruppe mit 0_R als neutrales Element,
- $(ab)c = a(bc)$ für alle $a,b,c \in R$,
- $a(b+c) = ab+ac$ und $ba+ca = (b+c)a$ für alle $a,b,c \in R$,
- es gibt ein $1_R \in R$ mit $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ für alle $a \in R$.

2. Falls $\times$ kommutativ ist *i.e.* $ab = ba$ für alle $a,b \in R$ heißt R **kommutativer Ring**.

Bemerkung 2.1.2 Sei R ein Ring.

1. Falls $1_R = 0_R$ gilt $R = \{0_R\}$. In diesem Fall heißt R der **Nullring**.

2. Für alle $a,b \in R$ gilt

- $0_R \cdot a = a \cdot 0_R = 0_R$
- $(-a)(-b) = ab$

Beispiel 2.1.3 1. $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ und $(\mathbb{C},+,\times)$ sind Ringe.

2. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ in ein Ring.

3. Sei K ein Körper. $(M_n(K),+,\times)$ ist ein Ring, wobei $+$ bzw. $\times$ Matrixaddition bzw. Matrixmultiplikation sind.

4. Für $x \in \mathbb{C}$, sei $x \mapsto \bar{x}$ die komplexe Konjugation. Die Menge der Quaternionen

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid x,y \in \mathbb{C} \right\}$$

mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation ist ein nicht kommutativer Ring.

Definition 2.1.4 Seien R und R' zwei Ringe. Das Produkt $R \times R'$ mit $(a, a') + (b, b') = (a+b, a'+b')$ und $(a, a')(b, b') = (ab, a'b')$ ist ein Ring und heißt **Produktring** von R und R'.

Definition 2.1.5 Sei R ein Ring.

1. Ein Element $a \in R$ heißt **Einheit** oder **invertierbar** falls es ein $b \in R$ gibt mit $ab = ba = 1_R$. Mann schreibt $R^\times$ für die Menge aller Einheiten:

$$R^\times = \{a \in R \mid a \text{ is eine Einheit}\}.$$

2. Ein Element $a \in R$ heißt **Nullteiler** falls es ein $b \in R \setminus \{0_R\}$ gibt mit $ab = 0_R$ oder $ba = 0_R$.

Bemerkung 2.1.6 Sei R ein Ring.

1. Die Menge $(R^\times, \times)$ ist eine Gruppe. Insbesondere ist für $a \in R^\times$ das Element $b \in R$ mit $ab = ba = 1_R$ ein Element in $R^\times$ und ist eindeutig bestimmt. Wir schreiben $b = a^{-1}$.

2. Es gilt $R^\times \subset R \setminus \{\text{Nullteiler}\}$: sei $b \in R$ mit $ab = 0_R$ oder $ba = 0_R$. Es gilt $0_R = a^{-1}ab = b$ oder $0_R = baa^{-1} = b$.

Definition 2.1.7 Sei R ein Ring.

1. R heißt **Nullteilerfrei** falls ($a \in R$ Nullteiler $\Rightarrow a = 0$).

2. R heißt **Intergritätring** falls $R \neq \{0_R\}$, R kommtativ und Nullteilerfrei ist.

3. R heißt **Schiefkörper** falls $R^\times = R \setminus \{0_R\}$.

4. R heißt **Körper** falls R ein kommutativer Schiefkörper ist.

Beispiel 2.1.8 1. Der Ring $\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsring.

2. Der Ring $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist kein Integritätsring: Es gilt $[2] \neq 0_R$ aber $[2][2] = [4] = 0_R$.

3. Der Ring $\mathbf{H}$ ist ein nicht kommutativer Schiefkörper.

Bemerkung 2.1.9 Sei R ein nullteilerfreier Ring und S ein Unterring. Dann ist S nullteilerfrei.

Definition 2.1.10 Sei R ein Ring.

1. Der **Polynomring zu** R ist

$$R[X] = \{\sum_{k=0}^{\infty} r_k X^k \mid r_k \neq 0 \text{ nur für endlich viele } k\}$$

mit

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} r'_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (r_k + r'_k) X^k$$

und

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} r'_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{a+b=k} r_a r'_b\right) X^k.$$

2. Per Induktion definiert man den **Polynomring mit n Unbekannten zu** R als

$$R[X_1, \cdots, X_n] = (R[X_1, \cdots, X_{n-1}])[X_n].$$

Bemerkung 2.1.11 Sei R ein Ring.

1. Sei P ein Polynom in $R[X]$. Dann definiert P eine polynomiale Abbildung $f_P : R \to R$ durch $f_P(r) = P(r)$.

2. Man sollte aber Polynome und polynomiale Abbildungen nicht verwechseln. Zum Beispiel für $R = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sind die Polynome $P = 0$ und $Q = X + X^2$ verschieden aber die Abbildungen die sie definieren sind $f_P : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ und $f_Q : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ und es gilt $f_P(x) = 0 = f_Q(x)$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$ also $f_P = f_Q$.

Lemma 2.1.12 Sei R ein nullteilerfreier Ring. Dann ist $R[X]$ nullteilerfrei. □

Beweis. Seien $P, Q \in R[X]\backslash\{0\}$. Wir schreiben $P = \sum_{k=0}^{n} r_k X^k$ und $m = \sum_{k=0}^{m} s_k X^k$ mit $r_n \neq 0 \neq s_m$. Es gilt

$$PQ = \sum_{k=0}^{nm} \left(\sum_{a+b=k} r_a s_b\right) X^k = \sum_{k=0}^{nm} t_k X^k.$$

Insbesondere gilt $t_{nm} = r_n s_m$. Da R nulteilerfrei ist gilt $t_{nm} \neq 0$ also $PQ \neq 0$. ■

2.1.2 Ringhomomorphismus

Definition 2.1.13 Ein **Ringhomomorphismus** ist eine Abbildung $f : R \to R'$, wobei R und R' ringe sind so, dass für alle $a, b \in R$ gilt

$$f(a+b) = f(a) + f(b),\ f(ab) = f(a)f(b) \text{ und } f(1_R) = 1_{R'}.$$

Lemma 2.1.14 Sei $f : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus.

1. Dann gilt $f(R^\times) \subset R'^\times$.

2. Die induzierte Abbildung $f : R^\times \to R'^\times$ ist ein Gruppenhomomorphismus. □

Beweis. Übung. ■

2.1.3 Unterringe und Ideale

Definition 2.1.15 Sei R ein Ring.

1. Eine Untergruppe $R' \subset R$ heißt **Unterring** falls

   - $1_R \in R'$ und
   - $ab \in R'$ für alle $a, b \in R'$.

2. Eine Untergruppe $I \subset R$ heißt **Ideal** falls $ab, ba \in I$ für alle $a \in I$ und alle $b \in R$.

Lemma 2.1.16 Sei R ein Ring und I ein Ideal. Dann gilt

$$I = R \Leftrightarrow 1_R \in I.$$

Beweis. Übung. ∎

Beispiel 2.1.17 1. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbf{H}$ sind Unterringe.

2. Sei R ein Ring. Die Menge $\{0_R\}$ ist ein Ideal und heißt **Nullideal**.

3. Sei R ein kommutativer Ring und $r \in R$. Dann ist $(r) = rR = \{ra \in R \mid a \in R\}$ ein Ideal.

4. Zum Beispiel ist $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ein Ideal. Alle Ideale in $\mathbb{Z}$ sind dieser Form (schon alle Untergruppen sind dieser Form!).

5. Sei K ein Körper und $R = K[X]$. Dann sind alle Ideale I in R der Form $I = (P)$ für ein $P \in K[X]$ (Siehe LAII Übungsblatt 8 Übung 1).

Lemma 2.1.18 Sei $f : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus, seien $S \subset R$ und $S' \subset R'$ Unterringe und $I \subset R$ und $I' \subset R'$ Ideale.

1. Dann sind $f(S)$ und $f^{-1}(S')$ Unterringe von R' und R. Insbesondere ist $\mathrm{im} f$ ein Unterring.

2. 1. Dann ist $f^{-1}(I')$ ein Ideal von R. Insbesondere ist $\mathrm{Ker} f$ ein Ideal.

3. Falls f surjektiv ist, ist $f(I)$ ein Ideal in R'. □

Beweis. Bilder und Urbilder von Untergruppen sind Untergruppen.

1. Es gilt $1_R \in S$ also $1_{R'} = f(1_R) \in f(S)$. Seien $f(a), f(b) \in f(S)$ mit $a, b \in S$. Dann gilt $ab \in S$ und $f(a)f(b) = f(ab) \in f(S)$.

Es gilt $f(1_R) = 1_{R'} \in S'$ also $1_R \in f^{-1}(S')$. Seien $a, b \in f^{-1}(S')$ also $f(a), f(b) \in S'$. Dann gilt $f(ab) = f(a)f(b) \in S'$ also $ab \in f^{-1}(S')$.

2. Sei $a \in f^{-1}(I')$ und $b \in R$. Dann gilt $f(a) \in I'$ und $f(ab) = f(a)f(b) \in I'$ und $f(ba) = f(b)f(a) \in I'$.

3. Sei $f(a) \in f(I)$ mit $a \in I$ und sei $b' \in R'$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $b \in R$ mit $f(b) = b'$. Es folgt $ab, ba \in I$ und $f(a)f(b) = f(ab) \in f(I)$ und $f(b)f(a) = f(ba) \in f(I)$. ∎

2.1.4 Quotienten

Sei R ein Ring und I ein Ideal. Dann ist $(R/I, +)$ eine Gruppe und die kanonische Projektion $\pi : R \to R/I$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Lemma 2.1.19 Sei R ein Ring und I ein Ideal.

1. Dann ist die Verknüpfung $\times : R/I \times R/I \to R/I$, $([a], [b] \mapsto [ab]$ wohl definiert.

2. $(R/I, +, \times)$ ist ein Ring und die kanonische Projektion $\pi : R \to R/I$ ist ein Ringhomomorphismus. □

Beweis. 1. Seien $a', b' \in R$ mit $[a'] = [a]$ und $[b'] = [b]$. Es gibt $c, d \in I$ mit $a' = a + c$ und $b' = b + d$. Dann gilt $a'b' = ab + ad + cb + cd$ und da $ad, cb, cd \in I$ gilt $[a'b'] = [ab]$.

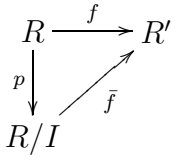
2. Übung. ∎

Definition 2.1.20 Sei R ein Ring und I ein Ideal. Dann heißt R/I mit $[a] + [b] = [a + b]$ und $[a][b] = [ab]$ der **Quotientring**.

Bemerkung 2.1.21 Sei R ein Ring und I ein Ideal. Dann gilt $I = \mathrm{Ker}\pi$, wobei $\pi : R \to R/I$ die kanonische Projektion. Also ist jeder Ideal der Kern eines Ringhomomorphismus.

Satz 2.1.22 Sei $f : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus, sei I ein Ideal von R und sei $\pi : R \to R/I$ die kanonische Projektion.

1. Es gibt ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\bar{f} : R/I \to R'$ so, dass das Diagram



kommutiert, genau dann wenn $I \subset \mathrm{Ker}f$.

Angenommen $I \subset \mathrm{Ker}f$ und sei $\bar{f}$ wie in 1.

2. Die Abbildung $\bar{f}$ ist genau dann injektiv, wenn $I = \mathrm{Ker}f$.

3. Die Abbildung $\bar{f}$ ist genau dann surjektiv, wenn f surjektiv ist. □

Beweis. 1. Nach Satz 1.2.10.1 existiert ein eindeutig bestimmter Gruppenhomomorphismus $\bar{f}$ wie oben genau dann, wenn $I \subset \mathrm{Ker} f$. Wir zeigen, dass $\bar{f}$ ein Ringhomomorphismus ist. Es gilt $\bar{f}([1_{R/I}]) = \bar{f}(\pi(1_R)) = f(1_R) = 1_{R'}$. Seien $a, b \in R$. Es gilt $\bar{f}([a][b]) = \bar{f}([ab]) = \bar{f}(\pi(ab) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}([a])\bar{f}([b])$.

2. Folgt aus Satz 1.2.10.2.

3. Folgt aus Satz 1.2.10.3. ∎

Korollar 2.1.23 Sei $f : R \to R'$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Dann gilt $R/\mathrm{Ker} f \simeq R'$.

Beispiel 2.1.24 Es gilt $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$.

2.1.5 Erzeuger

Lemma 2.1.25 Sei R ein Ring. Sei $(R_a)_{a \in A}$ ein Familie von Unterringe und sei $(I_a)_{a \in A}$ eine Familie von Ideale. Seien I und J zwei Ideale.

1. Dann ist $\bigcap_{a \in A} R_a$ ein Unterring

2. Dann sind $\bigcap_{a \in A} I_a$, $I + J = \{a + b \in R \mid a \in I, b \in J\}$ Ideale.

3. Sei $A \subset R$ eine Teilmenge. Dann gibt es ein kleinster Unterring S mit $A \subset S$.

4. Sei $A \subset R$ eine Teilmenge. Dann gibt es ein kleinstes Ideal I mit $A \subset I$. □

Beweis. 1 + 2 Übung.

3 + 4. Der kleinste Unterring bzw. das kleinste Ideal sind

$$\bigcap_{S \supset A,\ S \text{ Unterring}} S \text{ und } \bigcap_{I \supset A,\ I \text{ Ideal}} I.$$

Definition 2.1.26 Sei R ein Ring, A eine Teilmenge in R, S ein Unterring und I, J Ideale in R.

1. Der kleinste Unterring die S und A enthält heißt **der von S und A erzeugte Unterring**.

Man schreibt $S[A]$ für den von S und A erzeugten Unterring.

2. Das kleinste Ideal die A enthält heißt **das von A erzeugte Ideal**.

Man schreibt (A) für das von A erzeugte Ideal. Falls $A = \{a\}$ schreibt man $(A) = (a)$. Ein solches Ideal heißt **Hauptideal**.

2. **Die Summe von I und J** ist das Ideal $I + J = \{a + b \in R \mid a \in I, b \in J\}$.

3. **Das Produktideal von I und J** ist $IJ = (ab \mid a \in I, b \in J)$ *i.e.* das von Produkte ab mit $a \in I$ und $b \in J$ erzeugte Ideal.

Beispiel 2.1.27 1. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist der von $\sqrt{2}$ erzeugte Unterring von $\mathbb{R}$.

2. Allgemeiner gilt für R kommutativ, $S \subset R$ Unterring und $r \in R$:

$$S[r] = \{P(r) \in R \mid P \in S[X]\}.$$

3. Sei R ein kommutativer Ring und $r \in R$. Dann gilt $(r) = \{ra \in R \mid a \in R\}$.

Bemerkung 2.1.28 Es gilt $IJ \subset I \cap J$.

2.1.6 Isomorphiesätze

Satz 2.1.29 (Erster Isomorphiesatz) Sei R ein Ring und seien I, J Ideale.

1. Dann ist I ein Ideal in $I + J$ und $I \cap J$ ist ein Ideal in J.

2. Die Abbildung $J/(I \cap J) \to (I + J)/I$, $[a]_{I\cap J} \mapsto [a]_I$ ist wohl definiert und ein Gruppenisomorphimus. □

Beweis. 1. Klar.

2. Folgt aus dem ersten Isomorphiesatz für Gruppen. ■

Satz 2.1.30 (Zweiter Isomorphiesatz) Sei R ein Ring und I ein Ideal. Sei $J \supset I$ eine Untergruppe.

1. Dann ist J genau dann ein Ideal in R, wenn J/I ein Ideal in R/I ist.

2. Die Abbildung $(R/I)/(J/I) \to R/J$, $[[a]_I]_{J/I} \mapsto [a]_J$ ist wohl definiert und ein Ringisomorphimus. □

Beweis. 1. Sei J ein Ideal und seien $[a] \in J/I$ und $[b] \in R/I$. Dann gilt $[a][b] = [ab] \in J/I$ und $[b][a] = [ba] \in J/I$ da $ab, ba \in J$.

Umgekehrt sei J/I ein Ideal. Seien $a \in J$ und $b \in R$. Dann gilt $[ab] = [a][b] \in J/I$ und $[ba] = [b][a] \in J/I$ also $ab, ba \in J$.

2. Aus dem zweiten Isomorphiesatz für Gruppen folgt, dass die Abbildung wohl definiert ist und ein Gruppenisomorphismus. Aber per Definition des Produkts ist diese Abbildung ein Ringhomomorphismus. ■

Korollar 2.1.31 Sei R ein Ring und I ein Ideal in R und $\pi : R \to R/I$ die kanonische Projektion. Dann ist die Abbildung

$$\{\ J \text{ Ideal von } R \mid J \supset I\} \to \{\ \bar{J} \text{ Ideal von } R/I\ \},\ J \mapsto \pi(J) = J/I$$

bijektiv und es gilt $R/J \simeq (R/I)/\pi(J) = (R/I)/(J/I)$.

Beweis. Die Umkehrabbildung ist $\bar{J} \mapsto \pi^{-1}(\bar{J})$. ■

2.1.7 Primideale und maximale Ideale

Lemma 2.1.32 Sei R ein kommutativer Ring. Es gilt

$$R \text{ Körper } \Leftrightarrow \text{ die einzige Ideale in } R \text{ sind } R \text{ und } 0.$$

Beweis. ($\Rightarrow$). Sei I ein Ideal mit $I \neq 0$. Sei $a \in I$ mit $a \neq$. Dann ist a invertierbar und es gilt $1_R = a^{-1}a \in I$ also $I = R$.

($\Leftarrow$). Sei $a \in R$ mit $a \neq 0$ und sei $I = (a)$. Dann gilt $I \neq 0$ also $I = R$ und $1_R \in I$. Es gibt also ein $r \in R$ mit $ra = ar = 1_R$ also a ist invertierbar. ∎

Lemma 2.1.33 Sei $f : K \to R$ ein Ringhomomorphismus mit K ein Körper und $R \neq 0$. Dann ist f injektiv. □

Beweis. Der Kern Ker$f$ ist ein Ideal. und $f(1_K) = 1_R \neq 0_R$ also gilt Ker$f \neq K$. Da K ein Körper ist hat K nur zwei Ideale: K und 0. Es folgt Ker$f = 0$. ∎

Definition 2.1.34 Sei R ein Ring und I ein Ideal.

1. Das Ideal I heiß **Primideal**, wenn $I \neq R$ und für $a, b \in R$ gilt

$$(ab \in I) \Rightarrow (a \in I \text{ oder } b \in I).$$

1. Das Ideal I heiß **maximal**, wenn $I \neq R$ und für J ein Ideal gilt

$$(I \subset J) \Rightarrow (J = I \text{ oder } J = R).$$

Beispiel 2.1.35 Sei $R = \mathbb{Z}$. Dann ist $n\mathbb{Z}$ genau dann ein Primideal, wenn $n = 0$ oder n eine Primzahl ist.

Lemma 2.1.36 Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal.

1. Das Ideal I ist genau dann ein Primideal, wenn A/I ein Integritätsring ist.

2. Das Ideal I ist genau dann maximal, wenn A/I ein Körper ist. □

Beweis. Das Ideal ist genau dann echt ($I \neq R$), wenn $R/I \neq 0$.

1. Sei I Primideal und seien $[a], [b] \in R/I$ mit $[a][b] = [0]$. Es gilt $[ab] = [0]$ also $ab \in I$. Da I Primideal ist, gilt $a \in I$ oder $b \in I$ also $[a] = [0]$ oder $[b] = [0]$.

Umgekehrt, sei R/I Integritätsring und seien $a, b \in R$ mit $ab \in I$. Dann gilt $[a][b] = [ab] = [0]$ also $[a] = [0]$ oder $[b] = [0]$. Daraus folgt $a \in I$ oder $b \in I$.

2. Sei $\pi : R \to R/I$ die kanonische Projektion. Sei I maximal und sei $\bar{J}$ ein Ideal in R/I. Dann ist $\pi^{-1}(\bar{J})$ ein Ideal in R mit $I \subset \pi^{-1}(\bar{J})$. Da I maximal ist, folgt $\pi^{-1}(\bar{J}) = I$ oder $\pi^{-1}(\bar{J}) = R$. Es folgt $\bar{J} = \pi(\pi^{-1}(\bar{J})) = I/I = ([0])$ oder $\bar{J} = R/I$. Nach dem Lemma 2.1.32 folgt, dass R/I ein Körper ist.

Umgekehrt, sei R/I ein Körper und sei J ein Ideal mit $I \subset J$. Dann ist $\pi(J)$ ein Ideal in R/I also nach Lemma 2.1.32 gilt $\pi(J) = ([0])$ oder $\pi(J) = R/I$. Daraus folgt $J = \pi^{-1}(\pi(J)) = I$ oder $J = R$ und I ist maximal. ∎

Beispiel 2.1.37 Sei $R = \mathbb{Z}[X]$. Dann ist (X) ein Primideal aber nicht maximal: es gilt $\mathbb{Z}[X]/(X) = \mathbb{Z}$ Integritätsring aber kein Körper. Das Ideal $(X, 2) \supset (X)$ ist maximal: $\mathbb{Z}[X]/(X, 2) \simeq \mathbb{Z}/(2) = \mathbb{F}_2$ ist ein Körper. Das Ideal (X^2) ist kein Primideal.

Korollar 2.1.38 Ein maximales Ideal ist ein Primideal.

Beweis. Ein Körper ist immer ein Integritätsring. ∎

Beispiel 2.1.39 1. Das Ideal $I = (X^2+1)$ ist ein Primideal und sogar ein maximales Ideal in $\mathbb{R}[X]$: es gilt $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$ aber kein Primideal in $\mathbb{C}[X]$: es gilt $X-i \notin I$, $X + i \notin I$ aber $(X - i)(X + i) = X^2 + 1 \in I$.

2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, sei $R = C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\mathfrak{M}_x = \{f \in R \mid f(x) = 0\}$. Dann gilt $R/\mathfrak{M}_x \simeq \mathbb{R}$ und $\mathfrak{M}_x$ ist ein maximales Ideal in R.

Bemerkung 2.1.40 Aus dem Auswahl-Axiom kann man Zeigen

Satz 2.1.41 (Satz von Krull) Sei R ein Ring und I ein Ideal mit $I \neq R$. Dann gibt est ein maximales Ideal $\mathfrak{M}$ mit $I \subset \mathfrak{M}$. □

Lemma 2.1.42 Sei $f : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus zwischen zwei kommutativen Ringe und sei I' ein Ideal in R'.

1. Es gilt (I' Primideal) $\Rightarrow$ ($f^{-1}(I')$ Primideal).

Sei f surjektiv

2. Es gilt (I' Primideal) $\Leftrightarrow$ ($f^{-1}(I')$ Primideal).

3. Es gilt (I' maximales Ideal) $\Leftrightarrow$ (I' maximales Ideal). □

Beweis. 1. Seien $a, b \in R$ mit $ab \in f^{-1}(I')$. Es gilt $f(a)f(b) = f(ab) \in I'$ also $f(a) \in I'$ oder $f(b) \in I'$. Daraus folgt $a \in f^{-1}(I')$ oder $b \in f^{-1}(I')$.

Da f surjektiv ist gilt $R' \simeq R/\mathrm{Ker}f$ und nach identifizierung von R' mit $R/\mathrm{Ker}f$ ist die Abbildung $f : R \to R'$ mit der kanonischen Projektion $\pi : R \to R/\mathrm{Ker}f$ identifiziert.

2 und 3. Sei I' ein Ideal in $R' = R/\mathrm{Ker}f$. Sei $I = \pi^{-1}(I')$. Es gilt $I \supset J$ und $I/J = \pi(I) = I'$. Nach dem zwieten Isomorphiesatz gilt

$$R/I \simeq (R/J)/(I/J) = R'/I'.$$

Insbesondere ist R/I genau dann Integritätsring bzw. Körper, wenn R'/I' Integritätsring bzw. Körper ist. ∎

Beispiel 2.1.43 1. Sei $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}[X]$ und $I = (X^2 + 1) \subset \mathbb{C}[X]$. Dann gilt $f^{-1}(I) = (X^2+1) \subset \mathbb{R}[X]$ und $f^{-1}(I)$ ist ein Primideal und maximal aber I ist nicht maximal und kein Primideal.

2. Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ die enthaltung. Sei $I = (0) \subset \mathbb{Q}$. Dann gilt $f^{-1}(I) = (0) \subset \mathbb{Z}$. Das Ideal I ist ein Primideal in $\mathbb{Q}$ und sogar maximal aber $f^{-1}(I)$ ist ein Primideal aber nicht maximal.

2.1.8 Teilerfremde Ideale

In diesem Abschnitt ist R ein kommutativer Ring.

Definition 2.1.44 Zwei Elemente $a, b \in R$ heißen **teilerfremd** falls

$$(c \mid a \text{ und } c \mid b \;\Rightarrow\; c \in R^\times) \text{ für alle } c \in R.$$

Beispiel 2.1.45 1. Seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann sind n und m genau dann teilerfremd, wenn $\mathrm{ggT}(n, m) = 1$.

2. Sei K ein Körper und $R = K[X, Y]$. Dann sind X und Y teilerfremd: sei P mit $P|X$ und $P|Y$. Dann gilt $P = \lambda$ oder $P = \lambda X$ für $\lambda \in K^\times$ und $P = \lambda$ oder $P = \lambda Y$ für $\lambda \in K^\times$. Es folgt $P = \lambda \in K^\times \subset R^\times$.

Definition 2.1.46 Sei R ein Ring. Zwei Ideale I und J heißen **teilerfremd** falls $I + J = R$.

Beispiel 2.1.47 1. Sei $R = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z} = (n)$ und $J = m\mathbb{Z} = (m)$. Dann sind I und J genau dann teilerfremd, wenn n und m teilerfremd sind.

2. Sei K ein Körper und $R = K[X, Y]$. Seien $I = (X)$ und $J = (Y)$. Dann sind I und J nicht teilerfremd: es gilt $I + J = (X) + (Y)$. Sei $P \in I + J$. Dann gibt es Polynome $S, T \in R$ mit $P = XR + YT$. Daraus folgt $P(0, 0) = 0$. Insbesondere gilt $1 \notin I + J$ und $I + J \neq R$.

Lemma 2.1.48 Sei R ein kommutativer Ring. Seien $a, b \in R$ und $I = (a)$, $J = (b)$.

1. Es gilt: (I und I sind teilerfremd) $\Rightarrow$ (a und b sind teilerfremd).

Sei R ein Hauptidealring *i.e.* alle Ideale I' sind der Form $I' = (a')$ für ein $a' \in R$.

2. Es gilt: (I und I sind teilerfremd) $\Leftrightarrow$ (a und b sind teilerfremd). □

Beweis. 1. Es gilt $(a) + (b) = I + J = R$. Es gibt also $x, y \in R$ mit $1 = ax + by$. Sei $c \in R$ mit $c|a$ und $c|b$. Es gibt also $\alpha, \beta \in R$ mit $a = c\alpha$ und $b = c\beta$. Daraus folgt

$$1 = ax + by = c\alpha x + c\beta y = c(\alpha x + \beta y)$$

und c ist invertierbar.

2. ($\Rightarrow$) folgt aus 1. ($\Leftarrow$). Da R ein Hauptidealring ist gibt es ein $c \in R$ mit $(a) + (b) = I + J = (c)$. Es genügt zu zeigen, dass $c \in R^\times$ gilt: daraus folgt $(c) = R$. Es gilt $a \in (a) + (b) = (c)$ also gibt es ein $\alpha \in R$ mit $a = c\alpha$ *i.e.* $c|a$. Analog gilt $c|b$. Da a und b teilerfremd sind folgt $c \in R^\times$. ■

Satz 2.1.49 (Chinesischer Restsatz) Sei R ein kommutativer Ring und $I_1, \cdots, I_n$ paarweise teilerfremde Ideale. Dann ist die Abbildung

$$R/\bigcap_k I_k \to \prod_k R/I_k,\ [a] \mapsto ([a]_{R/I_1}, \cdots, [a]_{R/I_n}).$$

wohl definiert und ein Isomorphismus. □

Beweis. Die Abbildung $f' : R \to \prod_k R/I_k,\ a \mapsto ([a]_{R/I_1}, \cdots, [a]_{R/I_n})$ ist wohl definiert. Die obige Abbildung f wird wohl definiert sei sobald $\bigcap_k I_k \subset \mathrm{Ker} f'$. Sei $a \in \bigcap_k I_k$. Dann gilt $a \in I_k$ für alle k. Daraus folgt $[a]_{R/I_k} = [0]_{R/I_k}$ und $a \in \mathrm{Ker} f'$.

Wir zeigen $\mathrm{Ker} f' = \bigcap_k I_k$. Sei $a \in \mathrm{Ker} f'$. Dann gilt $[a]_{R/I_k} = [0]_{R/I_k}$ für alle k also gilt $a \in I_k$ für alle k und es folgt $a \in \bigcap_k I_k$. Daraus folgt, dass f injektiv ist.

Es bleibt zu zeigen, dass f surjektiv ist. Es genügt jetzt zu zeigen, dass f' surjektiv ist. Sei $j \in [1, n]$. Wir zeigen zuerst, dass I_j und $\bigcap_{k \neq j} I_k$ teilerfremd sind. Für $k \neq j$ sind I_j und I_k teilerfremd also $I_j + I_k = R$ und es gibt $a_{j,k} \in I_j$ und $b_k \in I_k$ mit $1 = a_{j,k} + b_k$ Daraus folgt

$$1 = \prod_{k \neq j} (a_{j,k} + b_k) = c_j + \prod_{k \neq j} b_k$$

wobei $c_j \in I_j$. Da $b_k \in I_k$ gilt $\prod_{k \neq j} b_k \in I_k$ für alle $k \neq j$ also $\prod_{k \neq j} b_k \in \bigcap_{k \neq j} I_k$. Daraus folgt $1 \in I_j + \bigcap_{k \neq j} I_k$ und $R = I_j + \bigcap_{k \neq j} I_k$. Sei $d_j = \prod_{k \neq j} b_k$. Es gilt $c_j + d_j = 1$, $c_j \in I_j$ und $d_j \in \cap_{k \neq j} I_k$.

Sei $\pi_j : R \to R/I_j$ die kanonische Projektion. Es gilt $\pi_j(c_j) = [c_j]_{R/I_j} = [0]_{R/I_j}$ da $c_j \in I_j$. Es gilt $\pi_j(d_j) = \pi_j(1 - c_j) = \pi_j(1) = [1]_{R/I_j}$. Und es gilt $\pi_j(d_\ell) = [d_\ell]_{R/I_j} = [0]_{R/I_j}$ für $\ell \neq j$ da $d_\ell \in \bigcap_{k \neq \ell} I_k$ und $j \in \{k \mid k \neq \ell\}$.

Sei $([a_1]_{R/I_1}, \cdots, [a_n]_{R/I_n}) \in \prod_k R/I_k$ und sei

$$a = \sum_{\ell=1}^{n} d_\ell a_\ell.$$

Es gilt

$$\pi_j(a) = \sum_{\ell=1}^{n} \pi_j(d_\ell)\pi_j(a_\ell) = [a_j]_{R/I_j}.$$

Daraus folgt $f(a) = ([a_1]_{R/I_1}, \cdots, [a_n]_{R/I_n})$ und f ist surjektiv. ∎

Korollar 2.1.50 Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Es gilt

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Beweis. Da n und m teilerfremd sind, gilt $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$. ∎

Lemma 2.1.51 Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[m] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid m \text{ und } n \text{ sind teilerfremd}\}.$$

Beweis. Siehe Übungsblatt 6. ∎

Definition 2.1.52 Die **Eulersche φ-Funktion** ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = |\{[m] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid m \text{ und } n \text{ sind teilerfremd}\}|.$$

Bemerkung 2.1.53 Es gilt $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(p) = p - 1$ für p ein Primzahl.

Lemma 2.1.54 Sei p ein Primzahl und $\alpha \in \mathbb{N}_{>0}$. Es gilt $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. □

Beweis. Ein Element $m \in [1, p^\alpha]$ is genau dann teilerfremd mit p^α, wenn p kein Teiler von m ist. Die Elemente in $[1, p]$ die durch p teilbar sind, sind die Elemente pk mit $k \in [1, p^{\alpha-1}]$. Es sind also genau $p^{\alpha-1}$ Elemente die durch p teilbar sind und $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ Elemente die durch p nicht teilbar sind. ∎

Lemma 2.1.55 Seien $R_1, \cdots, R_n$ Ringe. Es gilt $(\prod_k R_k)^\times = \prod_k (R_k^\times)$. □

Beweis. Übung. ∎

Korollar 2.1.56 Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ die Primzahlzerlegung. Es gilt

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_1 - 1}) = n \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Beweis. Da die Zahlen $p_i^{\alpha_i}$ paarweise teilerfremd sind, sind die Ideale $p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}$ paarweise teilerfremd und es gilt

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\cap_i p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z} \simeq \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}.$$

Nach dem obigen Lemma gilt

$$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = |(\prod_i \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^\times| = \prod_i |(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^\times| = \prod_i \varphi(p_i^{\alpha_i}).$$

Nach Lemma 2.1.54 folgt die Aussage. ∎

Satz 2.1.57 Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

definiert durch $a \mapsto \Phi_a$, wobei $\Phi_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ x \mapsto ax$ ist ein Gruppenisomorphismus. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 6. ∎

2.2 Quotientkörper

In diesem Abschnitt ist R ein Integritätsring.

Definition 2.2.1 Sei $\sim$ die Relation auf $R \times (R \setminus \{0\})$ definiert durch

$$(a, b) \simeq (c, d) \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Lemma 2.2.2 Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. □

Beweis. Es gilt $ab = ba$ also $(a, b) \sim (a, b)$. Seien $(a, b) \sim (c, d)$. Es gilt $ad = bc$ also $cb = da$ und es folgt $(c, d) \sim (a, b)$. Seien $(a, b) \sim (c, d) \sim (e, f)$. Es gilt $ad = bc$ und $cf = de$. Daraus folgt $adf = bcf = bde$. Da $d \neq 0$ und R Integritätsring folgt $af = be$ also $(a, b) \sim (e, f)$. ■

Definition 2.2.3 Sei $\mathrm{Frac}(R) = (R \times (R \setminus \{0\}))\,/\,\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen für $\sim$. Wir Schreiben $\frac{a}{b}$ für die Äquivalenzklasse $[(a, b)]$ von (a, b).

Satz 2.2.4 Sei R ein Integritätsring.

1. Die Menge $\mathrm{Frac}(R)$ mit $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ und $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ist ein Körper.

2. Die Abbildung $R \to \mathrm{Frac}(R)$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ is ein injektiver Ringhomomorphimus. □

Beweis. 1. Zuerst zeigen wir , dass die Addition und die Multiplikation wohl definiert sind. Sei $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$. Dann gilt $\frac{ac}{bd} = \frac{acb'd'}{bdb'd'} = \frac{ba'c'd}{bdb'd'} = \frac{a'c'}{b'd'}$. Analog ist die Addition wohl definiert.

Da das Produkt in R assoziativ und kommutativ ist ist das Produkt in $\mathrm{Frac}(R)$ auch kommutativ und assoziativ. Da R ein kommutativer Ring folgt, dass $+$ kommutativ ist. Man überprüft leicht, dass $\frac{0}{1}$ ein neutrales Element für $+$ ist und es gilt $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{b} = \frac{0}{1}$ also ist $(\mathrm{Frac}(R), +)$ eine kommutative Gruppe. Distributivitätsgesetzt überprüft man leicht. Es gilt $\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ also ist $\frac{1}{1}$ ein neutrales Element für die Multiplikation.

Sei $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$. Dann gilt $a \neq 0$ also ist $\frac{b}{a}$ wohl definiert. Es gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$. Also ist $\mathrm{Frac}(R)$ ein Körper.

2. Es gilt $\frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}$ also ist die Abbildung ein Ringhomomorphismus. Sei $\frac{a}{1}$ im Kernel. Es gilt $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$ und es folgt $a = 0$. ■

Index