

Analysis III, Wintersemester 2013-2014, Prof. Dr. Singhof

Marten Lienen

17. Januar 2014

# Kapitel 1

## Maß- und Integrationstheorie

§1 Quader und Figuren

§2  $\sigma$ -Algebren und Maße

§3 Das Lebesgue-Maß

§4 Messbare Funktionen

§5 Integrationstheorie

§6 Vertauschbarkeit des Integrals mit Grenzprozessen

§7 Der Satz von Fubini

§8 Die Transformationsformel

§9 Die Räume  $L^p$

# Kapitel 2

## Vektoranalysis

### §10 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

### §11 Zusammenhängende metrische Räume

**Definition.** Ein metrischer Raum  $X$  heißt zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von  $X$ , die sowohl offen als auch abgeschlossen in  $X$  sind,  $\emptyset$  und  $X$  sind.

**Beispiel.**  $X = [0, 1] \cup [2, 3]$  ist nicht zusammenhängend, denn  $[0, 1]$  und  $[2, 3]$  sind offen und abgeschlossen in  $X$ .

**Bemerkung.** Genau dann ist  $X$  zusammenhängend, wenn gilt: Sind  $A, B$  offene Teilmengen von  $X$  mit  $X = A \cup B$ , so ist  $A \neq \emptyset$  oder  $B \neq \emptyset$ .

**Satz 1.** Sei  $X$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , die mehr als einen Punkt enthält. Genau dann ist  $X$  zusammenhängend, wenn  $X$  ein (offenes/abgeschlossenes/halboffenes/eigentliches/uneigentliches) Intervall ist.

*Beweis.* • Angenommen,  $X$  sei kein Intervall. Dann gibt es  $x_1, x_2, \xi \in \mathbb{R}$  mit  $x_1, x_2 \in X$  und  $x_1 < \xi < x_2$ . Sei  $A := \{x \in X \mid x < \xi\}$  und  $B := \{x \in X \mid x > \xi\}$ . Dann ist  $A \cup B = X$  und  $A$  und  $B$  sind offen in  $X$  nach §10 Satz 3.

- Angenommen  $X$  sei nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene Teilmengen  $A, B$  von  $X$  mit  $A \cup B = X$  und  $A \neq \emptyset \neq B$ . Sei  $a \in A$ ,  $b \in B$ . O.b.d.A. sei  $a < b$ . Wäre  $X$  ein Intervall, so wäre  $[a, b] \subseteq X$ .  $M := \{x \in A \mid x < b\}$ . Wegen  $a \in M$  ist  $M \neq \emptyset$ .  $M$  ist nach oben beschränkt. Sei  $c := \sup M \in [a, b] \subseteq X$ . Da  $A = X \setminus B$  abgeschlossen in  $X$ , folgt  $c \in A$ , also  $c \notin B$ .

□

*Beweis.* Beweisskizze als Hilfestellung für Übung:

- a) Sei  $M$  zusammenhängend. Sei  $x_0 \in M$ . Sei  $A := \{x \in M \mid \text{es gibt einen Weg } w : [0, 1] \rightarrow M \text{ mit } w(0) = x_0 \text{ und } w(1) = x\}$ . Zu zeigen:  $A = M$ . Dann ist  $A \neq \emptyset$ , denn  $x_0 \in A$ .

**$A$  ist offen in  $M$**  Sei  $a \in A$ . Nach der Folgerung aus Satz 1 von §10 besitzt  $a$  eine Umgebung  $U$  in  $M$ , die homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist. Ist  $x \in U$ , so gibt es einen Weg  $w$  in  $U$  mit  $w(0) = a$ ,  $w(1) = x$ . Es gibt einen Weg  $v$  von  $x_0$  nach  $a$ . Deshalb gibt es auch einen Weg von  $x_0$  nach  $x$ .

**$A$  ist abgeschlossen in  $M$**  Weil  $M$  zusammenhängend ist, folgt  $A = M$ .

- b) Ähnlich

- c) folgt direkt aus b)

□

### §12 Kompakte metrische Räume

**Definition.** Ist  $X$  eine Menge und ist  $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$  eine Menge von Teilmengen von  $X$  so heißt  $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$  eine Überdeckung von  $X$ , wenn  $X = \cup_{i \in \Lambda} A_i$ .

**Definition.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$  eine Überdeckung von  $X$ . Dann heißt  $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , wenn alle  $A_i$  offen in  $X$  sind.

**Definition.** Ein metrischer Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt, wenn also gilt: Ist  $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so gibt es  $n \in \mathbb{N}$  und  $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$  mit  $X = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$ .

**Bemerkung.** Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $X$  ist genau dann kompakt, wenn gilt: Sind  $A_i (i \in \Lambda)$  offene Teilmengen von  $X$  mit  $A \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$ , so gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$  mit  $A \subseteq A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$ .

**Satz 1.** Seien  $X, Y$  metrische Räume und sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $X$ , so ist  $f(K)$  kompakt.

*Beweis.* Seien  $A_i (i \in \Lambda)$  offene Teilmengen von  $Y$  mit  $f(K) \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$ . Weil  $f$  stetig ist, ist  $f^{-1}(A_i)$  offen in  $X \forall i \in \Lambda$ . Es ist  $K \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i) = \bigcup_{i \in \Lambda} f^{-1}(A_i)$ . Es gibt also ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$  mit  $K \subseteq f^{-1}(A_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{i_n})$ . Daraus folgt

$$f(K) \subseteq f(f^{-1}(A_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{i_n})) = f(f^{-1}(A_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(A_{i_n})) = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n} \quad (2.1)$$

□

**Satz 2.** Jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  eines kompakten metrischen Raumes  $X$  ist kompakt.

*Beweis.* Seien  $A_i (i \in \Lambda)$  offene Teilmengen von  $X$  mit  $A \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$ . Die  $A_i$  zusammen mit  $X \setminus A$  bilden eine offene Überdeckung von  $X$ . Weil  $X$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung von  $X$ , d.h. es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$  mit  $X = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n} \cup (X \setminus A) \Rightarrow A \subseteq A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$ . □

**Satz 3.** Jede kompakte Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $X$  ist abgeschlossen in  $X$ .

*Beweis.* Zeige  $X \setminus A$  ist offen in  $X$ . Sei  $x \in X \setminus A$ . Wir wollen zeigen:  $X \setminus A$  ist Umgebung von  $x$  in  $X$ . Ist  $y \in A$ , so ist  $y \neq x$ ; deswegen gibt es offene Teilmengen  $U_y$  und  $V_y$  von  $X$  mit  $x \in U_y$ ,  $y \in V_y$  und  $U_y \cap V_y = \emptyset$ . Dann ist  $A \subseteq \bigcup_{y \in A} V_y$ . Weil  $A$  kompakt ist, gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  und Punkte  $y_1, \dots, y_n \in A$  mit  $A \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} = V$ . Sei  $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ . Dann ist  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  mit  $U \cap V = \emptyset$ , also  $U \subseteq X \setminus A$ . □

**Satz 4.** Seien  $X, Y$  metrische Räume;  $X$  sei kompakt und  $f : X \rightarrow Y$  sei stetig und bijektiv. Dann ist  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  stetig. Deswegen ist  $f$  ein Homöomorphismus.

*Beweis.* Wir zeigen: Ist  $A$  abgeschlossen in  $X$ , so ist  $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $Y$ . Nach Satz 2 ist  $A$  abgeschlossen  $\Rightarrow$  nach Satz 1 ist  $f(A)$  kompakt  $\Rightarrow$  nach Satz 3  $f(A)$  ist abgeschlossen in  $Y$ . □

**Definition.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $(x_n)$  eine Folge in  $X$  und  $a \in X$ . Dann heißt  $a$  ein Häufungspunkt von  $(x_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(x_n)$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert; äquivalent dazu: Wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $a$  in  $X$  unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $x_n \in U$ .

**Satz 5.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Äquivalent sind:

- $X$  ist kompakt
- Jede Folge in  $X$  besitzt einen Häufungspunkt in  $X$
- $X$  ist vollständig und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, \dots, x_n \in X$  mit  $X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$  b): Sei  $X$  kompakt und  $(x_n)$  eine Folge in  $X$ . Sei  $F_n$  der Abschluss der Menge  $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$  in  $X$ . Wir werden zeigen, dass  $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$ . (Ein Element von  $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$  ist ein Häufungspunkt von  $(x_n)$ )

Angenommen, es sei  $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$ . Sei  $A_n := X \setminus F_n$ . Dann ist  $A_n$  offen in  $X$  und  $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \bigcap_n (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcap_n F_n = X$ . Deswegen bilden die  $A_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Weil  $X$  kompakt ist, gibt es  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  mit  $X = A_{n_1} \cup \dots \cup A_{n_k}$ . Für  $n \geq m$  ist  $F_n \subseteq F_m$ , also  $A_n \supseteq A_m$ . Ist  $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ , so ist also  $X = A_{n_0} \Rightarrow F_{n_0} = \emptyset$ , Widerspruch, da  $x_{n_0} \in F_{n_0}$ .

b)  $\Rightarrow$  c): Sei  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge in  $X$ . Dann besitzt  $(x_n)$  einen Häufungspunkt  $a$ , d.h. eine Teilfolge von  $(x_n)$  konvergiert gegen  $a$ . Nach Aufgabe 40 konvergiert  $(x_n)$  gegen  $a$ . Deswegen ist  $X$  vollständig.

Sei  $\varepsilon > 0$ . Angenommen  $X$  ist nicht die Vereinigung von endlich vielen Kugeln von Radius  $\varepsilon$ . Dann definiert man induktiv eine Folge  $(x_n)$  in  $X$ , so dass gilt: Ist  $n \neq m$ , so ist  $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ . Dann kann  $(x_n)$  keinen Häufungspunkt besitzen, Widerspruch.

c)  $\Rightarrow$  a): Sei  $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$  offene Überdeckung von  $X$ . Angenommen, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung. Wir werden induktiv eine Folge  $(B_n)$  von Kugeln vom Radius  $\frac{1}{2^n}$  definieren, von denen jede nicht durch endlich viele  $A_i$  überdeckt wird:

$n = 0$  Nach Voraussetzung wird  $X$  von endlich vielen Kugeln vom Radius 1 überdeckt. Von diesen kann eine nicht von endlich vielen  $A_i$  überdeckt werden; nenne sie  $B_0$ .

$n-1 \rightarrow n$  Sei bereits  $B_{n-1}$  konstruiert. Weil  $X$  von endlich vielen Kugeln vom Radius  $\frac{1}{2^n}$  überdeckt wird, gibt es unter diesen eine, die nicht von endlich vielen der  $A_i$  überdeckt wird und nicht-leeren Schnitt mit  $B_{n-1}$  hat.  $B_n$  habe den Mittelpunkt  $x_n$ . Wegen  $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$  ist  $d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ . Ist also  $n \leq p < q$ , so  $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p-1}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-2}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ .

Deswegen ist  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge, konvergiert also gegen ein  $a \in X$ . Es gibt ein  $i_0 \in \Lambda$  mit  $a \in A_{i_0}$ . Da  $A_{i_0}$  offen ist, existiert  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(a) \subseteq A_{i_0}$ . Für großes  $n$  ist  $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$  und  $B_n \subseteq B_\varepsilon(a)$ . Daher ist  $B_n$  für großes  $n$  in  $A_{i_0}$  enthalten, Widerspruch.  $\square$

**Satz 6** (Heine-Borel). *Für eine Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent:*

- a)  $X$  ist kompakt
- b)  $X$  ist beschränkt und abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$  b): Ist  $X$  kompakt, so ist  $X$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$  nach Satz 3. Nach Satz 5 wird  $X$  durch endlich viele Kugeln vom Radius 1 überdeckt, ist also beschränkt.

b)  $\Rightarrow$  a): Weise Bedingung c) vom Satz 5 nach:

- $X$  ist vollständig: Sei  $(x_m)$  eine Cauchy-Folge in  $X$ . Weil  $\mathbb{R}^n$  vollständig ist, konvergiert  $(x_m)$  gegen ein  $a \in \mathbb{R}^n$ . Weil  $X$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$  ist, ist  $a \in X$ .
- Weil  $X$  beschränkt ist, wird  $X$  für jedes  $\varepsilon > 0$  durch endlich viele  $B_\varepsilon(x_i)$  überdeckt.

$\square$

**Definition.** Ein metrischer Raum  $X$  heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt  $a \in X$  eine kompakte Umgebung in  $X$  besitzt.

**Beispiel.** •  $\mathbb{R}^n$  ist lokalkompakt, aber nicht kompakt

- Jede Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist lokalkompakt

## §13 Tangentialräume und Orientierungen

**Definition.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und  $a \in M$ . Ein Element  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt Tangentialvektor an  $M$  im Punkt  $a$ , wenn es ein offenes Intervall  $I$  in  $\mathbb{R}$  mit  $0 \in I$  und eine  $C^1$ -Abbildung  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt mit:

- $\psi(I) \in M$
- $\psi(0) = a$
- $\psi'(0) = v$

Mit  $T_a(M)$  bezeichnet man die Menge aller Tangentialvektoren an  $M$  im Punkt  $a$  und nennt  $T_a(M)$  den Tangentialraum an  $M$  in  $a$ .

**Satz 1.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionaler linearer Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ .

- a)  $T_a(M)$  ist ein  $n$ -dimensionaler linearer Teilraum von  $\mathbb{R}^n$
- b) Sei  $\varphi : W \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  und  $a \in V$ . Sei  $b \in W$  mit  $\varphi(b) = a$ . Dann ist  $T_a(M) = \text{Bild}(D\varphi(b)) = \{D\varphi(b) \cdot u \mid u \in \mathbb{R}^n\}$
- c) Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $a$  in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$  eine Submersion mit  $M \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ . Dann ist:

$$T_a(M) = \text{Kern}(Dg(a)) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Dg(a) \cdot v = 0\} \quad (2.2)$$

*Beweis.* Analysis II, §16, Satz 5  $\square$

**Beispiel.**

$$M = S^{N-1} \quad (2.3)$$

Sei  $U = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \neq 0\}$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $g(x) = x_1^2 + \dots + x_N^2 - 1$ . Dann ist  $S^{N-1} = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ .

$$Dg(x) = 2x^T \quad (2.4)$$

Nach Satz 1c) ist  $T_a(S^{N-1}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid 2a^T v = 0\} = a^\perp$ .

**Beispiel.** Sei  $M$  ein  $n$ -dimensionaler affiner Teilraum von  $\mathbb{R}^N$ , d.h. es gibt ein  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  und einen  $n$ -dimensionalen linearen Teilraum  $E$  von  $\mathbb{R}^N$  mit  $M = x_0 + E$ . Dann ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$ : Sei  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  ein linearer Isomorphismus. Sei  $\varphi(y) := x_0 + h(y)$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Für  $y \in \mathbb{R}^n$  ist  $D\varphi(y) \cdot u = h(u)$ . Deswegen ist  $\varphi$  eine Karte von  $M$  mit  $\varphi(\mathbb{R}^n) = M$ . Sei  $a \in M$  und  $b \in \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(b) = a$ . Nach Satz 1b) ist  $T_a(M) = \text{Bild}(D\varphi(b)) = \text{Bild}(h) = E$ .

**Beispiel.** Sei  $M$  wie im vorigen Beispiel und sei  $U$  offen in  $M$ . Dann ist  $U$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$  und für  $a \in U$  ist  $T_a(U) = E$ .

**Definition.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$  und  $a \in M$ . Ein Element  $v \in \mathbb{R}^N$  heißt Normalenvektor an  $M$  in  $a$ , wenn  $\langle v | w \rangle = 0 \forall w \in T_a(M)$ . Die Menge aller Normalenvektoren an  $M$  in  $a$  wird mit  $N_a(M)$  bezeichnet und heißt der Normalenraum an  $M$  in  $a$ .

$$N_a(M) = T_a(M)^\perp \quad (2.5)$$

Dies ist ein  $(N - n)$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^N$ .

**Beispiel.**

$$N_a(S^{n-1}) = \mathbb{R} \cdot a \quad (2.6)$$

**Definition.** Sei  $M$  eine Hyperfläche in  $\mathbb{R}^N$ . Ein Einheitsnormalenfeld auf  $M$  ist eine stetige Abbildung  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit  $\nu(a) \in N_a(M)$  und  $\|\nu(a)\|_2 = 1 \forall a \in M$ .

**Beispiel.** Auf  $S^{N-1}$  gibt es zwei Normalfelder:  $\nu_+$  und  $\nu_-$

$$\nu_+(a) := a, \nu_-(a) := -a \quad (2.7)$$

**Definition.** Seien  $U, V$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus.  $\varphi$  heißt orientierungserhalten, wenn  $\det(D\varphi(x)) > 0$ .

**Definition.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$  mit  $n \geq 1$ .

- Zwei Karten  $\varphi_1 : W_1 \rightarrow V_1$  und  $\varphi_2 : W_2 \rightarrow V_2$  von  $M$  heißen gleichorientiert, wenn die Parametertransformation  $\tau(\varphi_1, \varphi_2)$  orientierungserhalten ist.
- Ein Atlas  $\mathcal{A}$  von  $M$  heißt orientiert, wenn je zwei seiner Karten gleich orientiert sind.
- $M$  heißt orientierbar, wenn  $M$  einen orientierten Atlas besitzt.
- Zwei Atlanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  von  $M$  heißen äquivalent, wenn jede Karte von  $\mathcal{A}$  mit jeder Karte von  $\mathcal{B}$  gleichorientiert ist.
- Eine Äquivalenzklasse  $\sigma$  orientierter Atlanten von  $M$  heißt eine Orientierung von  $M$ . Man nennt dann  $(M, \sigma)$  eine orientierte Untermannigfaltigkeit.

**Bemerkung.** Meist sagt man: “Sei  $M$  eine orientierte Manigfaltigkeit.” statt “Sei  $(M, \sigma)$  eine orientierte Manigfaltigkeit”.

**Beispiel.** • Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$ . Es gebe eine Karte  $\varphi$  von  $M$ , so dass  $M$  das Bild von  $\varphi$  ist. Dann ist  $\{\varphi\}$  ein orientierter Atlas von  $M$ ; daher ist  $M$  orientierbar.

- Ist insbesondere  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , so ist  $U$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  mit Atlas  $\{\text{id}_U\}$ . Er definiert eine Orientierung von  $U$ , die sogenannte kanonische Orientierung.

**Bemerkung.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$  mit  $n \geq 1$  und  $M$  orientierbar.

- Es gibt einen orientierten Atlas  $\mathcal{A}$  von  $M$ , so dass alle Karten von  $\mathcal{A}$  den Definitionsbereich  $\mathbb{R}^n$  haben.
- Sei  $\mathcal{A}$  ein orientierter Atlas wie in a). Ist  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  eine Karte in  $\mathcal{A}$ , so definieren wir  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  durch  $\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_n) := \varphi(-x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Dann ist  $\tilde{\varphi}$  eine Karte von  $M$  und  $\varphi$  und  $\tilde{\varphi}$  sind nicht gleichorientiert. Sei  $\tilde{\mathcal{A}}$  die Menge aller  $\tilde{\varphi}$  mit  $\varphi \in \mathcal{A}$ . Dann ist  $\tilde{\mathcal{A}}$  ein orientierter Atlas von  $M$  und  $\mathcal{A}$  und  $\tilde{\mathcal{A}}$  sind nicht äquivalent. Deswegen besitzt  $M$  mindestens zwei verschiedene Orientierungen (falls  $M \neq \emptyset$ ).
- Ist  $M$  orientierbar und zusammenhängend, so besitzt  $M$  genau zwei Orientierungen.

**Satz 2.** Sei  $M$  eine Hyperfläche in  $\mathbb{R}^N$ . Dann sind äquivalent:

- $M$  ist orientierbar

b) Es gibt ein Einheitsnormalenfeld auf  $M$

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$  b): Sei  $\mathcal{A}$  ein orientierter Atlas von  $M$ . Sei  $a \in M$ . Wähle eine Karte  $\varphi : W \rightarrow V$  in  $\mathcal{A}$  mit  $a \in V$  und sei  $b \in W$  mit  $\varphi(b) = a$ . Die lineare Abbildung  $D\varphi(b)$  ist injektiv. Ist  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$ , so ist  $D\varphi(b)e_1, \dots, D\varphi(b)e_n$  eine Basis von  $T_a(M)$  (nach Satz 1). Sei  $\nu(a)$  dasjenige der beiden Elemente vom Normalenraum  $N_a(M)$  mit Norm 1, für das die Matrix mit den Spalten  $D\varphi(b)e_1, \dots, D\varphi(b)e_n, \nu(a)$  positive Determinante hat. Dann ist  $\nu$  ein Einheitsnormalenfeld auf  $M$ .  $\square$

**Beispiel.** •  $S^{n-1}$  ist orientierbar, weil es Einheitsnormalenfelder auf  $S^{n-1}$  gibt

• Das Möbiusband ist nicht orientierbar

**Bemerkung.** Der Beweis von Satz 2 liefert für Hyperflächen eine Bijektion von der Menge der Orientierungen auf die Menge der Einheitsnormalenfelder.

**Satz 3.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$ ,  $n \geq 2$ . Sei  $X$  eine abgeschlossene  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von  $M$ . Dann ist die  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $\partial X$  von  $\mathbb{R}^N$  orientierbar.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A}$  ein Atlas von  $M$ , der zur gegebenen Orientierung gehört und folgende Eigenschaften hat:

- Ist  $\varphi : W \rightarrow V$  eine Karte aus  $\mathcal{A}$  mit  $V \cap \partial X \neq \emptyset$ , so ist  $\varphi$  randadaptiert, d.h.  $\varphi(\mathbb{R}_-^n \cap W) = X \cap V$ ,  $\varphi(\partial \mathbb{R}_-^n \cap W) = \partial X \cap V$ ,  $\mathbb{R}_-^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$ .
- Wenn man eine Karte  $\varphi : W \rightarrow V$  hat, so setzt man  $W_0 := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, x) \in W\}$ ,  $V_0 := V \cap \partial X$ .  $\varphi_0 : W_0 \rightarrow V_0$  sei gegeben durch  $\varphi_0(x) := \varphi(0, x)$ .

Dann bilden die  $\varphi_0$  einen orientierten Atlas von  $\partial X$ .  $\square$

**Definition.** Ist  $\sigma$  eine Orientierung von  $M$ , so liefert der Beweis von Satz 3 eine Orientierung von  $\partial X$ , welche die von  $\sigma$  induzierte Orientierung von  $\partial X$  heißt.

## §14 Glatte Zerlegung der Eins

**Definition.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Mit  $\text{Supp}(f)$  bezeichnet man den Abschluss der Menge  $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  in  $X$  und nennt  $\text{Supp}(f)$  den Träger von  $f$ .

**Bemerkung.** Ziel: gegeben eine Untermannigfaltigkeit  $M$  von  $\mathbb{R}^N$ , ein Atlas  $\mathcal{A}$  von  $M$  und eine  $C^\infty$ -Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  (Funktion). Wir wollen  $f$  als Summe von  $C^\infty$ -Funktionen  $f_\alpha$  schreiben, so dass gilt: Für jedes  $\alpha$  gibt es eine Karte  $\varphi : W \rightarrow V$  in  $\mathcal{A}$  mit  $\text{Supp}(f_\alpha) \subseteq V$ .

**Lemma.** Definiert man  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

so ist  $f$  von der Klasse  $C^\infty$ .

*Beweis.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t) = 0 \quad (2.9)$$

deswegen ist  $f$  stetig in 0. Für  $x > 0$  ist  $f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp(-\frac{1}{x^2})$ , allgemeiner  $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2})$ , wobei jedes  $P_n$  ein Polynom ist. Also  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$ . Deswegen ist  $f$  von der Klasse  $C^\infty$ .  $\square$

**Satz 1.** Es gibt eine  $C^\infty$ -Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- $g(x) > 0$  für  $x \in ]-1, 1[^n$
- $\text{Supp}(g) = [-1, 1]^n$

*Beweis.* Sei  $f$  wie im Lemma. Definiere  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f_1(x) := f(1+x)f(1-x)$ . Dann ist  $f_1 \geq 0$  und  $\text{Supp}(f_1) = [-1, 1]$ . Sei  $g(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_1(x_n)$ .  $\square$

**Satz 2.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $X$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Seien  $A_1, \dots, A_m$  offene Teilmengen von  $U$  mit  $X \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_m$ . Dann gibt es  $C^\infty$ -Funktionen  $g_1, \dots, g_m : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- $g_j(x) \geq 0 \quad \forall x \in U, \forall j$

- $\sum_{j=1}^m g_j(x) \leq 1 \quad \forall x \in U$
- $\forall j$  ist  $\text{Supp}(g_j)$  kompakt und enthalten in  $A_j$
- $\forall x \in X$  ist  $\sum_{j=1}^m g_j(x) = 1$

Man nennt die Menge  $g_1, \dots, g_m$  eine der Überdeckung  $\{a_1, \dots, a_m\}$  untergeordnete Zerlegung der Eins auf  $X$ .

*Beweis.* Nach Satz 1 gibt es eine  $C^\infty$ -Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) > 0 \quad \forall x \in ]-1, 1[^n$  und  $\text{Supp}(g) = [-1, 1]^n$ .  $\forall x \in X$  wähle ein  $k_x \in \{1, \dots, m\}$  mit  $x \in A_{k_x}$ , ein  $r_x > 0$  mit  $B_{r_x}(x) \subseteq A_{k_x}$  und einen Diffeomorphismus  $\varphi_x$  von  $B_{r_x}(x)$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $\varphi_x(x) = 0$ . Definiere  $f_x : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_x(y) = \begin{cases} g(\varphi_x(y)) & \text{wenn } y \in B_{r_x}(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.10)$$

Dann ist  $f_x \geq 0$ , glatt,  $C^\infty$  und  $f_x(x) > 0$ .  $\text{Supp}(f_x)$  ist kompakt und  $\subseteq A_{k_x}$ . Sei  $C_x := \varphi_x^{-1}(]-1, 1[^n)$ . Dann ist  $C_x$  offen mit  $x \in C_x$ . Also bilden die  $C_x$  mit  $x \in X$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Weil  $X$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $(x_1, \dots, x_N)$  mit  $X \subseteq C_{x_1} \cup \dots \cup C_{x_N}$ . Für  $j = 1, \dots, m$  sei  $h_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$h_j = \sum_{i \in [1, \dots, N]_{k_{x_i}=j}} f_{x_i} \quad (2.11)$$

Dann ist  $h_j$  glatt; es ist

- $h_j \geq 0$  auf  $U$
- $\text{Supp}(h_j)$  ist kompakt und  $\subseteq A_j$
- Für  $x \in X$  ist  $\sum_{j=1}^m h_j(x) > 0$

Sei  $h := \sum_{j=1}^m h_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $h$  aus  $C^\infty$ . Sei  $K := \text{Supp}(h)$ . Dann ist  $K$  kompakt und  $X \subseteq K$ .  $\partial K$  ist eine kompakte Teilmenge von  $U \setminus X$ . Wende das bisher Bewiesene an auf

- $U \setminus X$  statt  $U$
- $\partial K$  statt  $X$

Man erhält (statt  $h$ ) eine glatte Funktion  $\tilde{h} : U \setminus X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- $\tilde{h} \geq 0$  auf  $U \setminus X$
- $\tilde{K} := \text{Supp}(\tilde{h})$  ist kompakt und enthalten in  $U \setminus X$
- Für  $x \in \partial K$  ist  $\tilde{h}(x) > 0$

Wir können  $\tilde{h}$  auf ganz  $U$  fortsetzen zu einer glatten Funktion durch  $\tilde{h}(x) := 0 \quad \forall x \in X$ . Definiere  $g_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g_j(x) := \begin{cases} \frac{h_j(x)}{h(x) + \tilde{h}(x)} & \text{falls } h(x) + \tilde{h}(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.12)$$

Dann ist  $g_j$  glatt,  $g_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^m g_j(x) = \frac{h(x)}{h(x) + \tilde{h}(x)} \leq 1$ , falls  $h(x) + \tilde{h}(x) \neq 0$ .  $\text{Supp}(g_j) = \text{Supp}(h_j)$  ist kompakt und  $\subseteq A_j$ . Für  $x \in X$  ist  $h(x) > 0$  und  $\tilde{h}(x) = 0$ , also  $\sum_{j=1}^m g_j(x) = \frac{h(x)}{h(x)} = 1$ .  $\square$



## Kapitel 3

# Alternierende Multilinearformen