

# 1 Grundlagen

## 1.1 Mengenlehre

### 1.1.1 Erste Definitionen und Beispiele

Die Mengenlehre ist einen nicht trivialen Teil der Mathematik. Wir werden Mengen nicht richtig definieren.

Wir werden mit den folgenden vagen (aber für unseren Zwecke ausreichenden) Definition arbeiten.

**Definition 1.1.1** Eine **Menge**  $M$  ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekte (die man **Elemente** nennt) zu einem neuen Objekt.

**Axiom 1.1.2 (Extensionalitätsaxiom)** Zwei Mengen  $M$  und  $N$  sind genau dann **gleich**, wenn sie die selbe Elementen enthalten.

**Notation 1.1.3** Wir werden die folgende Symbole benutzen.

$\{ \}$	die Mengenklammern:	z.b. $M = \{0; 1; 2\}$ .
$\in$	ist Element von:	z.b. $1 \in \{0; 1; 2\}$ .
$\notin$	ist nicht Element von:	z.b. $3 \notin \{0; 1; 2\}$ .
$\forall$	alle:	z.b. $\forall n \in \mathbb{N}$ es gilt $n \geq 0$ .
$\exists$	es gibt:	z.b. $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass $n \geq 5$ .
$\Rightarrow$	dann:	z.b. $n \geq 1 \Rightarrow n \geq 0$ .

**Bemerkung 1.1.4** Mit Symbole:  $M = N$  genau dann, wenn

$$x \in M \Rightarrow x \in N \text{ und } x \in N \Rightarrow x \in M.$$

**Definition 1.1.5** Sei  $M$  eine Menge.

1. Eine **Teilmenge**  $N$  von einer Menge  $M$  ist eine Menge so dass alle elemente in  $N$  auch in  $M$  enthalten sind. Mit Symbole:  $x \in N \Rightarrow x \in M$ .
2. Eine **echte** Teilmenge  $N$  von einer Menge  $M$  ist eine Teilmenge die nicht gleich  $M$  ist.

**Notation 1.1.6** Hier sind weitere Symbole.

$\subseteq, \subset$  ist Teilmenge von: z.b.  $\{0; 1; 2\} \subseteq \{0; 1; 2\}$  oder  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ .  
 $\subsetneq$  ist eine echte Teilmenge von: z.b.  $\{1; 2\} \subsetneq \{0; 1; 2\}$ .

**Bemerkung 1.1.7** Es gilt  $\{0; 1; 2\} = \{2; 0; 1\} = \{0; 0; 1; 2; 2; 2\}$ .

## 1.1.2 Konstruktion in der Mengenlehre

### Aussonderungsaxiom

**Axiom 1.1.8 (Aussonderungsaxiom)** Zu jeder Menge  $M$  und jeder Eigenschaft  $P$  gibt es eine Teilmenge  $N$  von  $M$ , die gerade aus den Elementen von  $M$  mit dieser Eigenschaft besteht.

**Notation 1.1.9** Weitere Symbole.

$|$  mit der Eigenschaft: z.b.  $\{0; 1; 2\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2\}$ .

**Satz 1.1.10** Es gibt eine Menge, die keine Elemente enthält: Man nennt diese Menge die **leere Menge** und bezeichnet sie mit  $\emptyset$ .  $\square$

*Beweis.* Wir behaupten, dass es mindestens eine Menge  $M$  gibt. Dann kann man, dank dem Aussonderungsaxiom die Menge

$$\emptyset = \{x \in M \mid x \neq x\}$$

definieren. Die Menge  $\emptyset$  enthält keine Elemente.  $\blacksquare$

**Bemerkung 1.1.11** Die leere Menge ist in jede Menge enthalten: für jede Menge  $M$  gilt  $\emptyset \subset M$ .

**Satz 1.1.12** Es gibt keine Menge, die jede Menge als Element enthält  $\square$

*Beweis.* Siehe Tutorium 1.  $\blacksquare$

### Vereinigungsaxiom

**Axiom 1.1.13 (Vereinigungsaxiom)**

1. Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen, dann gibt es eine Menge  $M \cup N$ , die **Vereinigung** von  $M$  und  $N$ , die genau alle Elemente von  $M$  und  $N$  enthält. Mit Symbolen

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

2. Verallgemeinerung. Sei  $I$  eine Indexmenge und  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen, dann gibt es eine Menge

$$\bigcup_{i \in I} M_i,$$

die **Vereinigung** von  $(M_i)_{i \in I}$ , die genau alle Elemente von  $M_i$  für alle  $i \in I$  enthält. Mit Symbole

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ so dass } x \in M_i\}.$$

**Beispiel 1.1.14** Here sind Beispiele von Mengen.

1. Die leere Menge  $\emptyset$ .
2. Zu jedes Element  $x \in M$  kan man die einelementige Menge  $\{x\}$  definieren.
2. Zu zwei Elemente  $x$  und  $y$  kann mann die Paarmenge

$$\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\} = \{y\} \cup \{x\} = \{y, x\}$$

definieren. Es ist die Menge, die genau  $x$  und  $y$  enthält.

Aus dem Vereinigungsaxiom und dem Aussonderungsaxiom ergibt sich die Existenz des Durchschnitts von Mengen.

**Satz 1.1.15 (Durchschnitt)**

1. Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen, dann gibt es genau eine Menge  $M \cap N$ , der **Durchschnitt** von  $M$  und  $N$ , die genau die Elementen von  $M$  und  $N$  enthält. Mit Symbole

$$M \cap N = \{x \in M \cup N \mid x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

2. Verallgemeinerung. Sei  $I$  eine Indexmenge und  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen, dann gibt es genau eine Menge

$$\bigcap_{i \in I} M_i,$$

der **Durchschnitt** von  $(M_i)_{i \in I}$ , welche genau die Elemente, die in jeder Menge  $M_i$  für all  $i \in I$  enthalten sind. Mit Symbole

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \left\{ x \in \bigcup_{i \in I} M_i \mid \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i \right\}.$$

**Satz 1.1.16** Seien  $M$ ,  $N$  und  $O$  drei Mengen. Dann gilt.

1.  $M \cup M = M$  und  $M \cap M = M$ .
2.  $M \cup N = N \cup M$  und  $M \cap N = N \cap M$ .
3.  $M \cup (N \cup O) = (M \cup N) \cup O$  und  $M \cap (N \cap O) = (M \cap N) \cap O$

□

*Beweis.* Übung ■

**Satz 1.1.17** Seien  $M$ ,  $N$  und  $O$  drei Mengen. Dann gilt.

$$1. M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O).$$

$$2. M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O). \quad \square$$

*Beweis.* Siehe Übungsblatt 0. ■

**Definition 1.1.18** Das **Komplement** von  $N$  in  $M$  ist die Menge  $M \setminus N$  von elemente die in  $M$  und nicht in  $N$  enthalten sind. Mit Symbole:

$$M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

**Satz 1.1.19** Seien  $M$ ,  $N$  und  $O$  drei Mengen. Dann gilt.

$$1. M \setminus (N \cup O) = (M \setminus N) \cap (M \setminus O).$$

$$2. M \setminus (N \cap O) = (M \setminus N) \cup (M \setminus O). \quad \square$$

*Beweis.* Siehe Übungsblatt 0. ■

## Potenzmengensaxiom

**Axiom 1.1.20** Sei  $M$  eine Menge, dann gibt es genau eine Menge, die **Potenzmenge**  $\mathfrak{P}(M)$  von  $M$ , welche Elemente genau alle Teilmenge von  $M$  sind.

**Beispiel 1.1.21**

$$1. \mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

$$2. \mathfrak{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}.$$

$$3. \mathfrak{P}(\{0; 1; 2\}) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{1; 2\}; \{0; 1; 2\}\}.$$

## Kartesisches Produkt

**Definition 1.1.22 (Kartesisches Produkt)** Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen.

1. Ein **geordnetes Paar** von Elementen  $x \in M$  und  $y \in N$  besteht aus der Angabe eines ersten Elements  $x \in M$  und eines zweiten Elements  $y \in N$ . Paaren werden als  $(x, y)$  geschrieben.

2. Die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus  $M$  und  $N$  heißt das **Kartesische Produkt** und ist durch  $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$  bezeichnet.

**Satz 1.1.23** Es gilt  $(x, y) = (y, x)$  genau dann wenn  $x = y$ . ■

**Beispiel 1.1.24** Sei  $M = \{0; 1; 2\}$  und  $N = \{A, B\}$  dann gilt

$$M \times N = \{(0, A); (0, B); (1, A); (1, B); (2, A); (2, B)\}.$$

## 1.2 Natürliche Zahlen

### 1.2.1 Definition

Wir haben noch keine unendliche Menge, *i.e.* Menge mit unendlichen vielen Elementen, gesehen. Wir brauchen eigentlich ein neues Axiom dafür.

**Axiom 1.2.1 (Peano Axiome)** Es gibt eine Menge  $\mathbb{N}$ , die Meger der natürlichen Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

- zu jeder  $n \in \mathbb{N}$ , gibt es genau einen Nachfolger  $N(n) \in \mathbb{N}$  (später  $N(n) = n+1$ ).
- Es gibt ein Element  $0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $N(n) \neq 0$ .
- Jede  $n \in \mathbb{N}$  ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahlen.
- Sei  $M$  eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , so dass

$$- 0 \in M$$

$$- n \in M \Rightarrow N(n) \in M$$

dann gilt  $M = \mathbb{N}$  (**Induktionseigenschaftaxiom**).

**Notation 1.2.2** Konkret kann man die natürliche Zahlen wie folgt definieren:  $0$ ,  $1 = N(0)$ ,  $2 = N(1)$ ,  $3 = N(2)$  ...  $n + 1 = N(n)$ .

Man kann mit dieser Definiton die klassische arthmetische Eigenschaften von  $\mathbb{N}$  zurück finden.

**Beispiel 1.2.3** Here sind weitere Beispiele von unendliche Mengen die man dank der Existenz von  $\mathbb{N}$  konstruieren kann.

Die Menge der ganzen Zahlen ist  $\mathbb{Z}$ .

Die Mende der rationale Zahlen ist  $\mathbb{Q}$ .

Die Mende der reelen Zahlen ist  $\mathbb{R}$ .

Die Mende der komplexen Zahlen ist  $\mathbb{C}$ .

### 1.2.2 Induktion

**Satz 1.2.4** Sei  $P$  eine eigenschaft die eine natürliche Zahl haben kann. Wenn  $P(0)$  und  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  wahr sind, dann ist  $P(n)$  wahr für jede  $n \in \mathbb{N}$ . □

*Beweis.* Sei  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ ist wahr}\}$ , dann gilt  $0 \in M$  und  $n \in M \Rightarrow N(n) \in M$ . Vom Induktionseigenschaftaxiom folgt  $M = \mathbb{N}$ . ■

**Beispiel 1.2.5**

1. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .
2. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
3. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

*Beweis.* 1. Sei  $P(n)$  die Eigenschaft

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dann gilt  $P(0)$ . Angenommen, dass  $P(n)$  gilt, dann gilt

$$0 + 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. und 3. Siehe Übungsblatt 0. ■

**1.3 Auswahlaxiom**

Wir geben noch ein Axiom, das nicht von den Anderen abhängt.

**Axiom 1.3.1 (Auswahlaxiom)** Sei  $(M_i)_{i \in I}$  ein Mengensystem so dass für jedes  $i \in I$ , gilt  $M_i \neq \emptyset$  und für jede  $i, j \in I$ , gilt  $M_i \cap M_j = \emptyset$ . Dann gibt es eine Menge  $M$ , so dass für jedes  $i \in I$  die Menge  $M_i \cap M$  genau ein Element enthält.

Dieses Axiom wird später benutzt, um zu beweisen, dass jeder Vektorraum eine Basis enthält.

**1.4 Abbildungen**

**Definition 1.4.1** Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen. Eine **Abbildung**  $f$  von  $M$  nach  $N$  ist eine Vorschrift, durch die jede Elemente  $x \in M$  genau ein Element  $f(x) \in N$  zugeordnet wird. In Symbol man schreibt:

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Die Menge  $M$  heißt **Definitionsbereich** und  $N$  heißt **Wertebereich** der Abbildung  $f$ .

### Beispiel 1.4.2

1. Sei  $M$  eine Menge, es gibt die **identische Abbildung**  $\text{Id}_M : M \rightarrow M, x \mapsto x$ .
2. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .

**Definition 1.4.3** Seien  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow O$ , dann kann man  $f$  mit  $g$  **componieren**. Als Resultat erhält man eine Abbildung  $g \circ f : M \rightarrow O$  definiert durch  $x \mapsto g(f(x))$ .

**Definition 1.4.4** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung und seien  $X \subset M$  und  $Y \subset N$  Teilmengen von  $M$  und  $N$ . Das **Bild** von  $X$  unter  $f$  ist die Teilmenge von  $N$  definiert durch

$$f(X) = \{y \in N \mid \exists x \in X \text{ mit } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Das **Urbild** von  $Y$  ist die Teilmenge von  $M$  definiert durch

$$f^{-1}(Y) = \{x \in M \mid f(x) \in Y\}.$$

Für eine Teilmenge  $\{y\}$  mit einem einzigen Element schreibt man  $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ .

**Beispiel 1.4.5** Sei  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  die Abbildung definiert durch  $x \mapsto x^2$ . Dann gilt  $f(\{-1; 1\}) = \{1\}$  und  $f^{-1}(1) = \{-1; 1\}$ .

**Definition 1.4.6** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung.

1. Die Abbildung  $f$  heißt **injektiv** wenn, für alle  $x, x' \in M$  gilt die Implikation  $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$  (oder  $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ ).
2. Die Abbildung  $f$  heißt **surjektiv** wenn,  $f(M) = N$ .
3. Die Abbildung  $f$  heißt **bijektiv** wenn sie injektiv und surjektiv ist.

**Satz 1.4.7** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Die Abbildung  $f$  ist bijektiv genau dann wenn existiert eine Abbildung  $g : N \rightarrow M$  mit  $g \circ f = \text{Id}_M$  und  $f \circ g = \text{Id}_N$ .

Für  $f$  bijektiv ist die Abbildung  $g$  eindeutig definiert. □

*Beweis.* Angenommen  $f$  sei bijektiv. Sei  $y \in N$ . Als  $f$  surjektiv ist, existiert ein Element  $x \in M$  mit  $f(x) = y$ . Das Element  $x$  ist von  $y$  eindeutig definiert weil für  $x' \in M$  mit  $f(x) = f(x')$  gilt  $x = x'$ . Man definiert  $g : N \rightarrow M$  mit  $g(y) = x$ . Dann gilt  $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$  und  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ .

Die Abbildung  $g$  ist eindeutig: sei  $h : N \rightarrow M$  mit  $h \circ f = \text{Id}_M$  und  $f \circ h = \text{Id}_N$ , dann gilt für  $y = f(x) \in N$ :  $h(y) = g(f(x)) = x = g(y)$ . Da  $f$  surjetiv gilt die Gleichheit  $h(y) = g(y)$  für alle  $y \in N$ .

Angenommen es gibt  $g$ , dann für  $x, y \in M$  mit  $f(x) = f(y)$  gilt  $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$ , so dass  $f$  injektiv ist. Sei  $y \in N$  dann gilt  $y = f(g(y))$  und  $f$  ist surjektiv. ■

**Definition 1.4.8** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine bijektive Abbildung, dann ist die einzige Abbildung  $g$  so dass  $g \circ f = \text{Id}_M$  und  $f \circ g = \text{Id}_N$  die **Umkehrabbildung** genannt und wird mit  $f^{-1} : N \rightarrow M$  geschrieben.

**Bemerkung 1.4.9** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung und  $Y$  eine Teilmenge von  $N$ . Die Urbild  $f^{-1}(Y)$  ist für jede (auch nicht bijektive) Abbildung definiert und für  $y \in N$  ist die Urbild  $f^{-1}(y)$  für jede (auch nicht bijektive) Abbildung definiert.

**Satz 1.4.10** Seien  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow O$  zwei Abbildungen. Dann gilt.

1.  $f$  und  $g$  injektiv  $\Rightarrow g \circ f$  injektiv.

2.  $f$  und  $g$  surjektiv  $\Rightarrow g \circ f$  surjektiv.

3.  $f$  und  $g$  bijektiv  $\Rightarrow g \circ f$  bijektiv. □

*Beweis.* 1. Seien  $x, y \in M$ , so dass  $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ , dann gilt  $g(f(x)) = g(f(y))$  und als  $g$  injektiv ist, gilt  $f(x) = f(y)$ . Als  $f$  injektiv ist, gilt  $x = y$  so dass  $g \circ f$  injektiv ist.

2. Sei  $z \in O$ . Als  $g$  surjektiv ist, gibt es  $y \in N$  mit  $g(y) = z$ . Als  $f$  surjektiv ist, gibt es  $x \in M$  mit  $f(x) = y$ . Dann gilt  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$  und  $g \circ f$  ist surjektiv.

3. Folgt aus 1. und 2. ■

**Satz 1.4.11** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen nicht leere Mengen.

1. Die Abbildung  $f$  ist injektiv genau dann wenn, es eine Abbildung  $g : N \rightarrow M$  mit  $g \circ f = \text{Id}_M$  gibt.

2. Die Abbildung  $f$  ist surjektiv genau dann wenn, es eine Abbildung  $h : N \rightarrow M$  mit  $f \circ h = \text{Id}_N$  gibt.

3. Wenn  $f$  bijektiv ist dann sind die beide Abbildungen  $g : N \rightarrow M$  und  $h : N \rightarrow M$  gleich die Umkehrabbildung  $f^{-1}$ . □

*Beweis.* Siehe Tutorium 2. ■

**Definition 1.4.12** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung, der **Graph** von  $f$  ist die Teilmenge  $\Gamma(f) \subset M \times N$  von  $M \times N$  definiert durch

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}.$$

**Definition 1.4.13** Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen, dann ist  $N^M$  die **Menge aller Abbildungen** von  $M$  nach  $N$ .



### 1.4.1 Abbildungen und Mengenoperationen

**Satz 1.4.14** Seien  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung,  $M_1, M_2 \subset M$  und  $N_1, N_2 \subset N$  dann gilt:

1.  $M_1 \subset M_2 \Rightarrow f(M_1) \subset f(M_2)$  und  $N_1 \subset N_2 \Rightarrow f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2)$ .
2.  $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$  und  $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$ .
3.  $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$  und  $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$ .
4.  $f(M_1 \setminus M_2) \subset f(M_1) \setminus f(M_2)$  und  $f^{-1}(N_1 \setminus N_2) = f^{-1}(N_1) \setminus f^{-1}(N_2)$ . □

*Beweis.* Siehe Übungsblatt 2. ■

## 1.5 Relationen

### 1.5.1 Erste Definition

**Definition 1.5.1** Sei  $M$  eine Menge. Eine **Relation** auf der Menge  $M$  ist eine Teilmenge  $R$  von  $M \times M$ . Seien  $x, y$  zwei Elemente in  $M$ , für  $(x, y) \in R$  schreibt man  $x \sim_R y$ .

**Beispiel 1.5.2** 1. Sei  $M$  eine Menge, die Relation  $R = \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$  ist die Gleichheitsrelation. Es gilt  $x \sim_R y \Leftrightarrow x = y$ .

2. Sei  $M = \mathbb{N}$  und  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$ . Dann ist  $R$  eine Relation auf  $\mathbb{N}$ .

3. Sei  $M$  eine Menge und  $R = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset\}$ . Dann ist  $R$  eine Relation auf  $M$ .

**Definition 1.5.3** Sei  $R$  eine Relation auf einer Menge  $M$ .

1.  $R$  heißt **reflexiv**, wenn  $x \sim_R x$  für alle  $x \in M$ .
2.  $R$  heißt **symmetrisch**, wenn  $x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$ .
3.  $R$  heißt **antisymmetrisch**, wenn  $(x \sim_R y \text{ und } y \sim_R x) \Rightarrow x = y$ .
4.  $R$  heißt **transitiv**, wenn  $(x \sim_R y \text{ und } y \sim_R z) \Rightarrow x \sim_R z$ .

**Beispiel 1.5.4** 1. Sei  $M$  eine Menge, die Gleichheitsrelation  $R = \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$  ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv.

2. Sei  $M = \mathbb{N}$  die Relation  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$  ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv aber nicht symmetrisch.

3. Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Die Relation  $R = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset\}$  auf der Menge  $M$  ist nicht reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch und nicht transitiv.

## 1.5.2 Ordnungsrelationen

**Definition 1.5.5** Sei  $M$  eine Menge und  $R$  eine Relation auf  $M$ . Die Relation  $R$  heißt **Ordnungsrelation**, wenn  $R$  reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

**Beispiel 1.5.6** 1. Sei  $M$  eine Menge, die Gleichheitsrelation ist eine Ordnungsrelation.

2. Sei  $M = \mathbb{N}$  die Relation  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$  ist eine Ordnungsrelation.

3. Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Die Relation  $R = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset\}$  ist nicht eine Ordnungsrelation.

## 1.5.3 Äquivalenzrelationen

**Definition 1.5.7** Sei  $R$  eine Relation auf einer Menge  $M$ . 4.  $R$  heißt **Äquivalenzrelation**, wenn  $R$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

**Beispiel 1.5.8** 1. Sei  $M$  eine Menge, die Gleichheitsrelation ist eine Äquivalenzrelation.

2. Sei  $M = \mathbb{N}$  die Relation  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$  ist keine Äquivalenzrelation.

3. Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Die Relation  $R = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset\}$  ist keine Äquivalenzrelation.

**Lemma 1.5.9** Sei  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x - y \text{ ist gerade}\}$ . Dann ist  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{N}$ . □

*Beweis.* Siehe Übungsblatt 2. ■

**Satz 1.5.10** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Dann ist  $R = \{(x, y) \in M \mid f(x) = f(y)\}$  eine Äquivalenzrelation. □

*Beweis.* Als  $f(x) = f(x)$ , gilt  $x \sim_R x$ . Für  $x \sim_R y$ , gilt  $f(x) = f(y)$  und  $f(y) = f(x)$ , so dass  $y \sim_R x$  gilt. Für  $x \sim_R y$  und  $y \sim_R z$ , gilt  $f(x) = f(y)$  und  $f(y) = f(z)$ , so dass  $f(x) = f(z)$  und  $x \sim_R z$  gilt. ■

### 1.5.4 Quotient

**Definition 1.5.11** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $M$ .

1. Die **Äquivalenzklasse**  $[x]$  von  $x$  ist die Menge aller Elemente  $y$  mit  $x \sim_R y$ . Mit Symbol:

$$[x] = \{y \in M \mid x \sim_R y\}.$$

2. Die Gesamtheit der Äquivalenzklassen bildet eine Teilmenge der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$  die man  $M/R$  bezeichnet und **Quotientenmenge von  $M$  nach  $R$** . Mit Symbol

$$\begin{aligned} M/R &= \{N \in \mathfrak{P}(M) \mid \exists x \in M \text{ mit } N = [x]\} \\ &= \{[x] \in \mathfrak{P}(M) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

**Lemma 1.5.12** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $M$  und sei  $x, y \in M$ . Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:

1.  $[x] = [y]$ ;
2.  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ ;
3.  $x \sim_R y$ .

□

*Beweis.* 1.  $\Rightarrow$  2. Trivial:  $x \in [x] = [y]$  also  $x \in [x] \cap [y]$ .

2.  $\Rightarrow$  3. Sei  $z \in [x] \cap [y]$ . Dann gilt  $x \sim_R z$  und  $y \sim_R z$ . Als  $R$  symmetrisch ist gilt  $z \sim_R y$  und von der transitivität gilt  $x \sim_R y$ .

3.  $\Rightarrow$  1. Sei  $z \in [x]$ , dann gilt  $x \sim_R z$ . Als  $R$  symmetrisch und transitiv ist gilt  $y \sim_R z$  i. e.  $z \in [y]$  und  $[x] \subset [y]$ . Die Inklusion  $[y] \subset [x]$  kann man mit der selben Methode beweisen. ■

**Korollar 1.5.13** Sei  $O \in M/R$  eine Äquivalenzklasse dann gilt  $x \in O \Leftrightarrow [x] = O$ .

**Definition 1.5.14** Sei  $M$  eine Menge, eine **Partition** von  $M$  ist eine Familie  $(M_i)_{i \in I}$  von Teilmengen  $M_i \subset M$  so dass

- $M_i \cap M_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ,
- $\bigcup_{i \in I} M_i = M$ .

**Satz 1.5.15** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $M$ . Dann bildet die Familie von Äquivalenzklassen eine Partition von  $M$ . □

*Beweis.* Aus Lemma 1.5.12 gilt  $[x] \cap [y] = \emptyset$  für  $[x] \neq [y]$ . Außerdem, gibt es für jedes Element  $x \in M$  eine Klasse:  $[x]$  so dass  $x \in [x]$ . Es gilt daher

$$M \subset \bigcup_{[x] \in M/R} [x].$$

Die umgekehrte Inklusion gilt auch da  $[x] \subset M$  für alle  $[x]$ . ■

**Definition 1.5.16** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $M$ . Die Abbildung  $p_R : M \rightarrow M/R$  definiert durch  $x \mapsto [x]$  heißt die **kanonische Projektion**.

**Lemma 1.5.17** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $M$ .

1. Die kanonische Projektion  $p_R$  ist surjektiv.

2. Es gilt für  $x, y \in M$ :  $[x] = [y] \Leftrightarrow p_R(x) = p_R(y)$ . □

*Beweis.* 1. Sei  $[x] \in M/R$ , dann gilt  $[x] = p_R(x)$ .

2. Trivial aus der Definition. ■

**Satz 1.5.18** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf einer Menge  $M$ . Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung, so dass  $[x] = [y] \Rightarrow f(x) = f(y)$ . Dann gibt es eine Abbildung  $\bar{f} : M/R \rightarrow N$ , so dass  $f = \bar{f} \circ p_R$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ p_R \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ M/R & & \end{array}$$

*Beweis.*  $M/R$  ist eine Menge von Teilmengen von  $M$ . Sei  $O \in M/R$  (z.b.  $O = [z]$  für  $z \in M$ ). Wenn die Abbildung  $\bar{f}$  existiert, dann gilt für  $x \in O$ :  $f(x) = \bar{f}(p_R(x)) = \bar{f}([x]) = f(O)$  i.e.  $\bar{f}(O) = f(x)$ .

Seien  $x, y \in O$ , dann gilt aus Lemma 1.5.17:  $[x] = O = [y]$  und  $f(x) = f(y)$ . Die Abbildung  $O \rightarrow N$  definiert durch  $x \mapsto f(x)$  ist konstant gleich  $n \in N$ . Wir definieren  $\bar{f}(O) = n$ . Es gilt  $n = f(x)$  für jeder  $x \in O$ .

Es gilt  $\bar{f} \circ p_R(x) = \bar{f}([x]) = f(x)$ . ■