Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2013

Wilhelm Singhof

Teil I: Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

1. Normierte und metrische Räume: Definitionen und Beispiele

Def. Sei V ein (reeller) Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\| \,.\, \| : V \to \mathbb{R}\,,\; v \mapsto \| v \|\;,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

(1) $\| v \| \geq 0$ für alle $v \in V$.

(2) $\| v \| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

(3) $\| \alpha v \| = | \alpha | \cdot \| v \|$ für $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$ für alle $v, w \in V$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *normierter Raum* ist ein Paar $(V, \| \,.\, \|)$, wobei V ein Vektorraum und $\| \,.\, \|$ eine Norm auf V ist. Meist sagt man: "Sei V ein normierter Raum" statt "sei $(V, \| \,.\, \|)$ ein normierter Raum".

Beispiel: Auf $V = \mathbb{R}^n$ erhält man Normen $\| \,.\, \|_1$, $\| \,.\, \|_\infty$ und $\| \,.\, \|_2$ folgendermaßen: Ist $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so sei

$$\begin{aligned} \| v \|_1 &:= | x_1 | + \ldots + | x_n |, \\ \| v \|_\infty &:= \max\{ | x_1 |, \ldots, | x_n | \}, \\ \| v \|_2 &:= (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Um die Dreiecksungleichung für $\| \,.\, \|_2$, die sog. *Euklidische Norm*, nachzuweisen, braucht man:

Satz 1. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sind $v = (x_1, \ldots, x_n),\; w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$| x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n | \leq \| v \|_2 \cdot \| w \|_2 \,.$$

Bem. Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\| v \|_\infty \leq \| v \|_2 \leq \| v \|_1 \leq n \cdot \| v \|_\infty$.

Allgemeiner gilt: Zwei Normen $\| \,.\, \|$ und $| \,.\, |$ auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive reelle Zahlen a, A gibt mit

$$a \; \| v \| \leq | v | \leq A \; \| v \| \;\; \forall\, v \in V.$$

Def. Sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden vier Eigenschaften:

(I) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

(II) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(III) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

(IV) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x, y, z \in X$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge und d eine Metrik auf X ist. Man sagt oft „X ist metrischer Raum " statt „(X, d) ist metrischer Raum".

Beispiel: Sei V ein normierter Raum. Definiere $d : V \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \| x - y \| .$$

Dann ist V ein metrischer Raum.

Beispiel: Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$, so wird Y mit der Einschränkung von d auf $Y \times Y$ ein metrischer Raum.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann heißt die Menge

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$$

die *offene Kugel* und

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$$

die *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r.

2. Einige grundlegende topologische Begriffe

Def. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt A *offen in* X, wenn gilt: Ist $x \in A$, so existiert ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq A$.

Satz 1. Eine offene Kugel in einem metrischen Raum X ist offen in X.

Satz 2. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

a) X und $\emptyset$ sind offen in X.

b) Ist I irgendeine Menge und sind die A_i mit $i \in I$ offen in X, so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen in X.

c) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $A_1, \ldots, A_n$ offen in X, so ist $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ offen in X.

Beispiel: $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ ist offen in $\mathbb{R}$. Aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt *Umgebung* von x in X, wenn es eine offene Teilmenge A von X gibt mit

$$x \in A \subseteq U.$$

Eigenschaften von Umgebungen:

(1) Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

   (a) U ist Umgebung von x.

   (b) Es gibt ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq U$.

(2) Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.

(3) Ist U Umgebung von x und $V \supseteq U$, so ist V Umgebung von x.

(4) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von x ist eine Umgebung von x.

Beispiel: Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit den Normen $\| \, . \, \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Diese drei Normen besitzen dieselben offenen Mengen.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.
x heißt *Häufungspunkt* von A, falls in jeder Umgebung von x ein von x verschiedener Punkt von A liegt.
x heißt *Berührungspunkt* von A, falls in jeder Umgebung von x ein Punkt von A liegt.

Bem. x ist Berührungspunkt von $A \iff x \in A$ oder x ist Häufungspunkt von A.

Satz 3. und Def. Sei X metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

(a) A enthält alle Häufungspunkte von A.

(b) A enthält alle Berührungspunkte von A.

(c) $X \setminus A$ ist offen in X.

Wenn A diese Eigenschaften hat, so heißt A *abgeschlossen* in X.

Satz 4. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

1) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

2) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Satz 5. Sei X ein metrischer Raum und A eine endliche Teilmenge von X. Dann ist A abgeschlossen in X.

Def. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *Grenzwert* der Folge (x_n), wenn eine der vier folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ für $n \geq N$.
2. $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x_0) = 0$ im Sinne von Analysis I.
3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ für $n \geq N$.
4. Für jede Umgebung U von x_0 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$.

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. Wenn (x_n) den Grenzwert x_0 besitzt, so sagt man, dass (x_n) gegen x_0 *konvergiert* und schreibt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ oder $x_n \to x_0$.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\| \, . \, \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Sei $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $x^k = (\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$ und sei $x^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n$.
Genau dann ist $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^0$, wenn für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq n$ gilt: $\lim\limits_{k \to \infty} \xi_\nu^k = \xi_\nu^0$.

Bem. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

a) x ist Berührungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \to x$.

b) x ist Häufungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \neq x$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x$.

c) A ist abgeschlossen in $X \iff$ ist (x_n) eine Folge in A, so dass $x_0 = \lim x_n$ in X existiert, so ist $x_0 \in A$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$. Dann heißt x ein *innerer Punkt* von A, wenn A eine Umgebung von x ist. Sei $\mathring{A}$ die Menge aller inneren Punkte von A; sie heißt das *Innere* von A.

Satz 6. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist $\mathring{A}$ die größte offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist.

Satz 7. Ist V ein normierter Raum, $x \in V$, $r > 0$ und $A := \overline{B}_r(x)$, so ist $\mathring{A} = B_r(x)$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Sei $\overline{A}$ die Menge aller Berührungspunkte von A in X. Sie heißt der *Abschluss* von A.

Satz 8. a) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

b) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A umfasst.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$.
x heißt *Randpunkt* von A in X, wenn x Berührungspunkt von A und von $X \setminus A$ ist.
Sei ∂A die Menge der Randpunkte von A in X, also $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
∂A heißt der *Rand* von A in X.

Bem. ∂A ist abgeschlossen in X.
X ist die disjunkte Vereinigung von $\mathring{A}$, ∂A und $(X \setminus A)^\circ$.

3. Stetige Abbildungen

Def. Seien $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $x_0 \in X$. Dann heißt f *stetig im Punkt* x_0, wenn eine der folgenden 3 äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass gilt: Ist $x \in X$ mit $d(x_0, x) < \delta$, so ist $d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$.
3. Zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subseteq V$.

Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Beispiele:1) Eine konstante Abbildung ist stetig.

2) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist stetig.

3) Seien X, Y, Z metrische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, $x_0 \in X$. Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig ist, so ist $g \circ f : X \to Z$ in x_0 stetig.

Satz 1. Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:

a) f ist stetig.

b) Ist A offen in Y, so ist $f^{-1}(A)$ offen in X.

c) Ist B abgeschlossen in Y, so ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X.

d) Ist (x_n) eine konvergente Folge in X, so ist $(f(x_n))$ konvergente Folge in Y und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.

Satz 2. Seien X, Y metrische Räume, $f, g : X \to Y$ stetig.
Dann ist $A := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X.

Satz 3. Sei X ein metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $A := \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ abgeschlossen in X.

Bem. Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ mit Abbildungen $f_k : X \to \mathbb{R}$. Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\| \cdot \|_\infty$, $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_1$.
Genau dann ist f stetig, wenn alle f_k stetig sind.

Def. Eine Teilmenge X eines normierten Raumes V heißt *beschränkt*, wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $\| v \| \leq M$ für alle $v \in X$.

Satz 4. Sei X eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und $f : X \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $f(X)$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Insbesondere nimmt f auf X sein Maximum und sein Minimum an.

4. Partielle Ableitungen

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Für $i = 1, \dots, n$ sei $U_i := \{t \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U\}$.
Dann ist U_i eine offene Umgebung von x_i in $\mathbb{R}$.
Man definiert $F_i : U_i \to \mathbb{R}$ durch

$$F_i(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

f heißt *im Punkt x partiell differenzierbar*, wenn für $i = 1, \dots, n$ die Funktion F_i in x_i differenzierbar ist. Schreibe dann

$$D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := F_i'(x),$$

und nenne dies die *i-te partielle Ableitung* von f in x.
f heißt *partiell differenzierbar*, wenn es in jedem Punkt von U partiell differenzierbar ist.

Bem. a)Man berechnet die i-te partielle Ableitung, indem man f als Funktion der i-ten Variablen allein auffasst und die anderen Variablen konstant hält.
b) Für $n = 2$ schreibt man meist (x, y) statt (x_1, x_2) und $\frac{\partial f}{\partial x}$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Für $n = 3$ schreibt man oft (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3).

Beispiel: $f(x, y) = e^{xy} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$.

Beispiel: Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

In jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f offensichtlich partiell differenzierbar. f ist aber auch in $(0, 0)$ partiell differenzierbar:
$f_1(\xi) = f(\xi, 0) = 0$ und $f_2(\xi) = f(0, \xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R} \Longrightarrow D_1 f(0, 0) = 0$ und $D_2 f(0, 0) = 0$.
f ist also auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar.
Aber f ist in $(0, 0)$ *nicht* stetig: Denn für $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, ist $f(x, x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x^2} = \dfrac{1}{2}$, während $f(0, 0) = 0$.

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in U. Wenn alle partiellen Ableitungen $D_1 f, \ldots, D_n f : U \to \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sind, so kann man $D_j D_i f := D_j(D_i f)$ bilden und sagt, dass f zweimal partiell differenzierbar ist. Induktiv definiert man, was es für $k \in \mathbb{N}$ bedeutet, dass f *k-mal partiell differenzierbar* ist. Schreibe auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := D_j D_i f \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := D_i^2 f := D_i D_i f \text{ usw.}$$

Wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind (dazu gehört insbesondere, dass f selbst als partielle Ableitung der Ordnung 0 stetig ist), so sagt man, f sei *von der Klasse* C^k. Wenn f stetige partielle Ableitungen von jeder Ordnung hat, so heißt f *von der Klasse* C^∞ oder *glatt*. Schließlich heißt f *von der Klasse* C^0, wenn es stetig ist.

Satz 1. (Satz von H. A. Schwarz) Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2. Sei $a \in U$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a).$$

Von nun an schreiben wir die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren. Wir schreiben also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^T \ .$$

Ist X eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so ist f von der Form

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_m)^T$$

mit $f_i : X \to \mathbb{R}$.

Bez. Ist U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so erhält man eine Abbildung

$$\nabla f = \text{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$$

durch $\nabla f(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$.
∇f heißt der *Gradient* von f.

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$. f heißt *partiell differenzierbar* (bzw. *von der Klasse* C^k), wenn alle f_i partiell differenzierbar (bzw. von der Klasse C^k) sind. Man schreibt dann für $x \in U$:

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$Df(x)$ heißt die *Funktionalmatrix* oder die *Jacobimatrix* oder die *Ableitung* von f an der Stelle x.
$Df(x)$ ist eine $m \times n$- Matrix; ihre i-te Zeile ist der transponierte Gradient von f_i an der Stelle x.
Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$, so ist $Df(x) \cdot \xi \in \mathbb{R}^m$.

5. Differenzierbare und stetig differenzierbare Abbildungen

Satz 1. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \dots, f_m)^T : U \to \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Abbildung, so dass alle Funktionen $D_j f_i : U \to \mathbb{R}$ stetig sind. Sei $x \in U$ fest.
Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$, so definiere $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$ durch

$$f(x+\xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi).$$

Dann ist

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\| \xi \|} = 0.$$

(Dies soll heißen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\| \xi \| < \delta$ und $\xi \neq 0$ gilt:

$$x + \xi \in U \text{ und } \frac{\| \varphi(\xi) \|}{\| \xi \|} < \varepsilon.)$$

Def. Ist U offen in $\mathbb{R}^n, x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so heißt f *differenzierbar* in x, wenn f in x partiell differenzierbar ist und wenn Folgendes gilt:
Definiert man $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$ durch

$$f(x+\xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi),$$

so ist $\lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{\varphi(\xi)}{\| \xi \|} = 0$.

Satz 2. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $x \in U$. Wenn f in x differenzierbar ist, so ist f in x stetig.

Für den Beweis braucht man:

Lemma Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig.
Es gibt ein $\alpha \geq 0$ mit $\| A\xi \| \leq \alpha \| \xi \|$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Folgerung aus Satz 1 und Satz 2: Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen $D_j f_i$ alle stetig, so ist f stetig, d.h. f ist von der Klasse C^1, m.a.W. f ist stetig differenzierbar.
Allgemeiner: Ist f k-mal partiell differenzierbar und sind alle k-ten partiellen Ableitungen stetig, so ist f von der Klasse C^k.

Beispiel: Sei A eine reelle $m \times n$-Matrix. Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $f(x) := A \cdot x$. Dann ist f von der Klasse C^∞. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $Df(x) = A$, denn ist $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, so

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \text{ für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

also $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$. Alle höheren partiellen Ableitungen von f sind 0.

Für den Beweis der Kettenregel brauchen wir:

Satz 3. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$. Es gebe eine $m \times n$-Matrix A mit

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\| \xi \|} (f(x+\xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dann ist f differenzierbar in x und $Df(x) = A$.

Dies zeigt, wie man den Begriff der Differenzierbarkeit weiter verallgemeinern kann: Sind V, W endlich dimensionale normierte Räume, ist U offen in V, ist $f : U \to W$ eine Abbildung und ist $x \in U$, so heißt f differenzierbar an der Stelle x, wenn es eine lineare Abbildung $A : V \to W$ gibt, so dass

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\| \xi \|}(f(x+\xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dieses A ist dann eindeutig bestimmt; man bezeichnet es mit $Df(x)$ und nennt es die Ableitung von f an der Stelle x.

Satz 4. (Kettenregel) Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, V offen in $\mathbb{R}^m$ und seien $g : U \to \mathbb{R}^m$ und $f : V \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar mit $g(U) \subseteq V$. Dann ist die Abbildung $f \circ g : U \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar und

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \;\; \forall\, x \in U.$$

(Dabei steht auf der rechten Seite das Produkt der Matrizen $Df(g(x))$ und $Dg(x)$.) Sind f und g von der Klasse C^k mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist auch $f \circ g$ von der Klasse C^k.

Spezialfall: Ist $p = 1$, also $f \circ g : U \to \mathbb{R}$, so ist

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Dabei sind die Variablen in $\mathbb{R}^m$ mit $y_1, \ldots, y_m$ bezeichnet.

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $U_v := \{t \in \mathbb{R} \,|\, x + tv \in U\}$ eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$. Definiere $F_v : U_v \to \mathbb{R}$ durch

$$F_v(t) := f(x + tv).$$

Wenn F_v in 0 differenzierbar ist, so heißt

$$D_v f(x) := F_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x))$$

die *Richtungsableitung* von f im Punkt x in Richtung v.

Bem. $D_{e_i} f = D_i f$.

Bez. Für $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$, $w = (w_1, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sei

$$< v, w >:= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

also $\| v \|_2 = < v, v >^{\frac{1}{2}}$.

Satz 5. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung v und

$$D_v f(x) = < v, \nabla f(x) > .$$

Anschauliche Interpretation des Gradienten: Der Vektor $\mathrm{grad} f(x)$ gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f an.

6. Mittelwertsatz und Taylor-Formel

Der Mittelwertsatz aus Analysis I lautet: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]\,a, b\,[$. Dann gibt es ein $\xi \in \,]\,a, b\,[$ mit

$$(\star) \qquad f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

In dieser Form lässt sich der Mittelwertsatz nicht auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern. Betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = (\cos x, \sin x).$$

Dann ist $f(0) = f(2\pi)$, aber $Df(x) \neq \binom{0}{0}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aus $(\star)$ folgt: Wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $|f'(\xi)| \leq M$ für alle $\xi \in]a, b[$, so ist $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |\,b - a|$. Dies lässt sich verallgemeinern.

Def. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. Dann heißt f *(Riemann-) integrierbar*, wenn alle f_i integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int_a^b f(x)\,dx := \Big(\int_a^b f_1(x)\,dx, \dots, \int_a^b f_m(x)\,dx\Big) \in \mathbb{R}^m.$$

Bem. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ Riemann-integrierbar, so ist $\|\ f\ \| : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intergierbar und

$$\Big\| \int_a^b f(x)\,dx \Big\| \leq \int_a^b \|\ f(x)\ \|\,dx.$$

(Dabei ist $\|\ .\ \|$ eine der Normen $\|\ .\ \|_\infty$, $\|\ .\ \|_1$, $\|\ .\ \|_2$.)
Dies benutzen wir beim Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1. (Mittelwertsatz) Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1. Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke

$$\{x + t\xi \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

zwischen x und $x + \xi$ ganz in U liegt. Dann gibt es ein $M \geq 0$, so dass

$$\|Df(x + t\xi) \cdot v\| \leq M\|v\| \ \ \forall\, t \in [0, 1]\,, \ \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n,$$

und für jedes solches M ist

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq M \cdot \|\xi\|.$$

Satz 2. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und habe die folgende Eigenschaft:
Je zwei Punkte von U können durch einen Streckenzug verbunden werden, der ganz in U verläuft. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant.

Bez. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

a) Ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, so sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + a_n,$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \ \ldots \ \cdot \alpha_n!.$$

Ein solches α heißt *n-Multiindex*.

b) Ist α wie in a) und f von der KLasse $C^{|\alpha|}$, so sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dabei ist $D_i^0 f := f$ zu setzen.

c) Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so sei $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$.

Satz 3. (Taylor -Formel) Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^{k+1}.

a) Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke zwischen x und $x + \xi$ in U liegt. Dann ist

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + (k+1) \sum_{|\alpha| = k+1} \int_0^1 (1-t)^k \frac{D^\alpha f(x + t\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha dt.$$

b) Ist $x \in U$ und definiert man

$$R(\xi) := f(x+\xi) - \sum_{|\alpha| \le k+1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$, so ist

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{R(\xi)}{\|\xi\|^{k+1}} = 0.$$

7. Extremwerte und kritische Stellen

Def. Sei X ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. f besitzt in x_0 ein *lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$f(x_0) \ge f(x) \ \ \forall x \in U.$$

f besitzt in x_0 ein *striktes lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$f(x_0) > f(x) \ \ \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Entsprechend definiert man, wann f in x_0 ein *(striktes) lokales Minimum* bzw. *Extremum* besitzt.

Satz 1. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Wenn f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum besitzt, so ist

$$\mathrm{grad} f(x_0) = 0.$$

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Ist $x_0 \in U$ mit $\mathrm{grad} f(x_0) = 0$, so heißt x_0 eine *kritische Stelle* von f.

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2. Ist $x \in U$, so sei $Hf(x)$ die reelle $n \times n$-Matrix (a_{ij}) mit

$$a_{ij} := D_i D_j(x).$$

$Hf(x)$ heißt die *Hessesche Matrix* von f an der Stelle x.

Bem. Nach dem Satz von Schwarz ist $a_{ij} = a_{ji}$, d.h. $Hf(x)$ eine symmetrische Matrix.

Def. Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix.
A heißt *positiv definit*, wenn $\langle A(x), x \rangle > 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
A heißt *negativ definit*, wenn $\langle A(x), x \rangle < 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
A heißt *indefinit*, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle A(x), x \rangle > 0$ und ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle A(y), y \rangle < 0$ gibt.

Satz 2. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2. Sei x_0 eine kritische Stelle von f.

a) Ist $Hf(x_0)$ positiv definit, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Minimum.

b) Ist $Hf(x_0)$ negativ definit, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

c) Ist $Hf(x_0)$ indefinit, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.

Erinnerungen an die Lineare Algebra:
Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Eine komplexe Zahl λ heißt Eigenwert von A, wenn es ein $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Ax = \lambda x$. Mit

$$\chi_A(t) = \det(tI - A)$$

bezeichnen wir das charakteristische Polynom von A. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A.
Ist A eine symmetrische Matrix, so sind alle Eigenwerte von A reell, und es gilt:

- A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.
- A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.
- A ist indefinit genau dann, wenn A einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt.

Kriterium von Hurwitz: Sei $A = (a_{ij})$ symmetrisch,

$$\Delta_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

A positiv definit $\iff \Delta_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$.
A negativ definit $\iff (-1)^k \Delta_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$.

Beispiel 1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 - y^2$ (Sattelfläche)
$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$. Einzige kritische Stelle: $(0,0)$.
$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit. Also besitzt f überhaupt keine lokalen Extrema.

Beispiel 2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 - y^3$.
$\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2, -3y^2)$. Einzige kritische Stelle: $(0,0)$.
$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$, insbesondere $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dies ist weder positiv definit noch negativ definit noch indefinit. In jeder Umgebung von $(0,0)$ nimmt f positive und negative Werte an, besitzt also auch in $(0,0)$ kein lokales Extremum.

Beispiel 3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Kritische Stellen: $(0,0)$ und $(1,1)$.
Man kann Satz 2 anwenden: Kein lokales Extremum in $(0,0)$, striktes lokales Minimum in $(1,1)$.

Teil II: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

8. Beispiele und Problemstellungen

Sei U offen in $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

(a) $(x, \varphi(x)) \in U$,

(b) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$,

so heißt φ eine *Lösung der Differenzialgleichung*

(c) $y' = f(x, y)$;

man nennt (c) eine *explizite gewöhnliche Differenzialgleichung 1.Ordnung.*
Ist $(x_0, y_0) \in U$ und ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (c) mit $x_0 \in I$ und $\varphi(x_0) = y_0$, so sagt man, dass φ die *Anfangsbedingung*

(d) $y(x_0) = y_0$

erfüllt.

Beispiel 1: Sei $U = J \times \mathbb{R}$, wobei J ein offenes Intervall ist, und sei $g : J \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $f : U \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := g(x)$, d.h. betrachte die DGl.

$$y' = g(x).$$

Ihre Lösungen sind die Stammfunktionen von g.

Beispiel 2: Sei $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und $f : U \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) := y$, d.h. betrachte die DGl.

$$y' = y.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ definiere $\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_c(x) := c\, e^x.$$

Dann ist φ_c eine Lösung, und jede andere Lösung entsteht durch Einschränken eines φ_c auf ein Teilintervall. Für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

Beispiel 3: Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = y^2$, d.h. betrachte die DGl.

$$y' = y^2.$$

Sei φ_0 die Nullfunktion. Für $c \in \mathbb{R}$ definieren wir $\varphi_c^+ :]\, c, +\infty\, [\to \mathbb{R}$ und $\varphi_c^- :] - \infty, c\, [\to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_c^{\pm}(x) := \frac{1}{c - x}.$$

Dann sind die Funktionen φ_0, φ_c^+ und φ_c^- Lösungen von $y' = y^2$, und jede Lösung dieser DGl. entsteht daraus durch Einschränkung auf ein Teilintervall. Für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine Lösung, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt und die einen maximalen Definitionsbereich hat.

Beispiel 4: Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = 3\, y^{2/3}$, d.h. betrachte die DGl.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ sei $\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi_c(x) := (x-c)^3.$$

Dann ist φ_c eine Lösung mit $\varphi_c(c) = 0$ und $\varphi_c'(c) = 0$. Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $a < b$ definiere $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_{a,b}(x) := \begin{cases} \varphi_a(x) & \text{für} \quad x \le a \\ 0 & \text{für} \quad a < x < b \\ \varphi_b(x) & \text{für} \quad b \le x. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_{a,b}$ differenzierbar und Lösung von $y' = 3\,y^{2/3}$. Für jede Anfangsbedingung gibt es also unendlich viele verschiedene Lösungen!

Verallgemeinerung: Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ seien stetig. Sei I ein offenes Intervall und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

(a) $\quad (x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in U$,

(b) $\quad \varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ für $i = 1, \ldots, n$,

so heißen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Lösungen des Differenzialgleichungssystems

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Schreibt man $f := (f_1, \ldots, f_n)$ und $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, so schreiben sich die Bedingungen (a) und (b) in der Form

(a) $\quad (x, \varphi(x)) \in U$,

(b) $\quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Statt des Systems (c) schreibt man einfach wieder

$$y' = f(x, y)$$

und nennt weiterhin φ eine Lösung dieser expliziten gewöhnlichen DGl. erster Ordnung.

Existenzsatz von Peano. Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, y_0) \in U$. Dann existiert eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der DGl. $y' = f(x, y)$ mit $x_0 \in I$ und $\varphi(x_0) = y_0$.

Def. Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$.

a) f heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \le L \cdot d(x, y) \;\; \forall\, x, y \in X.$$

b) f heißt *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so dass $f|U$ Lipschitz-stetig ist.

Bem.1: Lipschitz-stetig $\Longrightarrow$ lokal Lipschitz-stetig $\Longrightarrow$ stetig.

Bem.2: Sei X offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig.

Def. Seien X, Y, Z metrische Räume, $U \subseteq X \times Y$ und $f : U \to Z$.

a) f heißt *Lipschitz-stetig im 2. Argument*, wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$d(f(x, y), f(x, \tilde{y})) \le L \cdot d(y, \tilde{y}) \;\; \forall\, (x, y), (x, \tilde{y}) \in U.$$

b) f heißt *lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument*, wenn es für jedes $(x_0, y_0) \in U$ eine Umgebung V von (x_0, y_0) in U gibt, so dass $f|V$ Lipschitz-stetig im 2. Argument ist.

Bem. Sei U offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^k$. Wir bezeichnen die partiellen Ableitungen von f mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

(wenn sie existieren). Wenn $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ existieren und stetige Abbildungen $U \to \mathbb{R}^k$ sind, so ist f lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument.

Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, y_0) \in U$. Ferner sei f lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument. Dann existieren ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der DGl. $y' = f(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\varphi(x_0) = y_0$.

b) Ist $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y' = f(x, y)$ mit $\psi(x_0) = y_0$, so ist $J \subseteq I$ und $\psi = \varphi|\, J$.

Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig. Für jedes kompakte Teilintervall K von I sei $f|(K \times \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-stetig im 2. Argument. Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.
Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der DGl. $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.

Beispiel 5: (Differenzialgleichung mit getrennten Variablen)
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ seien stetig mit $h(y) \neq 0$ $\forall\, y \in J$. Definiere $f(x, y) : I \times J \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := g(x)h(y)$, d.h. betrachte die DGl.

$$y' = g(x)h(y).$$

Heuristisches Lösungsverfahren:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\, dx + c$$

Die linke Seite ist eine Funktion von y, die rechte eine Funktion von x. Löse diese Gleichung nach y auf.
Exakt: Sei $(x_0, y_0) \in I \times J$. Definiere $G : I \to \mathbb{R}$ und $H : J \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt, \quad H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{h(t)}.$$

Dann existiert ein offenes Intervall $I' \subseteq I$ mit $x_0 \in I$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ der DGl. $y' = g(x)h(y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$, und $H(\varphi(x)) = G(x)$ für $x \in I'$.

Beispiel 6: (Homogene lineare DGl.)
Sei I offenes Intervall, $a : I \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := a(x)y$. Die DGl. $y' = f(x, y)$ lautet also

$$y' = a(x)y.$$

Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ von $y' = a(x)y$ miz $\varphi(x_0) = y_0$, und

$$\varphi(x) = y_0 \cdot \exp\big(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\big).$$

Beispiel 7: (Lineare DGl.) Sei I offenes Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := a(x)y + b(x)$. Betrachte also die DGl.

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ von $y' = a(x)y + b(x)$ mit $\psi(x_0) = y_0$:
Sei $\varphi(x) := \exp\big(\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\, dt\big)$. Dann ist φ Lösung der „ zugehörigen homogenen linearen DGl." $y' = a(x)y$, also $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x)$, und $\varphi(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in I$.
Ist ψ irgendeine Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$, so existiert eine C^1-Funktion u mit $\psi(x) = \varphi(x)u(x)$.
$\Rightarrow \psi' = \varphi' u + \varphi u' = a\varphi u + \varphi u' = a\psi + \varphi u'$.
Es ist also $\psi' = a\psi + b$ genau dann, wenn $\varphi u' = b$, also $u' = \frac{b}{\varphi}$
$\Rightarrow u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\, dt +$ const.
Aus $\psi(x_0) = y_0$ folgt: $y_0 = \varphi(x_0)u(x_0) = u(x_0) \Rightarrow \text{const} = y_0$
$\Rightarrow \psi(x) = \varphi(x) \cdot \big(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\, dt\big)$.
(Methode der *Variation der Konstanten.*)

Differenzialgleichungen höherer Ordnung: Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei I ein offenes Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

(a) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in U$,

(b) $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$,

so heißt φ eine Lösung der DGl.

(c) $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Man nennt (c) eine explizite gewöhnliche DGl. n-ter Ordnung.

Reduktion auf ein System von DGln. 1. Ordnung:
Definiere $F : U \to \mathbb{R}^n$ durch

$$F(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) := (y_1, \ldots, y_{n-1}, f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})).$$

Mit $Y := (y_0, \ldots, y_{n-1})$ lautet das System $Y' := F(x, Y)$ ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f(x, y_0, \ldots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Daher gilt:

1) Ist φ eine Lösung von $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, so ist $(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})$ eine Lösung von $Y' = F(x, Y)$.

2) Ist $\Phi = (\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ eine Lösung von $Y' = F(x, Y)$, so ist φ eine Lösung von $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Folgerung aus dem Lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz:
Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ sei stetig und lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument. Sei $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in U$. Dann existiert eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der DGl.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

mit

(a) $\varphi(x_0) = y_0$,

$\varphi'(x_0) = y_1$,

$\vdots$

$\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

(b) Ist $\psi : J \mapsto \mathbb{R}$ Lösung mit $\psi^{(k)}(x_0) = y_k$ für $k = 0, \ldots, n-1$, so ist $J \subseteq I$ und $\psi = \varphi|J$.

Beispiel 8: $y'' = -y$.
Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiere $\varphi_{a,b}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_{a,b}(x) := a \cos x + b \sin x.$$

Dann ist $\varphi_{a,b}$ eine Lösung und alle Lösungen sind von dieser Form.

9. Lineare Differenzialgleichungen

Vorbemerkung 1: Ein *komplexer normierter Raum* besteht aus einem $\mathbb{C}$- Vektorraum V und einer Abbildung $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \| v \|$ mit

(1) $\| v \| \geq 0 \ \ \forall v \in V$

(2) $\| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(3) $\| \alpha v \| = |\alpha| \cdot \| v \|$ für $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$

(4) $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \| \quad \forall v, w \in V$.

Auf $\mathbb{C}^n$ hat man die Normen $\| \, . \, \|_\infty$, $\| \, . \, \|_1$, $\| \, . \, \|_2$, die für $v = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} \| v \|_\infty &:= \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}, \\ \| v \|_1 &:= |z_1| + \ldots + |z_n|, \\ \| v \|_2 &:= (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ist V ein komplexer normierter Raum, so ist der V zugrundeliegende $\mathbb{R}$-Vektorraum $V_\mathbb{R}$ ein reeller normierter Raum. Insbesondere gilt:
V wird durch $d(x, y) := \| x - y \|$ zu einem metrischen Raum; $\| \, . \, \| : V \to \mathbb{R}$ ist stetig; zwei Normen $\| \, . \, \|$ und $\| \, . \, \|'$ auf dem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive Zahlen a, A gibt mit

$$a \| v \| \leq \| v \|' \leq A \| v \| \quad \forall v \in V.$$

Vorbemerkung 2: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Der $\mathbb{K}$-Vektorraum $M(m, n; \mathbb{K})$ der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ wird betrachtet als die Menge der $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.
Wir wählen Normen auf $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$, die beide mit $\| \, . \, \|$ bezeichnet werden. Ist $A \in M(m, n; \mathbb{K})$, so sei

$$\| A \| := \max\{ \| Ax \| \, \big| \, x \in \mathbb{K}^n \text{ und } \| x \| = 1\}.$$

(Beachte: $S := \{x \in \mathbb{K}^n \, \big| \, \| x \| = 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$. Daher nimmt die stetige Funktion $x \mapsto \| Ax \|$ auf S ihr Maximum an.) Es gilt:

(1) Damit hat man eine Norm auf $M(m, n; \mathbb{K})$.

(2) Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ und alle $A \in M(m,n;\mathbb{K})$ ist $\| Ax \| \leq \| A \| \cdot \| x \|$.

Ist $m = n$, so wählt man die beiden Ausgangsnormen gleich. Es ist dann:

(3) $\| AB \| \leq \| A \| \cdot \| B \|$ für alle $A, B \in M(n,n;\mathbb{K})$.

Def. Sei I ein offenes Intervall, $A : I \to M(n,n;\mathbb{R})$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Definiere $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f(x,y) := A(x) \cdot y + b(x).$$

Dann heißt $y' = f(x,y)$ ein *System von n linearen DGln. 1. Ordnung* oder kurz eine *lineare DGl. 1. Ordnung.* Ist dabei $b(x) = 0 \;\; \forall x \in I$, so heißt das System *homogen.*

Satz 1. Sei I ein offenes Intervall, $A : I \to M(n,n;\mathbb{R})$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ seien stetig. Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.
Dann besitzt das System $y' = A(x)y + b(x)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.
(In Zukunft verstehen wir unter einer Lösung einer solchen linearen DGl. immer eine auf ganz I definierte Lösung.)

Bem. Wir identifizieren $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ vermöge

$$(z_1, \ldots, z_n) \longleftrightarrow (\operatorname{Re} z_1, \cdots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Im} z_n).$$

Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, also ein $A \in M(n,n;\mathbb{C})$, wird dann mit einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, also einer Matrix aus $M(2n,2n;\mathbb{R})$, identifiziert: Ist $A = C + iD$ mit $C, D \in M(n,n;\mathbb{R})$, so wird A identifiziert mit

$$\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix} \in M(2n,2n;\mathbb{R}).$$

Def. Sei I ein offenes Intervall (in $\mathbb{R}$), $A : I \to M(n,n;\mathbb{C})$ und $b : I \to \mathbb{C}^n$ seien stetig. Definiere $f : I \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ durch $f(x,y) := A(x) \cdot y + b(x)$. Dann ist $y' = f(x,y)$ mit obigen Identifikationen ein System von 2n linearen DGln. 1. Ordnung. Wir nennen es ein *System von n linearen komplexen DGln. 1. Ordnung* oder kurz *lineare DGl. 1. Ordnung.*

Satz 2. Sei I ein offenes Intervall, $A : I \to M(n,n;\mathbb{K})$ sei stetig, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

a) Die Lösungen der DGl.

$$y' = A(x)y$$

bilden einen $\mathbb{K}$-Vektorraum L der Dimension n.

b) Wählt man ein festes $x_0 \in I$, so erhält man einen Isomorphismus von L auf $\mathbb{K}^n$ durch $\varphi \mapsto \varphi(x_0)$.

Bem. Bei einem homogenen System von n linearen DGln. 1. Ordnung handelt es sich also darum, n linear unabhängige Lösungen $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ zu finden. Alle anderen Lösungen ergeben sich dann als Linearkombinationen. Für $n > 1$ gibt es kein allgemeines Verfahren, um Lösungen zu finden!

Beispiel: $y_1' = y_2$
$y_2' = -y_1$

Zwei Lösungen φ^1, φ^2 sind gegeben durch

$$\varphi^1(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \;\; \varphi^2(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

Dann bilden φ^1 und φ^2 eine Basis des Lösungsraums.

Satz 3. Sei I ein offenes Intervall, $A : I \to M(n, n; \mathbb{K})$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ seien stetig. Sei L der Lösungsraum der homogenen DGl.

$$y' = A(x) \cdot y$$

und M die Menge aller Lösungen von

$$y' = A(x) \cdot y + b(x).$$

Ist $\psi_0 \in M$, so ist $M = \psi_0 + L := \{\psi_0 + \varphi \big| \varphi \in L\}$.

Bem. Hat man also eine Basis $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ des Lösungsraums der homogenen DGl. $y' = A(x)\, y$, so muss man nur noch *eine* Lösung ψ der inhomogenen DGl. $y' = A(x)\, y + b(x)$ finden. Dies geschieht mit der Methode der *Variation der Konstanten*:

Man definiert $\Phi : I \to M(n, n; \mathbb{K})$ durch $\Phi := (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ und sucht ψ in der Form $\psi(x) = \Phi(x)\, u(x)$ mit $u : I \to \mathbb{K}^n$. Man erhält

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} b(t)\, dt + \text{ const.}$$

Beispiel: $\quad y_1' = y_2$

$\qquad\qquad y_2' = -y_1 + x$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} = \Phi(x)^{-1}$$

$$u(x) = \begin{pmatrix} \cos x + x \sin x - 1 \\ -\sin x + x \cos x \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = \Phi(x)\, u(x) = \begin{pmatrix} x - \sin x \\ 1 - \cos x \end{pmatrix}$$

Def. Sei I ein offenes Intervall und seien

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann heißt

$$y^{(n)} = a_0(x)\, y + a_1(x) y' + \ldots + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + b(x)$$

eine *lineare DGl. n-ter Ordnung*. Ist $b = 0$, so heißt sie *homogen*.

Satz 4. a) Sei L die Menge aller Lösungen der homogenen DGl.

$$y^{(n)} = a_0(x)\, y + \ldots + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}.$$

Dann ist L ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

b) Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L$, so bilden $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ genau dann eine Basis von L, wenn für ein und damit für alle $x \in I$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0.$$

c) Ist M die Menge aller Lösungen der inhomogenen DGl.

$$y^{(n)} = a_0(x)\, y + \ldots + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + b(x)$$

und ist $\psi_0 \in M$, so ist $M = \psi_0 + L$.

Bem. Auch für die lineare DGl. 2. Ordnung gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren.

10. Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Def. Ist $A \in M(n;\mathbb{K}) := M(n,n;\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^n$, so heißt

$$y' = Ay$$

eine homogene lineare DGl. mit konstanten Koeffizienten. Ihre Lösungen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Def. Sei X ein metrischer Raum.

a) Eine Folge (x_n) in X heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

b) X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

c) Ein normierter Raum heißt *Banach-Raum*, wenn er vollständig ist.

Bem. Jeder endlich-dimensionale normierte Raum ist ein Banach-Raum.

Def. Sei V ein normierter Raum und (a_n) eine Folge in V.

a) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, wenn die Folge $(a_1 + \ldots + a_k)_k$ in V konvergiert.

b) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| a_n \|$ reeller Zahlen konvergiert.

Bem. In einem Banach-Raum ist jede absolut konvergente Reihe konvergent, und man kann mit absolut konvergenten Reihen wie in $\mathbb{R}$ umgehen.

Def. Sei $A \in M(n;\mathbb{K})$. Im Banach-Raum $M(n;\mathbb{K})$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ absolut. Dabei setzt man $A^0 = I_n$ für alle $A \in M(n;\mathbb{K})$. Sei

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in M(n;\mathbb{K}).$$

Satz 1. Ist $A \in M(n;\mathbb{K})$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$, so ist die einzige Lösung φ von $y' = A\,y$ mit $\varphi(0) = y_0$ gegeben durch

$$\varphi(x) = e^{xA}\, y_0.$$

Bem. Ist $v_0 \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist $x \mapsto e^{\lambda x}\, v_0$ eine Lösung von $y' = A\,y$.
Wenn A diagonalisierbar ist, so gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{K}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$A\, v_j = \lambda_j v_j.$$

Dann bilden die n Funktionen

$$x \longmapsto e^{\lambda_j x}\, v_j$$

eine Basis des Lösungsraums der DGl. $y' = A\,y$.

Beispiel 1:
$$y_1' = 5y_1 + 3y_2$$
$$y_2' = -6y_1 - 4y_2$$

Die Lösungen sind von der Form

$$y_1(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}$$
$$y_2(x) = -\alpha e^{2x} - 2\beta e^{-x}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Satz 2. Sei $A \in M(n;\mathbb{C})$ und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung der DGl. $y' = A\,y$. Dann ist jedes φ_j eine komplexe Linearkombination der Funktionen

$$x \longmapsto x^k\, e^{\lambda x},$$

wobei λ ein Eigenwert von A und k kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ (sogar kleiner als die Größe des größten Jordan-Kästchens zum Eigenwert λ) ist.

Satz 3. Sei $A \in M(n;\mathbb{R})$ und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y' = A\,y$. Dann ist jedes φ_j reelle Linearkombination der Funktionen

$$x \longmapsto x^k\, e^{ax}\, \cos bx \quad \text{und} \quad x \longmapsto x^k\, e^{ax}\, \sin bx,$$

wobei $a+bi$ die komplexen Eigenwerte von A mit $b \geq 0$ durchläuft und k eine nichtnegative ganze Zahl ist, die kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $a+bi$ von A ist.

Beispiel 2: $y_1' = y_1 + y_2$

$y_2' = y_2$

Die Lösungen sind von der Form

$y_1(x) = \alpha e^x + \beta x e^x$

$y_2(x) = \beta e^x.$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Satz 4. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die DGl.

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0.$$

Es sei

$$x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 = \prod_{j=1}^{m} (x - \lambda_j)^{k_j}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{C}$.
Dann bilden die Funktionen

$$x^k\, e^{\lambda_j x} \text{ mit } 1 \leq j \leq m,\ 0 \leq k < k_j$$

eine Basis des Lösungsraums.

Satz 5. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die DGl.

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0.$$

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen rellen Nullstellen des Polynoms

$$g(x) := x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Seien $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen nicht-reellen Nullstellen von g mit $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$. Für $j = 1, \ldots, s$ sei k_j die Vielfachheit der Nullstelle λ_j. Für $j = r+1, \ldots, s$ sei $\lambda_j = \mu_j + i\,\nu_j$ mit $\mu_j,\, \nu_j \in \mathbb{R}$. Dann bilden die Funktionen

$$\begin{array}{ll} x^p\, e^{\lambda_j x} & (1 \leq j \leq r\ ,\ 0 \leq p < k_j) \\ \left.\begin{array}{l} x^p\, e^{\mu_j x}\, \cos \nu_j x \\ x^p\, e^{\mu_j x}\, \sin \nu_j x \end{array}\right\} & (r < j \leq s\ ,\ 0 \leq p < k_j) \end{array}$$

eine Basis des Lösungsraums.

Beispiel: Die DGl. der gedämpften Schwingung:

$$y'' + 2\mu\, y' + \omega_0^2\, y = 0$$

mit $\mu \geq 0$, $\omega_0 > 0$. Man nennt 2μ den Dämpfungsfaktor und ω_0 die Frequenz der ungedämpften Schwingung.

11. Der Fixpunktsatz von Banach

Def. Sei X eine Menge und $f : X \to X$ eine Abbildung. Dann heißt ein Element $x \in X$ ein *Fixpunkt* von f, wenn $f(x) = x$.

Def. Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt *kontrahierend*, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $C < 1$ gibt, so dass gilt:

$$d(f(x), f(y)) \le C\, d(x, y) \;\; \forall\, x, y \in X.$$

Bem. Eine kontrahierende Abbildung ist (Lipschitz-) stetig.

Satz 1. Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Beweisidee: Man wählt einen beliebigen Startpunkt $x_0 \in X$. Dann ist $\lim_n f^n(x_0)$ der Fixpunkt.

Satz 2. Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $x_0 \in X$, $R > 0$ und $B := \{x \in X \,|\, d(x_0, x) < R\}$. Sei $G : B \to X$ eine Abbildung und es gebe ein $C < 1$, so dass

(1) $d(G(x), G(y)) \le C\, d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in B,$

(2) $d(G(x_0), x_0) < R\,(1 - C)$.

Dann gibt es genau ein $x \in B$ mit $G(x) = x$.

12. Der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Wir formulieren die DGl. $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = x_0$ um in ein Fixpunktproblem:

Lemma 1. Sei I ein offenes Intervall, H offen in $\mathbb{R}^n$, $f : I \times H \to \mathbb{R}^n$ sei stetig, $(x_0, y_0) \in I \times H$. Sei J ein offenes Teilintervall von I mit $x_0 \in J$.
Für eine stetige Abbildung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(J) \subseteq H$ definieren wir eine stetige Abbildung $G(\varphi) : J \to \mathbb{R}^n$ durch

$$(G(\varphi))(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$$

Für ein solches φ sind äquivalent:

1) φ ist Lösung von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.

2) $G(\varphi) = \varphi$.

Um den Fixpunktsatz von Banach anwenden zu können, brauchen wir einen vollständigen metrischen Raum:

Satz 1. Sei I ein kompaktes Intervall und $C(I)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$. Für $f \in C(I)$ sei

$$\| f \| := \max\{|f(x)| \,\big|\, x \in I\}.$$

Damit wird $C(I)$ zu einem Banach-Raum.

Bem. a) Eine Folge (f_n) in $C(I)$ konvergiert genau dann, wenn die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergiert.

b) Allgemeiner sei $C(I; \mathbb{R}^n)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Abbildungen $f : I \to \mathbb{R}^n$ mit der Norm

$$\| f \| := \max\{\| f(x) \|_\infty \,\big|\, x \in I\}.$$

Dann ist auch $C(I; \mathbb{R}^n)$ ein Banach-Raum.

Man wendet nun den Banachschen Fixpunktsatz in der Fassung von §11, Satz 2 an mit $X = C(I; \mathbb{R}^n)$, wobei man für x_0 die konstante Funktion mit Wert y_0 wählt; der Radius R muß geeignet gewählt werden. Man erhält den Lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz (vgl. §8). Dieser Beweis liefert ein praktisch anwendbares Verfahren, um approximativ eine Lösung der DGl. $y' = f(x, y)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = x_0$ zu finden:

Man setzt $\varphi_0(x) := y_0$ für alle x und definiert dann induktiv

$$\varphi_m(x) := y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{m-1}(t))\, dt.$$

Auf einem kleinen Intervall, das x_0 enthält, konvergiert die Funktionenfolge (φ_m) gleichmäßig gegen eine Lösung der DGl..

13. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Der Globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz (siehe §8) wird mit dem Banachschen Fixpunktsatz bewiesen, wobei man auf dem Vektorraum $C(K; \mathbb{R}^n)$ eine Norm geschickt wählen muss. Der Beweis zeigt, dass unter den Voraussetzungen des Globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes Folgendes gilt:

Sei $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige stetige Funktion. Definiere $\varphi_m : I \to \mathbb{R}^n$ induktiv für $m \geq 1$ durch

$$\varphi_m(x) := y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{m-1}(t))\, dt.$$

Dann konvergiert die Folge (φ_m) gegen eine Lösung der DGl. $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, und zwar gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall.

14. Abzählbare Mengen und die Sätze von Arzelà-Ascoli und Peano

Def. Eine Menge X heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Bijektion von $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf X gibt. Insbesondere ist $\emptyset$ eine endliche Menge.

X heißt *abzählbar*, wenn es eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf X gibt.

X heißt *höchstens abzählbar*, wenn X endlich oder abzählbar ist, d.h. wenn es eine Folge (a_n) in X gibt mit $X = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Fakt 1. Eine Teilmenge einer abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.

Fakt 2. Genau dann ist eine Menge X höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf X gibt.

Fakt 3. Sind $X_1, X_2, \ldots$ höchstens abzählbare Teilmengen einer Menge Z, so ist $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots$ höchstens abzählbar.

Beispiele: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

Satz 1. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, d.h. weder endlich noch abzählbar.

Der Beweis erfolgt mit dem sog. Cantorschen Diagonalverfahren; ein ähnliches Verfahren wird auch beim Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli benutzt.

Ergänzungen zu gleichmäßiger Konvergenz und gleichmäßiger Stetigkeit

• Seien X eine Menge, Y ein metrischer Raum und $f_n : X \to Y$ Abbildungen für $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Folge (f_n) *gleichmäßig konvergent* gegen eine Abbildung $f : X \to Y$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ und alle $n \geq N$.

• Sind X, Y metrische Räume und ist (f_n) eine Folge stetiger Abbildungen $f_n : X \to Y$, die gleichmäßig gegen eine Abbildung $f : X \to Y$ konvergiert, so ist f stetig.

• Sind X, Y metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt: Sind $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$, so ist $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

• Ist X eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung, so ist f gleichmäßig stetig.

Lemma 1. Seien X, Y, Z metrische Räume. Gegeben seien eine Folge von Abbildungen $f_n : X \to Y$, die gleichmäßig gegen $f : X \to Y$ konvergiert, und eine gleichmäßig stetige Abbildung $g : Y \to Z$. Dann konvergiert die Folge $(g \circ f_n)_n$ gleichmäßig gegen $g \circ f$.

Lemma 2. Sei X eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Gegeben seien eine Folge von stetigen Abbildungen $f_n : X \to \mathbb{R}^m$, die gleichmäßig gegen eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ konvergiert, und eine stetige Abbildung $g : \mathbb{R}^m \to Z$, wobei Z ein metrischer Raum ist. Dann konvergiert die Folge $(g \circ f_n)_n$ gleichmäßig gegen $g \circ f$.

Def. Seien X, Y metrische Räume, $\mathcal{M}$ eine Menge von Abbildungen von X in Y. Dann heißt $\mathcal{M}$ *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $f \in \mathcal{M}$ und alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt: $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Satz 2 (Arzelà-Ascoli). Sei I ein kompaktes Intervall und $\mathcal{M}$ eine gleichgradig stetige Menge von Abbildungen von I in $\mathbb{R}^k$. Für jedes $x \in I$ gebe es ein $C \geq 0$ mit $\| f(x) \| \leq C$ für alle $f \in \mathcal{M}$. Ist (f_n) eine Folge in $\mathcal{M}$, so enthält (f_n) eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Satz 3 (Existenzsatz von Peano). Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, y_0) \in U$. Dann existiert eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.

Der Beweis ergibt sich in naheliegender Weise aus

Lemma. Sei $K = [x_0, x_1]$ ein kompaktes Intervall, sei $f : K \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $\| f(x, y) \| \leq C$ für alle $(x, y) \in K \times \mathbb{R}^n$. Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine stetige Abbildung $\varphi : K \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt .$$

Zum Beweis dieses Lemmas setzt man zunächst die Funktion f auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ fort. Für jedes $\alpha > 0$ ist es leicht, eine stetige Funktion $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_\alpha(x_0) = y_0$ zu finden, für die gilt:

$$\varphi_\alpha(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_\alpha(t - \alpha))\, dt ,$$

so dass die Menge $\mathcal{M}$ aller $\varphi_\alpha|K$ gleichgradig stetig ist. Nach Arzelà-Ascoli besitzt die Folge $(\varphi_{1/m}|K)_m$ eine Teilfolge, die gleichmäßig gegen eine Funktion φ konvergiert. Mittels Lemma 2 sieht man, dass

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\,.$$