Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2012/13

Wilhelm Singhof

1. Die reellen Zahlen

Mathematische Objekte (z.B. Zahlen, Funktionen, Punkte oder Geraden in der Ebene, ...) können zu *Mengen* zusammengefasst werden. Ist M eine Menge und a ein mathematisches Objekt, so schreibt man $a \in M$, wenn a zu M gehört und nennt a ein *Element* von M; andernfalls schreibt man $a \notin M$.

Beispiel: Sei M die Menge, die aus den beiden natürlichen Zahlen 1 und 2 besteht. Man schreibt $M = \{1, 2\}$. Es ist $1 \in M$, $3 \notin M$.

Sind M und N zwei Mengen und ist jedes Element von N auch Element von M, so nennt man N eine *Teilmenge* von M und schreibt $N \subseteq M$. Zwei Mengen M und N heißen *gleich* (in Zeichen $M = N$), wenn sie dieselben Elemente enthalten, also genau dann, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ ist.

Die Menge, die keine Elemente enthält, nennt man die *leere Menge*; sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Für jede Menge M ist $\emptyset \subseteq M$.

Die *reellen Zahlen* sind eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit zwei Rechenvorschriften, die je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ und ein Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, wobei ferner eine Teilmenge $\mathbb{R}_{>0}$ von $\mathbb{R}$ ausgezeichnet ist, deren Elemente die *positiven Zahlen* heißen (wir schreiben $x > 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$), so dass die folgenden drei Gruppen I, II, III von Axiomen erfüllt sind:

I. Algebraische Axiome:

I.a) **Kommutativgesetze:** $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$.
I.b) **Assoziativgesetze:** $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(xy)z = x(yz)$.
I.c) **Null und Eins:** Es gibt Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und $x + 0 = x$ und $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
I.d) **Inverse Elemente:** Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$; zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gibt es eine Zahl $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$.
I.e) **Distributivgesetz:** $x(y + z) = xy + xz$.

Statt ,, $\mathbb{R}$ erfüllt die Axiome I.a) - I.e)" sagt man kurz: ,, $\mathbb{R}$ ist ein Körper ".

II. Anordnungsaxiome:

II.a) Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt genau eine der folgenden 3 Möglichkeiten:

$$x > 0\ ,\ x = 0\ ,\ -x > 0.$$

II.b) Ist $x > 0$ und $y > 0$, so ist $x + y > 0$ und $xy > 0$.

Bevor wir III formulieren können, müssen wir einige Bemerkungen zu den Axiomengruppen I und II machen:

(1) $1 > 0$.

Bew.: Nach I.c) ist $1 \neq 0$. Nach II.a) ist daher entweder $1 > 0$ oder $-1 > 0$. Angenommen, es wäre $-1 > 0$, so wäre $(-1) \cdot (-1) > 0$ nach II.b), also, da $(-1) \cdot (-1) = 1$ nach I., auch $1 > 0$. Damit wäre gleichzeitig $1 > 0$ und $-1 > 0$, im Widerspruch zu II.a). Deswegen ist die Annahme $-1 > 0$ falsch, und es gilt $1 > 0$.

(2) Die Elemente $x \in \mathbb{R}$ mit $-x > 0$ heißen *negativ*. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so schreiben wir $x < y$ oder $y > x$, falls $y - x > 0$.
Insbesondere bedeutet $x < 0$, dass $-x > 0$, also dass x negativ ist.
Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt nach II.a) genau eine der folgenden Möglichkeiten:

$$x > y \ , \ x = y \ , \ x < y.$$

(3) Ist $x < 0$ und $y < 0$, so ist $xy > 0$.

(4) Ist $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$, so ist $x^2 > 0$.

(5) Sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $y < z$, so ist $x < z$.

(6) Ist $x < y$ und $z > 0$, so $xz < yz$.
Ist $x < y$ und $z < 0$, so $xz > yz$.

(7) Ist $x < 0$ und $z > 0$, so ist $xz < 0$.

(8) Ist $x > 0$, so ist $x^{-1} > 0$.

(9) Ist $x < y$ und $z \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $x + z < y + z$.

(10) Ist $0 < x < y$, so ist $y^{-1} < x^{-1}$.

(11) Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so schreiben wir $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$. Für $x \leq y$ schreiben wir auch $y \geq x$.

(12) Ist $0 < x < y$, so ist $x^2 < y^2$.
Sind $x, y > 0$ und ist $x^2 < y^2$, so ist $x < y$.

Def. Ist $x \in \mathbb{R}$, so sei

$$\mid x \mid := \begin{cases} x & , \quad \text{falls } x \geq 0, \\ -x & , \quad \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

$\mid x \mid$ heißt der *Absolutbetrag* von x.

(13) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $\mid -x \mid = \mid x \mid \geq 0$; ist $x \neq 0$, so ist $\mid x \mid > 0$.
$\mid x - y \mid$ ist, anschaulich gesprochen, der Abstand zwischen x und y.

(14) $x \leq \mid x \mid$.

(15) Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $\mid xy \mid = \mid x \mid \cdot \mid y \mid$.

(16) **Dreiecksungleichung:** $\mid x + y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$.

(17) $\mid \mid x \mid - \mid y \mid \mid \leq \mid x - y \mid$.

(18) Es ist $0 < 1 < 2 = 1 + 1 < 3 = 2 + 1 < \ldots$. Diese Zahlen sind also alle voneinander verschieden. Die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet; ihre Elemente heißen *natürliche Zahlen*.
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Die Menge $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}$ heißt die Menge der *ganzen Zahlen*, und $\mathbb{Q} := \{\frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}\}$ heißt die Menge der *rationalen Zahlen*. $\mathbb{Q}$ erfüllt die Axiome I und II.

Kommentar hierzu: Sind M und N zwei Mengen, so sei $M \cup N$ die Menge, die aus allen Elementen besteht, die in M oder in N (oder in beiden) liegen. $M \cup N$ heißt die *Vereinigung* von M und N.

$M \cap N$ sei die Menge, die aus allen Elementen besteht, die in M und in N liegen. $M \cap N$ heißt der *Durchschnitt* von M und N.

$\{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: $-x \in \mathbb{N}$.
Also $\{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\} = \{-1, -2, -3, \ldots\} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt M *nach oben beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c$ für alle $x \in M$. Ein solches c heißt eine *obere Schranke* von M.
M heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq d$ für alle $x \in M$. Ein solches d heißt eine *untere Schranke* von M.
M heißt *beschränkt*, wenn es nach oben und unten beschränkt ist.
Wenn es eine kleinste obere Schranke c von M gibt (d.h. c ist obere Schranke und jedes $c' \in \mathbb{R}$ mit $c' < c$ ist keine obere Schranke von M), so heißt c das *Supremum* von M; schreibe $c =: \sup M$. Wenn es eine größte untere Schranke d von M gibt, so heißt d das *Infimum* von M; schreibe $d =: \inf M$.

III. Vollständigkeitsaxiom: Ist M eine nicht-leere nach oben beschränkte Menge, so besitzt M ein Supremum.

Satz 1: Ist $a \in \mathbb{R}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq a$.

Satz 2: Ist $b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq b$.

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es ein $x_o \in M$ gibt mit $x \leq x_o$ für alle $x \in M$, so heißt x_o das *Maximum* von M; schreibe $x_o =: \max M$. Entsprechend definiert man das *Minimum* $\min M$.

Bem. a) Wenn $\max M$ existiert, so ist M nach oben beschränkt, und $\max M = \sup M$.
b) Wenn M nach oben beschränkt ist und $\sup M \in M$ gilt, so ist $\sup M$ das Maximum von M.

Bez. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \qquad \textit{(abgeschlossenes Intervall)}$$

$$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \qquad \textit{(offenes Intervall)}$$

$$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \qquad \textit{(halboffenes Intervall)}$$

$$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \qquad \textit{(halboffenes Intervall)}$$

Bem. Wir werden in §5 sehen: Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so gibt es genau ein $b \geq 0$ mit $b^n = a$. Wir schreiben

$$b =: \sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} \ .$$

Nach (4) gilt: Ist $a < 0$ und ist n gerade, so gibt es kein $b \in \mathbb{R}$ mit $b^n = a$. Ist $a > 0$ und ist n ungerade, so ist

$$(-\sqrt[n]{a})^n = -a \ .$$

2. Folgen und ihre Grenzwerte

Def. Sind X und Y Mengen, so ist eine *Abbildung* von X in Y eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man schreibt dafür

$$f : X \to Y\,.$$

Def. Ist Y eine Menge, so ist eine *Folge in* Y eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to Y$; man schreibt oft a_n statt $a(n)$ und spricht von der „ Folge (a_n)" statt von der Folge a.
Statt „ Folge in $\mathbb{R}$" sagen wir kurz „ Folge".
Gelegentlich lassen wir auch zu, dass eine Folge a auf einer Teilmenge $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$ von $\mathbb{Z}$ statt auf $\mathbb{N}$ definiert ist und reden dann von der Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$.

Def. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und sei $b \in \mathbb{R}$. Die Folge heißt *konvergent* gegen b, falls gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $| a_n - b | < \epsilon$ für alle $n \geq N$.
Man nennt dann b den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge (a_n) und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ oder „ $a_n \to b$ für $n \to \infty$".

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

Satz 1. Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beispiel (1): Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a_n := a\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Dann heißt (a_n) eine *konstante Folge*. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiel (2): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Beispiel (3): Sei $a_n := (-1)^n$. Dann konvergiert (a_n) nicht.

Beispiel (4): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Def. Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Bem. Genau dann ist (a_n) beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $| a_n | \leq M\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Satz 2. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Def. Eine Folge (a_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt eine *Nullfolge*.

Bem. Sei (a_n) eine Folge. Genau dann ist $a_n \to a$, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

Satz 3. Ist (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkte Folge, so ist $(a_n b_n)$ Nullfolge.

Satz 4. (Rechenregeln für Grenzwerte) (a_n) und (b_n) seien Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$.
1) $a_n + b_n \to a + b$, $a_n - b_n \to a - b$.
2) $a_n b_n \to ab$.
3) Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n, und $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.

Beispiel (5): $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{3n^2 + 1} = \dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} \to \dfrac{1}{3}$

Satz 5. Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen, $a_n \to a$, $b_n \to b$. Falls $a_n \geq b_n$ für fast alle n, so ist $a \geq b$.

Satz 6. (Bernoullische Ungleichung) Sei $x \geq -1$. Dann gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 7. Für $\mid a \mid < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, und für $\mid a \mid > 1$ divergiert die Folge (a^n).

Def. Eine Folge (a_n) heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1} \; \forall \; n$. Sie heißt *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1} \; \forall \; n$. Entsprechend: *(streng) monoton fallend*

Satz 8. Ist (a_n) monoton wachsend und beschränkt, so ist (a_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{ a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beispiel: Neuer Beweis für $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, falls $0 \leq x < 1$:
Sei $a_n := x^n$. Dann ist (a_n) eine monoton fallende beschränkte Folge, die nach Satz 8 gegen ein a konvergiert. Für jedes n ist $a_{n+1} = x \cdot a_n$. Übergang zum Limes liefert $a = x \cdot a$, also $a = 0$.

Def. Sei $(n_k)_{k\geq 1}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in einer Menge X, so erhält man durch $k \mapsto a_{n_k}$ eine neue Folge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ in X, die eine *Teilfolge* von (a_n) heißt.

Bem. a) Eine Teilfolge einer beschränkten Folge ist beschränkt.
b) Wenn (a_n) gegen a konvergiert, so auch jede Teilfolge von (a_n).

Satz 9. Jede Folge (a_n) reeller Zahlen enthält eine monotone Teilfolge.

Beweisidee: Wir nennen eine natürliche Zahl m eine Gipfelstelle, wenn $a_n < a_m$ für alle $n > m$. Wenn es unendlich viele Gipfelstellen gibt, so bilden diese eine monoton fallende Teilfolge. Wenn es nur endlich viele Gipfelstellen gibt, so gibt es eine monoton wachsende Teilfolge.

Satz 10. (Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

(Satz 10 folgt sofort aus Satz 8 und Satz 9.)

Satz 11. (Konvergenzkriterium von Cauchy)
Sei (a_n) eine Folge. Dann sind äquivalent:

(1) (a_n) ist konvergent.

(2) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\mid a_m - a_n \mid < \epsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N$ und $n \geq N$.

(Die Implikation (1)$\Rightarrow$(2) ist ganz leicht. Ist umgekehrt (2) erfüllt, so zeigt man zuerst, dass die Folge beschränkt ist und wendet dann den Satz von Bolzano-Weierstraß an, um die Konvergenz zu folgern.)

3. Reihen

Das Summenzeichen: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so schreibt man

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + \ldots + a_n \ .$$

Statt k darf man auch jeden anderen Buchstaben (außer a und n) nehmen.

Allgemeiner: Sind $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und sind $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so schreibt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \ .$$

Noch allgemeiner: Ist M eine endliche Menge und ist für jedes $k \in M$ eine reelle Zahl a_k gegeben, so ist $\sum\limits_{k \in M} a_k$ die Summe aller Zahlen a_k mit $k \in M$.

Def. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $s_n := a_1 + \ldots + a_n$. Wenn die Folge (s_n) konvergiert, so sagt man, dass *die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert* und schreibt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ für ihren Grenzwert. Wenn (s_n) divergiert, so sagt man, dass *die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergiert*. Die Zahlen s_n heißen die *Partialsummen* von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Hat man allgemeiner eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ reeller Zahlen, so spricht man von der Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Satz 1. Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist (a_n) eine Nullfolge.

Konvention: Wir setzen $x^0 := 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere auch für $x = 0$.

Beispiel (1): Die *geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für $| \ x \ |< 1$ und divergiert für $| \ x \ | \geq 1$. Denn für $x \in \mathbb{R}, \ x \neq 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}.$$

Deswegen gilt für $| \ x \ |< 1$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

Beispiel (2): Die *harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, denn

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \frac{1}{9} + \cdots \ .$$

Beispiel (3): $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = 1$. Denn $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Satz 2. (Kriterium von Leibniz) Sei $(b_n)_{n\geq n_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$.

Der Beweis geht folgendermaßen: Ist s_n die n-te Partialsumme, so überlegt man, dass

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots\ldots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0\ .$$

Daraus folgert man, dass die Folge der s_n konvergiert und dass sie den Grenzwert einschachteln.

Beispiel (4): $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$ konvergiert nach Satz 2.

Def. Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ konvergiert.

Satz 3. Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

(Dies folgt aus dem Konvergenzkriterium von Cauchy.)

Bem.1. $\sum a_n$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Folge der Partialsummen von $\sum \mid a_n \mid$ beschränkt ist.

Bem.2. Wenn $\sum a_n$ absolut konvergiert, so ist $\mid \sum a_n \mid \leq \sum \mid a_n \mid$.

Satz 4. (Majorantenkriterium) Seien (a_n) und (c_n) Folgen mit $\mid a_n \mid \leq c_n\ \forall\ n$. Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. (Man nennt dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ eine *konvergente Majorante* von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.)

Beispiel (5): Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, denn die Reihe aus Beispiel (3) ist eine konvergente Majorante.

Beispiel (6): Sei $k \in \mathbb{N}$ fest mit $k \geq 2$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

Satz 5. (Quotientenkriterium) Es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, so dass $a_n \neq 0$ und $\frac{\mid a_{n+1} \mid}{\mid a_n \mid} \leq q$ für fast alle n . Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beispiel (7): Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (gelesen: n-*Fakultät*) und $0! := 1$. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ konvergiert nach Satz 5 absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}$$

Bem.3. Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent, so ist $\sum (a_n + b_n)$ konvergent und $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.
Ist $\sum a_n$ konvergent und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\sum(\lambda a_n)$ konvergent und $\sum(\lambda a_n) = \lambda \sum a_n$.

Beispiel (8): $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+-\cdots$ ist konvergent und hat die Summe 0. Die Umordnung

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{5}+\underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}_{-\frac{1}{6}}+\frac{1}{7}+\underbrace{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}_{-\frac{1}{8}}++-\cdots$$

ist nach dem Leibniz- Kriterium ebenfalls konvergent, hat aber eine Summe, die $> \frac{1}{2}$ ist. Und die Umordnung

$$\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{17}+\cdots$$

ist divergent.

Def. Seien X und Y Mengen und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) f heißt *surjektiv* oder Abbildung von X *auf* Y, wenn es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.

b) f heißt *injektiv* oder *eineindeutig*, wenn gilt: Sind $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$, so ist $f(x) \neq f(x')$.

c) f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist, wenn es also für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.

Satz 6. (Kommutativität absolut konvergenter Reihen) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und σ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf sich. Setze $b_n := a_{\sigma(n)}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Bem. Man kann beweisen: Ist $\sum a_n$ eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, so gilt:

a) Es gibt eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\sum a_{\sigma(n)}$ divergiert.

b) Ist $w \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\sum a_{\sigma(n)} = w$.

Bem. Man kann für absolut konvergente Reihen auch Assoziativität und Distributivität zeigen; siehe etwa W. Walter: Analysis I. Wir brauchen im Augenblick nur einen Spezialfall (Satz 8).

Binomialkoeffizienten: Man definiert für $n, k \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq k$ und $0 \leq k \leq n$ den *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bem. a) $\binom{n}{0} = 1\,, \binom{n}{n} = 1\,, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

b) Für $k > 0$ ist $\binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$.

c) $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

d) Für $n, k \in \mathbb{Z}$ und $0 < k \leq n$ gilt $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. Insbesondere ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$. Pascalsches Dreieck!

e) $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Satz 7. (Binomischer Lehrsatz) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

(Auch richtig, wenn x, y in einem beliebigen Körper liegen.)

Satz 8. (Ausmultiplizieren absolut konvergenter Reihen) Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, und sei

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Satz 9. (Additionstheorem für die Exponentialfkt.)

$$\exp(x+y) = \exp x \, \exp y \;\; \forall \, x, y \in \mathbb{R}.$$

Dies folgt aus Satz 7 und Satz 8.

4. Stetige Funktionen

Allgemeines über Abbildungen:

I. Bezeichnungen:

- Ist X eine Menge, so bezeichnet man mit id_X oder id die Abbildung $x \mapsto x$ von X in sich (*identische Abbildung* von X).
- Sind X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen, so erhält man eine Abbildung $g \circ f : X \to Z$ durch $g \circ f(x) := g(f(x))$.

- Sind X, Y Mengen und ist $f : X \to Y$ eine Bijektion, so bezeichnet man das Element von X, das von f auf y abgebildet wird, mit $f^{-1}(y)$. Damit erhält man eine Bijektion $f^{-1} : Y \to X$. Es gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X,$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y,$$
$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

II. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Ist $A \subseteq X$, so sei $f(A) := \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y | \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$.
Ist $U \subseteq Y$, so sei $f^{-1}(U) := \{x \in X | f(x) \in U\}$.
Ist $y \in Y$, so sei $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X | f(x) = y\}$.
Das schreibt man auch, wenn f nicht bijektiv ist!

- Sind $U, V \subseteq Y$, so ist

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V),$$
$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

- Sind $A, B \subseteq X$, so ist

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B),$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

- Ist $U \subseteq Y$, so ist $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$. Ist f surjektiv, so gilt Gleichheit.
- Ist $A \subseteq X$, so ist $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Ist f injektiv, so gilt Gleichheit.

III. Sind X, Y Mengen, so ist

$$X \times Y := \{(x, y) | x \in X \ , y \in Y\} \ .$$

Man schreibt $X^2 := X \times X$. Insbesondere ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Ebene.
Ist $D \subseteq X$ und $f : D \to Y$ eine Abbildung, so heißt

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) | x \in D\} \subseteq X \times Y$$

der *Graph* von f.

Ist $D \subseteq \mathbb{R}$, so heißt eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf D definierte *Funktion*.

Def. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann heißt f *stetig in* x_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt: Ist $x \in D$ und $\mid x - x_0 \mid < \delta$, so ist $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Bem. f ist genau dann in x_0 stetig, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft:

$$\mid f(x_0 + h) - f(x_0) \mid < \epsilon$$

für alle $h \in \mathbb{R}$, für die $\mid h \mid < \delta$ und $x_0 + h \in D$.

Beispiel (1): Ist $c \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = c \,\forall\, x \in \mathbb{R}$, so ist f stetig.

Beispiel (2): Ist $f = id_{\mathbb{R}}$, also $f(x) = x \,\forall\, x \in \mathbb{R}$, so ist f stetig.

Bezeichnung: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt, dass $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

Satz 1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig in x_0.

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Beispiel (3): Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$. Dann ist f nicht stetig in 0.

Bez. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann definiert man $f + g : D \to \mathbb{R}$ durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$; entsprechend $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$ (letzteres, falls $g(x) \neq 0$
$\forall\, x \in D$).

Satz 2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind $f + g$, $f - g$, fg und, falls g keine Nullstellen in D hat, auch $\frac{f}{g}$ stetig.

Beispiel (4): Sind $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ feste Zahlen und definiert man $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, so ist f stetig. Eine solche Funktion heißt *Polynom(funktion)*.

Beispiel (5): Sind $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ fest und ist $D := \{x \in \mathbb{R} \mid \ b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \neq 0\}$,so erhält man durch

$$f(x) := \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Sie heißt *gebrochen-rationale Funktion.*

Beispiel (6): Die Funktion exp:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist stetig.

Dafür benutzen wir:

Satz 3. Ist $R_{N+1}(x) := \exp x - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$, so ist

$$\mid R_{N+1}(x) \mid \leq 2 \frac{\mid x \mid^{N+1}}{(N+1)!} \ \text{ für alle } x \text{ mit } \mid x \mid \leq 1 + \frac{N}{2}.$$

Def. $e := \exp(1)$.

Aus Satz 3. folgt: $\mid e - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \mid \leq \frac{2}{(N+1)!}$ für alle $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Damit kann man e mit gewünschter Genauigkeit berechnen:

$$e = 2,71828\ldots\ .$$

Satz 4. Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \in E$ für alle $x \in D$. Definiert man $h : D \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := g(f(x))$, so ist h stetig.

Satz 5. (Zwischenwertsatz) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei γ eine reelle Zahl, die zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$.

Bezeichnungen: Außer den bisher betrachteten (offenen, abgeschlossenen oder halboffenen) Intervallen, die wir auch als *eigentliche Intervalle* bezeichnen, betrachtet man auch *uneigentliche Intervalle*, nämlich die Mengen der Form (mit $a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcl}
[\,a, \infty[\; := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} & , & \text{abg. uneigentliches Intervall} \\
]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} & , & \text{abg. uneigentliches Intervall} \\
]\,a, \infty[\; := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} & , & \text{offenes uneigentliches Intervall} \\
]-\infty, a[\; := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} & , & \text{offenes uneigentliches Intervall} \\
]-\infty, \infty[:= \mathbb{R} & , & \text{offenes u. abg. uneigentliches Intervall.}
\end{array}$$

Als *Intervall* bezeichnen wir ein eigentliches oder ein uneigentliches Intervall. Ein eigentliches abgeschlossenes Intervall heißt *kompaktes Intervall*.

Der folgende Satz ist eine Umformulierung des Zwischenwertsatzes:

Satz 6. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall oder eine einpunktige Menge.

Satz 7. Ist I ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nimmt f auf I sein Maximum und sein Minimum an. (D.h.: Es gibt $x_0, x_1 \in I$ mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für alle $x \in I$.