

---

# Numerik

---

Marlis Hochbruck

SS 2010 – WS 2011/12



## INHALTSVERZEICHNIS

1. <i>Numerische Integration</i> . . . . .	1
1.1 Erste Beispiele von Quadraturformeln . . . . .	1
1.2 Ordnung einer Quadraturformel . . . . .	3
1.3 Integrale mit Gewichtsfunktion . . . . .	4
1.4 Untersuchung des Quadraturfehlers . . . . .	5
1.5 Quadraturformeln mit erhöhter Ordnung . . . . .	8
1.6 Orthogonalpolynome . . . . .	9
1.7 Gauß-Quadraturformeln . . . . .	12
1.8 Numerische Berechnung von Gauß-Quadraturformeln . . . . .	13
1.9 Ein adaptives Programm . . . . .	15
1.10 Konvergenzbeschleunigung mit dem $\epsilon$ -Algorithmus . . . . .	19
2. <i>Interpolation und Approximation</i> . . . . .	23
2.1 Newton'sche Interpolationsformel . . . . .	23
2.2 Fehler bei der Polynominterpolation . . . . .	27
2.3 Tschebyscheff-Interpolation . . . . .	30
2.4 Splineinterpolation . . . . .	35
2.5 Fehler bei der Splineinterpolation . . . . .	39
3. <i>Lineare Gleichungssysteme</i> . . . . .	43
3.1 Gauß-Elimination . . . . .	43
3.2 Wahl der Pivotelemente – Gleitpunktarithmetik . . . . .	46
3.3 Die Kondition einer Matrix . . . . .	50
3.4 Die Stabilität des Gauß-Algorithmus . . . . .	55
3.5 Cholesky-Zerlegung . . . . .	59
3.6 Lineare Ausgleichsrechnung . . . . .	62
3.7 QR-Zerlegung . . . . .	65
3.8 Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse . . . . .	71
4. <i>Nichtlineare Gleichungssysteme</i> . . . . .	75
4.1 Fixpunktiteration . . . . .	75
4.2 Newton-Verfahren . . . . .	78
4.3 Vereinfachtes Newton-Verfahren . . . . .	82
4.4 Das gedämpfte Newton-Verfahren . . . . .	84
4.5 Das Sekantenverfahren . . . . .	84
5. <i>Schnelle Fouriertransformation und Anwendungen</i> . . . . .	87
5.1 Trigonometrische Interpolation und diskrete Fouriertransformation . . . . .	87
5.2 Schnelle Fouriertransformation (FFT) . . . . .	91
5.3 Inverses Faltungsproblem, Regularisierung, Filter . . . . .	94

5.4	Schnelle Poisson-Löser	100
6.	<i>Eigenwerte und Eigenvektoren</i>	105
6.1	Grundlagen	105
6.2	Normalformen	108
6.3	Störungstheorie, Einschließungssätze	111
6.4	Potenzenmethode	116
6.5	QR-Algorithmus	120
6.6	Effiziente Implementierung des QR-Algorithmus	129
6.7	QR-Algorithmus zur Berechnung der Singulärwertzerlegung	134
6.8	Trägheit einer Matrix, Bisektionsverfahren	138
7.	<i>Krylov-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme</i>	145
7.1	Krylov-Verfahren, Arnoldi-Prozess	145
7.2	Verfahren basierend auf dem Arnoldi-Prozess	150
7.3	Nichtsymmetrisches Lanczos-Verfahren	153
7.4	Verfahren basierend auf dem Lanczos-Prozess	156
7.5	Das Verfahren der konjugierten Gradienten	162
7.6	Vorkonditionierung	166
8.	<i>Runge-Kutta-Verfahren</i>	171
8.1	Beispiele von Differentialgleichungen	171
8.2	Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen	173
8.3	Euler-Verfahren	175
8.4	Einfluss von Rundungsfehlern	179
8.5	Runge-Kutta-Verfahren	181
8.6	Taylor-Entwicklung und Bäume	184
8.7	Ordnungsbedingungen für Runge-Kutta-Verfahren	186
8.8	Konstruktion expliziter Runge-Kutta-Verfahren	189
8.9	Schrittweitensteuerung durch eingebettete Runge-Kutta-Verfahren	190
8.10	Stetige numerische Lösung bei Runge-Kutta-Verfahren	192
9.	<i>Mehrschrittverfahren</i>	195
9.1	Adams-Verfahren	195
9.2	BDF-Verfahren	197
9.3	Ordnung von Mehrschrittverfahren	198
9.4	Stabilität von Mehrschrittverfahren	202
9.5	Konvergenz von Mehrschrittverfahren	203
9.6	Variable Schrittweite	206
9.7	Schrittweiten- und Ordnungssteuerung	209
9.8	Numerische Vergleiche	211
10.	<i>Steife Differentialgleichungen</i>	213
10.1	Einführung	213
10.2	Stabilitätsbereiche, $A$ -Stabilität	216
10.3	Mehrschrittverfahren	218
10.4	Ordnungsschranke für $A$ -stabile Mehrschrittverfahren	224
10.5	Kollokationsverfahren	226

10.6	A-stabile Runge-Kutta-Verfahren	230
10.7	Implementierung impliziter Runge-Kutta-Verfahren	233
10.8	Implizites Euler-Verfahren bei Dgl. mit einseitiger Lipschitz-Bedingung	235
10.9	Kontraktive Runge-Kutta-Verfahren	237
10.10	Beispiel von Prothero und Robinson	240
10.11	Konvergenz bei kontraktiven Differentialgleichungen	242
10.12	Existenz von Runge-Kutta-Lösungen	245
10.13	Exponentielle Integratoren	246
11.	<i>Elliptische partielle Differentialgleichungen</i>	257
11.1	Motivation: Eindimensionale Probleme	257
11.2	Ritz-Galerkin-Approximationen	259
11.3	Lineare Splineräume – Methode der finite Elemente	262
11.4	Zweidimensionale Probleme – Green'sche Formel	267
11.5	Variationelle Approximation – Ritz-Galerkin	270
11.6	Einschub: Lineare Operatoren	272
11.7	Lemma von Lax-Milgram, schwache Lösungen	273
11.8	Sobolev-Räume	276
11.9	Dirichlet- und Neumann-Probleme	282
12.	<i>Methode der finiten Elemente</i>	287
12.1	Einführung	287
12.2	Finite Elemente	289
12.3	Zusammensetzen von finiten Elementen	291
12.4	Aufstellen des Galerkin-Systems	292
12.5	Fehlerabschätzungen und Konvergenz: Vorbemerkungen	295
12.6	Fehlerabschätzungen für lineare finite Elemente	296
12.7	Kompakte Einbettungen, Satz von Rellich	302
12.8	Approximationssätze für Polynominterpolation	303
13.	<i>Mehrgitterverfahren</i>	307
13.1	Klassische Iterationsverfahren – Splittingverfahren	307
13.2	Zweigitterverfahren	311
13.3	Mehrgitterverfahren	313
13.4	Skalen von Normen	315
13.5	Gitterabhängige Normen	317
13.6	Konvergenz des Zweigitterverfahrens	320
13.7	Konvergenz des W-Zyklus	323
13.8	Konvergenz in der Energienorm	324
13.9	Fehler bei geschachtelter Iteration	327
14.	<i>Parabolische Differentialgleichungen</i>	329
14.1	Schwache Formulierung parabolischer Probleme	329
14.2	Finite Element-Diskretisierung im Raum	340
14.3	Vollständige Diskretisierung mit dem impliziten Euler-Verfahren	343
14.4	Zeitdiskretisierung mit BDF-Verfahren	345
14.5	Die Burgers-Gleichung	354
14.6	BDF-Verfahren bei nichtlinearen Problemen	360

*Literatur* . . . . . 363