

# Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2013

Wilhelm Singhof

# Teil I: Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

## 1. Normierte und metrische Räume: Definitionen und Beispiele

**Def.** Sei  $V$  ein (reeller) Vektorraum. Eine *Norm* auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \| v \|,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- (1)  $\| v \| \geq 0$  für alle  $v \in V$ .
- (2)  $\| v \| = 0 \iff v = 0$ .
- (3)  $\| \alpha v \| = |\alpha| \cdot \| v \|$  für  $v \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (4)  $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$  für alle  $v, w \in V$  (*Dreiecksungleichung*).

Ein *normierter Raum* ist ein Paar  $(V, \| \cdot \|)$ , wobei  $V$  ein Vektorraum und  $\| \cdot \|$  eine Norm auf  $V$  ist. Meist sagt man: "Sei  $V$  ein normierter Raum" statt "sei  $(V, \| \cdot \|)$  ein normierter Raum".

**Beispiel:** Auf  $V = \mathbb{R}^n$  erhält man Normen  $\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_\infty$  und  $\| \cdot \|_2$  folgendermaßen: Ist  $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , so sei

$$\begin{aligned}\| v \|_1 &:= |x_1| + \dots + |x_n|, \\ \| v \|_\infty &:= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \\ \| v \|_2 &:= (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Um die Dreiecksungleichung für  $\| \cdot \|_2$ , die sog. *Euklidische Norm*, nachzuweisen, braucht man:

### Satz 1. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sind  $v = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , so ist

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \| v \|_2 \cdot \| w \|_2.$$

**Bem.** Für  $v \in \mathbb{R}^n$  ist  $\| v \|_\infty \leq \| v \|_2 \leq \| v \|_1 \leq n \cdot \| v \|_\infty$ .

Allgemeiner gilt: Zwei Normen  $\| \cdot \|$  und  $|\cdot|$  auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive reelle Zahlen  $a, A$  gibt mit

$$a \| v \| \leq |v| \leq A \| v \| \quad \forall v \in V.$$

**Def.** Sei  $X$  eine Menge. Eine *Metrik* auf  $X$  ist eine Abbildung

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden vier Eigenschaften:

- (I)  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$ .
- (II)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
- (III)  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in X$ .

(IV)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  für alle  $x, y, z \in X$  (*Dreiecksungleichung*).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(X, d)$ , wobei  $X$  eine Menge und  $d$  eine Metrik auf  $X$  ist. Man sagt oft „ $X$  ist metrischer Raum“ statt „ $(X, d)$  ist metrischer Raum“.

**Beispiel:** Sei  $V$  ein normierter Raum. Definiere  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Dann ist  $V$  ein metrischer Raum.

**Beispiel:** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $Y \subseteq X$ , so wird  $Y$  mit der Einschränkung von  $d$  auf  $Y \times Y$  ein metrischer Raum.

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $a \in X$  und  $r \in \mathbb{R}$  mit  $r > 0$ . Dann heißt die Menge

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

die *offene Kugel* und

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

die *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt  $a$  und Radius  $r$ .

## 2. Einige grundlegende topologische Begriffe

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$ . Dann heißt  $A$  *offen in  $X$* , wenn gilt: Ist  $x \in A$ , so existiert ein  $r > 0$  mit  $B_r(x) \subseteq A$ .

**Satz 1.** Eine offene Kugel in einem metrischen Raum  $X$  ist offen in  $X$ .

**Satz 2.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

- a)  $X$  und  $\emptyset$  sind offen in  $X$ .
- b) Ist  $I$  irgendeine Menge und sind die  $A_i$  mit  $i \in I$  offen in  $X$ , so ist auch  $\bigcup_{i \in I} A_i$  offen in  $X$ .
- c) Ist  $n \in \mathbb{N}$  und sind  $A_1, \dots, A_n$  offen in  $X$ , so ist  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  offen in  $X$ .

**Beispiel:**  $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$  ist offen in  $\mathbb{R}$ . Aber  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ = \{0\}$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}$ .

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $x \in X$ . Eine Teilmenge  $U$  von  $X$  heißt *Umgebung* von  $x$  in  $X$ , wenn es eine offene Teilmenge  $A$  von  $X$  gibt mit

$$x \in A \subseteq U.$$

**Eigenschaften von Umgebungen:**

- (1) Sei  $x \in X$  und  $U \subseteq X$ . Dann sind äquivalent:
  - (a)  $U$  ist Umgebung von  $x$ .
  - (b) Es gibt ein  $r > 0$  mit  $B_r(x) \subseteq U$ .
- (2) Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.
- (3) Ist  $U$  Umgebung von  $x$  und  $V \supseteq U$ , so ist  $V$  Umgebung von  $x$ .
- (4) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von  $x$  ist eine Umgebung von  $x$ .

**Beispiel:** Betrachte  $\mathbb{R}^n$  mit den Normen  $\| \cdot \|_p$ ,  $p = 1, 2, \infty$ . Diese drei Normen besitzen dieselben offenen Mengen.

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $x \in X$ .

$x$  heißt *Häufungspunkt* von  $A$ , falls in jeder Umgebung von  $x$  ein von  $x$  verschiedener Punkt von  $A$  liegt.

$x$  heißt *Berührungspunkt* von  $A$ , falls in jeder Umgebung von  $x$  ein Punkt von  $A$  liegt.

**Bem.**  $x$  ist Berührungspunkt von  $A \iff x \in A$  oder  $x$  ist Häufungspunkt von  $A$ .

**Satz 3. und Def.** Sei  $X$  metrischer Raum,  $A \subseteq X$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $A$  enthält alle Häufungspunkte von  $A$ .
- (b)  $A$  enthält alle Berührungspunkte von  $A$ .
- (c)  $X \setminus A$  ist offen in  $X$ .

Wenn  $A$  diese Eigenschaften hat, so heißt  $A$  *abgeschlossen* in  $X$ .

**Satz 4.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

- 1)  $\emptyset$  und  $X$  sind abgeschlossen.
- 2) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- 3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

**Satz 5.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A$  eine endliche Teilmenge von  $X$ . Dann ist  $A$  abgeschlossen in  $X$ .

**Def.** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem metrischen Raum  $X$ . Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt *Grenzwert* der Folge  $(x_n)$ , wenn eine der vier folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- 1. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_n, x_0) < \varepsilon$  für  $n \geq N$ .
- 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$  im Sinne von Analysis I.
- 3. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$  für  $n \geq N$ .
- 4. Für jede Umgebung  $U$  von  $x_0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in U$  für  $n \geq N$ .

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. Wenn  $(x_n)$  den Grenzwert  $x_0$  besitzt, so sagt man, dass  $(x_n)$  gegen  $x_0$  *konvergiert* und schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  oder  $x_n \rightarrow x_0$ .

**Beispiel:** Sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit einer der Normen  $\| \cdot \|_p$ ,  $p = 1, 2, \infty$ . Sei  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$  mit  $x^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)$  und sei  $x^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n$ .

Genau dann ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$ , wenn für jedes  $\nu$  mit  $1 \leq \nu \leq n$  gilt:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_\nu^k = \xi_\nu^0$ .

**Bem.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $x \in X$ .

- a)  $x$  ist Berührungspunkt von  $A \iff$  es existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x$ .
- b)  $x$  ist Häufungspunkt von  $A \iff$  es existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $A$  mit  $x_n \neq x$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_n \rightarrow x$ .
- c)  $A$  ist abgeschlossen in  $X \iff$  ist  $(x_n)$  eine Folge in  $A$ , so dass  $x_0 = \lim x_n$  in  $X$  existiert, so ist  $x_0 \in A$ .

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $x \in X$ . Dann heißt  $x$  ein *innerer Punkt* von  $A$ , wenn  $A$  eine Umgebung von  $x$  ist. Sei  $\overset{\circ}{A}$  die Menge aller inneren Punkte von  $A$ ; sie heißt das *Innere* von  $A$ .

**Satz 6.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$ . Dann ist  $\overset{\circ}{A}$  die größte offene Teilmenge von  $X$ , die in  $A$  enthalten ist.

**Satz 7.** Ist  $V$  ein normierter Raum,  $x \in V$ ,  $r > 0$  und  $A := \overline{B}_r(x)$ , so ist  $\overset{\circ}{A} = B_r(x)$ .

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$ . Sei  $\overline{A}$  die Menge aller Berührungspunkte von  $A$  in  $X$ . Sie heißt der *Abschluss* von  $A$ .

**Satz 8.** a)  $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$ .

b)  $\overline{A}$  ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $A$  umfasst.

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$ ,  $x \in X$ .

$x$  heißt *Randpunkt* von  $A$  in  $X$ , wenn  $x$  Berührungspunkt von  $A$  und von  $X \setminus A$  ist.

Sei  $\partial A$  die Menge der Randpunkte von  $A$  in  $X$ , also  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ .

$\partial A$  heißt der *Rand* von  $A$  in  $X$ .

**Bem.**  $\partial A$  ist abgeschlossen in  $X$ .

$X$  ist die disjunkte Vereinigung von  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\partial A$  und  $(X \setminus A)^\circ$ .

### 3. Stetige Abbildungen

**Def.** Seien  $(X, d), (Y, d')$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $x_0 \in X$ . Dann heißt  $f$  *stetig im Punkt*  $x_0$ , wenn eine der folgenden 3 äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$ , so dass gilt: Ist  $x \in X$  mit  $d(x_0, x) < \delta$ , so ist  $d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ .
2. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$  mit  $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$ .
3. Zu jeder Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  mit  $f(U) \subseteq V$ .

Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von  $X$  stetig ist.

**Beispiele:** 1) Eine konstante Abbildung ist stetig.

2) Die identische Abbildung  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  ist stetig.

3) Seien  $X, Y, Z$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen,  $x_0 \in X$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  stetig ist, so ist  $g \circ f : X \rightarrow Z$  in  $x_0$  stetig.

**Satz 1.** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$ . Dann sind äquivalent:

- a)  $f$  ist stetig.
- b) Ist  $A$  offen in  $Y$ , so ist  $f^{-1}(A)$  offen in  $X$ .
- c) Ist  $B$  abgeschlossen in  $Y$ , so ist  $f^{-1}(B)$  abgeschlossen in  $X$ .
- d) Ist  $(x_n)$  eine konvergente Folge in  $X$ , so ist  $(f(x_n))$  konvergente Folge in  $Y$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ .

**Satz 2.** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig.  
Dann ist  $A := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  abgeschlossen in  $X$ .

**Satz 3.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.  
Dann ist  $A := \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$  abgeschlossen in  $X$ .

**Bem.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung. Dann ist  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  mit Abbildungen  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir versehen  $\mathbb{R}^n$  mit einer der Normen  $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$ .  
Genau dann ist  $f$  stetig, wenn alle  $f_k$  stetig sind.

**Def.** Eine Teilmenge  $X$  eines normierten Raumes  $V$  heißt *beschränkt*, wenn es ein  $M \geq 0$  gibt mit  $\|v\| \leq M$  für alle  $v \in X$ .

**Satz 4.** Sei  $X$  eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann ist  $f(X)$  eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Insbesondere nimmt  $f$  auf  $X$  sein Maximum und sein Minimum an.

## 4. Partielle Ableitungen

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ . Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $U_i := \{t \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U\}$ .  
Dann ist  $U_i$  eine offene Umgebung von  $x_i$  in  $\mathbb{R}$ .  
Man definiert  $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F_i(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

$f$  heißt *im Punkt  $x$  partiell differenzierbar*, wenn für  $i = 1, \dots, n$  die Funktion  $F_i$  in  $x_i$  differenzierbar ist. Schreibe dann

$$D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := F'_i(x),$$

und nenne dies die  *$i$ -te partielle Ableitung* von  $f$  in  $x$ .

$f$  heißt *partiell differenzierbar*, wenn es in jedem Punkt von  $U$  partiell differenzierbar ist.

**Bem.** a) Man berechnet die  $i$ -te partielle Ableitung, indem man  $f$  als Funktion der  $i$ -ten Variablen allein auffasst und die anderen Variablen konstant hält.

b) Für  $n = 2$  schreibt man meist  $(x, y)$  statt  $(x_1, x_2)$  und  $\frac{\partial f}{\partial x}$  statt  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}$  statt  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ . Für  $n = 3$  schreibt man oft  $(x, y, z)$  statt  $(x_1, x_2, x_3)$ .

**Beispiel:**  $f(x, y) = e^{xy} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$ .

**Beispiel:** Betrachte  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

In jedem Punkt  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f$  offensichtlich partiell differenzierbar.  $f$  ist aber auch in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar:

$f_1(\xi) = f(\xi, 0) = 0$  und  $f_2(\xi) = f(0, \xi) = 0$  für alle  $\xi \in \mathbb{R} \implies D_1 f(0, 0) = 0$  und  $D_2 f(0, 0) = 0$ .

$f$  ist also auf ganz  $\mathbb{R}^2$  partiell differenzierbar.

Aber  $f$  ist in  $(0, 0)$  *nicht* stetig: Denn für  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , ist  $f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$ , während  $f(0, 0) = 0$ .

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar in  $U$ . Wenn alle partiellen Ableitungen  $D_1 f, \dots, D_n f : U \rightarrow \mathbb{R}$  wieder partiell differenzierbar sind, so kann man  $D_j D_i f := D_j(D_i f)$  bilden und sagt, dass  $f$  zweimal partiell differenzierbar ist. Induktiv definiert man, was es für  $k \in \mathbb{N}$  bedeutet, dass  $f$  *k-mal partiell differenzierbar* ist. Schreibe auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := D_j D_i f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := D_i^2 f := D_i D_i f \text{ usw.}$$

Wenn  $f$   $k$ -mal partiell differenzierbar ist und wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$  stetig sind (dazu gehört insbesondere, dass  $f$  selbst als partielle Ableitung der Ordnung 0 stetig ist), so sagt man,  $f$  sei *von der Klasse  $C^k$* . Wenn  $f$  stetige partielle Ableitungen von jeder Ordnung hat, so heißt  $f$  *von der Klasse  $C^\infty$*  oder *glatt*. Schließlich heißt  $f$  *von der Klasse  $C^0$* , wenn es stetig ist.

**Satz 1. (Satz von H. A. Schwarz)** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^2$ . Sei  $a \in U$  und  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist

$$D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a).$$

Von nun an schreiben wir die Elemente von  $\mathbb{R}^n$  als Spaltenvektoren. Wir schreiben also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Ist  $X$  eine Menge und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung, so ist  $f$  von der Form

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m)^T$$

mit  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Bez.** Ist  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar, so erhält man eine Abbildung

$$\nabla f = \text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

durch  $\nabla f(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$ .

$\nabla f$  heißt der *Gradient* von  $f$ .

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $f$  heißt *partiell differenzierbar* (bzw. *von der Klasse  $C^k$* ), wenn alle  $f_i$  partiell differenzierbar (bzw. von der Klasse  $C^k$ ) sind. Man schreibt dann für  $x \in U$ :

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$Df(x)$  heißt die *Funktionalmatrix* oder die *Jacobimatrix* oder die *Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $x$ .

$Df(x)$  ist eine  $m \times n$ -Matrix; ihre  $i$ -te Zeile ist der transponierte Gradient von  $f_i$  an der Stelle  $x$ .

Ist  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , so ist  $Df(x) \cdot \xi \in \mathbb{R}^m$ .

## 5. Differenzierbare und stetig differenzierbare Abbildungen

**Satz 1.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f = (f_1, \dots, f_m)^T : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine partiell differenzierbare Abbildung, so dass alle Funktionen  $D_j f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind. Sei  $x \in U$  fest.

Ist  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $x + \xi \in U$ , so definiere  $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$  durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi).$$

Dann ist

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0.$$

(Dies soll heißen: Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\xi\| < \delta$  und  $\xi \neq 0$  gilt:

$$x + \xi \in U \text{ und } \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} < \varepsilon.)$$

**Def.** Ist  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung, so heißt  $f$  differenzierbar in  $x$ , wenn  $f$  in  $x$  partiell differenzierbar ist und wenn Folgendes gilt:

Definiert man  $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $x + \xi \in U$  durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi),$$

so ist  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$ .

**Satz 2.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung und  $x \in U$ . Wenn  $f$  in  $x$  differenzierbar ist, so ist  $f$  in  $x$  stetig.

Für den Beweis braucht man:

**Lemma** Eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig.

Es gibt ein  $\alpha \geq 0$  mit  $\|A\xi\| \leq \alpha \|\xi\|$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

**Folgerung aus Satz 1 und Satz 2:** Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen  $D_j f_i$  alle stetig, so ist  $f$  stetig, d.h.  $f$  ist von der Klasse  $C^1$ , m.a.W.  $f$  ist stetig differenzierbar.

Allgemeiner: Ist  $f$   $k$ -mal partiell differenzierbar und sind alle  $k$ -ten partiellen Ableitungen stetig, so ist  $f$  von der Klasse  $C^k$ .

**Beispiel:** Sei  $A$  eine reelle  $m \times n$ -Matrix. Definiere  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch  $f(x) := A \cdot x$ . Dann ist  $f$  von der Klasse  $C^\infty$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $Df(x) = A$ , denn ist  $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ , so

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \text{ für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

also  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$ . Alle höheren partiellen Ableitungen von  $f$  sind 0.

Für den Beweis der Kettenregel brauchen wir:

**Satz 3.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Es gebe eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  mit

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} (f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$



Dann ist  $f$  differenzierbar in  $x$  und  $Df(x) = A$ .

Dies zeigt, wie man den Begriff der Differenzierbarkeit weiter verallgemeinern kann: Sind  $V, W$  endlich dimensionale normierte Räume, ist  $U$  offen in  $V$ , ist  $f : U \rightarrow W$  eine Abbildung und ist  $x \in U$ , so heißt  $f$  differenzierbar an der Stelle  $x$ , wenn es eine lineare Abbildung  $A : V \rightarrow W$  gibt, so dass

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} (f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dieses  $A$  ist dann eindeutig bestimmt; man bezeichnet es mit  $Df(x)$  und nennt es die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$ .

**Satz 4. (Kettenregel)** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $V$  offen in  $\mathbb{R}^m$  und seien  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  differenzierbar mit  $g(U) \subseteq V$ . Dann ist die Abbildung  $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  differenzierbar und

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \quad \forall x \in U.$$

(Dabei steht auf der rechten Seite das Produkt der Matrizen  $Df(g(x))$  und  $Dg(x)$ .) Sind  $f$  und  $g$  von der Klasse  $C^k$  mit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , so ist auch  $f \circ g$  von der Klasse  $C^k$ .

**Spezialfall:** Ist  $p = 1$ , also  $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Dabei sind die Variablen in  $\mathbb{R}^m$  mit  $y_1, \dots, y_m$  bezeichnet.

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $U_v := \{t \in \mathbb{R} \mid x + tv \in U\}$  eine offene Umgebung von 0 in  $\mathbb{R}$ . Definiere  $F_v : U_v \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F_v(t) := f(x + tv).$$

Wenn  $F_v$  in 0 differenzierbar ist, so heißt

$$D_v f(x) := F_v'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x))$$

die *Richtungsableitung* von  $f$  im Punkt  $x$  in Richtung  $v$ .

**Bem.**  $D_{e_i} f = D_i f$ .

**Bez.** Für  $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$  sei

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

also  $\|v\|_2 = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

**Satz 5.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Sei  $x \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann existiert die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $x$  in Richtung  $v$  und

$$D_v f(x) = \langle v, \nabla f(x) \rangle.$$

**Anschauliche Interpretation des Gradienten:** Der Vektor  $\text{grad} f(x)$  gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$  an.

## 6. Mittelwertsatz und Taylor-Formel

Der Mittelwertsatz aus Analysis I lautet: Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $]a, b[$ . Dann gibt es ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$(\star) \quad f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

In dieser Form lässt sich der Mittelwertsatz nicht auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern. Betrachte z.B.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x) = (\cos x, \sin x).$$

Dann ist  $f(0) = f(2\pi)$ , aber  $Df(x) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

Aus  $(\star)$  folgt: Wenn es ein  $M \geq 0$  gibt mit  $|f'(\xi)| \leq M$  für alle  $\xi \in ]a, b[$ , so ist  $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|$ . Dies lässt sich verallgemeinern.

**Def.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dann heißt  $f$  (Riemann-) integrierbar, wenn alle  $f_i$  integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int_a^b f(x) dx := \left( \int_a^b f_1(x) dx, \dots, \int_a^b f_m(x) dx \right) \in \mathbb{R}^m.$$

**Bem.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  Riemann-integrierbar, so ist  $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

(Dabei ist  $\|\cdot\|$  eine der Normen  $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ .)

Dies benutzen wir beim Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 1. (Mittelwertsatz)** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  von der Klasse  $C^1$ . Seien  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ , so dass die Strecke

$$\{x + t\xi \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

zwischen  $x$  und  $x + \xi$  ganz in  $U$  liegt. Dann gibt es ein  $M \geq 0$ , so dass

$$\|Df(x + t\xi) \cdot v\| \leq M\|v\| \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

und für jedes solches  $M$  ist

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq M \cdot \|\xi\|.$$

**Satz 2.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und habe die folgende Eigenschaft:

Je zwei Punkte von  $U$  können durch einen Streckenzug verbunden werden, der ganz in  $U$  verläuft. Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  partiell differenzierbar mit  $Df(x) = 0$  für alle  $x \in U$ . Dann ist  $f$  konstant.

**Bez.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung.

a) Ist  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ , so sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!.$$

Ein solches  $\alpha$  heißt *n-Multiindex*.

b) Ist  $\alpha$  wie in a) und  $f$  von der Klasse  $C^{|\alpha|}$ , so sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dabei ist  $D_i^0 f := f$  zu setzen.

c) Ist  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , so sei  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$ .

**Satz 3. (Taylor -Formel)** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^{k+1}$ .

a) Seien  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ , so dass die Strecke zwischen  $x$  und  $x + \xi$  in  $U$  liegt. Dann ist

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \int_0^1 (1-t)^k \frac{D^\alpha f(x+t\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha dt.$$

b) Ist  $x \in U$  und definiert man

$$R(\xi) := f(x + \xi) - \sum_{|\alpha| \leq k+1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $x + \xi \in U$ , so ist

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{R(\xi)}{\|\xi\|^{k+1}} = 0.$$

## 7. Extremwerte und kritische Stellen

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $x_0 \in X$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung.  $f$  besitzt in  $x_0$  ein *lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt mit

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U.$$

$f$  besitzt in  $x_0$  ein *striktes lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt mit

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Entsprechend definiert man, wann  $f$  in  $x_0$  ein (*striktes*) *lokales Minimum* bzw. *Extremum* besitzt.

**Satz 1.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Wenn  $f$  in  $x_0 \in U$  ein lokales Extremum besitzt, so ist

$$\text{grad} f(x_0) = 0.$$

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Ist  $x_0 \in U$  mit  $\text{grad} f(x_0) = 0$ , so heißt  $x_0$  eine *kritische Stelle* von  $f$ .

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^2$ . Ist  $x \in U$ , so sei  $Hf(x)$  die reelle  $n \times n$ -Matrix  $(a_{ij})$  mit

$$a_{ij} := D_i D_j f(x).$$

$Hf(x)$  heißt die *Hessesche Matrix* von  $f$  an der Stelle  $x$ .

**Bem.** Nach dem Satz von Schwarz ist  $a_{ij} = a_{ji}$ , d.h.  $Hf(x)$  eine symmetrische Matrix.

**Def.** Sei  $A$  eine symmetrische reelle  $n \times n$ -Matrix.

$A$  heißt *positiv definit*, wenn  $\langle A(x), x \rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

$A$  heißt *negativ definit*, wenn  $\langle A(x), x \rangle < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

$A$  heißt *indefinit*, wenn es ein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle A(x), x \rangle > 0$  und ein  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle A(y), y \rangle < 0$  gibt.

**Satz 2.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^2$ . Sei  $x_0$  eine kritische Stelle von  $f$ .

- a) Ist  $Hf(x_0)$  positiv definit, so besitzt  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Minimum.
- b) Ist  $Hf(x_0)$  negativ definit, so besitzt  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Maximum.
- c) Ist  $Hf(x_0)$  indefinit, so besitzt  $f$  in  $x_0$  kein lokales Extremum.

### Erinnerungen an die Lineare Algebra:

Sei  $A$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix. Eine komplexe Zahl  $\lambda$  heißt Eigenwert von  $A$ , wenn es ein  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  gibt mit  $Ax = \lambda x$ . Mit

$$\chi_A(t) = \det(tI - A)$$

bezeichnen wir das charakteristische Polynom von  $A$ . Die Eigenwerte von  $A$  sind genau die Nullstellen von  $\chi_A$ .

Ist  $A$  eine symmetrische Matrix, so sind alle Eigenwerte von  $A$  reell, und es gilt:

- $A$  ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind.
- $A$  ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von  $A$  negativ sind.
- $A$  ist indefinit genau dann, wenn  $A$  einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt.

**Kriterium von Hurwitz:** Sei  $A = (a_{ij})$  symmetrisch,

$$\Delta_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

$A$  positiv definit  $\iff \Delta_k > 0$  für  $k = 1, \dots, n$ .

$A$  negativ definit  $\iff (-1)^k \Delta_k > 0$  für  $k = 1, \dots, n$ .

**Beispiel 1.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 - y^2$  (Sattelfläche)

$\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ . Einzige kritische Stelle:  $(0, 0)$ .

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  ist indefinit. Also besitzt  $f$  überhaupt keine lokalen Extrema.

**Beispiel 2.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^3 - y^3$ .

$\text{grad} f(x, y) = (3x^2, -3y^2)$ . Einzige kritische Stelle:  $(0, 0)$ .

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$ , insbesondere  $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dies ist weder positiv definit noch negativ definit noch indefinit. In jeder Umgebung von  $(0, 0)$  nimmt  $f$  positive und negative Werte an, besitzt also auch in  $(0, 0)$  kein lokales Extremum.

**Beispiel 3.**  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

Kritische Stellen:  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$ .

Man kann Satz 2 anwenden: Kein lokales Extremum in  $(0, 0)$ , striktes lokales Minimum in  $(1, 1)$ .

# Teil II: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

## 8. Beispiele und Problemstellungen

Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Wenn für alle  $x \in I$  gilt:

- (a)  $(x, \varphi(x)) \in U$ ,
- (b)  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ ,

so heißt  $\varphi$  eine *Lösung der Differenzialgleichung*

- (c)  $y' = f(x, y)$ ;

man nennt (c) eine *explizite gewöhnliche Differenzialgleichung 1.Ordnung*.

Ist  $(x_0, y_0) \in U$  und ist  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (c) mit  $x_0 \in I$  und  $\varphi(x_0) = y_0$ , so sagt man, dass  $\varphi$  die *Anfangsbedingung*

- (d)  $y(x_0) = y_0$

erfüllt.

**Beispiel 1:** Sei  $U = J \times \mathbb{R}$ , wobei  $J$  ein offenes Intervall ist, und sei  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Definiere  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) := g(x)$ , d.h. betrachte die DGL.

$$y' = g(x).$$

Ihre Lösungen sind die Stammfunktionen von  $g$ .

**Beispiel 2:** Sei  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $f(x, y) := y$ , d.h. betrachte die DGL.

$$y' = y.$$

Für  $c \in \mathbb{R}$  definiere  $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_c(x) := c e^x.$$

Dann ist  $\varphi_c$  eine Lösung, und jede andere Lösung entsteht durch Einschränken eines  $\varphi_c$  auf ein Teilintervall. Für jedes  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  gibt es genau eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$ .

**Beispiel 3:** Sei  $U = \mathbb{R}^2$  und  $f(x, y) = y^2$ , d.h. betrachte die DGL.

$$y' = y^2.$$

Sei  $\varphi_0$  die Nullfunktion. Für  $c \in \mathbb{R}$  definieren wir  $\varphi_c^+ : ]c, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\varphi_c^- : ]-\infty, c[ \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_c^\pm(x) := \frac{1}{c - x}.$$

Dann sind die Funktionen  $\varphi_0$ ,  $\varphi_c^+$  und  $\varphi_c^-$  Lösungen von  $y' = y^2$ , und jede Lösung dieser DGL. entsteht daraus durch Einschränkung auf ein Teilintervall. Für jedes  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  gibt es genau eine Lösung, die die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllt und die einen maximalen Definitionsbereich hat.

**Beispiel 4:** Sei  $U = \mathbb{R}^2$  und  $f(x, y) = 3y^{2/3}$ , d.h. betrachte die DGL.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Für  $c \in \mathbb{R}$  sei  $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\varphi_c(x) := (x - c)^3.$$

Dann ist  $\varphi_c$  eine Lösung mit  $\varphi_c(c) = 0$  und  $\varphi'_c(c) = 0$ . Für  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  mit  $a < b$  definiere  $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_{a,b}(x) := \begin{cases} \varphi_a(x) & \text{für } x \leq a \\ 0 & \text{für } a < x < b \\ \varphi_b(x) & \text{für } b \leq x. \end{cases}$$

Dann ist  $\varphi_{a,b}$  differenzierbar und Lösung von  $y' = 3y^{2/3}$ . Für jede Anfangsbedingung gibt es also unendlich viele verschiedene Lösungen!

**Verallgemeinerung:** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig. Sei  $I$  ein offenes Intervall und  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbare Funktionen. Wenn für alle  $x \in I$  gilt:

- (a)  $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in U$ ,
- (b)  $\varphi'_i(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  für  $i = 1, \dots, n$ ,

so heißen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  Lösungen des Differenzialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Schreibt man  $f := (f_1, \dots, f_n)$  und  $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , so schreiben sich die Bedingungen (a) und (b) in der Form

- (a)  $(x, \varphi(x)) \in U$ ,
- (b)  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ .

Statt des Systems (c) schreibt man einfach wieder

$$y' = f(x, y)$$

und nennt weiterhin  $\varphi$  eine Lösung dieser expliziten gewöhnlichen DGL. erster Ordnung.

**Existenzsatz von Peano.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(x_0, y_0) \in U$ . Dann existiert eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der DGL.  $y' = f(x, y)$  mit  $x_0 \in I$  und  $\varphi(x_0) = y_0$ .

**Def.** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$ .

a)  $f$  heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein  $L \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

b)  $f$  heißt *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  gibt, so dass  $f|U$  Lipschitz-stetig ist.

**Bem.1:** Lipschitz-stetig  $\implies$  lokal Lipschitz-stetig  $\implies$  stetig.

**Bem.2:** Sei  $X$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  von der Klasse  $C^1$ . Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig.

**Def.** Seien  $X, Y, Z$  metrische Räume,  $U \subseteq X \times Y$  und  $f : U \rightarrow Z$ .

a)  $f$  heißt *Lipschitz-stetig im 2. Argument*, wenn es ein  $L \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$d(f(x, y), f(x, \tilde{y})) \leq L \cdot d(y, \tilde{y}) \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in U.$$

b)  $f$  heißt *lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument*, wenn es für jedes  $(x_0, y_0) \in U$  eine Umgebung  $V$  von  $(x_0, y_0)$  in  $U$  gibt, so dass  $f|_V$  Lipschitz-stetig im 2. Argument ist.

**Bem.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Wir bezeichnen die partiellen Ableitungen von  $f$  mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

(wenn sie existieren). Wenn  $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$  existieren und stetige Abbildungen  $U \rightarrow \mathbb{R}^k$  sind, so ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument.

**Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(x_0, y_0) \in U$ . Ferner sei  $f$  lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument. Dann existieren ein offenes Intervall  $I$  mit  $x_0 \in I$  und eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der DGL  $y' = f(x, y)$  mit folgenden Eigenschaften:

a)  $\varphi(x_0) = y_0$ .

b) Ist  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von  $y' = f(x, y)$  mit  $\psi(x_0) = y_0$ , so ist  $J \subseteq I$  und  $\psi = \varphi|_J$ .

**Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig. Für jedes kompakte Teilintervall  $K$  von  $I$  sei  $f|_K$  Lipschitz-stetig im 2. Argument. Sei  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ .

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der DGL  $y' = f(x, y)$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ .

**Beispiel 5: (Differenzialgleichung mit getrennten Variablen)**

Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  offene Intervalle,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig mit  $h(y) \neq 0 \forall y \in J$ . Definiere  $f(x, y) : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) := g(x)h(y)$ , d.h. betrachte die DGL

$$y' = g(x)h(y).$$

*Heuristisches Lösungsverfahren:*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + c$$

Die linke Seite ist eine Funktion von  $y$ , die rechte eine Funktion von  $x$ . Löse diese Gleichung nach  $y$  auf.

*Exakt:* Sei  $(x_0, y_0) \in I \times J$ . Definiere  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H : J \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad H(y) := \int_{y_0}^y \frac{dt}{h(t)}.$$

Dann existiert ein offenes Intervall  $I' \subseteq I$  mit  $x_0 \in I'$  und eine eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$  der DGL  $y' = g(x)h(y)$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ , und  $H(\varphi(x)) = G(x)$  für  $x \in I'$ .

**Beispiel 6: (Homogene lineare DGL)**

Sei  $I$  offenes Intervall,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Definiere  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) := a(x)y$ . Die DGL  $y' = f(x, y)$  lautet also

$$y' = a(x)y.$$

Sei  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ . Dann existiert genau eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  von  $y' = a(x)y$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ , und

$$\varphi(x) = y_0 \cdot \exp \left( \int_{x_0}^x a(t) dt \right).$$

**Beispiel 7: (Lineare DGL.)** Sei  $I$  offenes Intervall,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Definiere  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) := a(x)y + b(x)$ . Betrachte also die DGL.

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Sei  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ . Dann existiert genau eine Lösung  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  von  $y' = a(x)y + b(x)$  mit  $\psi(x_0) = y_0$ :

Sei  $\varphi(x) := \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$ . Dann ist  $\varphi$  Lösung der „zugehörigen homogenen linearen DGL.“  $y' = a(x)y$ , also  $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x)$ , und  $\varphi(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ .

Ist  $\psi$  irgendeine Lösung von  $y' = a(x)y + b(x)$ , so existiert eine  $C^1$ -Funktion  $u$  mit  $\psi(x) = \varphi(x)u(x)$ .

$$\Rightarrow \psi' = \varphi' u + \varphi u' = a\varphi u + \varphi u' = a\psi + \varphi u'.$$

Es ist also  $\psi' = a\psi + b$  genau dann, wenn  $\varphi u' = b$ , also  $u' = \frac{b}{\varphi}$

$$\Rightarrow u(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt + \text{const.}$$

Aus  $\psi(x_0) = y_0$  folgt:  $y_0 = \varphi(x_0)u(x_0) = u(x_0) \Rightarrow \text{const} = y_0$

$$\Rightarrow \psi(x) = \varphi(x) \cdot \left(y_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt\right).$$

(Methode der *Variation der Konstanten*.)