

11. ELLIPTISCHE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

11.1 Motivation: Eindimensionale Probleme

In diesem einführenden Kapitel werden wir die Fragestellungen und einige der später verwendeten Techniken an Hand eindimensionaler Probleme vorstellen. Wir werden hierbei zum Teil noch vage bleiben und möchten dies als Motivation zum Studium der weiteren Abschnitte auffassen, in denen dann eine rigorose Analyse der Methode der finiten Elemente im Mittelpunkt stehen wird.

Wir betrachten das 2-Punkt Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u'' &= f & \text{in } \Omega = (0, 1), \\ u(0) &= 0, & u'(1) = 0. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Ist u die Lösung von (11.1) und v eine beliebige, hinreichend oft differenzierbare Funktion mit $v(0) = 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \ell(v) &= \int_0^1 f(x)v(x)dx \\ &= - \int_0^1 u''(x)v(x)dx && u \text{ ist Lösung} \\ &= \int_0^1 u'(x)v'(x)dx && (\text{partielle Integration}) \\ &=: a(u, v). \end{aligned}$$

Wir definieren zunächst formal, d. h. ohne genaue Angabe und Definition der in der Bilinearform a zu verwendenden Ableitung,

$$V = \{v \in L^2(\Omega) \mid a(v, v) < \infty, v(0) = 0\}.$$

Hierbei ist

$$L^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} v^2(x)dx < \infty\}$$

der Hilbert-Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen über Ω . In L^2 ist durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt definiert. $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ ist die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm und es gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

Im Moment ist noch nicht klar, warum die Definition von V sinnvoll ist, denn in L^2 werden Funktionen, die sich nur auf eine Menge vom Maß Null unterscheiden, identifiziert, es ist also unklar, was die Forderung $v(0) = 0$ bedeutet.

Nach obiger Rechnung ist die Lösung u von (11.1) durch

$$u \in V, \quad a(u, v) = \ell(v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \quad (11.2)$$

charakterisiert. (11.2) heißt **variationelle** oder **schwache Formulierung** von (11.1).

Eine wesentliche Frage ist, welche Ableitung in der Definition von a verwendet werden soll. Eine naheliegende Möglichkeit wäre die klassische Ableitung

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Wir lassen die Frage zunächst offen und bemerken lediglich, dass diese Anforderung zu streng ist.

Die Abbildung $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \langle f, v \rangle$ ist linear. Für a gilt

Lemma 11.1. $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine symmetrische und positiv definite Bilinearform.

Beweis. Offensichtlich ist a eine symmetrische Bilinearform und es gilt $a(v, v) \geq 0$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $a(v, v) = 0$ genau dann gilt, wenn $v = 0$. $a(v, v) = 0$ für $v = 0$ ist klar. Sei also $a(v, v) = 0$. Dann ist $v' = 0$ in Ω , also $v \equiv c$ in Ω . Wegen $v(0) = 0$ ist $c = 0$. \square

a ist also ein Skalarprodukt auf V . Mit diesem Skalarprodukt ist V dann ein Prähilbert-Raum mit der Norm $\|\cdot\|_a = \sqrt{a(v, v)}$, der sogenannten **Energienorm**.

Neben der Frage, ob V sinnvoll definiert ist, ist noch ein weiterer kritischer Punkt im Beweis versteckt: Darf man wirklich aus $v' = 0$ auf $v \equiv c$ schließen? Die Frage beunruhigt diejenigen, die an die Cantor-Funktion denken, denn deren Ableitung ist fast überall Null, obwohl die Funktion nicht konstant ist. Die exakte Definition von V muss also solche Funktionen ausschließen. Die in Abschnitt 11.8 definierten Sobolev-Räume haben diese Eigenschaft.

Zunächst ignorieren wir diese Probleme und beschäftigen uns mit Lösungen, die hinreichend regulär sind. Lösungen $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ von (11.1) heißen **klassische Lösungen**.

Satz 11.2. Es sei $f \in C^0(\Omega)$. Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine schwache Lösung, d. h. u erfüllt (11.2), dann ist u auch klassische Lösung, erfüllt also (11.1).

Beweis. Es sei $v \in V \cap C^1(\overline{\Omega})$, insbesondere $v(0) = 0$. Mit partieller Integration folgt

$$\ell(v) = \langle f, v \rangle = a(u, v) = - \int_0^1 u'' v dx + u'(1)v(1) - \underbrace{u'(0)v(0)}_{=0}. \quad (11.3)$$

$w = f + u'' \in C^0(\Omega)$ erfüllt damit

$$\langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \cap C^1(\overline{\Omega}) \text{ mit } v(1) = 0.$$

Wir zeigen jetzt $w = 0$ durch Widerspruch. Angenommen, es wäre $w \neq 0$. Dann gibt es ein Intervall $[x_0, x_1] \subset \Omega$, $x_0 < x_1$, in dem w das Vorzeichen nicht wechselt. Wir wählen jetzt

$$v(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2(x - x_1)^2, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $v \in V \cap C^1(\overline{\Omega})$ aber es ist $\langle w, v \rangle \neq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist $w = 0$.

Im nächsten Schritt wählen wir $v(x) = x$. Dann gilt wegen (11.3)

$$\int_0^1 f(x)x dx = - \int_0^1 u''(x)x dx + u'(1),$$

also $u'(1) = 0$. Wegen $u \in V$ ist auch die zweite Randbedingung $u(0) = 0$ erfüllt, u ist damit Lösung von (11.1). \square

Bemerkung. $u(0) = 0$ bezeichnet man in der variationellen Formulierung als eine **wesentliche Randbedingung**, da sie in die Definition des Raumes V eingeht. Als Randbedingung an die Funktion selbst heißt sie auch **Dirichlet-Randbedingung**. Die zweite Randbedingung $u'(1) = 0$ tritt in der variationellen Formulierung nur implizit auf und wird daher als **natürliche Randbedingung** bezeichnet. Randbedingungen, bei denen Forderungen an die Ableitung der Funktion gestellt werden, heißen auch **Neumann-Randbedingungen**.

In den nächsten Abschnitten werden wir das Problem mit der schwächeren Voraussetzung $f \in L^2(\Omega)$ betrachten. Wir werden sehen, dass dann immer noch eine eindeutige Lösung von (11.2) existiert, diese allerdings im Allgemeinen nicht mehr in $C^2(\Omega)$ liegt und daher keine klassische Lösung von (11.1) ist. Der Lösungsbegriff wird damit verallgemeinert.

Ein weiterer Vorteil der schwachen Formulierung ist, dass sich aus (11.2) auf sehr einfache und naheliegende Weise Approximationen herleiten lassen.

11.2 Ritz-Galerkin-Approximationen

Es sei $V_N \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum von V . Die Bedingung (11.2) aufgefasst als Bedingung in V_N führt auf die **Ritz-Galerkin-Bedingung**

$$u_N \in V_N, \quad a(u_N, v_N) = \ell(v_N) \quad \forall v_N \in V_N. \quad (11.4)$$

Den folgenden Satz beweisen wir für allgemeinere Probleme in schwacher Formulierung, auch wenn wir im Moment nur das eindimensionale Modellproblem diskutieren.

Satz 11.3. *Es sei V ein Vektorraum und $V_N \subset V$ ein Unterraum mit $\dim V_N = N < \infty$. $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine symmetrische und positiv definite Bilinearform und $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Linearform. Dann hat (11.4) eine eindeutige Lösung.*

Beweis. Sei $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ eine Basis von V_N . Gesucht ist ein

$$u_N = \sum_{i=1}^N \mu_i \varphi_i \in V_N$$

so, dass

$$a(u_N, v_N) = \ell(v_N) \quad \forall v_N = \sum_{j=1}^N \nu_j \varphi_j \in V_N,$$

d. h.

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu_i \nu_j a(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{j=1}^N \nu_j \ell(\varphi_j) \quad \forall (\nu_j)_{j=1}^N.$$

In Matrixschreibweise ist dies äquivalent zu

$$\nu^T A \mu = \nu^T b \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^N,$$

wobei

$$\nu = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_N \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}, \quad A = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{i,j=1}^N, \quad b = \begin{bmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_N) \end{bmatrix}.$$

Setzen wir für ν die Standardbasisvektoren e_1, \dots, e_N ein, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$A\mu = b.$$

Da a symmetrisch ist, gilt dasselbe für A . Ebenso überträgt sich auch die positive Definitheit auf A , denn

$$\nu^T A \nu = \sum_{i,j=1}^N \nu_i \nu_j a(\varphi_i, \varphi_j) = a\left(\sum_{i=1}^N \nu_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N \nu_j \varphi_j\right) > 0$$

gilt für alle $\nu \neq 0$. Somit ist A invertierbar und es existiert eine eindeutige Lösung $\mu \in \mathbb{R}^N$ des Gleichungssystems. Das zugehörige $u_N = \sum_i \mu_i \varphi_i \in V_N$ ist dann die eindeutige Lösung von (11.4). \square

Insbesondere haben wir für unser Modellproblem die Existenz einer Lösung von (11.4) für $f \in L^2(\Omega)$ gezeigt.

Die Matrix A aus dem Beweis des Satzes heißt **Steifigkeitsmatrix**, der Vektor b **Lastvektor**.

Es stellt sich hier die Frage, wie gut die Ritz-Galerkin-Approximation ist. Diese wird in der folgenden Optimalitätsaussage beantwortet, die wir wieder unter den allgemeineren Voraussetzungen des Satzes 11.3 beweisen.

Satz 11.4. (*Céa's Lemma*)

Es seien die Voraussetzungen von Satz 11.3 erfüllt. Ist $u \in V$ eine Lösung von (11.2) und $u_N \in V_N$ eine Lösung von (11.4), so gilt in der Energienorm $\|\cdot\|_a = \sqrt{a(v,v)}$

$$\|u_N - u\|_a = \min_{v_N \in V_N} \|v_N - u\|_a.$$

Beweis. Da $V_N \subseteq V$ gilt wegen (11.2)

$$a(u, v_N) = \ell(v_N) \quad \forall v_N \in V_N$$

und wegen (11.4) auch

$$a(u_N, v_N) = \ell(v_N) \quad \forall v_N \in V_N.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$a(u_N - u, v_N) = 0 \quad \forall v_N \in V_N \tag{11.5}$$

bzw. durch Ersetzen von v_N durch $u_N - v_N \in V_N$ auch

$$a(u_N - u, u_N - v_N) = 0 \quad \forall v_N \in V_N$$

oder nach Einfügen von $-u + u$ in das zweite Argument von a auf der linken Seite

$$a(u_N - u, u_N - u) = a(u_N - u, v_N - u) \quad \forall v_N \in V_N.$$

Dadurch erhält man nach Definition der Energienorm und durch Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\|u_N - u\|_a^2 = a(u_N - u, u_N - u) = a(u_N - u, v_N - u) \leq \|u_N - u\|_a \|v_N - u\|_a.$$

Division durch $\|u_N - u\|_a$ liefert die gewünschte Abschätzung $\|u_N - u\|_a \leq \|v_N - u\|_a$ für alle $v_N \in V_N$. \square

Céa's Lemma besagt, dass die Ritz-Galerkin-Approximation gemessen in der Energienorm des Fehlers die optimale Näherung im Approximationsraum V_N liefert. Ein analoges Resultat haben wir in Satz 7.12 für das cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit symmetrischer und positiv definiter Matrix gezeigt.

In manchen Anwendung ist es jedoch interessanter, den Fehler in der L^2 -Norm zu messen. Wir vermuten, dass die L^2 -Norm, die schwächer ist als die Energienorm (Ableitungen kommen nicht vor), einen kleineren Fehler liefert. Diese Vermutung beweisen wir für das Modellproblem (11.1) mit Hilfe eines Dualitätsarguments. Es sei dazu $w \in V$ eine Lösung von

$$-w'' = u - u_N, \quad w(0) = w'(1) = 0, \quad u(0) = u_N(0) = 0.$$

Dann gilt nach Definition der L^2 -Norm:

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|^2 &= \langle u - u_N, u - u_N \rangle \\ &= \langle u - u_N, -w'' \rangle && \text{partielle Integration} \\ &= a(u - u_N, w) && \text{mit (11.3), da } (u - u_N)(0) = w'(1) = 0 \\ &= a(u - u_N, w - v) \quad \forall v \in V_N && \text{wegen (11.5).} \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt

$$\|u - u_N\| \leq \frac{\|u - u_N\|_a \|w - v\|_a}{\|u - u_N\|} = \frac{\|u - u_N\|_a \|w - v\|_a}{\|w''\|} \quad \forall v \in V_N.$$

Die Ungleichung gilt auch für das Infimum:

$$\|u - u_N\| \leq \|u - u_N\|_a \frac{\inf_{v \in V_N} \|w - v\|_a}{\|w''\|}. \quad (11.6)$$

Der Fehler in der L^2 -Norm ist wesentlich kleiner als in der Energienorm, wenn

$$\inf_{v \in V_N} \|w - v\|_a \leq \epsilon \|w''\| \quad (11.7)$$

für ein kleines $\epsilon \geq 0$ gilt. Im Moment setzen wir (11.7) als **Approximationsannahme** an den Raum V_N voraus, d. h. wir verlangen (11.7) für alle $w \in V$. Später werden wir die Räume V_N so wählen, dass diese Annahme erfüllt ist.

Satz 11.5. *Es sei $u \in V$ eine Lösung von (11.2) und $u_N \in V_N$ eine Lösung von (11.4) für das Modellproblem und die Approximationsannahme (11.7) sei erfüllt. Dann gilt*

$$\|u - u_N\| \leq \epsilon \|u - u_N\|_a \leq \epsilon^2 \|u''\| = \epsilon^2 \|f\|.$$

Beweis. Aus (11.6) und der Annahme (11.7) folgt sofort die erste Ungleichung. Céa's Lemma besagt, dass für $w = u$ das Infimum in (11.7) ein Minimum ist und für $v = u_N$ angenommen wird:

$$\|u - u_N\|_a \leq \epsilon \|u''\| = \epsilon \|f\|.$$

Damit ist die gesamte Ungleichungskette bewiesen. \square

11.3 Lineare Splineräume – Methode der finite Elemente

Es sei $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$. V_N sei der Raum aller Funktionen v mit

- (a) $v \in C^0(\overline{\Omega})$;
- (b) $v|_{[x_{i-1}, x_i]}$ ist ein Polynom vom Grad 1, $i = 1, \dots, N$;
- (c) $v(0) = 0$.

Später werden wir $V_N \subset V$ zeigen. Für jedes feste i definieren wir die **Knotenfunktion** $\varphi_i \in V_N$ zu den **Knoten** x_j durch

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Lemma 11.6. Die Menge $\{\varphi_i \mid i = 1, \dots, N\}$ bildet eine Basis von V_N .

Beweis. Die Funktionen φ_i sind linear unabhängig, denn es ist

$$0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x_j) = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Sie spannen auch den Raum auf, denn für $v \in V_N$ beliebig ist die Funktion $v - v_I$ mit

$$v_I = \sum_{i=1}^N v(x_i) \varphi_i \in V_N \tag{11.8}$$

auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ linear und Null in den Endpunkten dieses Intervalls, also $v = v_I$. \square

v_I hat nach Definition von φ_i die Interpolationseigenschaft $v_I(x_i) = v(x_i)$. Daher definiert man

Definition 11.7. Die Basis $\{\varphi_i \mid i = 1, \dots, N\}$ heißt **Knotenbasis** und zu gegebenem $v \in C([0, 1])$ heißt v_I definiert in (11.8) **Interpolierende**.

Für die Interpolierende gilt

Satz 11.8. Sei

$$h_j = x_j - x_{j-1}, \quad \text{und} \quad h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

Dann gilt

$$\|u - u_I\|_a \leq Ch \|u''\| \quad \forall u \in V,$$

wobei C eine von h und u unabhängige Konstante ist.

Beweis. Sowohl die Energienorm als auch die L^2 -Norm sind über Integrale über Ω definiert. Daher genügt es, die Abschätzung für jedes Teilintervall zu zeigen, also

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (u - u_I)'(x)^2 dx \leq ch_j^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} u''(x)^2 dx.$$

Die Behauptung folgt dann durch Aufsummieren über j . Bezeichnen wir mit $e = u - u_I$ den Fehler, dann ist diese Behauptung äquivalent zu

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} e'(x)^2 dx \leq ch_j^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} e''(x)^2 dx,$$

denn wegen der Linearität von u_I ist $u_I'' \equiv 0$. Wir transformieren das Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ auf $[0, 1]$ durch

$$x = x_{j-1} + th_j, \quad w(t) = e(x_{j-1} + th_j).$$

Dann müssen wir wegen $dx = h_j dt$ und $w^{(k)}(t) = h_j^k e^{(k)}(x)$ die äquivalente Ungleichung

$$\int_0^1 w'(t)^2 dt \leq c \int_0^1 (w''(t))^2 dt$$

zeigen. Für w gilt wegen der Interpolationseigenschaft $w(0) = w(1) = 0$. Der Satz von Rolle garantiert, dass es eine Zwischenstelle $\xi \in (0, 1)$ gibt, für die $w'(\xi) = 0$ ist, also gilt

$$w'(t) = \int_{\xi}^t w''(x) dx.$$

Hierauf wenden wir wieder die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung an:

$$\begin{aligned} |w'(t)|^2 &= \left| \int_{\xi}^t 1 \cdot w''(x) dx \right|^2 \\ &\leq |\xi - t| \left| \int_{\xi}^t w''(x)^2 dx \right| \\ &\leq |\xi - t| \int_0^1 w''(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Integration über ξ liefert wegen

$$c = \max_{0 < t < 1} \int_0^1 |\xi - t| d\xi = \frac{1}{2}$$

(das Maximum wird am Rand angenommen) die punktweise Abschätzung

$$|w'(t)|^2 \leq c \int_0^1 w''(x)^2 dx \quad (11.9)$$

und damit die Behauptung. \square

Die im Beweis verwendete Technik, eine äquivalente Abschätzung für ein von der Schrittweite unabhängiges *Referenzintervall* zu zeigen, nennt man auch **Homogenisierung**. Sie wird später häufig angewendet werden.

Eine direkte Folgerung dieses Satzes ist

Korollar 11.9.

$$\|u - u_N\| + Ch\|u - u_N\|_a \leq 2(Ch)^2\|u''\|.$$

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist die Approximationsannahme (11.7) mit $\epsilon = Ch$ erfüllt. Die Behauptung folgt daher aus Satz 11.5. \square

Die Interpolierende definiert einen Operator $\mathcal{I} : C([0, 1]) \rightarrow V_N$: $\mathcal{I}v \mapsto v_I$. \mathcal{I} ist eine Projektion, denn wie wir im Beweis von Lemma 11.6 gesehen haben, ist $v_I = v$, für jedes $v \in V_N$. Die Abschätzung (11.9), in der die Funktion w' punktweise durch Mittelwerte (Integrale) abgeschätzt wird, ist ein erstes Beispiel für eine Sobolev'sche Ungleichung, die wir später noch ausführlich behandeln werden.

Die Fehlerabschätzung in der L^2 -Norm haben wir hergeleitet, indem wir die L^2 -Norm als Wert des Energieskalarprodukts des Fehlers mit einer geeigneten zweiten Funktion geschrieben haben. Ähnlich kann man auch punktweise Fehlerabschätzungen erhalten, wenn man als zweite Funktion die sogenannte *Green'sche Funktion* für das eindimensionale Modellproblem (11.1) einsetzt. Diese ist durch

$$g_x(t) = \begin{cases} t, & t < x, \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, wobei $x \in [0, 1]$ ein beliebiger Punkt ist. Für jedes $v \in V$ gilt wegen $v(0) = 0$

$$a(v, g_x) = \int_0^1 v'(t)g'_x(t)dt = \int_0^x v'(t)dt = v(x).$$

Insbesondere ist für die Näherungslösung wegen (11.5)

$$(u - u_N)(x) = a(u - u_N, g_x) = a(u - u_N, g_x - v) \quad \forall v \in V_N.$$

Ist V_N der in Abschnitt 11.3 definierte Raum der stückweise linearen Funktionen zu den Knoten x_i , $i = 0, \dots, N$, dann ist $g_{x_i} \in V_N$ und aus (11.5) folgt $(u - u_N)(x_j) = 0$, also $u_N = u_I$. In diesem Spezialfall gilt

Satz 11.10. $\|u - u_N\|_\infty \leq Ch^2\|u''\|_\infty$.

Beweis. Es genügt wieder, die Abschätzung für jedes Teilintervall zu zeigen. Auf dem Intervall (finiten Element) $K^e = [x_{e-1}, x_e]$ ist u_N das Interpolationspolynom vom Grad eins zu u . Satz 2.5 über den Fehler bei Polynominterpolation liefert für jedes $x \in K^e$ die Existenz einer Zwischenstelle $\xi = \xi(x) \in K^e$, so dass

$$u(x) - u_N(x) = (x - x_{e-1})(x - x_e)\frac{u''(\xi)}{2},$$

gilt. Die Behauptung folgt jetzt aus $|x - x_{e-1}| \leq h_e$ und $|x - x_e| \leq h_e$. \square

In höheren Dimensionen sind punktweise Abschätzungen wesentlich schwieriger zu erhalten, aber die Verwendung der Green'schen Funktion ist dort ähnlich. Das Problem liegt darin, dass in höheren Dimensionen die Singularität der Green'schen Funktion nicht lokal ist und man daher andere Techniken einsetzen muss.

Implementierung

Die Methode der finiten Elemente kann effizient implementiert werden, indem man die Skalarprodukte $a(u, v)$ und die Linearform $\ell(v)$ durch lokale Rechnungen (Approximationen) auf Teilintervallen K^e durch Aufsummieren assembliert. Die Steifigkeitsmatrix kann explizit durch

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \sum_{\substack{\text{alle Intervalle } K^e, \text{ die} \\ x_i \text{ und } x_j \text{ enthalten}}} \int_{K^e} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx$$

berechnet werden (zum Beispiel durch eine Quadraturformel hinreichend hoher Ordnung) und der Lastvektor durch

$$b_i = \ell(\varphi_i) = \int_{\Omega} f(x) \varphi_i(x) dx = \sum_{\substack{\text{alle Intervalle } K^e, \\ \text{die } x_i \text{ enthalten}}} \int_{K^e} f(x) \varphi_i(x) dx.$$

Die Berechnung der Integrale über $f \varphi_i$ ist im Allgemeinen nur noch näherungsweise möglich. Man kann zum Beispiel f durch die Interpolierende f_I ersetzen und das Integral damit analytisch berechnen. Alternativ kann man eine Quadraturformel, etwa eine Gauß-Quadraturformel, zur Approximation verwenden.

Die Implementierung der Methode der finiten Elemente erfolgt also durch elementweises Zusammensetzen. Hierzu erhält jeder Knoten zwei Nummern, nämlich eine *globale* im Gebiet Ω und eine *lokale*, die nur in einem finiten Element K^e gültig ist. Mit i^e bezeichnen wir die Abbildung, die einer lokalen Nummer im finiten Element K^e die globale Nummer in Ω zuweist. R^e sei die Anzahl der Knoten in K^e , im Fall von Intervallen also $R^e = 2$:

$$i^e(r) = e + r - 2, \quad e = 1, \dots, N, \quad r = 1, R^e.$$

Die lokalen Basisfunktionen ergeben sich durch Einschränkung der Knotenbasis auf die finiten Elemente K^e :

$$\varphi_r^e(x) = \begin{cases} \phi_r(h_e^{-1}(x - x_{e-1})), & x \in K^e, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad r = 1, 2,$$

wobei

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \phi_2(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die lokalen Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren

$$a_{rs}^e = \int_{K^e} (\varphi_r^e)'(x) (\varphi_s^e)'(x) dx, \quad b_r^e = \int_{K^e} f(x) \varphi_r^e(x) dx$$

berechnet man durch Transformation auf das Referenzelement $\hat{K} = [0, 1]$:

$$a_{rs}^e = \frac{1}{h_e} \int_0^1 \phi'_r(x) \phi'_s(x) dx = \frac{1}{h_e} \hat{a}_{rs},$$

$$b_r^e = h_e \int_0^1 \hat{f}^e(x) \phi_r(x) dx, \quad \hat{f}^e(x) = f(x_{e-1} + x h_e),$$

wobei man leicht

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

nachrechnet.

Beispiel 11.1. Für $h_j = h$, $j = 1, \dots, N$ ist die Steifigkeitsmatrix eine Tridiagonalmatrix mit den von Null verschiedenen Elementen

$$a_{ii} = \frac{2}{h}, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -\frac{1}{h}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad a_{NN} = \frac{1}{h},$$

denn die Knoten x_1, \dots, x_{N-1} sind in je zwei Intervallen enthalten, der Knoten x_N jedoch nur in einem. Ebenso sind zwei benachbarte Knoten in genau einem Intervall enthalten. Ferner rechnet man mit dem Satz von Taylor leicht nach, dass

$$\ell(\varphi_i) = \langle f, \varphi_i \rangle = hf(x_i) + O(h^2),$$

falls f hinreichend glatt ist (Übung). Die Methode der finiten Elemente reduziert sich also hier auf ein Differenzenschema

$$\frac{-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h^2} = f(x_i),$$

welches bekanntlich die Approximationsordnung zwei hat. \diamond

Aus den lokalen Matrizen assembliert man A und b wie in Algorithmus 11.1 und 11.2 beschrieben.

Algorithmus 11.1 Berechnung der Steifigkeitsmatrix A

Setze $a_{ij} = 0$ für $i, j = 1, \dots, N$

for $e = 1 : E$ **do**

 {jedes finite Element}

for $r, s = 1 : R^e$ **do**

 {alle Paare von Knoten im finiten Element K^e }

 berechne a_{rs}^e

 setze $i = i^e(r)$, $j = i^e(s)$ {bestimme globale Nummern von r und s }

 setze $a_{ij} = a_{ij} + a_{rs}^e$

end for

end for

Algorithmus 11.2 Berechnung des Lastvektors b

Setze $b_i = 0$ für $i = 1, \dots, N$

for $e = 1 : E$ **do**

 {jedes finite Element}

for $r = 1 : R^e$ **do**

 {alle Knoten im finiten Element}

 berechne b_r^e {i.A. durch numerische Integration}

 setze $i = i^e(r)$ {bestimme globale Nummer von r }

 setze $b_i = b_i + b_r^e$

end for

end for

11.4 Zweidimensionale Probleme – Green'sche Formel

Als erstes zweidimensionales Beispiel einer partiellen Differentialgleichung betrachten wir die **Potentialgleichung**

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \Gamma,\end{aligned}$$

wobei wir hier und im Folgenden für den **Laplace-Operator** im \mathbb{R}^n kurz

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

schreiben.

Die Potentialgleichung tritt in vielen wichtigen Anwendungen auf, unter anderem in der Elektrostatik (hier ist u die Spannung bzw. das Potential), bei der Temperaturverteilung in einem Körper bei vorgegebener Randtemperatur (hier ist u die Temperatur), in Diffusionsprozessen, bei der die Gleichgewichtskonzentration u eines diffundierenden Stoffes bei vorgegebener Randkonzentration bestimmt werden soll. In der Funktionentheorie tritt die Potentialgleichung ebenfalls auf und zwar in der folgenden Form: Ist $(x_1, x_2) = x_1 + ix_2 = z \in \mathbb{C}$ und $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f = u$, dann liefern die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \quad u_{x_2} = -v_{x_1},$$

so dass $\Delta u = 0$ gilt.

Auch die inhomogene Gleichung, die sogenannte **Poisson-Gleichung**

$$\begin{aligned}-\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \Gamma,\end{aligned} \tag{11.10}$$

hat zahlreiche Anwendungen in der Physik, zum Beispiel die Bestimmung der Form einer eingespannten Membran unter der Wirkung einer Schwerkraft im Gleichgewichtszustand oder Probleme in der Strömungsmechanik, bei denen u der Druck ist.

Allgemein ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in n Variablen von der Form

$$-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n B_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u = f(x), \tag{11.11}$$

$x = [x_1 \ \dots \ x_n]$ gegeben. Da für alle $u \in C^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

gilt, kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $A_{ij} = A_{ji}$ für alle i, j gilt. Die Matrix $\mathcal{A}(x) = (A_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ ist dann für jedes x symmetrisch.

Definition 11.11. Die Gleichung (11.11) heißt **elliptisch im Punkt x** , falls $\mathcal{A}(x)$ positiv definit ist und **elliptisch (im Gebiet Ω)**, falls $\mathcal{A}(x)$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

Ist die Gleichung (11.11) elliptisch, dann schreiben wir kurz $Lu = f$ und nennen L einen elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung. Ein Beispiel ist $L = -\Delta$.

Eine parabolische partielle Differentialgleichung ist durch

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f, \quad u = u(x, t)$$

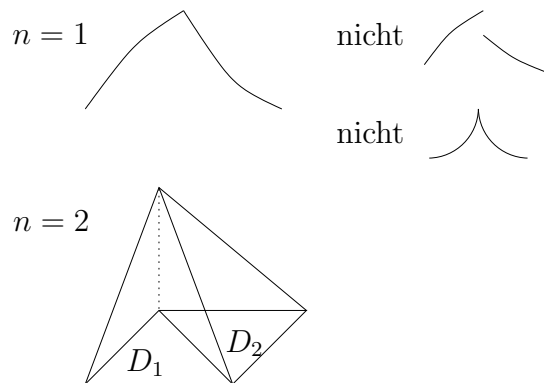
mit einem elliptischen Differentialoperator L gegeben, eine hyperbolische durch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f, \quad u = u(x, t).$$

Wir möchten jetzt wie im eindimensionalen Fall eine schwache Formulierung elliptischer Randwertprobleme herleiten. Ein wesentliches Hilfsmittel in Abschnitt 11.1 war die partielle Integration. Daher zeigen wir in diesem Abschnitt zunächst die mehrdimensionale Variante, die Green'sche Formel für stückweise C^1 -Gebiete.

Definition 11.12. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $\varphi : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, kurz **stückweise C^1** , falls φ stetig ist und es endlich viele offene Mengen $D_1, \dots, D_m \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{D} = \bigcup_{i=1}^m \overline{D}_i$ gibt, so dass $\varphi|_{D_i}$ stetig differenzierbar ist und $(\varphi|_{D_i})'$ auf \overline{D}_i stetig fortsetzbar ist für $i = 1, \dots, m$.

Beispiel.

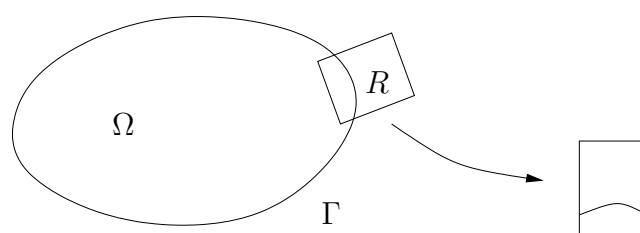


◇

Definition 11.13. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, $\Gamma = \partial\Omega$. Ω heißt **Gebiet mit stückweise differenzierbarem Rand**, kurz **stückweises C^1 -Gebiet**, falls es endlich viele offene Rechtecke gibt, die Γ überdecken, so dass gilt: Für jedes solche Rechteck R gibt es eine Drehung Q des \mathbb{R}^2 , so dass es eine stückweise C^1 -Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

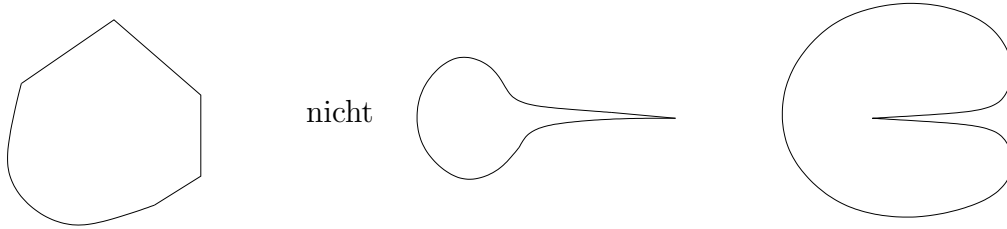
$$Q(\overline{R} \cap \Gamma) = \{(t, \gamma(t)) \mid t \in [a, b]\}$$

und $Q(\overline{R} \cap \Omega)$ liegt unterhalb von $Q(\overline{R} \cap \Gamma)$.



Mit anderen Worten ist Ω stückweises C^1 -Gebiet, wenn Γ lokal der Graph einer stückweisen C^1 -Funktion ist und Ω auf einer Seite von Γ liegt.

Beispiel.



◇

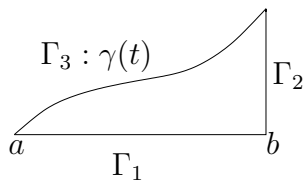
Satz 11.14. (Green'sche Formel)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, stückweises C^1 -Gebiet, $f, g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stückweise C^1 -Funktionen. Dann gilt die Green'sche Formel

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g d(x_1, x_2) = \int_{\Gamma} f g n_i d\sigma - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} d(x_1, x_2), \quad i = 1, 2,$$

wobei $n(x) = (n_1(x), n_2(x))^T$ der äußere Normalenvektor in x ist.

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall, dass $\bar{\Omega}$ eine endliche Vereinigung von Elementardreiecken D und gedrehten derartigen Dreiecken ist:

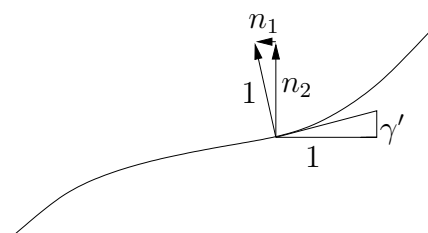


$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, strikt monoton
 $\bar{D} = \{(t, u) \mid t \in [a, b], \gamma(a) \leq u \leq \gamma(t)\}$

Wir zeigen, dass die Formel für Elementardreiecke für $i = 2$ richtig ist. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial f}{\partial x_2} g d(x_1, x_2) &= \int_a^b \int_{\gamma(a)}^{\gamma(x_1)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) g(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_a^b \left[(fg)(x_1, \gamma(x_1)) - (fg)(x_1, \gamma(a)) - \int_{\gamma(a)}^{\gamma(x_1)} f \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 \right] dx_1 \\ &= \int_{\partial D} f g n_2 d\sigma - \int_D f \frac{\partial g}{\partial x_2} d(x_1, x_2), \end{aligned}$$

denn auf Γ_1 ist $n_2 = -1$, auf Γ_2 ist $n_2 = 0$ und auf Γ_3 ist $-n_1/n_2 = \gamma'$:



Wir eliminieren n_1 mit Hilfe der Normierungsbedingung $n_1^2 + n_2^2 = 1$ und erhalten

$$1 + (\gamma')^2 = \frac{1}{n_2^2} \iff n_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma')^2}}.$$

Daraus ergibt sich für $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f g n_2 d\sigma &= - \int_{\Gamma_1} f g d\sigma + \int_{\Gamma_3} f g \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma')^2}} d\sigma \\ &= - \int_a^b (f g)(t, \gamma(a)) dt + \int_a^b (f g)(t, \gamma(t)) \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma')^2}} \sqrt{1 + (\gamma')^2} dt. \end{aligned}$$

Die Green'sche Formel ist also richtig für Elementardreiecke für $i = 2$. Mit Variablentransformation $y = Qx$ ist sie richtig auch für gedrehte Dreiecke und damit auch für Ω . \square

11.5 Variationelle Approximation – Ritz-Galerkin

Sei nun Ω ein stückweises C^1 -Gebiet und

$$V = \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ stückweise } C^1, v = 0 \text{ auf } \Gamma\}.$$

Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ Lösung der Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = (0, 1)^2, \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{11.12}$$

dann folgt aus der Green'schen Formel

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d(x, y) = \int_{\Omega} f v d(x, y) \quad \forall v \in V.$$

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 11.1 definieren wir jetzt

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d(x, y) \quad \text{für } u, v \in V, \\ \ell(v) &= \int_{\Omega} f v d(x, y) \quad \text{für } v \in V. \end{aligned}$$

Die Abbildung $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear. Für a gilt

Lemma 11.15. $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine symmetrische und positiv definite Bilinearform.

Beweis. Der Beweis geht völlig analog zu dem von Lemma 11.1. Klar ist, dass a eine symmetrische Bilinearform mit $a(v, v) \geq 0$ ist. Wir müssen nur zeigen, dass $a(v, v) = 0$ genau dann gilt, wenn $v = 0$. $a(v, v) = 0$ für $v = 0$ ist klar. Sei also $a(v, v) = 0$. Dann ist

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

also $v \equiv c$ in Ω . Wegen $v = 0$ auf Γ ist $c = 0$. \square

Damit ist wieder a ein Skalarprodukt auf V , welches V zu einem Prä-Hilbert-Raum (ein Vektorraum mit Skalarprodukt, der im Unterschied zum Hilbert-Raum jedoch nicht vollständig sein muss) mit der Norm $\|\cdot\|_a = \sqrt{a(v, v)}$, der sogenannten **Energienorm**, macht.

Die schwache Formulierung der Poisson-Gleichung lautet mit dieser Notation: Suche $u \in V$ mit

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V.$$

Oben haben wir bereits gezeigt, dass hinreichend glatte klassische Lösungen auch schwache Lösungen sind. Klassische Lösungen können ebenfalls durch (11.13) charakterisiert werden, wenn man

$$V = \{v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), v = 0 \text{ auf } \Gamma\}$$

wählt.

Im Folgenden sei a eine beliebige symmetrische und positiv definite Bilinearformen und ℓ eine beliebige stetige Linearformen auf einem Vektorraum V .

Satz 11.16. u erfüllt die Galerkin-Bedingung

$$u \in V, \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V. \quad (11.13)$$

genau dann, wenn

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v), \quad u \in V, \quad (11.14)$$

wobei

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v).$$

Beweis. Für beliebiges $w \in V$ setzen wir $v = w - u$. Dann ist wegen der Bilinearität von a und der Linearität von ℓ

$$\begin{aligned} J(u + v) - J(u) &= \frac{1}{2}[a(u + v, u + v) - a(u, u)] - \ell(u + v) + \ell(u) \\ &= \frac{1}{2}[a(u, u) + 2a(u, v) + a(v, v) - a(u, u)] - \ell(v) \\ &= a(u, v) - \ell(v) + \frac{1}{2}a(v, v). \end{aligned}$$

Ist $a(u, v) - \ell(v) = 0$, so folgt aus $a(v, v) \geq 0$ die Ungleichung $J(u) \leq J(w)$ für alle $w \in V$.

Die Umkehrung folgt aus $\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} J(u + \epsilon v) = a(u, v) - \ell(v)$. \square

Die wesentliche Idee der näherungsweisen Lösung der partiellen Differentialgleichung (11.12) besteht nun genau wie im eindimensionalen Beispiel darin, ausgehend von einer der äquivalenten Bedingungen in (11.13), (11.14) einen endlichdimensionalen Unterraum V_N von V ($N = \dim V_N$) auszuwählen und $u_N \in V_N$ so zu bestimmen, dass

$$a(u_N, v_N) = \ell(v_N) \quad \forall v_N \in V_N \quad \text{Galerkin-Verfahren} \quad (11.15)$$

oder äquivalent

$$J(u_N) = \min_{v_N \in V_N} J(v_N) \quad \text{Ritz-Verfahren} \quad (11.16)$$

gilt. Die Äquivalenz der beiden Verfahren beweist man genau wie oben, wobei man jedoch V durch V_N ersetzt. Nach Satz 11.3 existiert genau eine Lösung von (11.15), denn es wurde dort

nichts über die spezielle Wahl von V und a vorausgesetzt. Ferner gilt auch hier Céa's Lemma (Satz 11.4), d. h. in der Energienorm gilt für die Lösungen $u \in V$ von (11.13) und $u_N \in V_N$ von (11.15)

$$\|u_N - u\|_a = \min_{v_N \in V_N} \|v_N - u\|_a.$$

Die Galerkin-Approximation hat also in der Energienorm unter allen Elementen von V_N den kleinsten Abstand zur Lösung. Die Fehleruntersuchung für Galerkin-Verfahren reduziert sich damit auf die Frage: Wie gut lässt sich die Lösung in V_N annähern? Eine entscheidende Bedeutung kommt dabei natürlich der Wahl von V_N zu.

11.6 Einschub: Lineare Operatoren

Bevor wir die schwache Formulierung elliptischer Randwertprobleme herleiten, rufen wir zunächst einige Begriffe aus der Funktionalanalysis in Erinnerung.

Es seien X, Y Vektorräume. Dann heißt eine Abbildung $T : X \rightarrow Y$ **linearer Operator**, wenn für alle $x, y \in X$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C} gilt

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y.$$

Im Folgenden setzen wir voraus, dass X, Y normierte Vektorräume sind, d. h. Vektorräume, in denen eine Norm definiert ist. Ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ heißt **beschränkt** genau dann, wenn eine reelle Zahl c existiert, so dass

$$\|T x\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in X$$

gilt. Die kleinste derartige Zahl c ist die **Norm** von T :

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T x\|}{\|x\|}.$$

Eine wichtige Eigenschaft der Norm, die wir bereits von Matrizen kennen ist

$$\|T x\| \leq \|T\| \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Ein (nicht notwendigerweise linearer) Operator $T : X \rightarrow Y$ ist **stetig** im Punkt $x \in X$ genau dann, wenn

$$x_n \rightarrow x \implies T x_n \rightarrow T x$$

für jede konvergente Folge $\{x_n\}_n \subset X$ gilt. T heißt stetig (in X), wenn es in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Satz 11.17. *Der lineare Operator $T : X \rightarrow Y$ ist stetig in X genau dann, wenn T stetig in einem Punkt $x_0 \in X$ ist.*

Beweis. Die eine Richtung ist klar. Nehmen wir also an, T sei stetig in x_0 . Wir wählen $x \in X$ beliebig aus. $\{x_n\}_n$ sei eine Folge in X mit $x_n \rightarrow x$. Dann konvergiert die Folge $\{x_n - x + x_0\}_n$ gegen x_0 . Aus der Stetigkeit in x_0 folgt also

$$T(x_n - x + x_0) \rightarrow T x_0.$$

Andererseits ist wegen der Linearität

$$T(x_n - x + x_0) = T x_n - T x + T x_0,$$

es folgt also $T x_n \rightarrow T x$. □

Bei linearen Operatoren sind Stetigkeit und Beschränktheit äquivalent.

Satz 11.18. *Ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn er beschränkt ist.*

Beweis. Angommen, der stetige lineare Operator T wäre unbeschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$. Für $y_n := x_n/\|x_n\|$ gilt dann

$$\|y_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \|Ty_n\| \rightarrow \infty.$$

Damit erfüllt $z_n = y_n/\|Ty_n\|$

$$z_n \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|Tz_n\| = 1.$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass aus der Stetigkeit $Tz_n \rightarrow 0$ für $z_n \rightarrow 0$ folgt.

Umgekehrt sei T beschränkt. Nach Satz 11.17 genügt es, Stetigkeit im Nullpunkt zu zeigen. Sei dazu $x_n \rightarrow 0$ eine Folge in X . Dann folgt aus der Beschränktheit

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\| \rightarrow 0.$$

T ist also stetig in 0 und damit auch stetig in X . □

11.7 Lemma von Lax-Milgram, schwache Lösungen

Allgemein sei nun V mit Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot)$ ein Prä-Hilbert-Raum. Die zugehörige Norm sei durch $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$ gegeben (Energienorm). $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Linearform, d. h.

$$|\ell(v)| \leq C\|v\|_a \quad \forall v \in V$$

und das quadratische Funktional $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$ gegeben. In diesem allgemeinen Rahmen soll nun die Frage beantwortet werden, ob ein $u \in V$ existiert, welches J minimiert, d. h. für das gilt

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Das weitere Vorgehen ist durch die Frage, ob ein $x \in \mathbb{Q}$ existiert, welches $(x^2 - 2)^2$ minimiert, motiviert.

In jedem Fall gibt es eine Folge $(v_n)_{n \geq 0}$ in V mit

$$J(v_n) \rightarrow \inf_{v \in V} J(v) =: c. \quad (11.17)$$

Konvergiert die Folge (v_n) gegen ein $u \in V$?

Lemma 11.19. *Jede Folge $(v_n)_{n \geq 0} \subset V$ mit (11.17) ist eine Cauchy-Folge, d. h.*

$$\|v_n - v_m\|_a \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty.$$

Beweis. Es gilt nach Voraussetzung $J(v_n) - J(v_m) \rightarrow 0$, $n, m \rightarrow \infty$. Mit Hilfe der Identitäten

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 - 2y^2 \\ x - y &= (x + y) - 2y \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 0 \leftarrow J(v_n) - J(v_m) &= \frac{1}{2}a(v_n, v_n) - \frac{1}{2}a(v_m, v_m) - \ell(v_n) + \ell(v_m) \\
 &= \frac{1}{4}a(v_n - v_m, v_n - v_m) + a\left(\frac{v_n + v_m}{2}, \frac{v_n + v_m}{2}\right) - a(v_m, v_m) \\
 &\quad - 2\ell\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) + 2\ell(v_m) \\
 &= \frac{1}{4}\|v_n - v_m\|_a^2 + 2J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) - 2J(v_m).
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 a(v, v) + a(w, w) - 2a\left(\frac{v+w}{2}, \frac{v+w}{2}\right) &= \frac{1}{2}a(v, v) + \frac{1}{2}a(w, w) - a(v, w) \\
 &= \frac{1}{2}a(v - w, v - w) \geq 0
 \end{aligned}$$

gilt $2J\left(\frac{v+w}{2}\right) \leq J(v) + J(w)$. Aus $c = \inf J(v)$ folgt

$$2c \leq 2J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \leq J(v_n) + J(v_m) \rightarrow 2c,$$

also $J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \rightarrow c$. Somit geht $\|v_n - v_m\|_a \rightarrow 0$ und v_n ist eine Cauchy-Folge. \square

Ist also der Prä-Hilbert-Raum V sogar vollständig (und damit ein Hilbert-Raum), dann konvergiert die Folge v_n gegen ein $u \in V$. Dieses ist Lösung des Variationsproblems. Die Schwierigkeit liegt hier darin, dass in obigem Beispiel V mit der Norm $a(v, v)$ kein Hilbert-Raum ist. Analog zur Vervollständigung von \mathbb{Q} zu \mathbb{R} ($(x^2 - 2)^2$ hat ein Minimum in \mathbb{R} , nämlich $x = \sqrt{2}$) vervollständigt man V zu einem Hilbert-Raum \bar{V} .

Lemma 11.20. *Es sei V ein Prä-Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot)$. Dann existiert ein bis auf Isometrie eindeutiger Hilbert-Raum \bar{V} mit Skalarprodukt $\bar{a}(\cdot, \cdot)$, so dass V dicht in \bar{V} liegt und $\bar{a}|_{V \times V} = a$ gilt.*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zur Vervollständigung von \mathbb{Q} zu \mathbb{R} : \mathbb{R} sei die Menge der Cauchy-Folgen über \mathbb{Q}/\sim mit der Äquivalenz $(x_n)_{n \geq 0} \sim (y_n)_{n \geq 0}$, falls $(x_n - y_n) \rightarrow 0$. Identifiziert man \mathbb{Q} mit der Menge aller Äquivalenzklassen der konstanten Folgen $x = \overline{(x, x, x, \dots)}$, so liegt \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} .

In unserer Situation definieren wir \bar{V} als Menge der Cauchy-Folgen über V/\sim mit der Äquivalenz $(v_n)_{n \geq 0} \sim (w_n)_{n \geq 0}$, falls $\|v_n - w_n\|_a \rightarrow 0$. Identifiziert man V mit der Menge aller Äquivalenzklassen der konstanten Folgen, so liegt V dicht in \bar{V} . Wir verzichten auf die Details. \square

Lemma 11.21. *(Fortsetzung durch Dichte)*

Sei \bar{V} ein Hilbert-Raum und V liege dicht in \bar{V} . Dann lässt sich jede stetige Linearform $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ in eindeutiger Weise auf eine stetige Linearform $\bar{\ell} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, d. h. $\bar{\ell}|_V = \ell$.

Beweis. Es sei $(v_n)_n$ eine Cauchy-Folge in V mit $v_n \rightarrow v \in \bar{V}$. Dann ist $(\ell(v_n))_n$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} , der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(v_n)$ existiert also. Durch $\bar{\ell}(v) := \lim \ell(v_n)$ ist $\bar{\ell}$ wohldefiniert, hängt also insbesondere nicht von der speziellen Wahl der Folge (v_n) ab, denn falls auch $w_n \rightarrow v$ konvergiert, dann gilt $v_n - w_n \rightarrow 0$. Wegen der Stetigkeit von ℓ muss dann auch $\ell(v_n - w_n) \rightarrow 0$ gelten, also $\lim \ell(w_n) = \lim \ell(v_n)$. Offensichtlich ist $\bar{\ell}$ stetig und linear. \square

Wir schreiben im Folgenden wieder a statt \bar{a} und ℓ statt $\bar{\ell}$.

Bemerkung. Oft ist es zweckmäßig, als Norm auf V eine zu $\|\cdot\|_a$ äquivalente Norm zu wählen, also eine Norm, zu der Konstanten $\gamma, C > 0$ existieren, so dass

$$\gamma \|v\| \leq \|v\|_a \leq C \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Wichtig ist, dass V bzgl. aller äquivalenter Normen dieselbe Vervollständigung \bar{V} hat, denn Cauchy-Folgen bzgl. $\|\cdot\|_a$ sind auch Cauchy-Folgen bzgl. $\|\cdot\|$ und umgekehrt. Dasselbe gilt für Nullfolgen.

Definition 11.22. Es sei V ein Hilbert-Raum mit Norm $\|\cdot\|$. Eine symmetrische Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (a) es existiert $\alpha > 0$ mit $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ für alle $v \in V$ (a ist koerziv) und
- (b) es existiert $M < \infty$ mit $|a(u, v)| \leq M \|u\| \cdot \|v\|$ für alle $u, v \in V$ (a ist beschränkt)

heißt V -elliptisch.

Satz 11.23. (Lax-Milgram)

Es sei V ein Hilbert-Raum, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, V -elliptische Bilinearform und $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Linearform. Dann hat das Variationsproblem

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v) = \min!$$

bzw. äquivalent $a(u, v) = \ell(v)$ für alle $v \in V$ genau eine Lösung in V .

Beweis. Existenz: Wegen

$$J(v) \geq \frac{1}{2} \alpha \|v\|^2 - \|\ell\| \cdot \|v\| = \frac{1}{2\alpha} (\alpha \|v\| - \|\ell\|)^2 - \frac{1}{2\alpha} \|\ell\|^2 \geq -\frac{1}{2\alpha} \|\ell\|^2$$

ist $J(v)$ nach unten beschränkt. Es gibt daher eine Minimalfolge $(v_n)_n$, d. h. $J(v_n) \rightarrow \inf_{v \in V} J(v)$. Nach Lemma 11.19 ist v_n eine Cauchy-Folge, die wegen der Vollständigkeit gegen ein $u \in V$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von a und ℓ ist auch J stetig, also konvergiert $J(v_n) \rightarrow J(u)$ und es ist $J(u) = \min_{v \in V} J(v)$.

Eindeutigkeit: Angenommen, es gibt $u_1, u_2 \in V$ mit

$$a(u_1, v) = a(u_2, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V.$$

Dann ist $a(u_1 - u_2, v) = 0$ für alle $v \in V$, insbesondere also für $v = u_1 - u_2$, woraus aus der positiven Definitheit sofort $u_1 = u_2$ folgt. \square

Damit haben wir gezeigt, dass für die schwache Formulierung (11.13) des Poisson-Problems (11.12) immer eine Lösung $u \in \bar{V}$ existiert. Diese heißt **schwache Lösung**. Eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ existiert jedoch nicht immer (ohne Beweis). Wir wissen jedoch, dass jede klassische Lösung auch eine schwache Lösung ist.

11.8 Sobolev-Räume

Wie sehen nun die Hilbert-Räume \bar{V} aus, die sich aus der Vervollständigung der Räume der zulässigen Funktionen bei elliptischen Randwertproblemen ergeben?

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweisem C^1 -Rand. Die Beweise werden wir der Übersichtlichkeit halber häufig nur für $n = 2$ führen. Sie lassen sich aber ohne weiteres auch auf $n > 2$ verallgemeinern.

Der Raum $L^2(\Omega)$

$L^2(\Omega)$ ist der Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf Ω , also aller $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty.$$

Im Raum L^2 werden Funktionen f, g identifiziert, wenn sie sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden.

Bemerkung. Es ist $C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ aber $C(\bar{\Omega}) \neq L^2(\Omega)$. Man überlege sich hierzu dass zum Beispiel $\log \in L^2(0, 1)$ aber nicht in $C([0, 1])$ (Übung).

$L^2(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_0 = \int_{\Omega} f g dx$$

und der zugehörigen Norm

$$\|f\|_{0,\Omega} = \|f\|_0 = \sqrt{\langle f, f \rangle_0}.$$

Der Raum $C^\infty(\bar{\Omega})$ liegt dicht in $L^2(\Omega)$ bzgl. $\|\cdot\|_0$. Dasselbe gilt für $C(\bar{\Omega})$. Daher kann man $L^2(\Omega)$ als Vervollständigung von $C^\infty(\bar{\Omega})$ oder von $C(\bar{\Omega})$ auffassen. Wir schreiben auch

$$H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$$

und bezeichnen H^0 als **Sobolev-Raum** der Ordnung 0. Auf $\Gamma = \partial\Omega$ definiert man analog $L^2(\Gamma)$ mit

$$\langle f, g \rangle_{0,\Gamma} = \int_{\Gamma} f g d\sigma, \quad \|f\|_{0,\Gamma} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{0,\Gamma}}.$$

$L^2(\Gamma)$ ist wieder ein Hilbert-Raum mit $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$.

Der Raum $H^1(\Omega)$

Die Vervollständigung von $V = C^\infty(\bar{\Omega})$ (oder von $C^1(\bar{\Omega})$) bezüglich

$$\|v\|_1^2 = \int_{\Omega} v^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx$$

bezeichnen wir mit $H^1(\Omega)$, dem **Sobolev-Raum** der Ordnung 1.

Wie sehen die Elemente von $H^1(\Omega)$ aus? Es sei $(v_k)_{k \geq 0}$ eine Cauchyfolge in $C^\infty(\bar{\Omega})$, d. h.

$$\|v_k - v_l\|_1 \rightarrow 0 \quad k, l \rightarrow \infty$$

oder

$$\begin{aligned} \|v_k - v_l\|_0 &\rightarrow 0 \\ \left\| \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \right\|_0 &\rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k, l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Wegen der Vollständigkeit von $L^2(\Omega)$ existieren eindeutig bestimmte Funktionen $v, v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in L^2(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \|v_k - v\|_0 &\rightarrow 0 \\ \left\| \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - v^{(i)} \right\|_0 &\rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$v^{(i)}$ heißt **verallgemeinerte Ableitung** von v . Wir schreiben auch $\partial_i v$ oder wieder $\frac{\partial v}{\partial x_i}$. Damit kann $H^1(\Omega)$ charakterisiert werden als

$$H^1(\Omega) = \{v \mid v, v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in L^2(\Omega)\}.$$

Man kann zeigen, dass für $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ gilt $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ist dies nicht richtig, wie man etwa für $n = 2$ am Gegenbeispiel

$$\left| \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right|^{1/4} \in H^1(\Omega), \quad \Omega = \{x_1^2 + x_2^2 < r, x \neq 0\}$$

sieht (Übung).

Problematisch ist jetzt, dass wir Randwertprobleme lösen wollen, der Rand jedoch eine Menge vom Maß Null ist und somit für $f \in L^2(\Omega)$ die Einschränkung $f|_\Gamma$ nicht sinnvoll definiert ist. Für $v \in H^1(\Omega)$ lässt sich $v|_\Gamma$ jedoch sinnvoll wie folgt definieren.

Satz 11.24. (*Spursatz*)

Die Abbildung

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\Gamma) : \quad v \mapsto v|_\Gamma$$

lässt sich in eindeutiger Weise zu einer stetigen linearen Abbildung

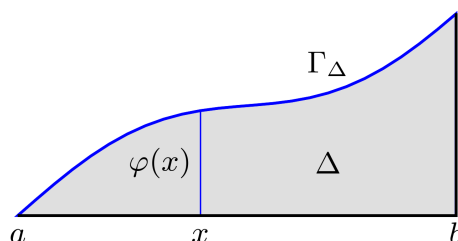
$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) : \quad v \mapsto v|_\Gamma,$$

der Spur von v auf Γ , fortsetzen.

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst, dass ein $C < \infty$ existiert, welches nur vom Gebiet Ω abhängt, für das

$$\|v|_\Gamma\|_{0,\Gamma} \leq C \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad (11.18)$$

gilt. Ω ist nach Voraussetzung beschränkt und stückweise C^1 , kann also in endlich viele Elementardreiecke zerlegt werden (wie im Beweis der Green'schen Formel):



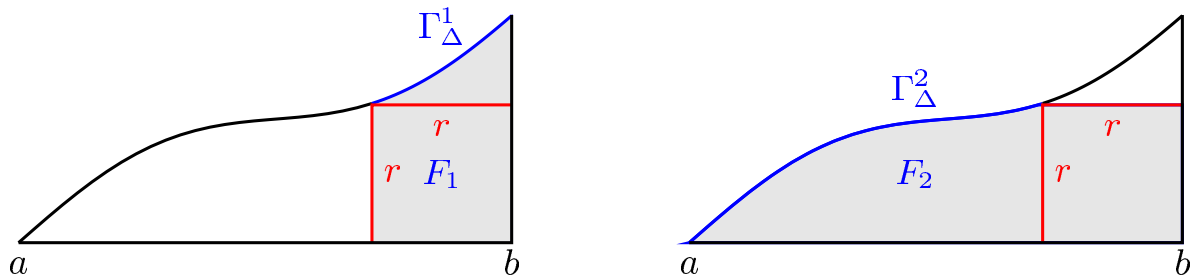


Abb. 11.1: Skizze zum Beweis von Satz 11.24.

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i, \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_{\Delta_i}.$$

Drehung und Verschiebung ändern den Wert des Randintegrals $\int_{\Gamma_{\Delta}} v^2 d\sigma$ nicht. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Strecke \overline{ab} auf der x -Achse liegt ($y = 0$).

Sei $(x, y) = (x, \varphi(x)) \in \Gamma_{\Delta}$. Dann ist wegen $2ab \leq a^2 + b^2$

$$\begin{aligned} v(x, y)^2 &= 1 \cdot v(x, y)^2 - 0 \cdot v(x, 0)^2 \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (tv(x, ty)^2) dt \\ &= \int_0^1 \left[v(x, ty)^2 + t 2v(x, ty) \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}(x, ty)}_{\leq v(x, ty)^2 + \frac{\partial v}{\partial y}(x, ty)^2} y \right] dt \\ &\leq C_1 \int_0^1 \left(v(x, ty)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x, ty) \right)^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Analog gilt für $(x, y) = (\varphi^{-1}(y), y) \in \Gamma_{\Delta}$, wobei φ^{-1} die Umkehrfunktion von φ bezeichnet, die Ungleichung

$$v(x, y)^2 \leq C'_1 \int_0^1 \left(v(tx, y)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(tx, y) \right)^2 \right) dt. \quad (11.20)$$

In das Elementardreieck Δ legen wir ein Quadrat maximaler Breite r in die rechte untere Ecke und betrachten die Ränder Γ_{Δ}^1 und Γ_{Δ}^2 der grau schraffierten Flächen F_1 und F_2 (vgl. Abbildung 11.1). Das Randintegral zerlegen wir in

$$\int_{\Gamma_{\Delta}} v^2 d\sigma = \int_{\Gamma_{\Delta}^1} v^2 d\sigma + \int_{\Gamma_{\Delta}^2} v^2 d\sigma.$$

Mit $\sqrt{1 + \varphi'(x)^2} \leq C_2$ und $\varphi(x) \geq r$ auf Γ_Δ^1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_\Delta^1} v^2 d\sigma &= \int_{b-r}^b v(x, \varphi(x))^2 \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx \\
 &\leq C_2 \int_{b-r}^b v(x, \varphi(x))^2 dx \\
 &\leq C_2 C_1 \int_{b-r}^b \int_0^1 \left(v(x, t\varphi(x))^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x, t\varphi(x)) \right)^2 \right) dt dx \quad \text{wegen (11.19)} \\
 &= C_2 C_1 \int_{F_1} \frac{1}{\varphi(x)} \left(v(x, y)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right) d(x, y) \\
 &\leq C_2 C_1 \frac{1}{r} \int_{F_1} \left(v(x, y)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right) d(x, y)
 \end{aligned}$$

und analog mit (11.20)

$$\int_{\Gamma_\Delta^2} v^2 d\sigma \leq C_2' C_1' \frac{1}{r} \int_{F_2} \left(v(x, y)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right)^2 \right) d(x, y),$$

so dass insgesamt

$$\int_{\Gamma_\Delta} v^2 d\sigma \leq \frac{1}{r} (C_1 C_2 \|v\|_{1, F_1}^2 + C_1' C_2' \|v\|_{1, F_2}^2) \leq \frac{2}{r} \max\{C_1 C_2, C_1' C_2'\} \|v\|_{1, \Delta}^2$$

folgt.

Somit gilt nach Summation über alle Elementardreiecke

$$\int_{\Gamma} v^2 d\sigma \leq C \int_{\Omega} \left[v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] d(x, y),$$

(11.18) ist also gezeigt.

(b) Der weitere Beweis erfolgt nun mittels Fortsetzung durch Dichte wie in Lemma 11.21. Da $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt, existiert zu jedem $v \in H^1(\Omega)$ eine Folge $(v_k)_{k \geq 0}$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $\|v_k - v\|_1 \rightarrow 0$. $(v_k)_k$ ist eine Cauchyfolge, $\|v_k - v_m\|_1 \rightarrow 0$ für $k, m \rightarrow \infty$. Wegen (11.18) ist $(v_k|_\Gamma)$ eine Cauchyfolge in $L^2(\Gamma)$, d. h. $\|v_k|_\Gamma - v_m|_\Gamma\|_{0, \Gamma} \rightarrow 0$. $L^2(\Gamma)$ ist vollständig, es existiert also ein $w \in L^2(\Gamma)$ mit $\|v_k|_\Gamma - w\|_{0, \Gamma} \rightarrow 0$. Wir definieren $\gamma(v) := w$ und zeigen wie in Lemma 11.21, dass $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ wohldefiniert, stetig und linear ist. \square

Der Raum $H_0^1(\Omega)$

Nach dem Spursatz 11.24 ist $v|_\Gamma$ für $v \in H^1(\Omega)$ wohldefiniert und daher der Raum

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_\Gamma = 0\}$$

sinnvoll definiert. Als Kern der Spurabbildung ist $H_0^1(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^1(\Omega)$ und damit selbst ein Hilbert-Raum bzgl. $\|\cdot\|_1$. Es liegt

$$C_0^\infty(\bar{\Omega}) := \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) \mid v = 0 \text{ in einer Umgebung von } \Gamma\}$$

dicht in $H_0^1(\Omega)$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ (ohne Beweis). Somit kann $H_0^1(\Omega)$ als Vervollständigung von $V = C_0^\infty(\bar{\Omega})$ oder auch von $V = \{v \text{ stückweise } C^1, v = 0 \text{ auf } \Gamma\}$ aufgefasst werden.

In Abschnitt 11.7 haben wir die Vervollständigung bzgl.

$$|v|_1 = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

betrachtet. Man beachte, dass

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_0^2 + |v|_1^2.$$

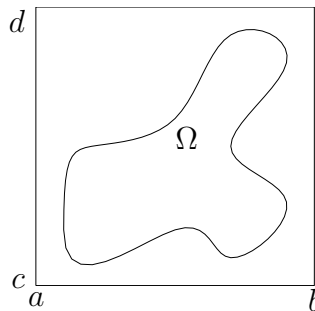
Der folgende Satz zeigt, dass $\|\cdot\|_1$ und $|\cdot|_1$ auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalente Normen sind. $H_0^1(\Omega)$ ist daher der im Beispiel der Poisson-Gleichung betrachtete Raum \bar{V} .

Satz 11.25. (*Poincaré' Ungleichung*)

Es existiert eine Konstante $C = C(\Omega) < \infty$, so dass

$$\|v\|_0 \leq C|v|_1 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Beweis. Es sei Ω im Rechteck $R = (a, b) \times (c, d)$ enthalten. Wir zeigen die Ungleichung für $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, also einer in $H_0^1(\Omega)$ dichten Teilmenge und setzen dann v durch 0 auf das ganze Rechteck fort, $v \in C_0^\infty(\bar{R})$.



Aus

$$v(x, y) = \int_a^x 1 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(\xi, y) d\xi$$

folgt mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} v(x, y)^2 &\leq \int_a^x 1^2 d\xi \int_a^x \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\xi, y) \right)^2 d\xi \\ &\leq (x - a) \int_a^x \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\xi, y) \right)^2 d\xi. \end{aligned}$$

Wir integrieren nun beide Seiten über das Rechteck R (bzw. über Ω)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^2 d(x, y) &= \int_a^b \int_c^d v^2 d(x, y) \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\xi, y) \right)^2 d\xi dy \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right)^2 d(x, y). \end{aligned}$$

Die Behauptung ist also für $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ richtig. Sei nun $v \in H_0^1(\Omega)$. Dann gibt es eine Folge (v_k) in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|v_k - v\|_1 \rightarrow 0$, also $\|v_k - v\|_0 \rightarrow 0$ und $|v_k - v|_1 \rightarrow 0$. Diese erfüllt

$$\|v_k\|_0 \leq C |v_k|_1 \quad \forall k \geq 0.$$

Wegen der Stetigkeit der Normen gilt diese Ungleichung auch für v . \square

Sobolev-Räume höherer Ordnung

Die Vervollständigung von $C^\infty(\overline{\Omega})$ bzgl.

$$\|v\|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (\partial^\alpha v)^2 dx \right)^{1/2},$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex ist, d. h. $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

bezeichnen wir mit $H^m(\Omega)$, dem Sobolev-Raum der Ordnung m . $H^m(\Omega)$ ist charakterisiert durch

$$H^m(\Omega) = \{v \mid \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq m\}.$$

$\partial^\alpha v$ sind die verallgemeinerten partiellen Ableitungen. Wir schreiben auch

$$\|v\|_m^2 = \sum_{k=0}^m |v|_k^2 \quad \text{mit} \quad |v|_k^2 = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (\partial^\alpha v)^2 dx.$$

Satz 11.26. (Sobolev'sche Einbettungssätze)

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$H^m(\Omega) \subset \begin{cases} C^{m-1}(\overline{\Omega}) & n = 1, \\ C^{m-2}(\overline{\Omega}) & n = 2, 3. \end{cases}$$

Beweis. Wir zeigen nur, dass die Einbettung $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ für $n = 2, 3$ stetig ist. Ohne Einschränkung sei $0 \in \overline{\Omega}$ und lokal sei $\overline{\Omega}$ konvex und beschränkt (Elementardreieck). Wir zeigen die Stetigkeit in 0.

Für $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ist mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} v(x) &= v(0) + \int_0^1 1 \cdot \frac{d}{dt} v(tx) dt \\ &= v(0) + Dv(x) \cdot x - \int_0^1 t \frac{d^2}{dt^2} v(tx) dt. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\int_0^1 t D^2 v(tx)(x, x) dt \right)^2 dx &\leq \int_{\Omega} \underbrace{\int_0^1 t^{-2\alpha} dt}_{=C<\infty, \alpha<1/2} \cdot \int_0^1 t^{2(1+\alpha)} \|D^2 v(\underbrace{tx}_{\substack{\xi \in \Omega \\ d\xi = t^n dx}})\|_F^2 \cdot \underbrace{|x|^4}_{\leq c} dt dx \\ &\leq C \int_0^1 t^{2(1+\alpha)-n} dt \int_{\Omega} \|D^2(v(\xi))\|_F^2 d\xi \\ &\leq C |v|_2^2, \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|_F$ die Frobenius-Matrixnorm bezeichnet und die letzte Ungleichung wegen

$$\int_0^1 t^{2(1+\alpha)-n} dt = C' < \infty \quad \text{für} \quad 2(1+\alpha) - n > -1$$

oder $2\alpha > n - 3$ gilt. Beispiele sind $\alpha = 0$ für $n = 2$ und $\alpha = 1/4$ für $n = 3$. Insgesamt haben wir

$$v(0)^2 \int_{\Omega} dx \leq C \|v\|_2^2,$$

d. h. Stetigkeit im Nullpunkt, gezeigt. \square

11.9 Dirichlet- und Neumann-Probleme

Elliptische partielle Differentialgleichungen treten zum Beispiel bei stationären Feldproblemen der Physik (elektrische, magnetische Feldstärke, Temperaturverteilung, stationäre Strömung durch poröse Medien, ...) auf. In homogenen, isotropen Medien sind die Lösungen durch die Poisson-Gleichungen $-\Delta u = f$ gegeben, ansonsten haben die Probleme die Gestalt

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein stückweises C^1 -Gebiet ist, $n = 2, 3$, $f \in L^2(\Omega)$ und u Randbedingungen auf $\Gamma = \partial\Omega$ erfüllt. L ist ein elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + A_0 u$$

mit beschränkten Funktionen $A_0, A_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$|A_0(x)|, |A_{ij}(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega.$$

Wir setzen des Weiteren voraus, dass \mathcal{A} symmetrisch,

$$A_{ij} = A_{ji} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n$$

und elliptisch ist, d. h.

$$\begin{aligned} \exists \alpha_0 \geq 0 \quad & \forall x \in \Omega : A_0(x) \geq \alpha_0, \\ \exists \alpha_1 > 0 \quad & \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Omega : \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha_1 \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Homogenes Dirichlet-Problem

Das homogene Dirichlet-Problem ist durch

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

gegeben. Existiert eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so multiplizieren wir die Gleichung mit $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und integrieren über Ω . Mit der Green'schen Formel erhält man daraus

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + A_0 uv \right) dx = \int_{\Omega} f v dx =: \ell(v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Die variationelle Formulierung des homogenen Dirichlet-Problems sucht eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass $a(u, v) = \ell(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

Korollar 11.27. *Das homogene Dirichlet-Problem hat genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Beweis. Wir zeigen, dass alle Voraussetzungen des Satzes 11.23 von Lax-Milgram erfüllt sind.

ℓ ist eine stetige Linearform auf $H^1(\Omega)$ und damit auch auf dem Unterraum $H_0^1(\Omega)$, denn mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &\leq \left(\int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_0 \|v\|_0 \\ &\leq \|f\|_0 \|v\|_1 = \text{const} \|v\|_1. \end{aligned}$$

a ist eine beschränkte Bilinearform auf $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n \underbrace{|A_{ij}|}_{\leq M} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| + \underbrace{|A_0|}_{\leq M} |u| \cdot |v| \right) dx \\ &\leq M \left(\sum_{i,j=1}^n \underbrace{\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_0}_{\leq \|u\|_1} \underbrace{\left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0}_{\leq \|v\|_1} + \underbrace{\|u\|_0}_{\leq \|u\|_1} \underbrace{\|v\|_0}_{\leq \|v\|_1} \right) \\ &\leq M(n^2 + 1) \|u\|_1 \|v\|_1. \end{aligned}$$

Des Weiteren ist wegen der Elliptizität von A

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + A_0 v^2 \right) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \left(\alpha_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 + \alpha_0 v^2 \right) dx \\ &= \alpha_1 |v|_1^2 + \alpha_0 \|v\|_0^2. \end{aligned}$$

Aus der Poincaré'schen Ungleichung ($\|v\|_0 \leq C|v|_1$, Satz 11.25) folgt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_0^2 + |v|_1^2 \leq (C^2 + 1)|v|_1^2.$$

Mit obigem ist somit

$$a(v, v) \geq \alpha_1 |v|_1^2 \geq \frac{\alpha_1}{C^2 + 1} \|v\|_1^2.$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt, es existiert also eine eindeutige Lösung. \square

Bemerkung. Die Randbedingung geht hier in den Lösungsraum $H_0^1(\Omega)$ ein. In diesem Fall spricht man von einer **wesentlichen** Randbedingung.

Homogenes Neumann-Problem

Beim homogenen Neumann-Problem lautet die Aufgabe, $u \in H^1(\Omega)$ so zu bestimmen, dass

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Hierbei sind a und ℓ wie beim homogenen Dirichlet-Problem definiert.

Korollar 11.28. Das homogene Neumann-Problem hat genau eine Lösung in $H^1(\Omega)$, falls $\alpha_0 > 0$.

Beweis. Wegen $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_1^2$ für alle $v \in H^1(\Omega)$ mit $\alpha = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ ist a $H^1(\Omega)$ -elliptisch, falls $\alpha_0 > 0$. Die Behauptung folgt wieder aus Satz 11.23 von Lax-Milgram. \square

Welche Randbedingungen entsprechen diesem Variationsproblem? Es sei u hinreichend regulär, etwa $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Mit Hilfe der Green'schen Formel ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + A_0 uv \right) dx &= \int_{\Omega} \left(- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + A_0 u \right) v dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i \right) \cdot v d\sigma \\ &= \int_{\Omega} (Lu) v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_A} \cdot v d\sigma \end{aligned}$$

mit der Konormalenableitung

$$\frac{\partial u}{\partial n_A} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i$$

zu A . Im Spezialfall des Laplace-Operators ($L = -\Delta$) entspricht die Konormalenableitung zu A der Normalenableitung:

$$\frac{\partial u}{\partial n_A} = \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i.$$

Korollar 11.29. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ Lösung des Variationsproblems. Dann gilt $Lu = f$ in Ω und $\frac{\partial u}{\partial n_A} = 0$ auf Γ .

Beweis. Wir wählen zunächst v mit $v = 0$ auf Γ . Dann folgt aus $\langle Lu, v \rangle_0 = \langle f, v \rangle_0$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ wie früher $Lu = f$ in Ω . Wählen wir dann $v \in H^1(\Omega)$ beliebig, so folgt aus $\langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, v \rangle_{0,\Gamma} = 0$ die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n_A} = 0$ auf Γ . \square

Die Randbedingungen treten in der variationellen Formulierung nicht auf. Wir sprechen daher von **natürlichen** Randbedingungen. Man beachte jedoch, dass ohne weitere Regularitätsvoraussetzungen die Konormalenableitung $\frac{\partial u}{\partial n_A}$ auf Γ für beliebiges $u \in H^1(\Omega)$ nicht definiert ist.

Inhomogenes Dirichlet-Problem

Es sei $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass ein $u_0 \in H^1(\Omega)$ mit $g = u_0|_{\Gamma}$ existiert. Dies ist zum Beispiel erfüllt, falls g stückweise C^1 ist (Übung).

Das inhomogene Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

lautet in der variationellen Formulierung: Suche $u \in H^1(\Omega)$ mit $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$, so dass $a(u, v) = \ell(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

Korollar 11.30. *Das inhomogene Dirichlet-Problem hat genau eine Lösung in $H^1(\Omega)$.*

Beweis. Es sei $u = u_0 + w$. Dann lautet das äquivalente Problem für w : Suche $w \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$a(w, v) = \ell(v) - a(u_0, v) =: \tilde{\ell}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Die lineare Abbildung $H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto a(u_0, v)$ ist stetig, denn wie im Beweis von Korollar 11.27 gilt

$$|a(u_0, v)| \leq M(n^2 + 1) \|u_0\|_1 \|v\|_1.$$

Die Behauptung folgt dann wieder aus dem Satz von Lax-Milgram angewandt auf das äquivalente Problem für w . \square

Inhomogones Neumann-Problem

Die Aufgabe lautet hier, ein $u \in H^1(\Omega)$ zu suchen, welches

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\sigma =: \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

erfüllt, wobei a wie vorher definiert ist und $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ vorausgesetzt wird.

Korollar 11.31. *Das inhomogene Neumann-Problem hat genau eine Lösung in $H^1(\Omega)$, wenn $\alpha_0 > 0$ gilt.*

Beweis. Wir überprüfen wieder die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram. Die Voraussetzungen an a haben wir bereits in Korollar 11.27 gezeigt, es genügt also die Stetigkeit von ℓ auf $H^1(\Omega)$ nachzuweisen. Nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und dem Spursatz 11.24 gilt

$$\left| \int_{\Gamma} g v d\sigma \right| \leq \|g\|_{0,\Gamma} \|v|_{\Gamma}\|_{0,\Gamma} \leq (C \|g\|_{0,\Gamma}) \|v\|_{1,\Omega},$$

ℓ ist also stetig auf $H^1(\Omega)$. \square

Unter der Regularitätsannahme $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ergibt sich wie beim homogenen Neumann-Problem

$$Lu = f \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n_A} = g \text{ auf } \Gamma.$$

Die Randbedingung geht hier in die Linearform ℓ der variationellen Formulierung ein.

