Analysis III, Wintersemester 2013-2014, Prof. Dr. Singhof

Marten Lienen

21. Januar 2014

Kapitel 1

Maß- und Integrationstheorie

§1 Quader und Figuren

§2 σ-Algebren und Maße

§3 Das Lebesgue-Maß

§4 Messbare Funktionen

§5 Integrationstheorie

§6 Vertauschbarkeit des Integrals mit Grenzprozessen

§7 Der Satz von Fubini

§8 Die Transformationsformel

§9 Die Räume L^p

Kapitel 2

Vektoranalysis

§10 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Bemerkung. *Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann ist I eine abgeschlossene 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von $\mathbb{R}$ und $\partial I = \{a, b\}$. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1, so ist $\int_I f'(x)\ dx = f(b) - f(a) = \int_{\partial I} f$ (man muss aufs Vorzeichen achten).*

Bemerkung. *Ist X eine n-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit Rand von $M \subseteq \mathbb{R}^N$, so ist $\partial X \subseteq X$.*

Satz 1. *Ist M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ und X eine abgeschlossene n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von M, so ist ∂X eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$.*

Beweis. Sei $a \in X$ und $\varphi : V \to W$ eine randadaptierte Karte von M bezüglich X mit $a \in W$. Sei $W_0 := \partial X \cap W$, $V_0 := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, x) \in V\}$, $\varphi_0 : V_0 \to W_0$ definiert durch $\varphi_0(x) := \varphi(0, x)$. Dann ist φ_0 eine Karte von ∂X mit $a \in W_0$. □

Bemerkung. *Eine Manigfaltigkeit (im bisherigen Sinn) ist auch eine Manigfaltigkeit mit Rand, deren Rand leer ist; $X \setminus \partial X$ ist eine n-dimensionale Manigfaltigkeit ohne Rand.*

Bemerkung. *Ist X wie in Satz 5 und $a \in \partial X$, so gibt es eine offene Umgebung W von $a \in X$, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n_-$.*

§11 Zusammenhängende metrische Räume

Definition. *Ein metrischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von X, die sowohl offen als auch abgeschlossen in X sind, $\emptyset$ und X sind.*

Beispiel. $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ *ist nicht zusammenhängend, denn* $[0, 1]$ *und* $[2, 3]$ *sind offen und abgeschlossen in* X.

Bemerkung. *Genau dann ist X zusammenhängend, wenn gilt: Sind A, B offene Teilmengen von X mit $X = A \dot{\cup} B$, so ist $A \neq \emptyset$ oder $B \neq \emptyset$.*

Satz 1. *Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die mehr als einen Punkt enthält. Genau dann ist X zusammenhängend, wenn X ein (offenes/abgeschlossenes/halboffenes/eigentliches/uneigentliches) Intervall ist.*

Beweis.

- Angenommen, X sei kein Intervall. Dann gibt es $x_1, x_2, \xi \in \mathbb{R}$ mit $x_1, x_2 \in X$ und $x_1 < \xi < x_2$. Sei $A := \{x \in X \mid x < \xi\}$ und $B := \{x \in X \mid x > \xi\}$. Dann ist $A \dot{\cup} B = X$ und A und B sind offen in X nach §10 Satz 3.
- Angenommen X sei nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene Teilmengen A, B von X mit $A \dot{\cup} B = X$ und $A \neq \emptyset \neq B$. Sei $a \in A$, $b \in B$. O.b.d.A. sei $a < b$. Wäre X ein Intervall, so wäre $[a, b] \subseteq X$. $M := \{x \in A \mid x < b\}$. Wegen $a \in M$ ist $M \neq \emptyset$. M ist nach oben beschränkt. Sei $c := \sup M \in [a, b] \subseteq X$. Da $A = X \setminus B$ abgeschlossen in X, folgt $c \in A$, also $c \notin B$.

□

Satz 2. *Seien X, Y metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine stetige, surjektive Abbildung. Ist X zusammenhängend, so auch Y.*

Beweis. Seien A, B offen in Y mit $Y = A \dot\cup B$. Dann ist $X = f^{-1}(A) \dot\cup f^{-1}(B)$. Weil f stetig ist, sind $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ offen in X. Weil X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ oder $f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Ist etwa $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, so ist auch $A \neq \emptyset$, denn, weil f surjektiv ist, ist $A = f(f^{-1}(A))$. Deswegen ist Y zusammenhängend. □

Bemerkung. *Satz 1 und Satz 2 zusammen sind eine weitgehende Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes.*

Lemma. *Sei X ein metrischer Raum, C ein zusammenhängender Teilraum von X. Dann ist auch $\bar{C}$ zusammenhängend ($\bar{C}$ ist der Abschluss von C in X).*

Beweis. Seien A, B offene Teilmengen von $\bar{C}$ mit $\bar{C} = A \dot\cup B$. Dann gibt es (nach §10 Satz 3) offene Teilmengen A', B' von X mit $A = \bar{C} \cap A'$ und $B = \bar{C} \cap B'$. Nach Satz 3 §10 sind $C \cap A'$ und $C \cap B'$ offen in C. Es ist $C \cap A' \subseteq \bar{C} \cap A' = A$, also $C \cap A' = C \cap A$; ebenso ist $C \cap B' = C \cap B$. Deswegen ist $C = (C \cap A') \dot\cup (C \cap B')$. Also ist o.B.d.A. $C \cap A' = \emptyset$. Wäre A' nicht leer, so wäre auch $A' \cap C$ nicht leer (gäbe es $x \in A' \cap C$, so wäre $c \in C$ und A' Umgebung von x in X). □

Lemma. *Sei X ein metrischer Raum, $X = \cup_{i \in I} X_i$. Jedes X_i sei zusammenhängend und $\cap_i X_i \neq \emptyset$. Dann ist X zusammenhängend.*

Beweis. Seien A, B offen in X mit $X = A \dot\cup B$. Angenommen $A \neq \emptyset \neq B$. Es gibt ein $a \in \cap_i X_i$. Sei o.B.d.A. $a \in A$. Weil $B \neq \emptyset$, gibt es ein $b \in B$. Es gibt ein $i_0 \in I$ mit $b \in X_{i_0}$. a ist insbesondere auch in X_{i_0}. Deshalb ist X_{i_0} die disjunkte Vereinigung der beiden nicht-leeren, offenen Teilräume $X_{i_0} \cap A$ und $X_{i_0} \cap B$, Widerspruch. □

Definition. *Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$. Dann sei $C(x)$ die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilräume von X, die x enthalten. $C(x)$ heißt die Zusammenhangskomponente von x in X.*

Beispiel.
- *Ist $X = [1, 2] \cup [3, 4] \subset \mathbb{R}$. Dann ist $C(1) = [1, 2]$.*
- *Ist $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $x \in X$, so ist $C(x) = \{x\}$.*

Satz 3. *Sei X ein metrischer Raum, $x, y \in X$.*

a) $C(x)$ ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält

b) Entweder ist $C(x) = C(y)$ oder $C(x) \cap C(y) = \emptyset$

c) $C(x)$ ist abgeschlossen in X

Beweis.

a) Folgt aus Lemma 2

b) Sei $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$. Nach Lemma 2 ist $C(x) \cup C(y)$ zusammenhängend. Weil $C(x)$ die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält, ist, ist $C(x) = C(x) \cup C(y)$, also $C(y) \subseteq C(x)$. Ebenso $C(x) \subseteq C(y)$.

c) Folgt aus a) und Lemma 1

□

Bemerkung. *Im Allgemeinen ist $C(x)$ nicht offen in X, wie das Beispiel $X = \mathbb{Q}$ zeigt.*

Definition. *Sei X ein metrischer Raum. X heißt wegzusammenhängend, wenn gilt: Sind $a, b \in X$, so gibt es eine stetige Abbildung $w : [0, 1] \to X$ (einen Weg) mit $w(0) = a$ und $w(1) = b$.*

Satz 4. *Ein wegzusammenhängender metrischer Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Wähle $x_0 \in X$. Für jedes $x \in X$ gibt es einen Weg $w_x : [0, 1] \to X$ mit $w(0) = x_0$ und $w(1) = x$. Nach Satz 1 ist $[0, 1]$ zusammenhängend. Nach Satz 2 ist $w_x([0, 1])$ zusammenhängend. $X = \cup_{x \in X} w_x([0, 1])$ und $x_0 \in \cap_x w_x([0, 1])$. Nach Lemma 2 ist X zusammenhängend. □

Bemerkung. *Es gibt zusammenhängende metrische Räume, die nicht wegzusammenhängend sind, z.B. $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$.*

Satz 5. *Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$.*

a) M ist genau dann zusammenhängend, wenn M wegzusammenhängend ist

b) Die Zusammenhangskomponenten von M sind offen in M

c) Die Zusammenhangskomponenten von M sind n-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^N$

Entsprechendes gilt für Untermannigfaltigkeiten mit Rand.

Beweisskizee als Hilfestellung für Übung. a) Sei M zusammenhängend. Sei $x_0 \in M$. Sei $A := \{x \in M \mid$ *es gibt einen Weg* $w : [0,1] \to M$ *mit* $w(0) = x_0$ *und* $w(1) = x\}$. Zu zeigen: $A = M$. Dann ist $A \neq \emptyset$, denn $x_0 \in A$.

A **ist offen in** M Sei $a \in A$. Nach der Folgerung aus Satz 1 von §10 besitzt a eine Umgebung U in M, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Ist $x \in U$, so gibt es einen Weg w in U mit $w(0) = a$, $w(1) = x$. Es gibt einen Weg v von x_0 nach a. Deshalb gibt es auch einen Weg von x_0 nach x.

A **ist abgeschlossen in** M Weil M zusammenhängend ist, folgt $A = M$.

b) Ähnlich

c) folgt direkt aus b)

□

§12 Kompakte metrische Räume

Definition. *Ist* X *eine Menge und ist* $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ *eine Menge von Teilmengen von* X *so heißt* $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ *eine Überdeckung von* X*, wenn* $X = \cup_{i\in\Lambda} A_i$.

Definition. *Sei* X *ein metrischer Raum und* $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ *eine Überdeckung von X. Dann heißt* $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ *eine offene Überdeckung von* X*, wenn alle* A_i *offen in* X *sind.*

Definition. *Ein metrischer Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von* X *eine endliche Teilüberdeckung besitzt, wenn also gilt: Ist* $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ *eine offene Überdeckung von* X*, so gibt es* $n \in \mathbb{N}$ *und* $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$ *mit* $X = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$.

Bemerkung. *Eine Teilmenge* A *eines metrischen Raumes* X *ist genau dann kompakt, wenn gilt: Sind* $A_i (i \in \Lambda)$ *offene Teilmengen von* X *mit* $A \subseteq \cup_{i\in\Lambda} A_i$*, so gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *und* $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$ *mit* $A \subseteq A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$.

Satz 1. *Seien* X, Y *metrische Räume und sei* $f : X \to Y$ *stetig. Ist* K *eine kompakte Teilmenge von* X*, so ist* $f(K)$ *kompakt.*

Beweis. Seien $A_i (i \in \Lambda))$ offene Teilmengen von Y mit $f(K) \subseteq \cup_{i\in\Lambda} A_i$. Weil f stetig ist, ist $f^{-1}(A_i)$ offen in X $\forall i \in \Lambda$. Es ist $K \subseteq f^{-1}(\cup_{i\in\Lambda}) A_i = \cup_{i\in\Lambda} f^{-1}(A_i)$. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$ mit $K \subseteq f^{-1}(A_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{i_n})$. Daraus folgt

$$f(K) \subseteq f(f^{-1}(A_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{i_n})) = f(f^{-1}(A_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(A_{i_n})) = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n} \tag{2.1}$$

□

Satz 2. *Jede abgeschlossene Teilmenge* A *eines kompakten metrischen Raumes* X *ist kompakt.*

Beweis. Seien $A_i (i \in \Lambda))$ offene Teilmengen von X mit $A \subseteq \cup_{i\in\Lambda} A_i$. Die A_i zusammen mit $X \setminus A$ bilden eine offene Überdeckung von X. Weil X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung von X, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_n \in \Lambda$ mit $X = A_{i_i} \cup \dots \cup A_{i_n} \cup (X \setminus A) \Rightarrow A \setminus A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$. □

Satz 3. *Jede kompakte Teilmenge* A *eines metrischen Raumes* X *ist abgeschlossen in* X.

Beweis. Zeige $X \setminus A$ ist offen in X. Sei $x \in X \setminus A$. Wir wollen zeigen: $X \setminus A$ ist Umgebung von x in X. Ist $y \in A$, so ist $y \neq x$; deswegen gibt es offene Teilmengen $U_y und V_y$ von X mit $x \in U_y$, $y \in V_y$ und $U_y \cap V_y = \emptyset$. Dann ist $A \subseteq \cup_{y\in A} V_y$. Weil A kompakt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $y_1, \dots, y_n \in A$ mit $A \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n} = V$. Sei $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{Y-n}$. Dann ist U eine offene Umgebung von x mit $U \cap V = \emptyset$, also $U \subseteq X \setminus A$. □

Satz 4. *Seien* X, Y *metrische Räume;* X *sei kompakt und* $f : X \to Y$ *sei stetig und bijektiv. Dann ist* $f^{-1} : Y \to X$ *stetig. Deswegen ist* f *ein Homöomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen: Ist A abgeschlossen in X, so ist $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ abgeschlossen in Y. Nach Satz 2 ist A abgeschlossen $\Rightarrow$ nach Satz 1 ist $f(A)$ kompakt $\Rightarrow$ nach Satz 3 $f(A)$ ist abgeschlossen in Y. □

Definition. *Sei* X *ein metrischer Raum,* (x_n) *eine Folge in* X *und* $a \in X$*. Dann heißt* a *ein Häufungspunkt von* (x_n)*, wenn es eine Teilfolge von* (x_n) *gibt, die gegen* a *konvergiert; äquivalent dazu: Wenn es für jede Umgebung* U *von* a *in* X *unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *gibt mit* $x_n \in U$.

Satz 5. *Sei* X *ein metrischer Raum. Äquivalent sind:*

a) X *ist kompakt*

b) Jede Folge in X besitzt eine Häufungspunkt in X

c) X ist vollständig und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_n, \dots, x_n \in X$ mit $X = \cup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$

Beweis. $a) \Rightarrow b)$: Sei X kompakt und (x_n) eine Folge in X. Sei F_n der Abschluss der Menge $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ in X. Wir werden zeigen, dass $\cap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$. (Ein Element von $\cap_{n=1}^\infty F_n$ ist ein Häufungspunkt von (x_n))

Angenommen, es sei $\cap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$. Sei $A_n := X \setminus F_n$. Dann ist A_n offen in X und $\cap_{n=1}^\infty A_n = \cap_n (X \setminus F_n) = X \setminus \cap_n F_n = X$. Deswegen bilden die A_n mit $n \in \mathbb{N}$ eine offene Überdeckung von X. Weil X kompakt ist, gibt es $n_n, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $X = A_{n_1} \cup \dots \cup A_{n_k}$. Für $n \geq m$ ist $F_n \subseteq F_m$, also $A_n \supseteq A_m$. Ist $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, so ist also $X = A_{n_0} \Rightarrow F_{n_0} = \emptyset$, Widerspruch, da $x_{n_0} \in F_{n_0}$.

$b) \Rightarrow c)$: Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in X. Dann besitzt (x_n) einen Häufungspunkt a, d.h. eine Teilfolge von (x_n) konvergiert gegen a. Nach Aufgabe 40 konvergiert (x_n) gegen a. Deswegen ist X vollständig.

Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen X ist nicht die Vereinigung von endlich vielen Kugeln von Radius ε. Dann definiert man induktiv eine Folge (x_n) in X, so dass gilt: Ist $n \neq m$, so ist $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Dann kann (x_n) keinen Häufungspunkt besitzen, Widerspruch.

$c) \Rightarrow a)$: Sei $\{A_i \mid i \in \Lambda\}$ offene Überdeckung von X. Angenommen, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung. Wir werden induktiv eine Folge (B_n) von Kugeln vom Radius $\frac{1}{2^n}$ definieren, von denen jede nicht durch endlich viele A_i überdeckt wird:

$n = 0$ Nach Vorraussetzung wird X von endlich vielen Kugeln vom Radius 1 überdeckt. Von diesen kann eine nicht von endlich vielen A_i überdeckt werden; nenne sie B_0.

$n - 1 \to n$ Sei bereits B_{n-1} konstruiert. Weil X von endlich vielen Kugeln vom Radius $\frac{1}{2^n}$ überdeckt wird, gibt es unter diesen eine, die nicht von endlich vielen der A_i überdeckt wird und nicht-leeren Schnitt mit B_{n-1} hat. B_n habe den Mittelpunkt x_n. Wegen $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$ ist $d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$. Ist also $n \leq p < q$, so $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p-1}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-2}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

Deswegen ist (x_n) eine Cauchy-Folge, konvergiert also gegen ein $a \in X$. Es gibt ein $i_0 \in \Lambda$ mit $a \in A_{i_0}$. Da A_{i_0} offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq A_{i_0}$. Für großes n ist $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ und $B_n \subseteq B_\varepsilon(a)$. Daher ist B_n für großes n in A_{i_0} enthalten, Widerspruch. □

Satz 6 (Heine-Borel). *Für eine Teilmenge X von $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

a) X ist kompakt

b) X ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$

Beweis. $a) \Rightarrow b)$: Ist X kompakt, so ist X abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ nach Satz 3. Nach Satz 5 wird X durch endlich viele Kugeln vom Radius 1 überdeckt, ist also beschränkt.

$b) \Rightarrow a)$: Weise Bedingung $c)$ vom Satz 5 nach:

- X ist vollständig: Sei (x_m) eine Cauchy-Folge in X. Weil $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, konvergiert (x_m) gegen ein $a \in \mathbb{R}^n$. Weil X abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist, ist $a \in X$.
- Weil X beschränkt ist, wird X für jedes $\varepsilon > 0$ durch endlich viele $B_\varepsilon(x_i)$ überdeckt.

□

Definition. *Ein metrischer Raum X heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt $a \in X$ eine kompakte Umgebung in X besitzt.*

Beispiel.
- *$\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt, aber nicht kompakt*
- *Jede Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt*

§13 Tangentialräume und Orientierungen

Definition. *Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Ein Element $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a, wenn es ein offenes Intervall I in $\mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine C^1-Abbildung $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ gibt mit:*

- *$\psi(I) \in M$*
- *$\psi(0) = a$*
- *$\psi'(0) = v$*

Mit $T_a(M)$ bezeichnet man die Menge aller Tangentialvektoren an M im Punkt a und nennt $T_a(M)$ den Tangentialraum an M in a.

Satz 1. *Sei M eine n-dimensionaler linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$.*

a) $T_a(M)$ ist en n-dimensionaler linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$

b) Sei $\varphi : W \to V$ eine Karte von M und $a \in V$. Sei $b \in W$ mit $\varphi(b) = a$. Dann ist $T_a(M) = Bild(D\varphi(b)) = \{D\varphi(b) \cdot u \mid u \in \mathbb{R}^n\}$

c) Sei U eine offene Umgebung von a in $\mathbb{R}^n$ und sei $g : U \to \mathbb{R}^{N-n}$ eine Submersion mit $M \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$. Dann ist:

$$T_a(M) = Kern(Dg(a)) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Dg(a) \cdot v = 0\} \tag{2.2}$$

Beweis. Analysis II, §16, Satz 5 □

Beispiel.

$$M = S^{N-1} \tag{2.3}$$

Sei $U = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \neq 0\}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = x_1^2 + \cdots + x_N^2 - 1$. Dann ist $S^{N-1} = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

$$Dg(x) = 2x^{\perp} \tag{2.4}$$

Nach Satz 1c) ist $T_a(S^{N-1}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid 2a^{\perp}v = 0\} = a^{\perp}$.

Beispiel. *Sei M ein n-dimensionaler affiner Teilraum von $\mathbb{R}^N$, d.h. es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^N$ und einen n-dimensionalen linearen Teilraum E von $\mathbb{R}^n$ mit $M = x_0 + E$. Dann ist M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$: Sei $h : \mathbb{R}^n \to E$ ein linearer Isomorphismus. Sei $\varphi(y) := x_0 + h(y)$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ ist $D\varphi(y) \cdot u = h(u)$. Deswegen ist φ eine Karte von M mit $\varphi(\mathbb{R}^n) = M$. Sei $a \in M$ und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(b) = a$. Nach Satz 1b) ist $T_a(M) = Bild(D\varphi(b)) = Bild(h) = E$.*

Beispiel. *Sei M wie im vorigen Beispiel und sei U offen in M. Dann ist U eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ und für $a \in U$ ist $T_a(u) = E$.*

Definition. *Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Ein Element $v \in \mathbb{R}^N$ heißt Normalenvektor an M in a, wenn $\langle v \mid w \rangle = 0 \forall w \in T_a(M)$. Die Menge aller Normalenvektoren an M in a wird mit $N_a(M)$ bezeichnet und heißt der Normalenraum an M in a.*

$$N_a(M) = T_a(M)^{\perp} \tag{2.5}$$

Dies ist ein $(N-n)$-dimensionaler Teilraum vom $\mathbb{R}^n$.

Beispiel.

$$N_a(S^{n-1}) = \mathbb{R} \cdot a \tag{2.6}$$

Definition. *Sei M eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^N$. Ein Einheitsnormalenfeld auf M ist eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^N$ mit $\nu(a) \in N_a(M)$ und $||\nu(a)||_2 = 1 \forall a \in M$.*

Beispiel. *Auf S^{N-1} gibt es zwei Normalfelder: ν_+ und ν_-*

$$\nu_+(a) := a, \nu_-(a) := -a \tag{2.7}$$

Definition. *Seien U, V offen in $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. φ heißt orientierungserhalten, wenn* $\det(D\varphi(x)) > 0$.

Definition. *Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ mit $n \geq 1$.*

a) Zwei Karten $\varphi_1 : W_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : W_2 \to V_2$ von M heißen gleichorientiert, wenn die Parametertransformation $\tau(\varphi_1, \varphi_2)$ orientierungserhalten ist.

b) Ein Atlas $\mathscr{A}$ von M heißt orientiert, wenn je zwei seiner Karten gleich orientiert sind.

c) M heißt orientierbar, wenn M einen orientierten Atlas besitzt.

d) Zwei Atlanten $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ von M heißen äquivalent, wenn jede Karte von $\mathscr{A}$ mit jeder Karte von $\mathscr{B}$ gleichorientiert ist.

e) Eine Äquivalenzklasse σ orientierter Atlanten von M heißt eine Orientierung von M. Man nennt dann (M, σ) eine orientierte Untermannigfaltigkeit.

Bemerkung. *Meist sagt man: "Sei M eine orientierte Manigfaltigkeit." statt "Sei (M, σ) eine orientierte Manigfaltigkeit".*

Beispiel.

- *Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$. Es gebe eine Karte φ von M, so dass M das Bild von φ ist. Dann ist $\{\varphi\}$ ein orientierter Atlas von M; daher ist M orientierbar.*
- *Ist insbesondere U offen in $\mathbb{R}^n$, so ist U eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Atlas $\{id_U\}$. Er definiert eine Orientierung von U, die sogenannte kanonische Orientierung.*

Bemerkung. *Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ mit $n \geq 1$ und M orientierbar.*

a) Es gibt einen orientierten Atlas $\mathscr{A}$ von M, so dass alle Karten von $\mathscr{A}$ den Definitionsbereich $\mathbb{R}^n$ haben.

b) Sei $\mathscr{A}$ ein orientierter Atlas wie in a). Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \to V$ eine Karte in $\mathscr{A}$, so definieren wir $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \to V$ durch $\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_n) := \varphi(-x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dann ist $\tilde{\varphi}$ eine Karte von M und φ und $\tilde{\varphi}$ sind nicht gleichorientiert. Sei $\tilde{\mathscr{A}}$ die Menge aller $\tilde{\varphi}$ mit $\varphi \in \mathscr{A}$. Dann ist $\tilde{\mathscr{A}}$ ein orientierter Atlas von M und $\mathscr{A}$ und $\tilde{\mathscr{A}}$ sind nicht äquivalent. Deswegen besitzt M mindestens zwei verschiedene Orientiertungen (falls $M \neq \emptyset$).

c) Ist M orientierbar und zusammenhängend, so besitzt M genau zwei Orientiertungen.

Satz 2. *Sei M eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^N$. Dann sind äquivalent:*

a) M ist orientierbar

b) Es gibt ein Einheitsnormalenfeld auf M

Beweis. *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Sei $\mathscr{A}$ ein orientierter Atlas von M. Sei $a \in M$. Wähle eine Karte $\varphi : W \to V$ in $\mathscr{A}$ mit $a \in V$ und sei $b \in W$ mit $\varphi(b) = a$. Die lineare Abbildung $D\varphi(b)$ ist injektiv. Ist $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, so ist $D\varphi(b)e_1, \dots, D\varphi(b)e_n$ eine Basis von $T_a(M)$ (nach Satz 1). Sei $\nu(a)$ dasjenige der beiden Elemente vom Normalenraum $N_a(M)$ mit Norm 1, für das die Matrix mit den Spalten $D\varphi(b)e_1, \dots, D\varphi(b)e_n, \nu(a)$ positive Determinante hat. Dann ist ν ein Einheitsnormalenfeld auf M. □

Beispiel.

- *S^{n-1} ist orientierbar, weil es Einheitsnormalenfelder auf S^{n-1} gibt*
- *Das Möbiusband ist nicht orientierbar*

Bemerkung. *Der Beweis von Satz 2 liefert für Hyperflächen eine Bijektion von der Menge der Orientierungen auf die Menge der Einheitsnormalenfelder.*

Satz 3. *Sei M eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$, $n \geq 2$. Sei X eine abgeschlossene n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von M. Dann ist die $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ∂X von $\mathbb{R}^N$ orientierbar.*

Beweis. Sei $\mathscr{A}$ ein Atlas von M, der zur gegebenen Orientierung gehört und folgende Eigenschaften hat:

- Ist $\varphi : W \to V$ eine Karte aus $\mathscr{A}$ mit $V \cap \partial X \neq \emptyset$, so ist φ randadaptiert, d.h. $\varphi(\mathbb{R}^n_- \cap W) = X \cap V$, $\varphi(\partial\mathbb{R}^n_- \cap W) = \partial X \cap V$, $\mathbb{R}^n_- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$.
- Wenn man eine Karte $\varphi : W \to V$ hat, so setzt man $W_0 := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, x) \in W\}$, $V_0 := V \cap \partial X$. $\varphi_0 : W_0 \to V_o$ sei gegeben durch $\varphi_0(x) := \varphi(0, x)$.

Dann bilden die φ_0 eine orientierten Atlas von ∂X. □

Definition. *Ist σ eine Orientierung von M, so liefert der Beweis von Satz 3 eine Orientierung von ∂X, welche die von σ induzierte Orientierung von ∂X heißt.*

§14 Glatte Zerlegung der Eins

Definition. *Sei X ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Mit Supp(f) bezeichnet man den Abschluss der Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ in X und nennt Supp(f) den Träger von f.*

Bemerkung (Ziel)**.** *Gegeben eine Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^N$, ein Atlas $\mathscr{A}$ von M und eine C^∞-Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ (Funktion). Wir wollen f als Summe von C^∞-Funktionen f_α schreiben, so dass gilt: Für jedes α gibt es eine Karte $\varphi : W \to V$ in $\mathscr{A}$ mit Supp$(f_\alpha) \subseteq V$.*

Lemma. *Definiert man $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch*

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \le 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

so ist f von der Klsse C^∞.

Beweis.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{t \to \infty} exp(t) = 0 \tag{2.9}$$

deswegen ist f stetig in 0. Für $x > 0$ ist $f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp(-\frac{1}{x^2})$, allgemeiner $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2})$, wobei jedes P_n ein Polynom ist. Also $\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$. Deswegen ist f von der Klasse C^∞. □

Satz 1. *Es gibt eine C^∞-Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit*

- *$g(x) > 0$ für $x \in]-1, 1[^n$*
- *$Supp(g) = [-1, 1]^n$*

Beweis. Sei f wie im Lemma. Definiere $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_1(x) := f(1 + x)f(1 - x)$. Dann ist $f_1 \ge 0$ und $Supp(f_1) = [-1, 1]$. Sei $g(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$. □

Satz 2. *Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und X eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Seien $A_1, \dots, A_m$ offene Teilmengen von U mit $X \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_m$. Dann gibt es C^∞-Funktionen $g_1, \dots, g_m : U \to \mathbb{R}$ mit*

- *$g_j(x) \ge 0 \ \forall x \in U, \forall j$*
- *$\sum_{j=1}^m g_j(x) \le 1 \ \forall x \in U$*
- *$\forall j$ ist $Supp(g_j)$ kompakt und enthalten in A_j*
- *$\forall x \in X$ ist $\sum_{j=1}^m g_j(x) = 1$*

Man nennt die Menge $g_1, \dots, g_m$ eine der Überdeckung $\{a_1, \dots, A_m\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf X.

Beweis. Nach Satz 1 gibt es eine C^∞-Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g(x) > 0 \ \forall x \in]-1, 1[^n$ und $Supp(g) = [-1, 1]^n$. $\forall x \in X$ wähle ein $k_x \in \{1, \dots, m\}$ mit $x \in A_{k_x}$, ein $r_x > 0$ mit $B_{r_x}(x) \subseteq A_{k_x}$ und einen Diffeomorphismus φ_x von $B_{r_x}(x)$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $\varphi_x(x) = 0$. Definiere $f_x : U \to \mathbb{R}$

$$f_x(y) = \begin{cases} g(\varphi_x(y)) & \text{wenn } y \in B_{r_x}(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.10}$$

Dann ist $f_x \ge 0$, glatt, C^∞ und $f_x(x) > 0$. $Supp(f_x)$ ist kompakt und $\subseteq A_{k_x}$. Sei $C_x := \varphi_x^{-1}(]-1, 1[^n)$. Dann ist C_x offen mit $x \in C_x$. Also bilden die C_x mit $x \in X$ eine offene Überdeckung von X. Weil X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung ($x_1, \dots, x_N$ *mit* $X \subseteq C_{x_1} \cup \dots C_{x_N}$). Für $j = 1, \dots, m$ sei $h_j : U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h_j = \sum_{i \in [1, \dots, N] k_{x_i} = j} f_{x_i} \tag{2.11}$$

Dann ist h_j glatt; es ist

- $h_j \ge 0$ auf U
- $Supp(h_j)$ ist kompakt und $\subseteq A_j$
- Für $x \in X$ ist $\sum_{j=1}^m h_j(x) > 0$

Sei $h := \sum_{j=1}^m h_j : U \to \mathbb{R}$. Dann ist h aus C^∞. Sei $K := Supp(h)$. Dann ist K kompakt und $X \subseteq K$. ∂K ist eine kompakte Teilmenge von $U \setminus X$. Wende das bisher Bewiesene an auf

- $U \setminus X$ statt U
- ∂K statt X

Man erhält (statt h) eine glatte Funktion $\tilde{h} : U \setminus X \to \mathbb{R}$ mit

- $\tilde{h} \ge 0$ auf $U \setminus X$
- $\tilde{K} := Supp(\tilde{h})$ ist kompakt und enthalten in $U \setminus X$

- Für $x \in \partial K$ ist $\tilde{h}(x) > 0$

Wir können $\tilde{h}$ auf ganz U fortsetzen zu einer glatten Funktion durch $\tilde{h}(x) := 0\ \forall x \in X$. Definiere $g_j : U \to \mathbb{R}$ durch

$$g_j(x) := \begin{cases} \frac{h_j(x)}{h(x)+\tilde{h}(x)} & \text{falls } h(x)+\tilde{h}(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.12}$$

Dann ist g_j glatt, $g_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^m g_j(x) = \frac{h(x)}{h(x)+\tilde{h}(x)} \leq 1$, falls $h(x)+\tilde{h}(x) \neq 0$. $Supp(g_j) = Supp(h_j)$ ist kompakt und $\subseteq A_j$. Für $x \in X$ ist $h(x) > 0$ und $\tilde{h}(x) = 0$, also $\sum_{j=1}^m g_j(x) = \frac{h(x)}{h(x)} = 1$. □

§15 Alternierende Multilinearformen

Bemerkung. *Sei U offen in $\mathbb{R}^3$, sei $C^\infty(U)$ die Menge aller C^∞-Funktionen $F : U \to \mathbb{R}$ und sei $\mathfrak{V}$ die Menge der glatten Vektorfelder auf U, d.h. der C^∞-Abbildungen $F = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3$. Dann hat man lineare Abbildungen*

$$C^\infty(U) \xrightarrow{grad} \mathfrak{V} \xrightarrow{rot} \mathfrak{V} \xrightarrow{div} C^\infty(U) \tag{2.13}$$

definiert durch

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

$$rot(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

$$div(f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \tag{2.16}$$

Wir wissen $rot \circ grad = 0$, $div \circ rot = 0$. Ist U z.B. konvex, so gilt: Ist $rot(F) = 0$, so $\exists f$ mit $grad(f) = F$ und ist $div(F) = 0$, so $\exists G$ mit $rot(G) = F$.

Bemerkung (Ziel von §15 und §16). *Verallgemeinerung dieses Kalküls auf beliebige Dimensionen und auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.*

Bezeichnung. *a) Sei $e_1, \ldots, e_n$ die übliche Basis von $\mathbb{R}^n$.*

b) Sei $(\mathbb{R}^n)^*$ der Dualraum von $\mathbb{R}^n$, d.h. der Vektorraum aller linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $(\mathbb{R}^n)^*$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ wobei

$$\Delta_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.17}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $(\mathbb{R}^n)^k$ der Vektorraum der $n \times k$-Matrizen.

Definition. *Eine <u>alternierende Multilinearform vom Grad k</u> auf $\mathbb{R}^n$, kurz <u>alternierende k-Form</u> auf $\mathbb{R}^n$, ist eine Abbildung $\omega : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften*

1. *ω ist linear in jedem Argument*
2. *$\omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = -\omega(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots)$, wenn alle anderen Argumente fest bleiben*

Beispiel. *Die Determinante* det *ist eine alternierende n-Form auf $\mathbb{R}^n$.*

Bemerkung. *Die alternierenden k-Formen auf $\mathbb{R}^n$ bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, der mit $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ bezeichnet wird (für $k \in \mathbb{N}$).*

Beispiel.

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)^* \tag{2.18}$$

$$\Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R} \tag{2.19}$$

Bemerkung. *Bedingung 2 ist äquivalent zu $\omega(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = 0$.*

Definition. *Sind* $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in (\mathbb{R}^n)^*$, *so definiere* $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ *durch*

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)(v_1, \dots, v_n) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Beispiel.

$$\Delta_1 \wedge \dots \wedge \Delta_n = \det \tag{2.21}$$