

Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2013

Wilhelm Singhof

Teil I: Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

1. Normierte und metrische Räume: Definitionen und Beispiele

Def. Sei V ein (reeller) Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \| v \|,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- (1) $\| v \| \geq 0$ für alle $v \in V$.
- (2) $\| v \| = 0 \iff v = 0$.
- (3) $\| \alpha v \| = |\alpha| \cdot \| v \|$ für $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (4) $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$ für alle $v, w \in V$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *normierter Raum* ist ein Paar $(V, \| \cdot \|)$, wobei V ein Vektorraum und $\| \cdot \|$ eine Norm auf V ist. Meist sagt man: "Sei V ein normierter Raum" statt "sei $(V, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum".

Beispiel: Auf $V = \mathbb{R}^n$ erhält man Normen $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_\infty$ und $\| \cdot \|_2$ folgendermaßen: Ist $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so sei

$$\begin{aligned}\| v \|_1 &:= |x_1| + \dots + |x_n|, \\ \| v \|_\infty &:= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \\ \| v \|_2 &:= (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Um die Dreiecksungleichung für $\| \cdot \|_2$, die sog. *Euklidische Norm*, nachzuweisen, braucht man:

Satz 1. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sind $v = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \| v \|_2 \cdot \| w \|_2.$$

Bem. Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\| v \|_\infty \leq \| v \|_2 \leq \| v \|_1 \leq n \cdot \| v \|_\infty$.

Allgemeiner gilt: Zwei Normen $\| \cdot \|$ und $|\cdot|$ auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive reelle Zahlen a, A gibt mit

$$a \| v \| \leq |v| \leq A \| v \| \quad \forall v \in V.$$

Def. Sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden vier Eigenschaften:

- (I) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.
- (II) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (III) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

(IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) , wobei X eine Menge und d eine Metrik auf X ist. Man sagt oft „ X ist metrischer Raum“ statt „ (X, d) ist metrischer Raum“.

Beispiel: Sei V ein normierter Raum. Definiere $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Dann ist V ein metrischer Raum.

Beispiel: Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$, so wird Y mit der Einschränkung von d auf $Y \times Y$ ein metrischer Raum.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann heißt die Menge

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

die *offene Kugel* und

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

die *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r .

2. Einige grundlegende topologische Begriffe

Def. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt A *offen in X* , wenn gilt: Ist $x \in A$, so existiert ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq A$.

Satz 1. Eine offene Kugel in einem metrischen Raum X ist offen in X .

Satz 2. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

- a) X und \emptyset sind offen in X .
- b) Ist I irgendeine Menge und sind die A_i mit $i \in I$ offen in X , so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen in X .
- c) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind A_1, \dots, A_n offen in X , so ist $A_1 \cap \dots \cap A_n$ offen in X .

Beispiel: $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ ist offen in \mathbb{R} . Aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ ist nicht offen in \mathbb{R} .

Def. Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt *Umgebung* von x in X , wenn es eine offene Teilmenge A von X gibt mit

$$x \in A \subseteq U.$$

Eigenschaften von Umgebungen:

- (1) Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:
 - (a) U ist Umgebung von x .
 - (b) Es gibt ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq U$.
- (2) Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.
- (3) Ist U Umgebung von x und $V \supseteq U$, so ist V Umgebung von x .
- (4) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von x ist eine Umgebung von x .

Beispiel: Betrachte \mathbb{R}^n mit den Normen $\| \cdot \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Diese drei Normen besitzen dieselben offenen Mengen.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

x heißt *Häufungspunkt* von A , falls in jeder Umgebung von x ein von x verschiedener Punkt von A liegt.

x heißt *Berührungspunkt* von A , falls in jeder Umgebung von x ein Punkt von A liegt.

Bem. x ist Berührungspunkt von $A \iff x \in A$ oder x ist Häufungspunkt von A .

Satz 3. und Def. Sei X metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

- (a) A enthält alle Häufungspunkte von A .
- (b) A enthält alle Berührungspunkte von A .
- (c) $X \setminus A$ ist offen in X .

Wenn A diese Eigenschaften hat, so heißt A *abgeschlossen* in X .

Satz 4. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

- 1) \emptyset und X sind abgeschlossen.
- 2) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- 3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Satz 5. Sei X ein metrischer Raum und A eine endliche Teilmenge von X . Dann ist A abgeschlossen in X .

Def. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X . Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *Grenzwert* der Folge (x_n) , wenn eine der vier folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- 1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ für $n \geq N$.
- 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$ im Sinne von Analysis I.
- 3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ für $n \geq N$.
- 4. Für jede Umgebung U von x_0 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$.

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. Wenn (x_n) den Grenzwert x_0 besitzt, so sagt man, dass (x_n) gegen x_0 *konvergiert* und schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ oder $x_n \rightarrow x_0$.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\| \cdot \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Sei $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}^n mit $x^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)$ und sei $x^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n$.

Genau dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$, wenn für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq n$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_\nu^k = \xi_\nu^0$.

Bem. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

- a) x ist Berührungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \rightarrow x$.
- b) x ist Häufungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \neq x$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \rightarrow x$.
- c) A ist abgeschlossen in $X \iff$ ist (x_n) eine Folge in A , so dass $x_0 = \lim x_n$ in X existiert, so ist $x_0 \in A$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$. Dann heißt x ein *innerer Punkt* von A , wenn A eine Umgebung von x ist. Sei $\overset{\circ}{A}$ die Menge aller inneren Punkte von A ; sie heißt das *Innere* von A .

Satz 6. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist $\overset{\circ}{A}$ die größte offene Teilmenge von X , die in A enthalten ist.

Satz 7. Ist V ein normierter Raum, $x \in V$, $r > 0$ und $A := \overline{B}_r(x)$, so ist $\overset{\circ}{A} = B_r(x)$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Sei \overline{A} die Menge aller Berührungspunkte von A in X . Sie heißt der *Abschluss* von A .

Satz 8. a) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

b) \overline{A} ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die A umfasst.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$.

x heißt *Randpunkt* von A in X , wenn x Berührungspunkt von A und von $X \setminus A$ ist.

Sei ∂A die Menge der Randpunkte von A in X , also $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

∂A heißt der *Rand* von A in X .

Bem. ∂A ist abgeschlossen in X .

X ist die disjunkte Vereinigung von $\overset{\circ}{A}$, ∂A und $(X \setminus A)^\circ$.

3. Stetige Abbildungen

Def. Seien $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $x_0 \in X$. Dann heißt f *stetig im Punkt* x_0 , wenn eine der folgenden 3 äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass gilt: Ist $x \in X$ mit $d(x_0, x) < \delta$, so ist $d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$.
3. Zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subseteq V$.

Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Beispiele: 1) Eine konstante Abbildung ist stetig.

2) Die identische Abbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ist stetig.

3) Seien X, Y, Z metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen, $x_0 \in X$. Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig ist, so ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ in x_0 stetig.

Satz 1. Seien X, Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$. Dann sind äquivalent:

- a) f ist stetig.
- b) Ist A offen in Y , so ist $f^{-1}(A)$ offen in X .
- c) Ist B abgeschlossen in Y , so ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X .
- d) Ist (x_n) eine konvergente Folge in X , so ist $(f(x_n))$ konvergente Folge in Y und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$.

Satz 2. Seien X, Y metrische Räume, $f, g : X \rightarrow Y$ stetig.
Dann ist $A := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X .

Satz 3. Sei X ein metrischer Raum, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $A := \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ abgeschlossen in X .

Bem. Sei X ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ mit Abbildungen $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$. Wir versehen \mathbb{R}^n mit einer der Normen $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$.
Genau dann ist f stetig, wenn alle f_k stetig sind.

Def. Eine Teilmenge X eines normierten Raumes V heißt *beschränkt*, wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $\|v\| \leq M$ für alle $v \in X$.

Satz 4. Sei X eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n , und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $f(X)$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} . Insbesondere nimmt f auf X sein Maximum und sein Minimum an.

4. Partielle Ableitungen

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Für $i = 1, \dots, n$ sei $U_i := \{t \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U\}$.
Dann ist U_i eine offene Umgebung von x_i in \mathbb{R} .
Man definiert $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_i(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

f heißt *im Punkt x partiell differenzierbar*, wenn für $i = 1, \dots, n$ die Funktion F_i in x_i differenzierbar ist. Schreibe dann

$$D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := F'_i(x),$$

und nenne dies die *i -te partielle Ableitung* von f in x .

f heißt *partiell differenzierbar*, wenn es in jedem Punkt von U partiell differenzierbar ist.

Bem. a) Man berechnet die i -te partielle Ableitung, indem man f als Funktion der i -ten Variablen allein auffasst und die anderen Variablen konstant hält.

b) Für $n = 2$ schreibt man meist (x, y) statt (x_1, x_2) und $\frac{\partial f}{\partial x}$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Für $n = 3$ schreibt man oft (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3) .

Beispiel: $f(x, y) = e^{xy} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$.

Beispiel: Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

In jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f offensichtlich partiell differenzierbar. f ist aber auch in $(0, 0)$ partiell differenzierbar:

$f_1(\xi) = f(\xi, 0) = 0$ und $f_2(\xi) = f(0, \xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R} \implies D_1 f(0, 0) = 0$ und $D_2 f(0, 0) = 0$.

f ist also auf ganz \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar.

Aber f ist in $(0, 0)$ *nicht* stetig: Denn für $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, ist $f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$, während $f(0, 0) = 0$.

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in U . Wenn alle partiellen Ableitungen $D_1 f, \dots, D_n f : U \rightarrow \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sind, so kann man $D_j D_i f := D_j(D_i f)$ bilden und sagt, dass f zweimal partiell differenzierbar ist. Induktiv definiert man, was es für $k \in \mathbb{N}$ bedeutet, dass f *k-mal partiell differenzierbar* ist. Schreibe auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := D_j D_i f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := D_i^2 f := D_i D_i f \text{ usw.}$$

Wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind (dazu gehört insbesondere, dass f selbst als partielle Ableitung der Ordnung 0 stetig ist), so sagt man, f sei *von der Klasse C^k* . Wenn f stetige partielle Ableitungen von jeder Ordnung hat, so heißt f *von der Klasse C^∞* oder *glatt*. Schließlich heißt f *von der Klasse C^0* , wenn es stetig ist.

Satz 1. (Satz von H. A. Schwarz) Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 . Sei $a \in U$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a).$$

Von nun an schreiben wir die Elemente von \mathbb{R}^n als Spaltenvektoren. Wir schreiben also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Ist X eine Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so ist f von der Form

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m)^T$$

mit $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Bez. Ist U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so erhält man eine Abbildung

$$\nabla f = \text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

durch $\nabla f(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$.

∇f heißt der *Gradient* von f .

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. f heißt *partiell differenzierbar* (bzw. *von der Klasse C^k*), wenn alle f_i partiell differenzierbar (bzw. von der Klasse C^k) sind. Man schreibt dann für $x \in U$:

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$Df(x)$ heißt die *Funktionalmatrix* oder die *Jacobimatrix* oder die *Ableitung* von f an der Stelle x .

$Df(x)$ ist eine $m \times n$ -Matrix; ihre i -te Zeile ist der transponierte Gradient von f_i an der Stelle x .

Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$, so ist $Df(x) \cdot \xi \in \mathbb{R}^m$.

5. Differenzierbare und stetig differenzierbare Abbildungen

Satz 1. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f = (f_1, \dots, f_m)^T : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Abbildung, so dass alle Funktionen $D_j f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Sei $x \in U$ fest.

Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$, so definiere $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$ durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi).$$

Dann ist

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0.$$

(Dies soll heißen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ und $\xi \neq 0$ gilt:

$$x + \xi \in U \text{ und } \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} < \varepsilon.)$$

Def. Ist U offen in \mathbb{R}^n , $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so heißt f *differenzierbar* in x , wenn f in x partiell differenzierbar ist und wenn Folgendes gilt:

Definiert man $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$ durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi),$$

so ist $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$.

Satz 2. Sei U offen in \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $x \in U$. Wenn f in x differenzierbar ist, so ist f in x stetig.

Für den Beweis braucht man:

Lemma Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig.

Es gibt ein $\alpha \geq 0$ mit $\|A\xi\| \leq \alpha \|\xi\|$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Folgerung aus Satz 1 und Satz 2: Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen $D_j f_i$ alle stetig, so ist f stetig, d.h. f ist von der Klasse C^1 , m.a.W. f ist stetig differenzierbar.

Allgemeiner: Ist f k -mal partiell differenzierbar und sind alle k -ten partiellen Ableitungen stetig, so ist f von der Klasse C^k .

Beispiel: Sei A eine reelle $m \times n$ -Matrix. Definiere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $f(x) := A \cdot x$. Dann ist f von der Klasse C^∞ . Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $Df(x) = A$, denn ist $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, so

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \text{ für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

also $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$. Alle höheren partiellen Ableitungen von f sind 0.

Für den Beweis der Kettenregel brauchen wir:

Satz 3. Sei U offen in \mathbb{R}^n , $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Es gebe eine $m \times n$ -Matrix A mit

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} (f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dann ist f differenzierbar in x und $Df(x) = A$.

Dies zeigt, wie man den Begriff der Differenzierbarkeit weiter verallgemeinern kann: Sind V, W endlich dimensionale normierte Räume, ist U offen in V , ist $f : U \rightarrow W$ eine Abbildung und ist $x \in U$, so heißt f differenzierbar an der Stelle x , wenn es eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ gibt, so dass

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} (f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dieses A ist dann eindeutig bestimmt; man bezeichnet es mit $Df(x)$ und nennt es die Ableitung von f an der Stelle x .

Satz 4. (Kettenregel) Sei U offen in \mathbb{R}^n , V offen in \mathbb{R}^m und seien $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar mit $g(U) \subseteq V$. Dann ist die Abbildung $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar und

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \quad \forall x \in U.$$

(Dabei steht auf der rechten Seite das Produkt der Matrizen $Df(g(x))$ und $Dg(x)$.) Sind f und g von der Klasse C^k mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist auch $f \circ g$ von der Klasse C^k .

Spezialfall: Ist $p = 1$, also $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}$, so ist

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Dabei sind die Variablen in \mathbb{R}^m mit y_1, \dots, y_m bezeichnet.

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $U_v := \{t \in \mathbb{R} \mid x + tv \in U\}$ eine offene Umgebung von 0 in \mathbb{R} . Definiere $F_v : U_v \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_v(t) := f(x + tv).$$

Wenn F_v in 0 differenzierbar ist, so heißt

$$D_v f(x) := F_v'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x))$$

die *Richtungsableitung* von f im Punkt x in Richtung v .

Bem. $D_{e_i} f = D_i f$.

Bez. Für $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $w = (w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

also $\|v\|_2 = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Satz 5. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung v und

$$D_v f(x) = \langle v, \nabla f(x) \rangle.$$

Anschauliche Interpretation des Gradienten: Der Vektor $\text{grad} f(x)$ gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f an.

6. Mittelwertsatz und Taylor-Formel

Der Mittelwertsatz aus Analysis I lautet: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$(\star) \quad f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

In dieser Form lässt sich der Mittelwertsatz nicht auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern. Betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = (\cos x, \sin x).$$

Dann ist $f(0) = f(2\pi)$, aber $Df(x) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aus (\star) folgt: Wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $|f'(\xi)| \leq M$ für alle $\xi \in]a, b[$, so ist $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|$. Dies lässt sich verallgemeinern.

Def. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann heißt f (Riemann-) integrierbar, wenn alle f_i integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int_a^b f(x) dx := \left(\int_a^b f_1(x) dx, \dots, \int_a^b f_m(x) dx \right) \in \mathbb{R}^m.$$

Bem. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ Riemann-integrierbar, so ist $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

(Dabei ist $\|\cdot\|$ eine der Normen $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$.) Dies benutzen wir beim Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1. (Mittelwertsatz) Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1 . Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke

$$\{x + t\xi \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

zwischen x und $x + \xi$ ganz in U liegt. Dann gibt es ein $M \geq 0$, so dass

$$\|Df(x + t\xi) \cdot v\| \leq M\|v\| \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

und für jedes solches M ist

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq M \cdot \|\xi\|.$$

Satz 2. Sei U offen in \mathbb{R}^n und habe die folgende Eigenschaft:

Je zwei Punkte von U können durch einen Streckenzug verbunden werden, der ganz in U verläuft. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant.

Bez. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

a) Ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, so sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!.$$

Ein solches α heißt *n-Multiindex*.

b) Ist α wie in a) und f von der Klasse $C^{|\alpha|}$, so sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dabei ist $D_i^0 f := f$ zu setzen.

c) Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so sei $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$.

Satz 3. (Taylor -Formel) Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^{k+1} .

a) Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke zwischen x und $x + \xi$ in U liegt. Dann ist

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \int_0^1 (1-t)^k \frac{D^\alpha f(x+t\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha dt.$$

b) Ist $x \in U$ und definiert man

$$R(\xi) := f(x + \xi) - \sum_{|\alpha| \leq k+1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$, so ist

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{R(\xi)}{\|\xi\|^{k+1}} = 0.$$