1 Grundlagen

1.1 Mengenlehre

1.1.1 Erste Definitionen und Beispiele

Die Mengenlehre ist einen nicht trivialen Teil der Mathematik. Wir werden Mengen nicht richtig definieren.

Wir werden mit den folgenden vagen (aber für unseren Zwecke ausreichenden) Definition arbeiten.

Definition 1.1.1 Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekte (die man **Elemente** nennt) zu einem neuen Objekt.

Axiom 1.1.2 (Extensionalitätsaxiom) Zwei Mengen M und N sind genau dann **gleich**, wenn sie die selbe Elementen enthalten.

Notation 1.1.3 Wir werden die folgende Symbole benutzen.

$\{\ \}$	die Mengenklammern:	z.b. $M = \{0; 1; 2\}$.
$\in$	ist Element von:	z.b. $1 \in \{0; 1; 2\}$.
$\notin$	ist nicht Element von:	z.b. $3 \notin \{0; 1; 2\}$.
$\forall$	alle:	z.b. $\forall n \in \mathbb{N}$ es gilt $n \geq 0$.
$\exists$	es gibt:	z.b. $\exists n \in \mathbb{N}$ so dass $n \geq 5$.
$\Rightarrow$	dann:	z.b. $n \geq 1 \Rightarrow n \geq 0$.

Bemerkung 1.1.4 Mit Symbole: $M = N$ genau dann, wenn

$$x \in M \Rightarrow x \in N \text{ und } x \in N \Rightarrow x \in M.$$

Definition 1.1.5 Sei M eine Menge.

1. Eine **Teilemenge** N von einer Menge M ist eine Menge so dass alle elemente in N auch in M enthalten sind. Mit Symbole: $x \in N \Rightarrow x \in M$.

2. Eine **echte** Teilmenge N von einer Menge M ist eine Teilmenge die nicht gleich M ist.

Notation 1.1.6 Hier sind weitere Symbole.

$\subseteq, \subset$	ist Teilmenge von:	z.b. $\{0;1;2\} \subseteq \{0;1;2\}$ oder $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
$\subsetneq$	ist eine echte Teilmenge von:	z.b. $\{1;2\} \subsetneq \{0;1;2\}$.

Bemerkung 1.1.7 Es gilt $\{0;1;2\} = \{2;0;1\} = \{0;0;1;2;2;2\}$.

1.1.2 Konstruktion in der Mengenlehre

Aussonderungsaxiom

Axiom 1.1.8 (Aussonderungsaxiom) Zu jeder Menge M und jeder eigenschaft P gibt es eine Teilmenge N von M, die gerade aus den Elementen von M mit dieser eigenschaft besteht.

Notation 1.1.9 Weitere Symbole.

$\mid$	mit der Eigenschaft:	z.b. $\{0;1;2\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2\}$.

Satz 1.1.10 Es gibt eine Menge, die keine Elemente enthält: Mann nennt diese Menge die **leere Menge** und bezeichnet sie mit $\emptyset$. □

Beweis. Wir behaupten, dass es mindenstens eine Menge M gibt. Dann kann man, dank dem Aussonderungsaxiom die Menge

$$\emptyset = \{x \in M \mid x \neq x\}$$

definieren. Die Menge $\emptyset$ enthält keine Elemente. ■

Bemerkung 1.1.11 Die leere Menge ist in jede Menge enthalten: für jede Menge M gilt $\emptyset \subset M$.

Satz 1.1.12 Es gibt keine Menge die jede Menge als Element enthält □

Beweis. Siehe Tutorium 1. ■

Vereinigungsaxiom

Axiom 1.1.13 (Vereinigungsaxiom)

1. Seien M und N zwei Mengen, dann gibt es eine Menge $M \cup N$, die **Vereinigung** von M und N, die genau alle Elemente von M und N enthält. Mit Symbole

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

2. Verallgemeinerung. Sei I eine Indexmenge und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, dann gibt es eine Menge

$$\bigcup_{i\in I} M_i,$$

die **Vereinigung** von $(M_i)_{i\in I}$, die genau alle Elemente von M_i für alle $i \in I$ enthält. Mit Symbole

$$\bigcup_{i\in I} M_i = \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ so dass } x \in M_i\}.$$

Beispiel 1.1.14 Here sind Beispiele von Mengen.

1. Die leere Menge $\emptyset$.

2. Zu jedes Element $x \in M$ kan man die einelementige Menge $\{x\}$ definieren.

2. Zu zwei Elemente x und y kann mann die Paarmenge

$$\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\} = \{y\} \cup \{x\} = \{y, x\}$$

definieren. Es ist die Menge, die genau x und y entählt.

Aus dem Vereinigungsaxiom und dem Aussonderungsaxiom ergibt sich die Existenz des Durchschnitts von Mengen.

Satz 1.1.15 (Durchschnitt)

1. Seien M und N zwei Mengen, dann gibt es genau eine Menge $M \cap N$, der **Durchschnitt** von M und N, die genau die Elementen von M und N enthält. Mit Symbole

$$M \cap N = \{x \in M \cup M \mid x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

2. Verallgemeinerung. Sei I eine Indexmenge und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, dann gibt es genau eine Menge

$$\bigcap_{i\in I} M_i,$$

der **Durchschnitt** von $(M_i)_{i\in I}$, welche genau die Elemente, die in jeder Menge M_i für all $i \in I$ enthalten sind. Mit Symbole

$$\bigcap_{i\in I} M_i = \left\{ x \in \bigcup_{i\in I} M_i \mid \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i \right\}.$$

Satz 1.1.16 Seien M, N und O drei Mengen. Dann gilt.

1. $M \cup M = M$ und $M \cap M = M$.

2. $M \cup N = N \cup M$ und $M \cap N = N \cap M$.

3. $M \cup (N \cup O) = (M \cup N) \cup O$ und $M \cap (N \cap 0) = (M \cap N) \cap O$ □

Beweis. Übung ■

Satz 1.1.17 Seien M, N und O drei Mengen. Dann gilt.

1. $M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$.

2. $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 0. ■

Definition 1.1.18 Das **Komplement** von N in M ist die Menge $M \setminus N$ von elemente die in M und nich in N enthalten sind. Mit Symbole:

$$M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

Satz 1.1.19 Seien M, N und O drei Mengen. Dann gilt.

1. $M \setminus (N \cup O) = (M \setminus N) \cap (M \setminus O)$.

2. $M \setminus (N \cap O) = (M \setminus N) \cup (M \setminus O)$. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 0. ■

Potenzmengensaxiom

Axiom 1.1.20 Sei M eine Menge, dann gibt es genau eine Menge, die **Potenzmenge** $\mathfrak{P}(M)$ von M, welche Elemente genau alle Teilmenge von M sind.

Beispiel 1.1.21

1. $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

2. $\mathfrak{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$.

3. $\mathfrak{P}(\{0;1;2\}) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0;1\}; \{0;2\}; \{1;2\}; \{0;1;2\}\}$.

Kartesische Produkt

Definition 1.1.22 (Kartesische Produkt) Seien M und N zwei Mengen.

1. Ein **geordnetes Paar** von Elementen $x \in M$ und $y \in N$ besteht aus der Angabe eines erten Elements $x \in M$ und eines zweiten Elements $y \in N$. Paaren werden als (x, y) geschrieben.

2. Die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus M und N heißt das **Kartesische Produkt** und ist durch $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M,\ y \in N\}$ bezeichnet.

Satz 1.1.23 Es gilb $(x, y) = (y, x)$ genau dann wenn $x = y$. □

Beispiel 1.1.24 Sei $M = \{0;1;2\}$ und $N = \{A, B\}$ dann gilt

$$M \times N = \{(0, A); (0, B); (1, A); (1, B); (2, A); (2, B)\}.$$

1.2 Natürlische Zahlen

1.2.1 Definition

Wir haben noch keine unendlische Menge, *i.e.* Menge mit unendlischen vielen Elementen, gesehen. Wir brauchen eigentlich ein neues Axiom dafür.

Axiom 1.2.1 (Peano Axiome) Es gibt eine Menge $\mathbb{N}$, die Meger der natürlischen Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

- zu jeder $n \in N$, gibt es genau einen Nachfolger $N(n) \in \mathbb{N}$ (später $N(n) = n+1$).
- Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $N(n) \neq 0$.
- Jede $n \in \mathbb{N}$ ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahlen.
- Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, so dass
  - $0 \in M$
  - $n \in M \Rightarrow N(n) \in M$

  dann gilt $M = \mathbb{N}$ (**Induktionseigenschaftaxiom**).

Notation 1.2.2 Konkret kann man die natürlische Zahlen wie folgt definieren: 0, $1 = N(0)$, $2 = N(1)$, $3 = N(2)$ ... $n + 1 = N(n)$.

Man kann mit dieser Definiton die klassische arthmetische Eigenschaften von $\mathbb{N}$ zurück finden.

Beispiel 1.2.3 Here sind weitere Beispiele von unendliche Mengen die man dank der Existenz von $\mathbb{N}$ konstruiren kann.

Die Menge der ganzen Zahlen ist $\mathbb{Z}$.
Die Mende der rationale Zahlen ist $\mathbb{Q}$.
Die Mende der reelen Zahlen ist $\mathbb{R}$.
Die Mende der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C}$.

1.2.2 Induktion

Satz 1.2.4 Sei P eine eigenschaft die eine natürlische Zahl haben kann. Wenn $P(0)$ und $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ wahr sind, dann ist $P(n)$ wahr für jede $n \in \mathbb{N}$. □

Beweis. Sei $M = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ ist wahr}\}$, dann gilt $0 \in M$ und $n \in M \Rightarrow N(n) \in M$. Vom Induktionseigenschaftaxiom folgt $M = \mathbb{N}$. ■

Beispiel 1.2.5

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad 0+1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad 0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad 0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Beweis. 1. Sei $P(n)$ die Eigenschaft

$$0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dann gilt $P(0)$. Angenommen,dass $P(n)$ gilt, dann gilt

$$0+1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. und 3. Siehe Übungsblatt 0. ∎

1.3 Auswahlaxiom

Wir geben noch ein Axiom, das nicht von den Anderen abhängt.

Axiom 1.3.1 (Auswahlaxiom) Sei $(M_i)_{i\in I}$ ein Mengensystem so dass für jedes $i \in I$, gilt $M_i \neq \emptyset$ und für jede $i, j \in I$, gilt $M_i \cap M_j = \emptyset$. Dann gibt es eine Menge M, so dass für jedes $i \in I$ die Menge $M_i \cap M$ genau ein Element enthält.

Dieses Axiom wird später benutzt, um zu beweisen, dass jeder Vektorraum eine Basis enthält.

1.4 Abbildungen

Definition 1.4.1 Seien M und N zwei Mengen. Eine **Abbildung** f von M nach N ist eine Vorschrift, durch die jede Elemente $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zugeordnet wird. In Symbol man schreibt:

$$\begin{array}{rccl} f: & M & \to & N \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Die Menge M heißt **Definitionsbereich** und N heißt **Wertebereich** der Abbildung f.

Beispiel 1.4.2

1. Sei M eine Menge, es gibt die **identische Abbildung** $\mathrm{Id}_M : M \to M$, $x \mapsto x$.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

Definition 1.4.3 Seien $f : M \to N$ und $g : N \to O$, dann kann man f mit g **componieren**. Als Resultat erhält man eine Abbildung $g \circ f : M \to O$ definiert durch $x \mapsto g(f(x))$.

Definition 1.4.4 Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und seien $X \subset M$ und $Y \subset N$ Teilmengen von M und N. Das **Bild** von X under f ist die Teilmenge von N defienert durch

$$f(X) = \{y \in N \mid \exists x \in X \text{ mit } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Das **Urbild** von Y ist die Teilmenge von M defieniert durch

$$f^{-1}(Y) = \{x \in M \mid f(x) \in Y\}.$$

Für eine Teilmenge $\{y\}$ mit einem einzigen Element schreibt man $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$.

Beispiel 1.4.5 Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Abbildung definiert durch $x \mapsto x^2$. Dann gilt $f(\{-1; 1\}) = \{1\}$ und $f^{-1}(1) = \{-1; 1\}$.

Definition 1.4.6 Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

1. Die Abbildung f heißt **injektiv** wenn, für alle $x, x' \in M$ gilt die Implikazion $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (oder $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$).

2. Die Abbildung f heißt **surjektiv** wenn, $f(M) = N$.

3. Die Abbildung f heißt **bijektiv** wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Satz 1.4.7 Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Die Abbildung f ist bijektiv genau dann wenn existiert eine Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_N$.

Für f bijektiv ist die Abbildung g eindeutig definiert. □

Beweis. Angenomment f sei bijektiv. Sei $y \in N$. Als f surjektiv ist, existiert ein Element $x \in M$ mit $f(x) = y$. Das Element x ist von y eindeutig definiert weil für $x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ gilt $x = x'$. Man definiert $g : N \to M$ mit $g(y) = x$. Dann gilt $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$ und $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$.

Die Abbildung g ist eindeutig: sei $h : N \to M$ mit $h \circ f = \mathrm{Id}_M$ und $f \circ h = \mathrm{Id}_N$, dann gilt für $y = f(x) \in N$: $h(y) = g(f(x)) = x = g(y)$. Da f surjetiv gilt die Gleichheit $h(y) = g(y)$ für alle $y \in N$.

Angenommen es gibt g, dann für $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$ gilt $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$, so dass f injektiv ist. Sei $y \in N$ dann gilt $y = f(g(y))$ und f ist surjektiv. ■

Definition 1.4.8 Sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung, dann ist die einzige Abbildung g so dass $g \circ f = \mathrm{Id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_N$ die **Umkehrabbildung** genannt und wird mit $f^{-1} : N \to M$ geschrieben.

Bemerkung 1.4.9 Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und Y einen Teilmenge von N. Die Urbild $f^{-1}(Y)$ ist für jede (auch nicht bijektive) Abbildung definiert und für $y \in N$ ist die Urbild $f^{-1}(y)$ für jede (auch nicht bijektive) Abbildung definiert.

Satz 1.4.10 Seien $f : M \to N$ und $g : N \to O$ zwei Abbildungen. Dann gilt.

1. f und g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv.

2. f und g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv.

3. f und g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv. □

Beweis. 1. Seien $x, y \in M$, so dass $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, dann gilt $g(f(x)) = g(f(y))$ und als g injektiv ist, gilt $f(x) = f(y)$. Als f injektiv ist, gilt $x = y$ so dass $g \circ f$ injektiv ist.

2. Sei $z \in O$. Als g surjektiv ist, gibt es $y \in N$ mit $g(y) = z$. Als f sujektiv ist, gibt es $x \in M$ mit $f(x) = y$. Dann gilt $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ und $g \circ f$ ist surjektiv.

3. Folgt aus 1. und 2. ■

Satz 1.4.11 Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen nicht leere Mengen.

1. Die Abbildung f ist injektiv genau dann wenn, es eine Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_M$ gibt.

2. Die Abbildung f ist surjektiv genau dann wenn, es eine Abbildung $h : N \to M$ mit $f \circ h = \mathrm{Id}_N$ gibt.

3. Wenn f bijektiv ist dann sind die beide Abbildungen $g : N \to M$ und $h : N \to M$ gleich die Umkehrabbildung f^{-1}. □

Beweis. Siehe Tutorium 2. ■

Definition 1.4.12 Sei $f : M \to N$ eine Abbildung, der **Graph** von f ist die Teilmenge $\Gamma(f) \subset M \times N$ von $M \times N$ definiert durch

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}.$$

Definition 1.4.13 Seien M und N zwei Mengen, dann ist N^M die **Menge aller Abbildungen** von M nach N.

1.4.1 Abbildungen und Mengenoperationen

Satz 1.4.14 Seien $f : M \to N$ eine Abbildung, $M_1, M_2 \subset M$ und $N_1, N_2 \subset N$ dann gilt:

1. $M_1 \subset M_2 \Rightarrow f(M_1) \subset f(M_2)$ und $N_1 \subset N_2 \Rightarrow f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2)$.
2. $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$ und $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$.
3. $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$ und $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$.
4. $f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)$ und $f^{-1}(N_1 \setminus N_2) = f^{-1}(N_1) \setminus f^{-1}(N_2)$. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 2. ■

1.5 Relationen

1.5.1 Erste Definition

Definition 1.5.1 Sei M eine Menge. Eine **Relation** auf der Menge M ist eine Teilmenge R von $M \times M$. Seien x, y zwei Elemente in M, für $(x, y) \in R$ schreibt man $x \sim_R y$.

Beispiel 1.5.2 1. Sei M eine Menge, die Relation $R = \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$ ist die Gleichheitsrelation. Es gilt $x \sim_R y \Leftrightarrow x = y$.

2. Sei $M = \mathbb{N}$ und $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$. Dann ist R eine Relation auf $\mathbb{N}$.

3. Sei M eine Menge und $R = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset\}$. Dann ist R eine Relation auf M.

Definition 1.5.3 Sei R eine Relation auf einer Menge M.

1. R heißt **reflexiv**, wenn $x \sim_R x$ für alle $x \in M$.
2. R heißt **symmetrisch**, wenn $x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$.
3. R heißt **antisymmetrisch**, wenn $(x \sim_R y$ und $y \sim_R x) \Rightarrow x = y$.
4. R heißt **transitiv**, wenn $(x \sim_R y$ und $y \sim_R z) \Rightarrow x \sim_R z$.

Beispiel 1.5.4 1. Sei M eine Menge, die Gleichheitsrelation $R = \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$ ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv.

2. Sei $M = \mathbb{N}$ die Relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv aber nicht symmetrisch.

3. Sei M eine nichtleere Menge. Die Relation $R = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset\}$ auf der Menge M ist nicht reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch und nicht transitiv.

1.5.2 Ordnungsrelationen

Definition 1.5.5 Sei M eine Menge und R eine Relation auf M. Die Relation R heißt **Ordnungsrelation**, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel 1.5.6 1. Sei M eine Menge, die Gleichheitsrelation ist eine Ordnungsrelation.

2. Sei $M = \mathbb{N}$ die Relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$ ist eine Ordnungsrelation.

3. Sei M eine nichtleere Menge. Die Relation $R = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset\}$ ist nicht eine Ordnungsrelation.

1.5.3 Äquivalenzrelationen

Definition 1.5.7 Sei R eine Relation auf einer Menge M. 4. R heißt **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel 1.5.8 1. Sei M eine Menge, die Gleichheitsrelation ist eine Äquivalenzrelation.

2. Sei $M = \mathbb{N}$ die Relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$ ist keine Äquivalenzrelation.

3. Sei M eine nichtleere Menge. Die Relation $R = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset\}$ ist keine Äquivalenzrelation.

Lemma 1.5.9 Sei $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x - y \text{ ist gerade}\}$. Dann ist R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 2. ■

Satz 1.5.10 Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann ist $R = \{(x, y) \in M \mid f(x) = f(y)\}$ eine Äquivalenzrelation. □

Beweis. Als $f(x) = f(x)$, gilt $x \sim_R x$. Für $x \sim_R y$, gilt $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(x)$, so dass $y \sim_R x$ gilt. Für $x \sim_R y$ und $y \sim_R z$, gilt $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$, so dass $f(x) = f(z)$ und $x \sim_R z$ gilt. ■

1.5.4 Quotient

Definition 1.5.11 Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M.

1. Die **Äquivalenzklasse** $[x]$ von x ist die Menge aller Elemente y mit $x \sim_R y$. Mit Symbol:

$$[x] = \{y \in M \mid x \sim_R y\}.$$

2. Die Gesamtheit der Äquivalenzklassen bildet eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ die man M/R bezeichnet und **Quotientenmenge von** M **nach** R. Mit Symbol

$$\begin{aligned} M/R &= \{N \in \mathfrak{P}(M) \mid \exists x \in M \text{ mit } N = [x]\} \\ &= \{[x] \in \mathfrak{P}(M) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

Lemma 1.5.12 Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M und sei $x, y \in M$. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:

1. $[x] = [y]$;

2. $[x] \cap [y] \neq \emptyset$;

3. $x \sim_R y$. □

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. Trivial: $x \in [x] = [y]$ also $x \in [x] \cap [y]$.

2. $\Rightarrow$ 3. Sei $z \in [x] \cap [y]$. Dann gilt $x \sim_R z$ und $y \sim_R z$. Als R symmetrisch ist gilt $z \sim_R y$ und von der transitivität gilt $x \sim_R y$.

3. $\Rightarrow$ 1. Sei $z \in [x]$, dann gilt $x \sim_R z$. Als R symmetrisch und transitiv ist gilt $y \sim_R z$ *i.e.* $z \in [y]$ und $[x] \subset [y]$. Die Inklusion $[y] \subset [x]$ kann man mit der selben Methode beweisen. ■

Korollar 1.5.13 Sei $O \in M/R$ eine Äquivalenzklasse dann gilt $x \in O \Leftrightarrow [x] = O$.

Definition 1.5.14 Sei M eine Menge, eine **Partition** von M ist eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Teilmenge $M_i \subset M$ so dass

- $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$,
- $\bigcup_{i \in I} M_i = M$.

Satz 1.5.15 Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Dann bildet die Familie von Äquivalenzklassen eine Partition von M. □

Beweis. Aus Lemma 1.5.12 gilt $[x] \cap [y] = \emptyset$ für $[x] \neq [y]$. Außerdem, gibt es für jedes Element $x \in M$ eine Klasse: $[x]$ so dass $x \in [x]$. Es gilt daher

$$M \subset \bigcup_{[x] \in M/R} [x].$$

Die umgekehrte Inklusion gilt auch da $[x] \subset M$ für alle $[x]$. ∎

Definition 1.5.16 Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Die Abbildung $p_R : M \to M/R$ defieniert durch $x \mapsto [x]$ heißt die **kanonische Projektion**.

Lemma 1.5.17 Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M.

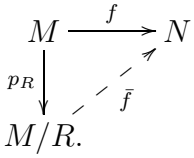
1. Die kanonische Projektion p_R ist surjektiv.

2. Es gilt für $x, y \in M$: $[x] = [y] \Leftrightarrow p_R(x) = p_R(y)$. □

Beweis. 1.Sei $[x] \in M/R$, dann gilt $[x] = p_R(x)$.

2. Trivial aus der Definition. ∎

Satz 1.5.18 Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung, so dass $[x] = [y] \Rightarrow f(x) = f(y)$. Dann gibt es eine Abbildung $\bar{f} : M/R \to N$, so dass $f = \bar{f} \circ p_R$.



Beweis. M/R ist eine Menge von Teilmengen von M. Sei $O \in M/R$ (z.b. $O = [z]$ für $z \in M$). Wenn die Abbildung $\bar{f}$ existiert, dann gilt für $x \in O$: $f(x) = \bar{f}(p_R(x)) = \bar{f}([x]) = \bar{f}(O)$ *i.e.* $\bar{f}(O) = f(x)$.

Seien $x, y \in O$, dann gilt aus Lemma 1.5.17: $[x] = O = [y]$ und $f(x) = f(y)$. Die Abbildung $O \to N$ definiert durch $x \mapsto f(x)$ ist konstant gleich $n \in N$. Wir definieren $\bar{f}(O) = n$. Es gilt $n = f(x)$ für jeder $x \in O$.

Es gilt $\bar{f} \circ p_R(x) = \bar{f}([x]) = f(x)$. ∎

2 Gruppen, Körper und Ringe

2.1 Gruppen

2.1.1 Definition und Beispiele

Definition 2.1.1 Eine **Gruppe** ist ein geordnetes Paar (G, m) mit G einer Menge und m einer Abbildung $m : G \times G \to G$ (auch **Verknüpfung** gennant) so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Es existiert ein **neutrales Element** e in G mit $m(e, x) = m(x, e) = x$ für alle $x \in G$.
- Die Verknüpfung m ist **assoziativ**, dass heißt $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$ für alle $x, y, z \in G$.
- Für jedem $x \in G$ gibt es ein **inverses Element**, dass heißt eine Element $y \in G$ mit $m(x, y) = m(y, x) = e$.

Definition 2.1.2 Eine Gruppe (G, m) heißt **kommutativ** oder **abelsch** falls gilt: $m(x, y) = m(y, x)$ für alle $x, y \in G$.

Notation 2.1.3 Wir werden oft die Verknüpfung $m : G \times G \to G$ mit einem multiplikativen Symbol schreiben: $m(x, y) = x \cdot y$. Die Axiome für die Definition einer Gruppen sehen wie folgt aus:

- **Neutrales Element**: $e \in G$ mit $e \cdot x = x \cdot e = x$ für alle $x \in G$.
- **Associativität**: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ für alle $x, y, z \in G$.
- **Inverses Element**: für jedem $x \in G$ existiert $y \in G$ mit $x \cdot y = y \cdot x = e$.

Die **Kommutativität** sieht wie folgt aus:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Beispiel 2.1.4 Hier sind Beispiele von Gruppen:

- $(\mathbb{Z}, +)$, wo $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch $(x, y) \mapsto x + y$ definiert ist, ist eine abelsche Gruppe.

- $(\mathbb{Q}, +)$, wo $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ durch $(x, y) \mapsto x + y$ definiert ist, ist eine abelsche Gruppe.
- $(\mathbb{R}, +)$, wo $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $(x, y) \mapsto x + y$ definiert ist, ist eine abelsche Gruppe.
- $(\mathbb{C}, +)$, wo $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $(x, y) \mapsto x + y$ definiert ist, ist eine abelsche Gruppe.
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, wo $\times : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \times Q \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ durch $(x, y) \mapsto x \times y$ definiert ist, ist eine abelsche Gruppe.
- Für eine Menge M, die Menge $\mathrm{Bij}(M)$ der bijektiven Selbstabbildungen $f : M \to M$ mit der Verknüpfung $\mathrm{Bij}(M) \times \mathrm{Bij}(M) \to \mathrm{Bij}(M)$ gegeben durch Komposition von Abbildungen: $(f, g) \mapsto f \circ g$ ist eine Gruppe. Die Gruppe $(\mathrm{Bij}(M), \circ)$ ist nicht kommutativ sofern M mindestens drei paarweise vershiedene Elemente enthält.
- $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe: 1 hat kein inverses Element.

Satz 2.1.5 Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

1. Das neutral Element ist eindeutig bestimmt.

2. Sei $x \in G$, das inverse Element von x ist eindeutig bestimmt. □

Beweis. 1. Seien e und e' zwei neutrale Elemente. Dann gilt $e' = e \cdot e'$ weil e' neutral ist und $e \cdot e' = e'$ weil e neutrql ist. Es folgt $e' = e \cdot e' = e$.

2. Seien y und y' zwei inverse Elemente von x. Dann gilt

$$y = e \cdot y = (y' \cdot x) \cdot y = y' \cdot (x \cdot y) = y'.$$

Beispiel 2.1.6 Wir beschreiben das neutral Element und das inverse von einem Element x in den obigen Beispielen von Gruppen.

- $(\mathbb{Z}, +)$: neutral Element 0. Inverse von x: $-x$.
- $(\mathbb{Q}, +)$: neutral Element 0. Inverse von x: $-x$.
- $(\mathbb{R}, +)$: neutral Element 0. Inverse von x: $-x$.
- $(\mathbb{C}, +)$: neutral Element 0. Inverse von x: $-x$.
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$: neutral Element 1. Inverse von x: $\frac{1}{x} = x^{-1}$.
- $(\mathrm{Bij}(M), \circ)$: neutral Element Id_M. Inverse von f: f^{-1}.

Notation 2.1.7

1. Oft (aber nicht immer) werden wir allgemeine Verknüpfungen auf G die eine Gruppe definieren mit $\cdot$ bezeichnen. In diesem Fall werden wir das neutral Element mit 1 bezeichnen und das inverse Element von x mit x^{-1} bezeichnen.

2. Wenn eine Gruppe abelsch ist werden wir oft (aber nicht immer) die Verknüpfung mit $+$ bezeichnen. Dann werden wir das neutral Element mit 0 bezeichnen und das inverse Element von x mit $-x$ bezeichnen.

3. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien $(a_i)_{i\in[1,n]}$ n Elemente in G. Dann werden wir das Produkt von diesen Elementen mit

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

bezeichnen. Falls $n = 0$ zugelassen ist, dann handelt es sich um die **leere Folge**. Man erklärt das zugehörige leere Produkt durch

$$\prod_{i=1}^{0} a_i = 1.$$

4. Sei $(G, +)$ eine Gruppe und seien $(a_i)_{i\in[1,n]}$ n Elemente in G. Dann werden wir die Somme von diesen Elementen mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

bezeichnen. Falls $n = 0$ zugelassen ist, dann handelt es sich um die **leere Folge**. Man erklärt das zugehörige leere Somme durch

$$\sum_{i=1}^{0} a_i = 0.$$

2.1.2 Untergruppe

Definition 2.1.8 Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subset G$ eine Teilmenge, dann heißt H eine **Untergrupp** von G wenn gilt:

1. $1 \in H$,
2. $x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$,
3. $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Satz 2.1.9 Sei H eine Untergrupe von $(G, \cdot)$, dann ist $(H, \cdot)$ eine Gruppe. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 3. ∎

Satz 2.1.10 Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien x, y, z Elemente in G. Dann gilt:

1. $xy = xz \Rightarrow y = z$,
2. $yx = zx \Rightarrow y = z$,
3. $(x^{-1})^{-1} = x$,
4. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. □

Beweis. 1. Es gilt $y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz) = (x^{-1}x)z = z$.

2. Es gilt $y = y(xx^{-1}) = (yx)x^{-1} = (zx)x^{-1} = z(xx^{-1}) = z$.

3. Es gilt $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, das heißt x ist das inverse Element für x^{-1}.

3. Es gilt $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = xx^{-1} = 1$ und $(y^{-1}x^{-1})xy = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}y = 1$, das heißt $y^{-1}x^{-1}$ ist das inverse Element für xy. ∎

2.1.3 Gruppenhomomorphismus

Definition 2.1.11 Seien $(G, \cdot)$ und $(G', \star)$ Gruppen. Eine Abbildung $f : G \to G'$ heißt **Gruppenhomomorphismus** wenn für jeden $x, y \in G$ gilt:

$$f(xy) = f(x) \star f(y).$$

Satz 2.1.12 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus dann gilt für alle $x \in G$

$$f(1) = e_{G'} \text{ und } f(x^{-1}) = f(x)^{-1}.$$

wo 1 das neutral Element von G ist und $e_{G'}$ das neutral Element von G' ist. □

Beweis. Es gilt $f(1) \star f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) = f(1) \star e_{G'}$ und von Satz 2.1.10.1 folgt $f(1) = e_{G'}$.

Es gilt $f(x) \star f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(1) = e_{G'}$ und $f(x^{-1}) \star f(x) = f(x^{-1}x) = f(1) = e_{G'}$, dass heißt $f(x^{-1})$ ist das inverse Element von $f(x)$. ∎

Satz 2.1.13 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ eine Untergruppe von G. □

Beweis. Es gilt $1 \in \mathrm{Ker}(f)$. Für $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$ gilt $f(xy) = f(x) \star f(y) = e_{G'} \star e_{G'} = e_{G'}$, dass heißt $xy \in \mathrm{Ker}(f)$ und $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = e_{G'}^{-1} = e_{g'}$ dass heißt $x \in \mathrm{Ker}(f)$. ∎

Definition 2.1.14 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus, dann heißt die Untergruppe $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ der **Kern** von f.

Satz 2.1.15 Sei $f.G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$. □

Beweis. Angenommen f sei injektiv, dann gilt für $x \in \mathrm{Ker}(f)$: $f(x) = e_{G'} = f(1)$ und $x = 1$ folgt von der Injektivität.

Angenommen $\mathrm{Ker}(f) = \{1\}$, dann gilt für $x, y \in G$ mit $f(x) = f(y)$: $f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = f(x)f(x)^{-1} = e_{G'}$, dass heißt $xy^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$. Weiter folgt $xy^{-1} = 1$ und $x = y$. ■

Satz 2.1.16 Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenabbildung, dann ist das Bild von f eine Untergruppe von G' □

Beweis. Siehe Übungsblatt 3. ■

2.2 Körper

2.2.1 Definition und Beispiele

Definition 2.2.1 Ein **Körper** ist ein geordnetes Paar $(K, +, \cdot)$ mit K einer Menge und $+$, $\cdot$ Verknüpfungen auf K, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutral Element 0.
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutral Element 1.
- Für jeden $x, y, z \in K$ gilt $x(y + z) = xy + xz$ (**Distributivgesetzt**).

Das Element 0 heißt das **Nullelement** von K und das Element 1 heißt das **Einselement** von K.

Notation 2.2.2

1. In die Gleichung $x(y + z) = xy + xz$ hätten Wir eigentlich $x(y + z) = (xy) + (xz)$ schreiben mussen. Implizit hier ist, dass die Multiplication $\cdot$ Vorrang der Addition $+$ hat.

2. Wir schreiben $K^\times$ für $K \setminus \{0\}$.

3. Für $x \in K$ und $y \in K^\times$ schreiben wir $\dfrac{x}{y} = xy^{-1}$.

Beispiel 2.2.3 Hier sind Beispiele von Körper:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist einer Körper.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist einer Körper.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist einer Körper.

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist keiner Körper: 2 hat kein inverses Element.

Satz 2.2.4 Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

1. Es gilt $(y + z)x = yx + zx$ für alle $x, y, z \in K$,

2. Es gilt $x0 = 0x = 0$ für alle $x \in K$,

3. Es gilt $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{xt + yz}{yt}$ für alle $x, z \in K$ und $y, t \in K^\times$.

4. Seien $x, y \in K$, dann gilt $xy = 0_K \Rightarrow x = 0_K$ oder $y = 0_K$. □

Beweis. 1. Es gilt $(y + z)x = z(y + z) = xy + xz = yx + zx$.

2. Es gilt $0x = x0 = x(0 + 0) = x0 + x0$ und mit Satz 2.1.10.1 gilt $0x = x0 = 0$.

3. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} + \frac{z}{t} &= xy^{-1} + zt^{-1} = xtt^{-1}y{-}1 + zyy^{-1}t^{-1} = xt(yt)^{-1} + yz(yt)^{-1} \\ &= (xt + yz)(yt)^{-1} = \frac{xt + yz}{yt}.\end{aligned}$$

4. Seien $x, y \in K$, mit $xy = 0_K$. Falls $x \neq 0_K$, dann gilt $y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0_K = 0_K$. ■

2.2.2 Teilkörper

Definition 2.2.5 Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper $L \subset K$ eine Teilmenge, dann heißt K ein **Teilkörper** von K wenn L eine Untergruppe von $(K, +)$ ist und $L^\times$ eine Untergruppen von $(K^\times, \cdot)$ ist.

Satz 2.2.6 Sei L ein Teilkörper von $(K, +, \cdot)$, dann ist $(L, +, \cdot)$ ein Körper. □

Beweis. Folgt von Satz 2.1.9. ■

Beispiel 2.2.7

1. $\mathbb{Q}$ ist ein Teilkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

2. $\mathbb{R}$ ist ein Teilkörper von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ (siehe Übungsblatt 3).

2.2.3 Körperhomomorphismus

Definition 2.2.8 Seien $(K, +, \cdot)$ und $(K', +, \cdot)$ zwei Körper. Eine Abbildung $f : K \to K'$ heißt **Körperhomomorphismus** wenn $f : (K, +) \to (K', +)$ und $f : (K\times, \cdot) \to (K'^{\times}, \cdot)$ Gruppenhomomorphismus sind.

Satz 2.2.9 Sei $f : K \to K'$ ein Körperhomomorphismus dann gilt für alle $x \in K$ und $y \in K^{\times}$:

$$f(0_K) = 0_{K'},\ f(1_K) = 1_{K'}\ f(-x) = -f(x) \text{ und } f(y^{-1}) = f(y)^{-1}.$$

Beweis. Folgt von Satz 2.1.12. ∎

Beispiel 2.2.10 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}$ die komplexe Konjugation, dann ist f ein Körperhomomorphismus (siehe Übungsblatt 3).

Satz 2.2.11 Sei $f : K \to K'$ ein Körperhomomorphismus, dann ist f injektiv. □

Beweis. Wir berechnen $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in K \mid f(x) = 0_{K'}\}$. Sei $x \in \mathrm{Ker}(f)$ mit $x \neq 0_K$, dann gilt $0_{K'} \neq 1_{K'} = f(1_K) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = 0_{K'}f(x^{-1}) = 0_{K'}$ ein Widerspruch. Weiter folgt $x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow x = 0_K$ und $\mathrm{Ker}(f) = \{0_K\}$ und aus Satz 2.1.15 folgt, dass f injektiv ist. ∎

2.2.4 Die Characteristik eines Körper

Definition 2.2.12 Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$. Man definiert $n \cdot x$ durch

$$n \cdot x = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ mal}}.$$

Man definiert $\mathrm{char}(K)$, die **Charakteristik** von K, durch $\mathrm{char}(K) = 0$ falls $n \cdot 1_K \neq 0$ für alle $n \neq 0$, und $\mathrm{char}(K) = \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid n \cdot 1_K = 0_K\}$ andernfalls.

Satz 2.2.13 Sei K ein Körper, dann gilt $\mathrm{char}(K) = 0$ oder $\mathrm{char}(K)$ ist eine Primzahl. □

Beweis. Angenommen dass $\mathrm{char}(K) \neq 0$, seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{char}(K) = nm$. Dann gilt $\mathrm{char}(K) \cdot 1_K = (nm) \cdot 1_K = (n \cdot 1_K)(m \cdot 1_K)$ und aus Satz 2.2.4 folgt $n \cdot 1_K = 0_K$ und $m \cdot 1_K = 0_K$. Aus der Definition folgt $\mathrm{char}(K) = n$ oder $\mathrm{char}(K) = m$, dass heißt $\mathrm{char}(K)$ ist eine Primzahl. ∎

2.3 Ringe

2.3.1 Definition und Beispiele

Definition 2.3.1 Ein **Ring** ist ein geordnetes Paar $(R, +, \cdot)$ mit R einer Menge und $+, \cdot$ Verknüpfungen so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe,
- es existiert ein **Einselement** 1_R in R mit $1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$ für alle $x \in R$,
- die Verknüpfung $\cdot$ ist associativ,
- für jeden $x, y, z \in R$ gilt $x(y + z) = xy + xz$ und $(y + z)x = yx + zx$.

Definition 2.3.2 Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt **kommutativ** falls gilt: $xy = yx$ für alle $x, y \in R$

Beispiel 2.3.3 Hier sind Beispiele von Ringe:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, ist ein kommutativer Ring.
- Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring also sind $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kommutative Ringe.

2.3.2 Unterringe

Definition 2.3.4 Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $S \subset R$ eine Teilmenge, dann heißt S eine **Unterring** von R wenn gilt:

1. $(S, +)$ ist eine Untergrupe von $(R, +)$,
2. $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$.
3. $1 \in S$.

Satz 2.3.5 Sei S ein Unterring von $(R, +, \cdot)$, dann ist $(S, +, \cdot)$ ein Ring. □

Beweis. Übung. ■

2.3.3 Ringhomomorphismus

Definition 2.3.6 Seien $(R, +, \cdot)$ und $(R', +, \cdot)$ Ringe. Eine Abbildung $f : R \to R'$ heißt **Ringhomomorphismus** wenn gilt:

1. $f : (R, +) \to (R', +)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

2. $f(1_R) = 1_{R'}$.

3. $f(xy) = f(x)f(y)$ für jeden $x, y \in R$.

Beispiel 2.3.7

1. Eine Körperhomomorphismus ist ein Ringhomomorphismus.

2. Sei K ein Körper, die Abbildung $\mathbb{Z} \to K$ definiert durch $n \mapsto n \cdot 1_K$ ist ein Ringhomomorphismus.

2.3.4 Die Ringe $\mathbb{Z}_n$

Lemma 2.3.8 (Schulwissen) Seien $x, n \in \mathbb{Z}$, mit $n \neq 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte Elemente $r, q \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < n$ und $x = qn + r$.

Setze $r_n(x) = r$. □

Definition 2.3.9 Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und sei $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. Für $x, y \in \mathbb{Z}_n$ sei $x + y = r_n(x + y)$ und $x \cdot y = r_n(xy)$.

Satz 2.3.10 $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring. □

Beweis. Übung. ■

Satz 2.3.11 $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist ein Körper genau dann wenn n eine Primzahl ist. □

Beweis. Es gilt $n \cdot 1_{\mathbb{Z}_n} = 0_{\mathbb{Z}_n}$ und $m \cdot 1_{\mathbb{Z}_n} \neq 0_{\mathbb{Z}_n}$ für $0 < m < n$. Falls $\mathbb{Z}_n$ ein Körper ist, gilt $\text{char}(\mathbb{Z}_n) = n$ und n ist eine Primzahl.

Angenommen, dass n eine Primzahl ist, wir beweisen, dass jedem $x \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0_{\mathbb{Z}_n}\}$ ein inverses Element hat. Wir zeigen zuerst ein Lemma.

Lemma 2.3.12 Sei n eine Primzahl ist. Dann ist $\mathbb{Z}_n$ Nullteilerfrei, dass heißt: für $x, y \in \mathbb{Z}_n$ mit $x \cdot y = 0_{\mathbb{Z}_n}$ gilt $x = 0_{\mathbb{Z}_n}$ oder $y = 0_{\mathbb{Z}_n}$. □

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{Z}_n$ mit $x \cdot y = 0_{\mathbb{Z}_n}$. Dann ist xy ist durch n teilbar. Da n eine Primzahl ist , folgt: n teilt x oder y. Damit ist aber $x = 0$ oder $y = 0$, da $0 \leq x, y \leq n - 1$. ■

Sei nun $x \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0_{\mathbb{Z}_n}\}$. Definiere eine Abbildung $m_x : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ durch $m_x(y) = x \cdot y$. Dann ist m_x injektiv: seien y, z mit $m_x(y) = m_x(z)$, es folgt $x(y - z) = 0_{\mathbb{Z}_n}$. Vom Lemma folgt $y - z = 0_{\mathbb{Z}_n}$ und $y = z$.

Alle Elemente $m_x(0), m_x(1), m_x(2), \cdots, m_x(n-1)$ sind paarweise verschieden. Es sind dann n Elemente im Bild $m_x(\mathbb{Z}_n)$ von m_x. Da $\mathbb{Z}_n$ genau n Elemente hat gilt: m_x ist surjektiv. Insbesondere gilt: es gibt ein $y \in \mathbb{Z}_n$ mit $m_x(y) = 1_{\mathbb{Z}_n}$. Dann ist y das invrses Element von x und $\mathbb{Z}_n$ ist ein Körper. ∎

3 Vektorräume und lineare Abbildungen

3.1 Vektorräume

3.1.1 Definitionen und Beispiele

Definition 3.1.1 Sei K ein Körper. Ein **Vektorraum** über K (oder K-**Vektorraum**) ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen $+ : V \times V \to V$ (**Addition** genannt) und $\cdot : K \times V \to V$ (**Skalarmultiplikation** genannt) mit den folgenden Eigenschaften:

- $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe,
- für alle $x, y \in K$ und $v \in V$, es gilt $(xy) \cdot v = x \cdot (y \cdot v)$,
- für alle $v \in V$ gilt $1_K \cdot v = v$,
- für alle $x \in K$ und $v_1, v_2 \in V$ es gilt $x \cdot (v_1 + v_2) = x \cdot v_1 + x \cdot v_2$.
- für alle $x, y \in K$ und $v \in V$ es gilt $(x + y) \cdot v = x \cdot v + y \cdot v$.

Die Elemente in V heißen **Vektoren**, die Elemente in K heißen **Skalare**. Das Nullelement 0_v von $(V, +)$ heißt **Nullvektor** (oder **die** 0 **von** V).

Notation 3.1.2 Sei V ein K-Vektorraum man setze

- $v_1 - v_2 = v_1 + (-1) \cdot v_2$ für alle $v_1, v_2 \in V$,
- $xv = x \cdot v$ für alle $x \in K$ und $v \in V$.

Beispiel 3.1.3 Sei K ein Körper.

1. Der **Nullvektorraum** $V = \{0\}$ über K (für $+$ und $\cdot$ gibt es nur eine Möglichkeit). Man schreibt einfach $V = 0$.

2. Der Vektorraum $V = K$: Addition und Skalarmultiplication sind durch Addition und Mulktiplikation von K definiert.

3. Sei $V = K^n$ das n-fache Kartesische Produkt von K. Wir schreiben Elemente als Spalten:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

wobei $x_i \in K$. Wir definieren $+ : V \times V \to V$ durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

und $\cdot : K \times V \to V$ durch

$$x \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx_1 \\ \vdots \\ xx_n \end{pmatrix}$$

Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum (siehe Übungsblatt 4).

4. Sei I eine Menge, dann ist $K^I = \{\text{Abbildungen } f : I \to M\}$ ein Vektorraum, wobei für $f, g \in V$ und $x \in K$, sind $f + g$ und $x \cdot f$ die Abbildungen definiert durch

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i) \text{ und } (x \cdot f)(i) = xf(i)$$

für alle $i \in I$.

5. Sei L ein Körper so das K ein Teilkörper von L ist ($K \subset L$). Dann ist L ein K-Vektorraum mit Addition und Skalarmultiplikation gegen durch Addition und Multiplikation von L.

Zum Beispiel sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ Vektorräume über $\mathbb{Q}$ (und auch über $\mathbb{R}$).

Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

6. Seien V und W zwei K-Vektorräume, dann ist $V \times W$ auch ein K-Vektorraum wobei Addition und Skalarmultiplikation durch

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \text{ und } x \cdot (v, w) = (x \cdot v, x \cdot w)$$

gegeben sind.

Definition 3.1.4 Seien V und W zwei Vektorräume. Der K-Vektoraum $V \times W$ wird mit $V \oplus W$ bezeichnet und heißt **(externe) direkte Summe** von V und W.

3.1.2 Unterräume

Definition 3.1.5 Sei V ein K-Vektorraum, ein **Unterraum** W von V ist eine Teilmenge W von V, so dass gilt:

- $(W, +)$ ist eine Untergruppe von $(V, +)$,
- $xw \in W$ für alle $x \in K$ und $w \in W$.

Lemma 3.1.6 Sei V ein K-Vektorraum und sei W ein Unterraum von V. Dann ist W ein K-Vektorraum mit Addition und Skalarmultiplication durch Einschränkung der Addition und Skalarmultiplikation von V gegeben. □

Beweis. Übung. ■

Beispiel 3.1.7 Sei K ein Körper.

1. Sei V ein K-Vektorraum, dann ist $\{0_V\}$ ein Unterraum von V. Statt $\{0_V\}$ schreibt man einfach 0_V oder sogar 0.

2. Sei V ein K-Vektorraum und sei $v \in K$. Dann ist $\langle v \rangle = \{xv \in V \mid x \in K\}$ ein Unterraum von V. Für $v = 0_V$ gilt $\langle v \rangle = 0_V$. Für $v \neq 0_V$ heißt $\langle v \rangle$ eine **Gerade** von V.

3. Seien W_1 und W_2 zwei Unterräme von ein K-Vektorraum V. Dann sind

$$W_1 \cap W_2 \quad \text{und} \quad W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \in V \mid w_1 \in W_1 \text{ und } w_2 \in W_2\}$$

Unterräume.

4. Sei I eine Menge, dann ist

$$K^{(I)} = \{f \in K^I \mid f(i) \neq 0 \text{ für nur endliche viele } i \in I\}$$

ein Unterraum von K^I.

5. Für ein Interval I in $\mathbb{R}$, dann ist

$$C^0(I) = \{f \in \mathbb{R}^I \mid f \text{ ist stetig}\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^I$.

Definition 3.1.8 Sei V ein K-Vektorraum. Zwei Unterräume W_1 und W_2 sind in **direkte Summe** falls $W_1 \cap W_2 = 0_V$. In disem Fall schreibt man $W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2$ und nennt man $W_1 \oplus W_2$ die **interne direkte Summme**.

3.2 Lineare Abbildungen

3.2.1 Definitionen und Beispiele

Definition 3.2.1 Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **linear** oder **K-linear** falls gilt:

- $f : (V, +) \to (W, +)$ ist ein Gruppenhomomorphismus,
- $f(x \cdot v) = x \cdot f(v)$ für alle $x \in K$ und $v \in V$.

Eine lineare Abbildung heißt auch **Homomorphismus**. Falls $W = V$, heißt dann eine lineare Abbildung auch **Endomorphismus**.

Definition 3.2.2 Seien V und W zwei K-Vektorräume. Wir definieren

$\mathrm{Hom}_K(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ ist ein Homomorphismus}\}$
$\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$.

Lemma 3.2.3 Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ ist **K-linear** genau dann wenn

$$f(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in K$ und $v_1, v_2 \in V$. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 4. ■

Definition 3.2.4 Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. f heißt **Monomorphismus** falls f injektiv ist.
2. f heißt **Epimorphismus** falls f surjektiv ist.
3. f heißt **Isomorphismus** falls f bijektiv ist.

Lemma 3.2.5 Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ auch ein Isomorphismus. □

Beweis. Siehe Übungsblatt 4. ■

Definition 3.2.6 Zwei K-Vektorräume V und W heißen **isomorph** falls es ein Isomorphismus $f : V \to W$ gibt. Dann schreibt man $V \simeq W$.

Lemma 3.2.7 Sei $f : V \to W$ dann gilt $f(0) = 0$. □

Beweis. Folgt aus Satz 2.1.12, weil $f : (V, +) \to (W, +)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. ■

Lemma 3.2.8 Seien $f : V \to W$ und $g : W \to U$ zwei Homomorphismus dann ist $g \circ f$ auch ein Homomorphismus. □

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in K$ und $v_1, v_2 \in V$, dann gilt

$$\begin{aligned} g \circ f(x_1v_1 + x_2v_2) &= g(f(x_1v_1 + x_2v_2)) = g(x_1f(v_1) + x_2f(v_2)) \\ &= x_1g(f(v_1)) + x_2g(f(v_2)) = x_1g \circ f(v_1) + x_2g \circ f(v_2). \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.1.6 folgt, dass $g \circ f$ ein Homomorphismus ist. ■

Beispiel 3.2.9 1. Seien V und W zwei K-Vektorräume. Die **Nullabbildung** $f : V \to W$ ist die Abbildung definiert durch $f(v) = 0$ für alle $v \in V$. Die Nullabbildung ist linear. Man schreibt $f = 0$.

2. Sei V ein K-Vektorraum, die identität Abbildung Id_V ist linear.

3. Sei V ein K-Vektorraum und sei $x \in K$. Dann ist die Abbildung $f_x : V \to V$, welche definiert durch $f_x(v) = xv$ ist, linear. Die Abbildung f_x heißt **Homothetie (oder zentrische Streckung)** von **Streckfaktor** x.

4. Die Abbildung $K^2 \to K^2$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

wobei $a, b, c, d \in K$, ist linear.

4. Die Abbildung $K \to K$, $x \mapsto x^2$ ist nicht linear.

Definition 3.2.10 Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Der **Kern** von f ist $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$.

Bemerkung 3.2.11 Der Kern von einer linear Abbildung f ist der Kern von f als Gruppenhomomorphismus $f : (V, +) \to (W, +)$.

Lemma 3.2.12 Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

1. $\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Unterraum von V.

2. f ist injektive genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(f) = 0$. □

Beweis. 1. Seien $v, v' \in \mathrm{Ker}(f)$ und $x \in K$, dann gilt $f(v + v') = f(v) + f(v') = 0$ *i.e.* $v + v' \in \mathrm{Ker}(f)$ und $f(xv) = xf(v) = 0$ *i.e.* $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

2. Folgt aus Satz 2.1.15, weil $f : (V, +) \to (W, +)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. ■

Lemma 3.2.13 Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und seien $V' \subset V$ und $W' \subset W$ Unterräume.

1. Dann ist $f(V')$ ein Unterraum von W.

2. Dann ist $f^{-1}(W')$ ein Unterraum von V. □

Beweis. 1. Seien $w, w' \in f(V')$ und sei $x \in K$. Aus der Definition von $f(V')$, gibt es $v, v' \in V'$ so dass, $f(v) = w$ und $f(v') = w'$. Dann gilt $w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v') \in f(V')$, weil $v + v' \in V'$. Es gilt auch $xw = xf(v) = f(xv) \in f(V')$, weil $xv \in V'$.

2. Seien $v, v' \in f^{-1}(W')$ und sei $x \in K$. Aus der Definition, gilt $f(v) \in W'$ und $f(v') \in W'$. Dann gilt $f(v + v') = f(v) + f(v') \in W'$. Es gilt auch $f(xv) = xf(v) \in W'$. ∎

4 Linear Unabhängigkeit

4.1 Linearkombinationen

Definition 4.1.1 Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \cdots, v_m \in V$. Dann ist $v \in V$ eine **Linearekombination von** $v_1 \cdots, v_m$ falls es Skalar $x_1, \cdots, x_m \in K$ gibt mit

$$v = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i = x_1 v_1 + \cdots x_m v_m.$$

Beispiel 4.1.2 1. Der Nullvektor ist eine Linearekombination von alle Vektoren $v_1, \cdots, v_m \in V$: es gibt Skalar: $x_1 = \cdots x_m = 0$ so dass $0_V = \sum_i 0 \cdot v_i = \sum_i x_i v_i$.

2. Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Q}^2$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und sei

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $v = 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$ und v ist eine Linearekombination von v_1, v_2, v_3. Man kann hier schon bemerken, dass Linearekombinationen nicht immer eindeutig sind.

Definition 4.1.3 Sei V ein K-Vektorraum. Die **lineare Hülle** einer Teilmenge M von V ist definiert als:

$$\langle M \rangle := \{v \in V \mid v \text{ ist eine Linearekombination von Vektoren in } M\}.$$

(Wir setzen $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$). Wir schreiben $\langle v_1, \cdots, v_m \rangle$ für $\langle \{v_1, \cdots, v_m\} \rangle$.

Lemma 4.1.4 Die lineare Hülle $\langle M \rangle$ ist ein Unterraum. □

Beweis. Der Nullvektor ist immer eine Linearekombination also $0_V \in \langle M \rangle$. Seien $v, w \in \langle M \rangle$. Dann gibt es Elemente $v_1, \cdots, v_m \in M$ und Elements $w_1, \cdot, w_l \in M$ und Skalare $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_l \in K$ so dass:

$$v = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i \text{ und } w = \sum_{j=1}^{l} y_j w_j.$$

Dann gilt

$$v + w = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i + \sum_{j=1}^{l} y_j w_j$$

i.e. $v + w \in \langle M \rangle$. Für $x \in K$ gilt auch

$$xv = x \sum_{i=1}^{m} x_i v_i = \sum_{i=1}^{m} (x x_i) v_i$$

i.e. $xv \in \langle M \rangle$. ∎

Definition 4.1.5 Sei U ein Unterraum von V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge M von U **erzeugt** U falls $\langle M \rangle = U$. In diesem fall heißt M ein **Erzeugendensystem (EZS)** von U.

Definition 4.1.6 Ein Vektorraum V ist **endlich erzeugt**, falls $V = \langle M \rangle$ mit M einer endlichen Teilmenge von V.

Beispiel 4.1.7 1. $\{0\} = \langle \emptyset \rangle$ *i.e.* $\emptyset$ ist ein EZS von $V = \{0\}$.

2. Es gilt $K^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$ *i.e.* $\{v_1, v_2\}$ ist ein EZS von K^2 wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $v \in K^2$, dann ist $\{v_1, v_2, v\}$ ein EZS von K^2.

3. Seien $1, \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Dann ist $(1, \sqrt{2})$ ein EZS von $\mathbb{Q}\sqrt{2})$ über $\mathbb{Q}$.

Lemma 4.1.8 Sei I eine unendliche Menge, dann ist $K^{(I)}$ nicht endlich erzeugt. □

Beweis. Per Definitionem gilt

$$K^{(I)} = \{f : I \to K \mid f(i) \neq 0 \text{ nur für endliche viele } i \in I\}.$$

Nemmen wir an, dass es Elemente $f_1, \cdots, f_n \in K^{(I)}$ gibt so dass $K^{(I)} = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$. Sei

$$J = \{j \in I \mid f_i(j) \neq 0 \text{ für ein } i \text{ mit } 1 \leq i \leq n\}.$$

Dann ist J endlich. Da I unendlich ist gibt es ein Element $k \in I \setminus J$. Sei $f : I \to K$ definiert durch

$$f(i) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Es gilt $f \in K^{(I)}$ aber $f \notin \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$. ∎

4.2 Linear Unabhängigkeit

Definition 4.2.1 1. Ein n-Tupel $(v_1, \cdots, v_n)$ von Vektoren in V heißt ein **Vektorsystem**.

2. Ein Vektorsystem $(v_1, \cdots, v_n)$ heißt **linear abhängig**, fall es Skalare $x_1, \cdots, x_n \in K$ gibt, welche nicht alle gleich 0 sind (*i.e.* $(x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0)$), mit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0.$$

Andernfalls heißt $(v_1, \cdots, v_n)$ **linear unabhängig**.

Definition 4.2.2 Eine Teilmenge $M \subset V$ heißt **linear unabhängig**, falls alle Vektorsysteme $(v_1, \cdots, v_n)$ mit $v_1, \cdots, v_n \in M$ linear unabhängig sind. Andernfalls, heißt M **linear abhängig**.

Die leere Menge ist immer linear unabhängig.

Beispiel 4.2.3 1. Sei $v \in V$, dann ist $\{v\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$.

2. Sei $v \in V$, dann ist (v, v) linear abhängig.

3. Seien $v_1, v_2 \in V$, dann ist (v_1, v_2) linear abhängig genau dan wenn es $x_1, x_2 \in K$ gibt, die nicht beide gleich nul sind, mit $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$.

Gilt $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) linear abhängig genau dann wenn $Kv_1 = Kv_2$ wobei $Kv_i = \{xv_i \mid x \in K\}$.

4. 2. Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Q}^2$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig, weil $1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 0$.

5. $(1, \sqrt{2})$ ist in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ linear unabhängig (als $\mathbb{Q}$-Vektorraum): seien $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x \cdot 1 + y\sqrt{2} = 0$. Fall $y \neq 0$ gilt $\sqrt{2} = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ ein Wiederspruch also gilt $y = 0$ und dann $x = 0$.

Lemma 4.2.4 Sei $(v_1, \cdots, v_n)$ ein linear unabhängiges System, dann ist ein Untersystem $(v_{i_1}, \cdots, v_{i_k})$ von $(v_1, \cdots, v_n)$ auch linear unabhängig. □

Beweis. Seien Skalare $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ so dass

$$x_{i_1} v_{i_1} + \cdots + x_{i_k} v_{i_k} = \sum_{j=1}^{k} x_{i_j} v_{i_j} = 0.$$

Dann setzen wir $x_i = 0$ für $i \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i_1, \cdots, i_k\}$. Es gilt

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = 0.$$

Als $(v_1, \cdots, v_n)$ linear unabhängig ist gilt $x_1 = \cdots = x_n$ so dass $x_{i_1} = \cdots = x_{i_k} = 0$ und $(v_{i_1}, \cdots, v_{i_k})$ ist linear unabhängig. ∎

Lemma 4.2.5 Sei V ein Vektorraum.

1. Sei $(v_1, \cdots, v_m, v)$ ein linear abhängiges Vektorsystem. Ist $(v_1, \cdots, v_m)$ linear unabhängig, dann gilt $v \in \langle v_1, \cdots, v_m \rangle$.

2. Sei $M \cup \{v\}$ linear abhängiges wobei $M \subset V$ aund $v \in V$. Ist M linear unabhängig, dann gilt $v \in \langle M \rangle$. □

Beweis. 1. Es gibt Skalare $(x_1, \cdots, x_m, x)$, nicht alle gleich 0, so dass

$$x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m + xv = 0.$$

Falls $x = 0$ dann gilt $x_1 v_1 + \cdots x_m v_m = 0$ mit $x_1, \cdots, x_m$ nicht alle gleich 0 *i.e.* $(v_1, \cdots, v_m)$ ist linear abhängig. Ein Wiederspruch. Also ist $x \neq 0$ und wir haben

$$x = \frac{x_1}{x} v_1 + \cdots + \frac{x_m}{x} v_m \in \langle v_1, \cdots, v_m \rangle.$$

2. Es gibt Elemente $v_1, \cdots, v_m \in M$, so dass $(v_1, \cdots, v_m, v)$ ein linear abhängiges Vektorsystem ist. Aber als M linear unabhängig ist, ist $(v_1, \cdots, v_m)$ linear unabhängig, dann gilt aus 1, dass $w \in \langle v_1, \cdots, v_m \rangle \subset \langle M \rangle$. ∎

Korollar 4.2.6 Sei $M \subset V$ linear unabhängig und sei $v \in V$ mit $v \notin \langle M \rangle$, dann ist $M \cup \{v\}$ linear unabhängig.

Lemma 4.2.7 Sei V ein Vektorraum so dass V nicht endlich erzeugt ist.

Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein n-elementige Teilmenge M_n von V mit M_n linear unabhängig und $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$. □

Beweis. Wir konstruiren M_n per Induktion. Sei $M_0 = \emptyset$, die leere Menge ist linear unabhängig. Sei M_n schon definiert. Da V nicht endlich erzeugt ist gilt $\langle M_n \rangle \neq V$. Sei $v \in V \setminus \langle M_n \rangle$. Dann ist $M_{n+1} = M_n \cup \{v\}$ linear unabhängig (siehe Korollar oben) und hat $n + 1$ Elemente. ∎

Satz 4.2.8 Seien $v_1, \cdots, v_m \in V$. Dann ist äquivalent

1. Die Vektoren sind linear unabhängig.

2. Ist $v = x_1 v_1 + \cdots x_m v_m$ eine Darstellung eines Elementes $v \in \langle v_1, \cdots, v_m \rangle$ mit Koeffizienten $x_1, \cdots, x_m \in K$, so sind diese eindeutig durch v bestimmt. □

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.) Seien $v = x_1 v_1 + \cdots x_m v_m$ und $v = x_1' v_1 + \cdots x_m' v_m$ zwei Darstellungen. Dann gilt $(x_1 - x_1')v_1 + \cdots + (x_m - x_m')v_m = 0$ und weil $(v_1, \cdots, v_m)$ linear unabhängig ist gilt $x_1 = x_1', \cdots, x_m = x_m'$. Die zwei Darstellungen sind gleich.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Seien $x_1, \cdots, x_m \in K$ mit $x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m = 0$. Dann gibt es auxch eine weitere Darstellung $0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_m = 0$ von $0 \in V$. Diese zwei Darstellungen sind gleich *i.e.* $x_1 = 0, \cdots, x_m = 0$. ■

5 Basen und Dimension

5.1 Definition und Beispiele

Definition 5.1.1 Sei V ein K-Vektorraum

1. Ein System $(v_1, \cdots, v_n)$ von Vektoren, heißt eine **(endliche) Basis** wenn

   - $(v_1, \cdots, v_n)$ ein EZS ist und
   - $(v_1, \cdots, v_n)$ linear unabhängig sind.

2. Ein System $(v_i)_{i \in I}$ (gegebenfalls I unendlich) von Vektoren, heißt eine **Basis** wenn

   - $(v_i)_{i \in I}$ ein EZS ist und
   - $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig sind.

Beispiel 5.1.2 1. Die leere Menge $\emptyset$ ist die einzige basis von $V = 0$.

2. Sei $V = K^n$. Für $i \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq i \leq n$, sei $e_i \in V$ definiert als

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

wo die Eins auf die i-te Zeile ist. Dann ist $(e_1, \cdots, e_n)$ eine Basis von V. Diese Basis heißt **Standardbasis von** K^n.

3. Sei $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dann ist V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $(1, \sqrt{2})$ ist eine Basis von V.

Satz 5.1.3 Ein System $(v_1, \cdots, v_n)$ von Vektoren, ist eine Basis genau dann, wenn für alle Vektoren $v \in V$ es genau eine Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

gibt, wobei x_i in K für alle i ist. □

Beweis. Alle Vektoren $v \in V$ haben eine Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

genau dann, wenn $(v_1, \cdots, v_n)$ ein EZS ist. Nach Satz 4.2.8 ist die Darstelung eindeutig genau dann, wenn $(v_1, \cdots, v_n)$ linear unabhängig sind. ∎

5.2 Basen und Abbildungen

Satz 5.2.1 Sei $(v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gilt $V \simeq K^n$. □

Beweis. Sei $f : K^n \to V$ definiert als

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Wir zeigen, dass f ein Isomorphismus ist. Zuerst zeigen wir, dass f linear ist. Es gilt

$$f\left(x\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} xx_1 + yy_1 \\ \vdots \\ xx_n + yy_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(xx_i v_i + yy_i v_i)$$

$$= x\sum_{i=1}^{n} x_i v_i + y\sum_{i=1}^{n} y_i v_i = xf\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + yf\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 3.2.3 ist dann f linear. Sei $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{Ker}(f)$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0$$

und als $(v_1, \cdots, v_n)$ linear unabhängig sind gilt $(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0) = 0_{K^n}$. Also f ist injektiv. Das Bild von f ist $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ und weil $(v_1, \cdots, v_n)$ ein EZS ist, ist f surjektiv. ∎

Korollar 5.2.2 Sei V ein Vektorraum und sei $(v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis.

1. Seien $f : V \to W$ und $g : V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Es gilt $f = g$ genau dann, wenn $f(v_i) = g(v_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$.

2. Seien $w_1, \cdots, w_n$ Vektoren in ein Vektorraum W, es gibt genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Beweis. 1. Falls $f = g$, dann gilt $f(v_i) = g(v_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$. Umgekehrt, Falls $f(v_i) = g(v_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$, sei $v \in V$, dann gibt es Elemente $x_1, \cdots, x_n \in K$ mit $v = x_1v_1 + \cdots x_nv_n$ und es gilt

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(v_i) = g(v).$$

2. Eindeutigkeit folgt von 1. Sei $v \in V$, dann gibt es eindeutig bestimmte Elemente $x_1, \cdots, x_n \in K$ mit $v = x_1v_1 + \cdots x_nv_n$ und wir definieren

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \in W.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass f linear ist. ∎

Satz 5.2.3 Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $(v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis von V.

1. f ist injektiv genau dann, ween $(f(v_1), \cdots, f(v_n))$ linear unabhängig ist.
2. f ist surjektiv genau dann, ween $(f(v_1), \cdots, f(v_n))$ ein EZS ist.
3. f ist bijektiv genau dann, ween $(f(v_1), \cdots, f(v_n))$ eine Basis ist. □

Beweis. Siehe Übunsblatt 6. ∎

5.3 Existenz

Satz 5.3.1 Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis und jede solche Basis ist endlich. □

Beweis. Sei $(v_1, \cdots, v_n)$ ein EZS von V mit n minimal *i.e.* es gibt kein EZS mit weniger als n Elemente. Falls $(v_1, \cdots, v_n)$ linear unabhängig ist, ist $(v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis. Andernfalls gibt es ein $k < n$ so dass $(v_1, \cdots, v_k)$ linear unabhängig ist und $(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1})$ linear abhängig ist. Nach Lemma 4.2.5.1. gilt $v_{k+1} \in \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$. Also ist $(v_1, \cdots, \widehat{v_k}, \cdots, v_n) = (v_1, \cdots, v_k, v_{k+2}, \cdots, v_n)$ ein EZS. Ein Widersprch als n minimal war. ∎

Satz 5.3.2 Sei V ein Vektorraum und $(v_1, \cdots, v_n)$ ein System von Vektoren aus V. Dann ist äquivalent:

1. $(v_1, \cdots, v_n)$ bild eine Basis,
2. $(v_1, \cdots, v_n)$ ist ein maximales linear unabhägiges System,
3. $(v_1, \cdots, v_n)$ ist ein minimales EZS. □

Beweis. $(1 \Rightarrow 2)$ Angenommen $(v_1, \cdots, v_n)$ sei eine Basis, dann ist $(v_1, \cdots, v_n)$ linear unabhängig. Wenn $(v_1, \cdots, v_n)$ nicht maximal wäre, dann würde es ein Vektor $v \in V$ geben, so dass $(v_1, \cdots, v_n, v)$ linear unabhängig ist. Aber als $(v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis ist gilt $v \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ *i.e.* es gibt Skalare $(x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \text{ das heißt } -v + \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0$$

und $(v_1, \cdots, v_n, v)$ ist linear abhängig, ein Widerspruch.

$(2 \Rightarrow 1)$ Angenommen $(v_1, \cdots, v_n)$ sei maximales linear unabhägiges System und sei $v \in V$. Dann ist $(v_1, \cdots, v_n, v)$ linear abhängig und aus Lemma 4.2.5.1. gilt $v \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$. Also ist $(v_1, \cdots, v_n)$ ein EZS und eine basis.

$(1 \Rightarrow 3)$ Angenommen $(v_1, \cdots, v_n)$ sei eine Basis, dann ist $(v_1, \cdots, v_n)$ ein EZS. Wenn $(v_1, \cdots, v_n)$ nicht minimal wäre, dann würde es ein Vektor v_k geben, so dass $(v_1, \cdots, \widehat{v_k}, \cdots, v_n)$ ein EZS ist. Dann gilt $v_k \in \langle v_1, \cdots, \widehat{v_k}, \cdots, v_n \rangle$ *i.e.* es gibt Skalare $(x_1, \cdots \widehat{x_k}, \cdots, x_n) \in K^{n-1}$ mit

$$v_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} x_i v_i \text{ das heißt } -v_k + \sum_{i=1, i \neq k}^{n} x_i v_i = 0$$

und $(v_1, \cdots, v_n)$ ist linear abhängig, ein Widerspruch.

$(3 \Rightarrow 1)$ Angenommen $(v_1, \cdots, v_n)$ sei ein minimales EZS. Falls $(v_1, \cdots, v_n)$ linear abhängig ist, dann gibt es gibt Skalare $(x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ nicht alle nul mit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0.$$

Sei k mit $x_k \neq 0$, dann gilt

$$v_k = -\sum_{i=1, i \neq k}^{n} \frac{x_i}{x_k} v_i,$$

also gilt $v_k \in \langle v_1, \cdots, \widehat{v_k}, \cdots, v_n \rangle$ und $\langle v_1, \cdots, \widehat{v_k}, \cdots, v_n \rangle = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ ein Widerspruch als $(v_1, \cdots, v_n)$ ein minimales EZS war. ∎

Satz 5.3.3 (Basisergänzungssatz) Sei $(v_1, \cdots, v_r)$ ein linear unabhängiges system und sei $(w_1, \cdots, w_m)$ ein EZS. Dann lässt sich $(v_1, \cdots, v_r)$ durch Elemente in $(w_1, \cdots, w_m)$ zu einer Basis ergänzen, *i.e.* es gibt paarweise verschidene Indizes $i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, m\}$ so dass

$$(v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$$

eine Basis bildet. □

Beweis. Sei $(w_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$ minimal so dass $(v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$ ein EZS ist. Wir zeigen, dass $(v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$ linear unabhängig ist. Wenn nicht, würde das System $(v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$ linear abhängig sein. Dann würde es Skalare, die nicht alle nul sind, $(x_1, \cdots, x_r, y_{i_1}, \cdots, y_{i_k})$ geben mit

$$\sum_{j=1}^{r} x_j v_j + \sum_{j=1}^{k} y_{i_j} w_{i_j} = 0.$$

Da $(v_1, \cdots, v_n)$ linear unabhängig ist gibt es ein j_0 mit $y_{i_{j_0}} \neq 0$. Es gilt

$$w_{j_0} = -\sum_{j=1}^{r} x_j v_j - \sum_{j=1, j\neq j_0}^{k} y_{i_j} w_{i_j}$$

also $w_{j_0} \in \langle v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, \widehat{w}_{j_0}, \cdots, w_{i_k}\rangle$ und $\langle v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, \widehat{w}_{j_0}, \cdots, w_{i_k}\rangle$ ist ein EZS. Ein Widerspruch weil $(w_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$ minimal war, so dass das System $(v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$ ein EZS ist. ∎

Theorem 5.3.1 Sei $(v_1, \cdots, v_r)$ eine linear unabhängiges system, sei $(w_1, \cdots, w_m)$ ein EZS und sei $(e_1, \cdots, e_n)$ eine Basis. Dann gilt $r \leq n \leq m$. □

Beweis. Das System $(e_2, \cdots, e_n)$ ist linear unabhängig und kann, dank Basisergänzungssatz, mit Elemente $(w_{i_1}, \cdots, w_{i_{k_1}})$ aus dem EZS $(w_1, \cdots, w_m)$ in eine Basis $(w_{i_1}, \cdots, w_{i_{k_1}}, e_2, \cdots, e_n)$ ergänz werden. Da $e_1 \notin \langle e_2, \cdots, e_n\rangle$ ist $k_1 \geq 1$.

Dann ist $(w_{i_1}, \cdots, w_{i_{k_1}}, e_3, \cdots, e_n)$ auch linear unabhängig und kann, dank Basisergänzungssatz, mit Elemente $(w_{i_{k_1+1}}, \cdots, w_{i_{k_1+k_2}})$ aus $(w_1, \cdots, w_m)$ in eine Basis $(w_{i_1}, \cdots, w_{i_{k_1}}, w_{i_{k_1}+1}, \cdots w_{i_{k_1+k_2}}, e_3, \cdots, e_n)$ ergänz werden mit $k_2 \geq 1$. Wenn wir alle Elemente e_i ersetzen haben wir eine Basis

$$(w_{i_1}, \cdots, w_{i_{k_1}}, w_{i_{k_1}+1}, \cdots w_{i_{k_1+k_2}}, \cdots, w_{i_{k_1+\cdots+k_{n-1}+1}}, \cdots, w_{i_{k_1+\cdots+k_n}}).$$

Es gibt also $k_1 + \cdots + k_n \leq m$ und als $k_i \geq 1$ für alle i gilt $n \leq m$.

Dank Basisergänzungssatz gibt es Elemente $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ aus dem EZS $(e_1, \cdots, e_n)$ so dass $(v_1, \cdots, v_r, e_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$ eine Basis ist. Dann ist $(v_1, \cdots, v_r, e_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$ eine Basis und $(e_1, \cdots, e_n)$ ein EZS, so dass $r + k \leq n$ also $r \leq n$. ∎

Korollar 5.3.4 Sei V ein endlich erzeugten Verktorraum. Jede zwei Basen bestehen aus gleichviel Elementen.

Beweis. Seien $(v_1, \cdots, v_n)$ und $(e_1, \cdots, e_m)$ zwei basen. Dann sind beide Systeme auch EZS und linear unabhängig. Es gilt also $n \leq m$ und $m \leq n$ aus Theorem 5.3.1. ∎

5.4 Dimension

Definition 5.4.1 Sei V ein endlich erzeugten Vektorraum. Die Anzahl von Elementen in jeder Basis heißt **die Dimension** von V und ist $\dim V$ oder $\dim_K V$ bezeichnet.

Wenn V nicht endlicht erzeugt ist, sagt man das V **unendlich dimensional** ist und schreibt man $\dim_K V = \infty$.

Korollar 5.4.2 Sei V ein Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist äquivalent:

1. $\dim V = n$,
2. ein existiert ein linear unabhängiges System von n Vektoren und alle Systeme von mehr als $n+1$ Vektoren sind linear abhängig.

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.) Es gibt eine Basis $(e_1, \cdots, e_n)$ mit n Elemente, insbesondere gibt es ein linear unabhängiges Systen $(e_1, \cdots, e_n)$ von n Vektoren. Sei $(v_1, \cdots, v_r)$ ein linear unabhängiges System, dann gilt aus Theorem 5.3.1 $r \leq n$. Also sind alle Systeme von mehr als $n+1$ Vektoren linear abhängig.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Es gibt in V ein maximales unabhängiges System von n Vektoren. Also eine Basis mit n Vektoren, und es folgt $\dim V = n$. ∎

Korollar 5.4.3 Sei V ein Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist äquivalent:

1. $\dim V \geq n$,
2. es existiert ein linear unabhängiges System von n Vektoren.

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.) Falls $\dim V \neq \infty$, dann gibt es eine Basis mit $\dim V$ Elemente und diese Basis ist ein linear unabhängiges System. Ein Untersystem mit n Elemente ist auch linear unabhängig nach Lemma 4.2.4.

Falls $\dim V = \infty$, dann gilt nach Lemma 4.2.7, dass es ein linear unabhängiges System mit n Elemente gibt.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Falls $\dim V = \infty$ dann gilt $\dim V \geq n$. Andernfalls, gibt es eine Basis mit $\dim V$ Elemente. Nach Theorem 5.3.1 gilt $n \leq \dim V$. ∎

Korollar 5.4.4 Sei V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$.

1. Ein unabhängiges System mit $\dim V$ Elemente ist eine Basis.

2. Ein EZS mit $\dim V$ Elemente ist eine Basis.

Beweis. Wir setzen $n = \dim V$ und betrachten eine Basis $(e_1, \cdots, e_n)$.

1. Sei $(v_1, \cdots, v_n)$ ein unabhängiges System, dann können wir $(v_1, \cdots, v_n)$ mit $(e_1, \cdots, e_n)$ ergänzen, um eine Basis zu bilden. Aber Basen haben n Elemente *i.e.* $(v_1, \cdots, v_n)$ war schon eine Basis.

2. Das leere System ist ein unabhängiges System und kann mit $(v_1, \cdots, v_n)$ ergänzen werden, um eine Basis zu bilden. Diese Basis hat genau n Elemente *i.e.* die Ergänzung war $(v_1, \cdots, v_n)$ und $(v_1, \cdots, v_n)$ ist eine Basis. ∎

Korollar 5.4.5 Sei U ein Unterraum in V, dann gilt $\dim U \leq \dim V$. Gleichheit gilt genau dann, ween $U = V$.

Beweis. Falls $\dim V = \infty$ sind wir schon fertig. Andernfalls, gibt eine Basis mit $\dim V$ Elemente in V. Sei $(v_1, \cdots, v_r)$ ein unabhängiges System in U. Dann ist $(v_1, \cdots, v_r)$ auch ein unabhängiges System in V. Nach Theorem 5.3.1 gilt $r \leq \dim V$. Es gilt also ein maximales unabhängige System in U *i.e.* eine Basis in U. Diese basis bestht aus $\dim U$ Elemente und ist linear unabhängig. Dann gilt $\dim U \leq \dim V$.

Wenn $U = V$ dann gilt Gleichheit. Angenommen $\dim U = \dim V$, gibt es eine Basis $(v_1, \cdots, v_n)$ von U mit n Elemente. Diese Basis ist dann ein unabhängiges System von V mit n Elemente, also eine Basis nach Korolar 5.4.4. Es gilt $U = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle = V$. ∎

5.5 Basen in Unendlich dimensionale Vektorräume

Wir werden den folgende Satz nicht bweisen:

Satz 5.5.1 Alle Vektorräume (auch unendlich dimensional) besitzen eine Basis. □

Bemerkung 5.5.2 Dieser Satz ist äquivalent zum Ausswahlaxiom 1.3.1.

6 Direkte Summe

6.1 Definition und Beispiele

Definition 6.1.1 Sei V ein Vektorraum.

1. Seien U und W zwei Unterräume in V. Die **Summe von U und W** ist die Teilmenge

$$U + W = \{v \in V \mid v = u + w \text{ mit } u \in U \text{ und } w \in W\}.$$

1. Seien $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräume in V. Die **Summe von $(U_i)_{i \in I}$** ist die Teilmenge

$$\sum_{i \in I} U_i = \left\{ v \in V \mid v = \sum_{i \in I} u_i \text{ mit } u_i \in U_i \text{ und } u_i \neq 0 \text{ für nur endliche viele } i \in I \right\}.$$

Beispiel 6.1.2 1. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und seien

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $U = \langle e_1 \rangle$ und $W = \langle e_2 \rangle$. Dann sind $v_1, v_2 \in U + W$ aber $v_3 \notin U + W$.

2. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und seien e_1, e_2, v_1, v_2, v_3 wie oben. Sei $U = \langle e_1, e_2 \rangle$ und $W = \langle v_1 \rangle$ dann gilt $U + W = U$.

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und seien e_1, e_2, v_1, v_2, v_3 wie oben. Sei $U = \langle e_1, e_2 \rangle$ und $W = \langle v_3 \rangle$ dann gilt $U + W = V = \mathbb{R}^3$.

Lemma 6.1.3 Die Summe von Unterräume ist ein Unterraum. □

Beweis. Übung. ■

6.2 Karacterisierung

Lemma 6.2.1 Seien U und W zwei Unterräume von V. Die folgenden Aussagen sing äquivalet:

1. Die Unterräume U und W sind in directe Summe.
2. Für alle $v \in U + W$ gibt es genau eine Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.
3. Aus der Gleichung $u + w = 0$ mit $u \in U$ und $w \in W$, folgt $u = 0 = w$.

In diesem Fall schreibt man $U + W = U \oplus W$. □

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.) Angenommen U und W sind in direkte Summe *i.e.* $U \cap W = 0$. Seien $u + w = v = u' + w'$ zwei Darstllungen von v mit $u, u' \in U$ und $w, w' \in W$. Dann gilt $u - u' = w' - w$ und dieser Vektor ist in U und in W enthalten also ist gleich der Nulvektor. Daraus folgt $u = u'$ und $w = w'$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Nehmen wir an dass es für alle $v \in U + W$ genau eine Darstellung $v = u + w$ gibt mit $u \in U$ und $w \in W$. Seien $u \in U$ und $w \in WW$ mit $u + w = 0$. Es gibt eine zweite Darstellung von 0 und zwar für $u' = 0$ und $w' = 0$ gilt $u + w = 0 = u' + w'$. Als es nur eine solche Darstellung gibt, haben wir $u = u'$ und $w = w'$ also $u = 0$ und $w = 0$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Nehmen wir an dass für alle $u + w = 0$ mit $u \in U$ und $w \in W$ gilt $u = w = 0$. Sei $v \in U \cap W$ und seien $u = v \in U$ und $w = -v \in W$. Dann gilt $u + w = 0$. Daraus folgt $u = w = 0$ und $v = 0$. ■

Beispiel 6.2.2 Im Beispiel 6.1.2 sind U und W in direkte Summe in den Fallen 1 und 3.

Definition 6.2.3 Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräume von V. Die Unterräume sind in **direkte Summe**, wenn es für alle $v \in \sum_{i \in I} U_i$ genau eine Darstellung

$$v = \sum_{i \in I} u_i$$

mit $u_i \in U_i$ gibt. In diesem Fall schreibt man

$$\sum_{i \in I} U_i = \bigoplus_{i \in I} U_i.$$

Satz 6.2.4 Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräume von V. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Unterräume $(U_i)_{i \in I}$ sind in direkte Summe.

2. Aus der gleichung $\sum_{i\in I} u_i = 0$ mit $u_i \in U_i$ für alle $i \in I$, folgt $u_i = 0$ für alle $i \in I$.
3. Für alle $j \in I$ gilt $U_j \cap \sum_{i\in I,\ i\neq j} U_i = 0$. □

Beweis. (1. ⇒ 2.) Seien Elemente $u_i \in U_i$ für alle $i \in I$ mit $\sum_{i\in I} u_i = 0$. Wir setzen $i'_i = 0 \in U_i$ fur alle $i \in I$. Dann sind $\sum_{i\in I} u_i = 0$ und $\sum_{i\in I} u'_i = 0$ zwei Darstellungen von 0 und als die Unterräume $(U_i)_{i\in I}$ in direkte Summe sind gilt $u_i = u'_i = 0$ für alle $i \in I$.

(2. ⇒ 3.) Sei $v \in U_j \cap \sum_{i\in I,\ i\neq j} U_i$. Es gibt also Elemente $u_i \in U_i$ für alle $i \neq j$ mit $\sum_{\in I,\ i\neq j} u_i = v$. Sei $u_j = -v \in U_j$, dann gilt

$$\sum_{i\in I} u_i = 0.$$

Daraus folgt, dass $u_i = 0$ für alle $i \in I$ insbesondere $v = -u_j = 0$.

(3. ⇒ 1.) Seien $u_i, u'_i \in U_i$ für alle $i \in I$ mit

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u'_i.$$

Sei $j \in I$, es gilt

$$u_j - u'_j = \sum_{i\in I,\ i\neq j} u'_i - \sum_{i\in I,\ i\neq j} u_i.$$

Dieser Vektor liegt in $U_j \cap \sum_{i\in I,\ i\neq j} U_i = 0$. Also $u_j - u'_j = 0$ und $u_j = u'_j$. Dies ist für alle $j \in J$ wahr also gilt $u_i = u'_i$ für alle $i \in I$. ■

Satz 6.2.5 Seien U und W zwei Unterräume, dann sind äquivalent:

1. U und W sind in direkte Summe,
2. $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$. □

Beweis. (1. ⇒ 2.) Seien $(u_1, \cdots, u_m)$ eine Basis von U und $(w_1, \cdots, w_r)$ eine Basis von W. Es gilt also $m = \dim U$ und $r = \dim W$. Dann ist die Familie $(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_r)$ ein EZS System von $U \oplus W$. Wir zeigen, dass es eine Basis ist *i.e.* das dieses System linear unabhängig ist. Seien $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_r$ Skalare mit

$$x_1u_1 + \cdots x_mu_m + y_1w_1 + \cdots y_rw_r = 0.$$

Als die Summe direkte ist gilt $i \in I$:

$$x_1u_1 + \cdots x_mu_m = 0 \text{ und } y_1w_1 + \cdots y_rw_r = 0.$$

Aber beide Systeme $(u_1, \cdots, u_m)$ und $(w_1, \cdots, w_r)$ $(v_1^i, \cdots, v_{n_i}^i)$ sind Basen von U und W also linear unabhängig und es gilt für alle: $x_i = 0y_j$ für alle $i \in [1, m]$ und $j \in [1, r]$. Die Familie $(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_r)$ ist also eine Basis. Daraus folgt die Dimensionsformel.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Seien $(u_1, \cdots, u_m)$ eine Basis von U und $(w_1, \cdots, w_r)$ eine Basis von W. Es gilt also $m = \dim U$ und $r = \dim W$ und $m + r = \dim(U + W)$. Die Familie $(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_r)$ ist ein EZS System von $U + W$ mit $\dim(U + W)$ Elemente. Es ist also eine Basis.

Sei $u \in U$ und $w \in W$ mit $u + w = 0$. Es gibt Skalare Seien $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_r$ Skalare mit

$$u = x_1u_1 + \cdots x_mu_m \text{ und } w = y_1w_1 + \cdots y_rw_r.$$

Es gilt also

$$x_1u_1 + \cdots x_mu_m + y_1w_1 + \cdots y_rw_r = 0.$$

Aber $(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_r)$ ist eine Basis, also gilt es $x_1 = \cdots = x_m = y_1 \cdots = y_r = 0$ *i.e.* $u = 0$ und $w = 0$. Die Summe ist direkte. ∎

6.3 Komplement

Definition 6.3.1 Sei U ein Unterraum von V. Ein Unterraum W von V heißt **ein Komplement von U in V**, wenn $V = U \oplus W$.

Beispiel 6.3.2 1. V ist ein Komplement von 0 in V und $=$ ist eine Komplement von V in V.

2. Seien U und W mit $U \oplus W = V$, dann ist W ein Komplement von U und U ein Komplement von W.

3. Sei $V = K^2$ und seien $v_1, v_2, v_2 \in V$ wie folgt:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

sei $U = \langle e_1 \rangle$ dann sind $W_2 = \langle v_2 \rangle$ und $W_3 = \langle v_3 \rangle$ zwei Komplemente von U in V.

Lemma 6.3.3 Sei U ein Unterraum von V, dann exisiert ein Komplement W von U in V. □

Beweis. Seien $(u_1, \cdots, u_m)$ eine Basis von U und $(v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis von V. Das System $(u_1, \cdots, u_m)$ ist linear unabhängig und $(v_1, \cdots, v_n)$ ist ein EZS. Wir können $(u_1, \cdots, u_m)$ mit Elemente von $(v_1, \cdots, v_n)$ ergänzen so dass $(u_1, \cdots, u_m, v_{i_1}, \cdots, v_{i_k})$ eine Basis ist. Sei $W = \langle v_{i_1}, \cdots, v_{i_k} \rangle$.

Es gilt $V = U+W$, wir zeigen, dass die Summe direkte ist so dass W ein Komplement von U in V ist. Seien $u \in U$ und $w \in W$ mit $u + w = 0$. Es gibt Skalare Seien $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_k$ Skalare mit

$$u = x_1u_1 + \cdots x_mu_m \text{ und } w = y_1v_{i_1} + \cdots y_kw_{i_k}.$$

Es gilt also

$$x_1u_1 + \cdots x_mu_m + y_1v_{i_1} + \cdots y_kw_{i_k} = 0.$$

Aber $(u_1, \cdots, u_m, v_{i_1}, \cdots, w_{i_k})$ ist eine Basis, also gilt es $x_1 = \cdots = x_m = y_1 \cdots = y_{i_k} = 0$ *i.e.* $u = 0$ und $w = 0$. Die Summe ist direkte. ∎

Satz 6.3.4 (Dimensionsformel) Seien U und W Unterräume, dann gilt

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

Beweis. Sei R ein Komplement von $U \cap V$ in $U+W$ und seien U' und W' Komplemente von $U \cap W$ in U und in W. Es gilt

$$U + W = R \oplus (U \cap W),\ U = (U \cap W) \oplus U' \text{ und } W = (U \cap W) \oplus W'.$$

Es gilt also $\dim(U + W) = \dim R + \dim(U \cap W)$, $\dim U = \dim U' + \dim(U \cap W)$ und $\dim W = \dim W' + \dim(U \cap W)$. Daraus folgt $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) - (\dim U + \dim W) = \dim R - (\dim U' + \dim W')$.

Lemma 6.3.5 Es gilt: $U' + W' = U' \oplus W'$ und $U' \oplus W'$ ist ein Komplement von $U \cap W$ in $U + W$. □

Beweis. Sei $v \in U' \cap W'$, dann gilt $v \in U \cap W$ und $v \in U'$. Aber $U' \cap (U \cap W) = 0$ also $v = 0$. Die Summe $U' + W'$ ist eine direkte Summe.

Sei $v \in U + W$, es gibt also $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$. Als $U = U' \oplus (U \cap W)$ und $W = W' \oplus (U \cap W)$ gibt es $u' \in U'$, $v' \in U \cap W$ mit $u = u' + v'$ und $w' \in w'$, $v'' \in U \cap W$ mit $w = w' + v''$. Es gilt also

$$v = u + w = u' + v' + w' + v'' = u' + w' + (v' + v''),$$

mit $u' \in U'$, $w' \in W'$ und $v' + v'' \in U \cap W$. Also $v \in (U' \oplus W') + (U \cap W)$. Sei $v \in (U' \oplus W') \cap (U \cap W)$. Es gibt $u' \in U'$ und $w' \in W'$ mit $v = u' + w' \in U \cap W$. Aber $u' \in U' \subset U$ und $v \in U$ so dass $w' = v - u' \in U$. Also gilt $w' \in W' \cap U \subset U \cap W$ und $w' \in W'$ so dass $w' = 0$. Die selbe beweis gibt $U' = 0$ und $V = 0$. ∎

Nach dem Lemma gilt $\dim U' + \dim W' = \dim(U' \oplus W') = \dim(U+W) - \dim(U \cap W) = \dim R$. Daraus folgt der Satz. ∎

6.4 Projektion

Definition 6.4.1 Seien U und W Unterräume von V so dass $V = U \oplus W$. **Die Projektion auf U parallel zu W** ist die Abbildung $p_{U,W} : V \to V$ definiert wie folgt. Sei $v \in V$. Es gibt genau eine Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Man definiert $p_{U,W}(v) = u$.

Lemma 6.4.2 Die Projektion $p_{U,W}$ ist eine lineare Abbildung. □

Beweis. Übung. ■

Satz 6.4.3 Sei $p_{U,W}$ die Projektion auf U parallel zu W.

1. Es gilt $p_{U,W}^2 = p_{U,W} \circ p_{U,W} = p_{U,W}$.

2. $\mathrm{Im} p_{U,W} = U$.

3. $\mathrm{Ker} p_{U,W} = W$. □

Beweis. 1. Sei $v \in V$ und sei $v = u+w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ die einzige Darstellung von v. Dann gilt $p_{U,W}(v) = u$. Aber $u = u + 0$ ist die einzige Darstellung von u als Element in $U \oplus W$, also gilt $p_{U,W}(u) = u$. Es folgt $p_{U,W}^2(v) 0 p_{U,W}(v)$ für alle $v \in V$.

2. Aus der Definition gilt $\mathrm{Im} p_{U,W} \subset U$. Sei $u \in U$, in der Beweis von 1. haben wir gezeigt: $u = p_{U,W}(u)$ also $u \in \mathrm{Im} p_{U,W}$.

3. Sei $w \in W$, dann ist $w = 0 + w$ die einzige Darstellung von w als Element in $U \oplus W$. Aus der Definition gilt also $p_{U,W}(w) = 0$ und $w \in \mathrm{Ker} p_{U,W}$. Sei $v \in \mathrm{Ker} p_{U,V}$ und sei $v = u + w$ die einzige Darstellung von v als Element von $U \oplus W$. Dann gilt $0 = p_{U,W}(v) = u$. Es gilt also $v = w \in W$. ■