

Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2013

Wilhelm Singhof

Teil I: Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

1. Normierte und metrische Räume: Definitionen und Beispiele

Def. Sei V ein (reeller) Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- (1) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$.
- (2) $\|v\| = 0 \iff v = 0$.
- (3) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ für $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *normierter Raum* ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$, wobei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V ist. Meist sagt man: "Sei V ein normierter Raum" statt "sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum".

Beispiel: Auf $V = \mathbb{R}^n$ erhält man Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ folgendermaßen: Ist $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so sei

$$\begin{aligned}\|v\|_1 &:= |x_1| + \dots + |x_n|, \\ \|v\|_\infty &:= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \\ \|v\|_2 &:= (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Um die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_2$, die sog. *Euklidische Norm*, nachzuweisen, braucht man:

Satz 1. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sind $v = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2.$$

Bem. Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq n \cdot \|v\|_\infty$.

Allgemeiner gilt: Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive reelle Zahlen a, A gibt mit

$$a \|v\| \leq |v| \leq A \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Def. Sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden vier Eigenschaften:

- (I) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.
- (II) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (III) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

(IV) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) , wobei X eine Menge und d eine Metrik auf X ist. Man sagt oft „ X ist metrischer Raum“ statt „ (X, d) ist metrischer Raum“.

Beispiel: Sei V ein normierter Raum. Definiere $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Dann ist V ein metrischer Raum.

Beispiel: Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$, so wird Y mit der Einschränkung von d auf $Y \times Y$ ein metrischer Raum.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann heißt die Menge

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

die *offene Kugel* und

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

die *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r .

2. Einige grundlegende topologische Begriffe

Def. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt A *offen in X* , wenn gilt: Ist $x \in A$, so existiert ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq A$.

Satz 1. Eine offene Kugel in einem metrischen Raum X ist offen in X .

Satz 2. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

- a) X und \emptyset sind offen in X .
- b) Ist I irgendeine Menge und sind die A_i mit $i \in I$ offen in X , so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen in X .
- c) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind A_1, \dots, A_n offen in X , so ist $A_1 \cap \dots \cap A_n$ offen in X .

Beispiel: $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ ist offen in \mathbb{R} . Aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ ist nicht offen in \mathbb{R} .

Def. Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt *Umgebung* von x in X , wenn es eine offene Teilmenge A von X gibt mit

$$x \in A \subseteq U.$$

Eigenschaften von Umgebungen:

- (1) Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:
 - (a) U ist Umgebung von x .
 - (b) Es gibt ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq U$.
- (2) Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.
- (3) Ist U Umgebung von x und $V \supseteq U$, so ist V Umgebung von x .
- (4) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von x ist eine Umgebung von x .

Beispiel: Betrachte \mathbb{R}^n mit den Normen $\| \cdot \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Diese drei Normen besitzen dieselben offenen Mengen.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

x heißt *Häufungspunkt* von A , falls in jeder Umgebung von x ein von x verschiedener Punkt von A liegt.

x heißt *Berührungspunkt* von A , falls in jeder Umgebung von x ein Punkt von A liegt.

Bem. x ist Berührungspunkt von $A \iff x \in A$ oder x ist Häufungspunkt von A .

Satz 3. und Def. Sei X metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

- (a) A enthält alle Häufungspunkte von A .
- (b) A enthält alle Berührungspunkte von A .
- (c) $X \setminus A$ ist offen in X .

Wenn A diese Eigenschaften hat, so heißt A *abgeschlossen* in X .

Satz 4. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

- 1) \emptyset und X sind abgeschlossen.
- 2) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- 3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Satz 5. Sei X ein metrischer Raum und A eine endliche Teilmenge von X . Dann ist A abgeschlossen in X .

Def. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X . Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *Grenzwert* der Folge (x_n) , wenn eine der vier folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- 1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ für $n \geq N$.
- 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$ im Sinne von Analysis I.
- 3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ für $n \geq N$.
- 4. Für jede Umgebung U von x_0 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$.

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. Wenn (x_n) den Grenzwert x_0 besitzt, so sagt man, dass (x_n) gegen x_0 *konvergiert* und schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ oder $x_n \rightarrow x_0$.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\| \cdot \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Sei $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}^n mit $x^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)$ und sei $x^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n$.

Genau dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$, wenn für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq n$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_\nu^k = \xi_\nu^0$.

Bem. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

- a) x ist Berührungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \rightarrow x$.
- b) x ist Häufungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \neq x$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \rightarrow x$.
- c) A ist abgeschlossen in $X \iff$ ist (x_n) eine Folge in A , so dass $x_0 = \lim x_n$ in X existiert, so ist $x_0 \in A$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$. Dann heißt x ein *innerer Punkt* von A , wenn A eine Umgebung von x ist. Sei $\overset{\circ}{A}$ die Menge aller inneren Punkte von A ; sie heißt das *Innere* von A .

Satz 6. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist $\overset{\circ}{A}$ die größte offene Teilmenge von X , die in A enthalten ist.

Satz 7. Ist V ein normierter Raum, $x \in V$, $r > 0$ und $A := \overline{B}_r(x)$, so ist $\overset{\circ}{A} = B_r(x)$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Sei \overline{A} die Menge aller Berührungspunkte von A in X . Sie heißt der *Abschluss* von A .

Satz 8. a) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

b) \overline{A} ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die A umfasst.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$.

x heißt *Randpunkt* von A in X , wenn x Berührungspunkt von A und von $X \setminus A$ ist.

Sei ∂A die Menge der Randpunkte von A in X , also $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

∂A heißt der *Rand* von A in X .

Bem. ∂A ist abgeschlossen in X .

X ist die disjunkte Vereinigung von $\overset{\circ}{A}$, ∂A und $(X \setminus A)^\circ$.

3. Stetige Abbildungen

Def. Seien $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $x_0 \in X$. Dann heißt f *stetig im Punkt* x_0 , wenn eine der folgenden 3 äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass gilt: Ist $x \in X$ mit $d(x_0, x) < \delta$, so ist $d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$.
3. Zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subseteq V$.

Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Beispiele: 1) Eine konstante Abbildung ist stetig.

2) Die identische Abbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ist stetig.

3) Seien X, Y, Z metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen, $x_0 \in X$. Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig ist, so ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ in x_0 stetig.

Satz 1. Seien X, Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$. Dann sind äquivalent:

- a) f ist stetig.
- b) Ist A offen in Y , so ist $f^{-1}(A)$ offen in X .
- c) Ist B abgeschlossen in Y , so ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X .
- d) Ist (x_n) eine konvergente Folge in X , so ist $(f(x_n))$ konvergente Folge in Y und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$.

Satz 2. Seien X, Y metrische Räume, $f, g : X \rightarrow Y$ stetig.
Dann ist $A := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X .

Satz 3. Sei X ein metrischer Raum, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $A := \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ abgeschlossen in X .

Bem. Sei X ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ mit Abbildungen $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$. Wir versehen \mathbb{R}^n mit einer der Normen $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$.
Genau dann ist f stetig, wenn alle f_k stetig sind.

Def. Eine Teilmenge X eines normierten Raumes V heißt *beschränkt*, wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $\|v\| \leq M$ für alle $v \in X$.

Satz 4. Sei X eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n , und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $f(X)$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} . Insbesondere nimmt f auf X sein Maximum und sein Minimum an.

4. Partielle Ableitungen

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Für $i = 1, \dots, n$ sei $U_i := \{t \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U\}$.
Dann ist U_i eine offene Umgebung von x_i in \mathbb{R} .
Man definiert $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_i(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

f heißt *im Punkt x partiell differenzierbar*, wenn für $i = 1, \dots, n$ die Funktion F_i in x_i differenzierbar ist. Schreibe dann

$$D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := F'_i(x),$$

und nenne dies die *i -te partielle Ableitung* von f in x .

f heißt *partiell differenzierbar*, wenn es in jedem Punkt von U partiell differenzierbar ist.

Bem. a) Man berechnet die i -te partielle Ableitung, indem man f als Funktion der i -ten Variablen allein auffasst und die anderen Variablen konstant hält.

b) Für $n = 2$ schreibt man meist (x, y) statt (x_1, x_2) und $\frac{\partial f}{\partial x}$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Für $n = 3$ schreibt man oft (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3) .

Beispiel: $f(x, y) = e^{xy} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$.

Beispiel: Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

In jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f offensichtlich partiell differenzierbar. f ist aber auch in $(0, 0)$ partiell differenzierbar:

$f_1(\xi) = f(\xi, 0) = 0$ und $f_2(\xi) = f(0, \xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R} \implies D_1 f(0, 0) = 0$ und $D_2 f(0, 0) = 0$.

f ist also auf ganz \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar.

Aber f ist in $(0, 0)$ *nicht* stetig: Denn für $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, ist $f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$, während $f(0, 0) = 0$.

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in U . Wenn alle partiellen Ableitungen $D_1 f, \dots, D_n f : U \rightarrow \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sind, so kann man $D_j D_i f := D_j(D_i f)$ bilden und sagt, dass f zweimal partiell differenzierbar ist. Induktiv definiert man, was es für $k \in \mathbb{N}$ bedeutet, dass f *k-mal partiell differenzierbar* ist. Schreibe auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := D_j D_i f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := D_i^2 f := D_i D_i f \text{ usw.}$$

Wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind (dazu gehört insbesondere, dass f selbst als partielle Ableitung der Ordnung 0 stetig ist), so sagt man, f sei *von der Klasse C^k* . Wenn f stetige partielle Ableitungen von jeder Ordnung hat, so heißt f *von der Klasse C^∞* oder *glatt*. Schließlich heißt f *von der Klasse C^0* , wenn es stetig ist.

Satz 1. (Satz von H. A. Schwarz) Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 . Sei $a \in U$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a).$$

Von nun an schreiben wir die Elemente von \mathbb{R}^n als Spaltenvektoren. Wir schreiben also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Ist X eine Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so ist f von der Form

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m)^T$$

mit $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Bez. Ist U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so erhält man eine Abbildung

$$\nabla f = \text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

durch $\nabla f(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$.

∇f heißt der *Gradient* von f .

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. f heißt *partiell differenzierbar* (bzw. *von der Klasse C^k*), wenn alle f_i partiell differenzierbar (bzw. von der Klasse C^k) sind. Man schreibt dann für $x \in U$:

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$Df(x)$ heißt die *Funktionalmatrix* oder die *Jacobimatrix* oder die *Ableitung* von f an der Stelle x .

$Df(x)$ ist eine $m \times n$ -Matrix; ihre i -te Zeile ist der transponierte Gradient von f_i an der Stelle x .

Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$, so ist $Df(x) \cdot \xi \in \mathbb{R}^m$.

5. Differenzierbare und stetig differenzierbare Abbildungen

Satz 1. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f = (f_1, \dots, f_m)^T : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Abbildung, so dass alle Funktionen $D_j f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Sei $x \in U$ fest.

Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$, so definiere $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$ durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi).$$

Dann ist

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0.$$

(Dies soll heißen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ und $\xi \neq 0$ gilt:

$$x + \xi \in U \text{ und } \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} < \varepsilon.)$$

Def. Ist U offen in \mathbb{R}^n , $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so heißt f *differenzierbar* in x , wenn f in x partiell differenzierbar ist und wenn Folgendes gilt:

Definiert man $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$ durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi),$$

so ist $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$.

Satz 2. Sei U offen in \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $x \in U$. Wenn f in x differenzierbar ist, so ist f in x stetig.

Für den Beweis braucht man:

Lemma Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig.

Es gibt ein $\alpha \geq 0$ mit $\|A\xi\| \leq \alpha \|\xi\|$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Folgerung aus Satz 1 und Satz 2: Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen $D_j f_i$ alle stetig, so ist f stetig, d.h. f ist von der Klasse C^1 , m.a.W. f ist stetig differenzierbar.

Allgemeiner: Ist f k -mal partiell differenzierbar und sind alle k -ten partiellen Ableitungen stetig, so ist f von der Klasse C^k .

Beispiel: Sei A eine reelle $m \times n$ -Matrix. Definiere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $f(x) := A \cdot x$. Dann ist f von der Klasse C^∞ . Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $Df(x) = A$, denn ist $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, so

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \text{ für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

also $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$. Alle höheren partiellen Ableitungen von f sind 0.

Für den Beweis der Kettenregel brauchen wir:

Satz 3. Sei U offen in \mathbb{R}^n , $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Es gebe eine $m \times n$ -Matrix A mit

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} (f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dann ist f differenzierbar in x und $Df(x) = A$.

Dies zeigt, wie man den Begriff der Differenzierbarkeit weiter verallgemeinern kann: Sind V, W endlich dimensionale normierte Räume, ist U offen in V , ist $f : U \rightarrow W$ eine Abbildung und ist $x \in U$, so heißt f differenzierbar an der Stelle x , wenn es eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ gibt, so dass

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} (f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dieses A ist dann eindeutig bestimmt; man bezeichnet es mit $Df(x)$ und nennt es die Ableitung von f an der Stelle x .

Satz 4. (Kettenregel) Sei U offen in \mathbb{R}^n , V offen in \mathbb{R}^m und seien $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar mit $g(U) \subseteq V$. Dann ist die Abbildung $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar und

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \quad \forall x \in U.$$

(Dabei steht auf der rechten Seite das Produkt der Matrizen $Df(g(x))$ und $Dg(x)$.) Sind f und g von der Klasse C^k mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist auch $f \circ g$ von der Klasse C^k .

Spezialfall: Ist $p = 1$, also $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}$, so ist

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Dabei sind die Variablen in \mathbb{R}^m mit y_1, \dots, y_m bezeichnet.

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $U_v := \{t \in \mathbb{R} \mid x + tv \in U\}$ eine offene Umgebung von 0 in \mathbb{R} . Definiere $F_v : U_v \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_v(t) := f(x + tv).$$

Wenn F_v in 0 differenzierbar ist, so heißt

$$D_v f(x) := F_v'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x))$$

die *Richtungsableitung* von f im Punkt x in Richtung v .

Bem. $D_{e_i} f = D_i f$.

Bez. Für $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $w = (w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

also $\|v\|_2 = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Satz 5. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung v und

$$D_v f(x) = \langle v, \nabla f(x) \rangle.$$

Anschauliche Interpretation des Gradienten: Der Vektor $\text{grad} f(x)$ gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f an.

6. Mittelwertsatz und Taylor-Formel

Der Mittelwertsatz aus Analysis I lautet: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$(\star) \quad f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

In dieser Form lässt sich der Mittelwertsatz nicht auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern. Betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = (\cos x, \sin x).$$

Dann ist $f(0) = f(2\pi)$, aber $Df(x) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aus (\star) folgt: Wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $|f'(\xi)| \leq M$ für alle $\xi \in]a, b[$, so ist $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|$. Dies lässt sich verallgemeinern.

Def. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann heißt f (Riemann-) integrierbar, wenn alle f_i integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int_a^b f(x) dx := \left(\int_a^b f_1(x) dx, \dots, \int_a^b f_m(x) dx \right) \in \mathbb{R}^m.$$

Bem. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ Riemann-integrierbar, so ist $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

(Dabei ist $\|\cdot\|$ eine der Normen $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$.)

Dies benutzen wir beim Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1. (Mittelwertsatz) Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1 . Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke

$$\{x + t\xi \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

zwischen x und $x + \xi$ ganz in U liegt. Dann gibt es ein $M \geq 0$, so dass

$$\|Df(x + t\xi) \cdot v\| \leq M\|v\| \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

und für jedes solches M ist

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq M \cdot \|\xi\|.$$

Satz 2. Sei U offen in \mathbb{R}^n und habe die folgende Eigenschaft:

Je zwei Punkte von U können durch einen Streckenzug verbunden werden, der ganz in U verläuft. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant.

Bez. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

a) Ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, so sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!.$$

Ein solches α heißt *n-Multiindex*.

b) Ist α wie in a) und f von der Klasse $C^{|\alpha|}$, so sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dabei ist $D_i^0 f := f$ zu setzen.

c) Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so sei $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$.

Satz 3. (Taylor -Formel) Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^{k+1} .

a) Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke zwischen x und $x + \xi$ in U liegt. Dann ist

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \int_0^1 (1-t)^k \frac{D^\alpha f(x+t\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha dt.$$

b) Ist $x \in U$ und definiert man

$$R(\xi) := f(x + \xi) - \sum_{|\alpha| \leq k+1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$, so ist

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{R(\xi)}{\|\xi\|^{k+1}} = 0.$$

7. Extremwerte und kritische Stellen

Def. Sei X ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. f besitzt in x_0 ein *lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U.$$

f besitzt in x_0 ein *striktes lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Entsprechend definiert man, wann f in x_0 ein (*striktes*) *lokales Minimum* bzw. *Extremum* besitzt.

Satz 1. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Wenn f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum besitzt, so ist

$$\text{grad} f(x_0) = 0.$$

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Ist $x_0 \in U$ mit $\text{grad} f(x_0) = 0$, so heißt x_0 eine *kritische Stelle* von f .

Def. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 . Ist $x \in U$, so sei $Hf(x)$ die reelle $n \times n$ -Matrix (a_{ij}) mit

$$a_{ij} := D_i D_j f(x).$$

$Hf(x)$ heißt die *Hessesche Matrix* von f an der Stelle x .

Bem. Nach dem Satz von Schwarz ist $a_{ij} = a_{ji}$, d.h. $Hf(x)$ eine symmetrische Matrix.

Def. Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$ -Matrix.

A heißt *positiv definit*, wenn $\langle A(x), x \rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

A heißt *negativ definit*, wenn $\langle A(x), x \rangle < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

A heißt *indefinit*, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle A(x), x \rangle > 0$ und ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle A(y), y \rangle < 0$ gibt.

Satz 2. Sei U offen in \mathbb{R}^n und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 . Sei x_0 eine kritische Stelle von f .

- a) Ist $Hf(x_0)$ positiv definit, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Minimum.
- b) Ist $Hf(x_0)$ negativ definit, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.
- c) Ist $Hf(x_0)$ indefinit, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.

Erinnerungen an die Lineare Algebra:

Sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix. Eine komplexe Zahl λ heißt Eigenwert von A , wenn es ein $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Ax = \lambda x$. Mit

$$\chi_A(t) = \det(tI - A)$$

bezeichnen wir das charakteristische Polynom von A . Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A .

Ist A eine symmetrische Matrix, so sind alle Eigenwerte von A reell, und es gilt:

- A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.
- A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.
- A ist indefinit genau dann, wenn A einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt.

Kriterium von Hurwitz: Sei $A = (a_{ij})$ symmetrisch,

$$\Delta_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

A positiv definit $\iff \Delta_k > 0$ für $k = 1, \dots, n$.

A negativ definit $\iff (-1)^k \Delta_k > 0$ für $k = 1, \dots, n$.

Beispiel 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2$ (Sattelfläche)

$\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. Einzige kritische Stelle: $(0, 0)$.

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit. Also besitzt f überhaupt keine lokalen Extrema.

Beispiel 2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - y^3$.

$\text{grad} f(x, y) = (3x^2, -3y^2)$. Einzige kritische Stelle: $(0, 0)$.

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$, insbesondere $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dies ist weder positiv definit noch negativ definit noch indefinit. In jeder Umgebung von $(0, 0)$ nimmt f positive und negative Werte an, besitzt also auch in $(0, 0)$ kein lokales Extremum.

Beispiel 3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Kritische Stellen: $(0, 0)$ und $(1, 1)$.

Man kann Satz 2 anwenden: Kein lokales Extremum in $(0, 0)$, striktes lokales Minimum in $(1, 1)$.

Teil II: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

8. Beispiele und Problemstellungen

Sei U offen in \mathbb{R}^2 und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei I ein offenes Intervall in \mathbb{R} und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

- (a) $(x, \varphi(x)) \in U$,
- (b) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$,

so heißt φ eine *Lösung der Differenzialgleichung*

- (c) $y' = f(x, y)$;

man nennt (c) eine *explizite gewöhnliche Differenzialgleichung 1.Ordnung*.

Ist $(x_0, y_0) \in U$ und ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (c) mit $x_0 \in I$ und $\varphi(x_0) = y_0$, so sagt man, dass φ die *Anfangsbedingung*

- (d) $y(x_0) = y_0$

erfüllt.

Beispiel 1: Sei $U = J \times \mathbb{R}$, wobei J ein offenes Intervall ist, und sei $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Definiere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := g(x)$, d.h. betrachte die DGL.

$$y' = g(x).$$

Ihre Lösungen sind die Stammfunktionen von g .

Beispiel 2: Sei $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) := y$, d.h. betrachte die DGL.

$$y' = y.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ definiere $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_c(x) := c e^x.$$

Dann ist φ_c eine Lösung, und jede andere Lösung entsteht durch Einschränken eines φ_c auf ein Teilintervall. Für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine auf \mathbb{R} definierte Lösung mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

Beispiel 3: Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = y^2$, d.h. betrachte die DGL.

$$y' = y^2.$$

Sei φ_0 die Nullfunktion. Für $c \in \mathbb{R}$ definieren wir $\varphi_c^+ :]c, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi_c^- :]-\infty, c[\rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_c^\pm(x) := \frac{1}{c - x}.$$

Dann sind die Funktionen φ_0 , φ_c^+ und φ_c^- Lösungen von $y' = y^2$, und jede Lösung dieser DGL. entsteht daraus durch Einschränkung auf ein Teilintervall. Für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine Lösung, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt und die einen maximalen Definitionsbereich hat.

Beispiel 4: Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = 3y^{2/3}$, d.h. betrachte die DGL.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ sei $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi_c(x) := (x - c)^3.$$

Dann ist φ_c eine Lösung mit $\varphi_c(c) = 0$ und $\varphi'_c(c) = 0$. Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $a < b$ definiere $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_{a,b}(x) := \begin{cases} \varphi_a(x) & \text{für } x \leq a \\ 0 & \text{für } a < x < b \\ \varphi_b(x) & \text{für } b \leq x. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_{a,b}$ differenzierbar und Lösung von $y' = 3y^{2/3}$. Für jede Anfangsbedingung gibt es also unendlich viele verschiedene Lösungen!

Verallgemeinerung: Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig. Sei I ein offenes Intervall und $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

- (a) $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in U$,
- (b) $\varphi'_i(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ für $i = 1, \dots, n$,

so heißen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen des Differenzialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Schreibt man $f := (f_1, \dots, f_n)$ und $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, so schreiben sich die Bedingungen (a) und (b) in der Form

- (a) $(x, \varphi(x)) \in U$,
- (b) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Statt des Systems (c) schreibt man einfach wieder

$$y' = f(x, y)$$

und nennt weiterhin φ eine Lösung dieser expliziten gewöhnlichen DGL. erster Ordnung.

Existenzsatz von Peano. Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, y_0) \in U$. Dann existiert eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der DGL. $y' = f(x, y)$ mit $x_0 \in I$ und $\varphi(x_0) = y_0$.

Def. Seien X, Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$.

a) f heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

b) f heißt *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so dass $f|U$ Lipschitz-stetig ist.

Bem.1: Lipschitz-stetig \implies lokal Lipschitz-stetig \implies stetig.

Bem.2: Sei X offen in \mathbb{R}^n und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1 . Dann ist f lokal Lipschitz-stetig.

Def. Seien X, Y, Z metrische Räume, $U \subseteq X \times Y$ und $f : U \rightarrow Z$.

a) f heißt *Lipschitz-stetig im 2. Argument*, wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$d(f(x, y), f(x, \tilde{y})) \leq L \cdot d(y, \tilde{y}) \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in U.$$

b) f heißt *lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument*, wenn es für jedes $(x_0, y_0) \in U$ eine Umgebung V von (x_0, y_0) in U gibt, so dass $f|_V$ Lipschitz-stetig im 2. Argument ist.

Bem. Sei U offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$. Wir bezeichnen die partiellen Ableitungen von f mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

(wenn sie existieren). Wenn $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ existieren und stetige Abbildungen $U \rightarrow \mathbb{R}^k$ sind, so ist f lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument.

Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, y_0) \in U$. Ferner sei f lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument. Dann existieren ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der DGL $y' = f(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\varphi(x_0) = y_0$.

b) Ist $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y' = f(x, y)$ mit $\psi(x_0) = y_0$, so ist $J \subseteq I$ und $\psi = \varphi|_J$.

Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig. Für jedes kompakte Teilintervall K von I sei $f|_K$ Lipschitz-stetig im 2. Argument. Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der DGL $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.

Beispiel 5: (Differenzialgleichung mit getrennten Variablen)

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig mit $h(y) \neq 0 \forall y \in J$. Definiere $f(x, y) : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := g(x)h(y)$, d.h. betrachte die DGL

$$y' = g(x)h(y).$$

Heuristisches Lösungsverfahren:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + c$$

Die linke Seite ist eine Funktion von y , die rechte eine Funktion von x . Löse diese Gleichung nach y auf.

Exakt: Sei $(x_0, y_0) \in I \times J$. Definiere $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $H : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad H(y) := \int_{y_0}^y \frac{dt}{h(t)}.$$

Dann existiert ein offenes Intervall $I' \subseteq I$ mit $x_0 \in I'$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL $y' = g(x)h(y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$, und $H(\varphi(x)) = G(x)$ für $x \in I'$.

Beispiel 6: (Homogene lineare DGL)

Sei I offenes Intervall, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Definiere $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := a(x)y$. Die DGL $y' = f(x, y)$ lautet also

$$y' = a(x)y.$$

Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ von $y' = a(x)y$ mit $\varphi(x_0) = y_0$, und

$$\varphi(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right).$$

Beispiel 7: (Lineare DGL.) Sei I offenes Intervall, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Definiere $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := a(x)y + b(x)$. Betrachte also die DGL.

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Lösung $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ von $y' = a(x)y + b(x)$ mit $\psi(x_0) = y_0$:

Sei $\varphi(x) := \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$. Dann ist φ Lösung der „zugehörigen homogenen linearen DGL.“

$y' = a(x)y$, also $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x)$, und $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$.

Ist ψ irgendeine Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$, so existiert eine C^1 -Funktion u mit $\psi(x) = \varphi(x)u(x)$.

$$\Rightarrow \psi' = \varphi' u + \varphi u' = a\varphi u + \varphi u' = a\psi + \varphi u'.$$

Es ist also $\psi' = a\psi + b$ genau dann, wenn $\varphi u' = b$, also $u' = \frac{b}{\varphi}$.

$$\Rightarrow u(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt + \text{const.}$$

Aus $\psi(x_0) = y_0$ folgt: $y_0 = \varphi(x_0)u(x_0) = u(x_0) \Rightarrow \text{const} = y_0$

$$\Rightarrow \psi(x) = \varphi(x) \cdot \left(y_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt\right).$$

(Methode der *Variation der Konstanten*.)

Differenzialgleichungen höherer Ordnung: Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei I ein offenes Intervall und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

$$(a) \quad (x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in U,$$

$$(b) \quad \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)),$$

so heißt φ eine Lösung der DGL.

$$(c) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Man nennt (c) eine explizite gewöhnliche DGL. n -ter Ordnung.

Reduktion auf ein System von DGLn. 1. Ordnung:

Definiere $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$F(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) := (y_1, \dots, y_{n-1}, f(x, y_0, \dots, y_{n-1})).$$

Mit $Y := (y_0, \dots, y_{n-1})$ lautet das System $Y' := F(x, Y)$ ausgeschrieben:

$$y_0' = y_1$$

$$y_1' = y_2$$

$$\vdots$$

$$y_{n-2}' = y_{n-1}$$

$$y_{n-1}' = f(x, y_0, \dots, y_{n-1})$$

Daher gilt:

1) Ist φ eine Lösung von $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, so ist $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ eine Lösung von $Y' = F(x, Y)$.

2) Ist $\Phi = (\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ eine Lösung von $Y' = F(x, Y)$, so ist φ eine Lösung von $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Folgerung aus dem Lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz:

Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument.

Sei $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in U$. Dann existiert eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit

- (a) $\varphi(x_0) = y_0,$
 $\varphi'(x_0) = y_1,$
 \vdots
 $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$
- (b) Ist $\psi : J \mapsto \mathbb{R}$ Lösung mit $\psi^{(k)}(x_0) = y_k$ für $k = 0, \dots, n-1$,
 so ist $J \subseteq I$ und $\psi = \varphi|_J$.

Beispiel 8: $y'' = -y$.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiere $\varphi_{a,b}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_{a,b}(x) := a \cos x + b \sin x.$$

Dann ist $\varphi_{a,b}$ eine Lösung und alle Lösungen sind von dieser Form.

9. Lineare Differenzialgleichungen

Vorbemerkung 1: Ein *komplexer normierter Raum* besteht aus einem \mathbb{C} -Vektorraum V und einer Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ mit

- (1) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$
- (2) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- (3) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ für $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$
- (4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V.$

Auf \mathbb{C}^n hat man die Normen $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, die für $v = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} \|v\|_\infty &:= \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}, \\ \|v\|_1 &:= |z_1| + \dots + |z_n|, \\ \|v\|_2 &:= (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ist V ein komplexer normierter Raum, so ist der V zugrundeliegende \mathbb{R} -Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$ ein reeller normierter Raum. Insbesondere gilt:

V wird durch $d(x, y) := \|x - y\|$ zu einem metrischen Raum; $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig; zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf dem endlich-dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum V sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive Zahlen a, A gibt mit

$$a \|v\| \leq \|v\|' \leq A \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Vorbemerkung 2: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Der \mathbb{K} -Vektorraum $M(m, n; \mathbb{K})$ der $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus \mathbb{K} wird betrachtet als die Menge der \mathbb{K} -linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Wir wählen Normen auf \mathbb{K}^n und \mathbb{K}^m , die beide mit $\|\cdot\|$ bezeichnet werden. Ist $A \in M(m, n; \mathbb{K})$, so sei

$$\|A\| := \max\{\|Ax\| \mid x \in \mathbb{K}^n \text{ und } \|x\| = 1\}.$$

(Beachte: $S := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen in \mathbb{K}^n . Daher nimmt die stetige Funktion $x \mapsto \|Ax\|$ auf S ihr Maximum an.) Es gilt:

- (1) Damit hat man eine Norm auf $M(m, n; \mathbb{K})$.

(2) Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ und alle $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ ist $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Ist $m = n$, so wählt man die beiden Ausgangsnormen gleich. Es ist dann:

(3) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ für alle $A, B \in M(n, n; \mathbb{K})$.

Def. Sei I ein offenes Intervall, $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{R})$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Definiere $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x).$$

Dann heißt $y' = f(x, y)$ ein *System von n linearen DGLn. 1. Ordnung* oder kurz eine *lineare DGL. 1. Ordnung*. Ist dabei $b(x) = 0 \quad \forall x \in I$, so heißt das System *homogen*.

Satz 1. Sei I ein offenes Intervall, $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{R})$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien stetig. Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

Dann besitzt das System $y' = A(x)y + b(x)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.

(In Zukunft verstehen wir unter einer Lösung einer solchen linearen DGL. immer eine auf ganz I definierte Lösung.)

Bem. Wir identifizieren \mathbb{C}^n mit \mathbb{R}^{2n} vermöge

$$(z_1, \dots, z_n) \longleftrightarrow (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n).$$

Eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, also ein $A \in M(n, n; \mathbb{C})$, wird dann mit einer \mathbb{R} -linearen Abbildung $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, also einer Matrix aus $M(2n, 2n; \mathbb{R})$, identifiziert: Ist $A = C + iD$ mit $C, D \in M(n, n; \mathbb{R})$, so wird A identifiziert mit

$$\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix} \in M(2n, 2n; \mathbb{R}).$$

Def. Sei I ein offenes Intervall (in \mathbb{R}), $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{C})$ und $b : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ seien stetig. Definiere $f : I \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ durch $f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x)$. Dann ist $y' = f(x, y)$ mit obigen Identifikationen ein System von $2n$ linearen DGLn. 1. Ordnung. Wir nennen es ein *System von n linearen komplexen DGLn. 1. Ordnung* oder kurz *lineare DGL. 1. Ordnung*.

Satz 2. Sei I ein offenes Intervall, $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{K})$ sei stetig, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} .

a) Die Lösungen der DGL.

$$y' = A(x)y$$

bilden einen \mathbb{K} -Vektorraum L der Dimension n .

b) Wählt man ein festes $x_0 \in I$, so erhält man einen Isomorphismus von L auf \mathbb{K}^n durch $\varphi \mapsto \varphi(x_0)$.

Bem. Bei einem homogenen System von n linearen DGLn. 1. Ordnung handelt es sich also darum, n linear unabhängige Lösungen $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ zu finden. Alle anderen Lösungen ergeben sich dann als Linearkombinationen. Für $n > 1$ gibt es kein allgemeines Verfahren, um Lösungen zu finden!

Beispiel: $y'_1 = y_2$

$$y'_2 = -y_1$$

Zwei Lösungen φ^1, φ^2 sind gegeben durch

$$\varphi^1(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \varphi^2(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

Dann bilden φ^1 und φ^2 eine Basis des Lösungsraums.

Satz 3. Sei I ein offenes Intervall, $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{K})$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ seien stetig. Sei L der Lösungsraum der homogenen DGL.

$$y' = A(x) \cdot y$$

und M die Menge aller Lösungen von

$$y' = A(x) \cdot y + b(x).$$

Ist $\psi_0 \in M$, so ist $M = \psi_0 + L := \{\psi_0 + \varphi \mid \varphi \in L\}$.

Bem. Hat man also eine Basis $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ des Lösungsraums der homogenen DGL. $y' = A(x)y$, so muss man nur noch *eine* Lösung ψ der inhomogenen DGL. $y' = A(x)y + b(x)$ finden. Dies geschieht mit der Methode der *Variation der Konstanten*:

Man definiert $\Phi : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{K})$ durch $\Phi := (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ und sucht ψ in der Form $\psi(x) = \Phi(x) u(x)$ mit $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$. Man erhält

$$u(x) = \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} b(t) dt + \text{const.}$$

Beispiel: $y'_1 = y_2$
 $y'_2 = -y_1 + x$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} = \Phi(x)^{-1}$$

$$u(x) = \begin{pmatrix} \cos x + x \sin x - 1 \\ -\sin x + x \cos x \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = \Phi(x) u(x) = \begin{pmatrix} x - \sin x \\ 1 - \cos x \end{pmatrix}$$

Def. Sei I ein offenes Intervall und seien

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann heißt

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x)$$

eine *lineare DGL. n-ter Ordnung*. Ist $b = 0$, so heißt sie *homogen*.

Satz 4. a) Sei L die Menge aller Lösungen der homogenen DGL.

$$y^{(n)} = a_0(x)y + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}.$$

Dann ist L ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.

b) Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L$, so bilden $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ genau dann eine Basis von L , wenn für ein und damit für alle $x \in I$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \dots & \varphi'_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0.$$

c) Ist M die Menge aller Lösungen der inhomogenen DGL.

$$y^{(n)} = a_0(x)y + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x)$$

und ist $\psi_0 \in M$, so ist $M = \psi_0 + L$.

Bem. Auch für die lineare DGL. 2. Ordnung gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren.

10. Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Def. Ist $A \in M(n; \mathbb{K}) := M(n, n; \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^n$, so heißt

$$y' = Ay$$

eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten. Ihre Lösungen sind auf ganz \mathbb{R} definiert.

Def. Sei X ein metrischer Raum.

a) Eine Folge (x_n) in X heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

b) X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

c) Ein normierter Raum heißt *Banach-Raum*, wenn er vollständig ist.

Bem. Jeder endlich-dimensionale normierte Raum ist ein Banach-Raum.

Def. Sei V ein normierter Raum und (a_n) eine Folge in V .

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, wenn die Folge $(a_1 + \dots + a_k)_k$ in V konvergiert.

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ reeller Zahlen konvergiert.

Bem. In einem Banach-Raum ist jede absolut konvergente Reihe konvergent, und man kann mit absolut konvergenten Reihen wie in \mathbb{R} umgehen.

Def. Sei $A \in M(n; \mathbb{K})$. Im Banach-Raum $M(n; \mathbb{K})$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ absolut. Dabei setzt man $A^0 = I_n$ für alle $A \in M(n; \mathbb{K})$. Sei

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in M(n; \mathbb{K}).$$

Satz 1. Ist $A \in M(n; \mathbb{K})$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$, so ist die einzige Lösung φ von $y' = Ay$ mit $\varphi(0) = y_0$ gegeben durch

$$\varphi(x) = e^{xA} y_0.$$

Bem. Ist $v_0 \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , so ist $x \mapsto e^{\lambda x} v_0$ eine Lösung von $y' = Ay$.

Wenn A diagonalisierbar ist, so gibt es eine Basis v_1, \dots, v_n von \mathbb{K}^n und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$A v_j = \lambda_j v_j.$$

Dann bilden die n Funktionen

$$x \mapsto e^{\lambda_j x} v_j$$

eine Basis des Lösungsraums der DGL $y' = Ay$.

Beispiel 1: $y'_1 = 5y_1 + 3y_2$

$$y'_2 = -6y_1 - 4y_2$$

Die Lösungen sind von der Form

$$y_1(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}$$

$$y_2(x) = -\alpha e^{2x} - 2\beta e^{-x}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Satz 2. Sei $A \in M(n; \mathbb{C})$ und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Lösung der DGL $y' = Ay$. Dann ist jedes φ_j eine komplexe Linearkombination der Funktionen

$$x \mapsto x^k e^{\lambda x},$$

wobei λ ein Eigenwert von A und k kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ (sogar kleiner als die Größe des größten Jordan-Kästchens zum Eigenwert λ) ist.

Satz 3. Sei $A \in M(n; \mathbb{R})$ und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y' = Ay$. Dann ist jedes φ_j reelle Linearkombination der Funktionen

$$x \mapsto x^k e^{ax} \cos bx \quad \text{und} \quad x \mapsto x^k e^{ax} \sin bx,$$

wobei $a + bi$ die komplexen Eigenwerte von A mit $b \geq 0$ durchläuft und k eine nicht-negative ganze Zahl ist, die kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $a + bi$ von A ist.

Beispiel 2: $y'_1 = y_1 + y_2$

$$y'_2 = y_2$$

Die Lösungen sind von der Form

$$y_1(x) = \alpha e^x + \beta x e^x$$

$$y_2(x) = \beta e^x.$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Satz 4. Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Es sei

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \prod_{j=1}^m (x - \lambda_j)^{k_j}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

Dann bilden die Funktionen

$$x^k e^{\lambda_j x} \quad \text{mit } 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k < k_j$$

eine Basis des Lösungsraums.

Satz 5. Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen des Polynoms

$$g(x) := x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Seien $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen nicht-reellen Nullstellen von g mit $\text{Im } \lambda_j > 0$. Für $j = 1, \dots, s$ sei k_j die Vielfachheit der Nullstelle λ_j . Für $j = r+1, \dots, s$ sei $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$ mit $\mu_j, \nu_j \in \mathbb{R}$. Dann bilden die Funktionen

$$\left. \begin{array}{l} x^p e^{\lambda_j x} \\ x^p e^{\mu_j x} \cos \nu_j x \\ x^p e^{\mu_j x} \sin \nu_j x \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (1 \leq j \leq r, \quad 0 \leq p < k_j) \\ (r < j \leq s, \quad 0 \leq p < k_j) \end{array}$$

eine Basis des Lösungsraums.

Beispiel: Die DGL der gedämpften Schwingung:

$$y'' + 2\mu y' + \omega_0^2 y = 0$$

mit $\mu \geq 0, \omega_0 > 0$. Man nennt 2μ den Dämpfungsfaktor und ω_0 die Frequenz der ungedämpften Schwingung.

11. Der Fixpunktsatz von Banach

Def. Sei X eine Menge und $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Dann heißt ein Element $x \in X$ ein *Fixpunkt* von f , wenn $f(x) = x$.

Def. Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ heißt *kontrahierend*, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $C < 1$ gibt, so dass gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Bem. Eine kontrahierende Abbildung ist (Lipschitz-) stetig.

Satz 1. Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Beweisidee: Man wählt einen beliebigen Startpunkt $x_0 \in X$. Dann ist $\lim_n f^n(x_0)$ der Fixpunkt.

Satz 2. Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $x_0 \in X$, $R > 0$ und $B := \{x \in X \mid d(x_0, x) < R\}$. Sei $G : B \rightarrow X$ eine Abbildung und es gebe ein $C < 1$, so dass

$$(1) \quad d(G(x), G(y)) \leq C d(x, y) \quad \forall x, y \in B,$$

$$(2) \quad d(G(x_0), x_0) < R(1 - C).$$

Dann gibt es genau ein $x \in B$ mit $G(x) = x$.

12. Der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Wir formulieren die DGL. $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ um in ein Fixpunktproblem:

Lemma 1. Sei I ein offenes Intervall, H offen in \mathbb{R}^n , $f : I \times H \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig, $(x_0, y_0) \in I \times H$. Sei J ein offenes Teilintervall von I mit $x_0 \in J$.

Für eine stetige Abbildung $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(J) \subseteq H$ definieren wir eine stetige Abbildung $G(\varphi) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$(G(\varphi))(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

Für ein solches φ sind äquivalent:

- 1) φ ist Lösung von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.
- 2) $G(\varphi) = \varphi$.

Um den Fixpunktsatz von Banach anwenden zu können, brauchen wir einen vollständigen metrischen Raum:

Satz 1. Sei I ein kompaktes Intervall und $C(I)$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Für $f \in C(I)$ sei

$$\|f\| := \max\{|f(x)| \mid x \in I\}.$$

Damit wird $C(I)$ zu einem Banach-Raum.

Bem. a) Eine Folge (f_n) in $C(I)$ konvergiert genau dann, wenn die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergiert.

b) Allgemeiner sei $C(I; \mathbb{R}^n)$ der \mathbb{R} -Vektorraum der stetigen Abbildungen $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Norm

$$\|f\| := \max\{\|f(x)\|_\infty \mid x \in I\}.$$

Dann ist auch $C(I; \mathbb{R}^n)$ ein Banach-Raum.

Man wendet nun den Banachschen Fixpunktsatz in der Fassung von §11, Satz 2 an mit $X = C(I; \mathbb{R}^n)$, wobei man für x_0 die konstante Funktion mit Wert y_0 wählt; der Radius R muß geeignet gewählt werden. Man erhält den Lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz (vgl. §8). Dieser Beweis liefert ein praktisch anwendbares Verfahren, um approximativ eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ zu finden:

Man setzt $\varphi_0(x) := y_0$ für alle x und definiert dann induktiv

$$\varphi_m(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{m-1}(t)) dt.$$

Auf einem kleinen Intervall, das x_0 enthält, konvergiert die Funktionenfolge (φ_m) gleichmäßig gegen eine Lösung der DGL.

13. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Der Globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz (siehe §8) wird mit dem Banachschen Fixpunktsatz bewiesen, wobei man auf dem Vektorraum $C(K; \mathbb{R}^n)$ eine Norm geschickt wählen muss. Der Beweis zeigt, dass unter den Voraussetzungen des Globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes Folgendes gilt:

Sei $\varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige stetige Funktion. Definiere $\varphi_m : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ induktiv für $m \geq 1$ durch

$$\varphi_m(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{m-1}(t)) dt.$$

Dann konvergiert die Folge (φ_m) gegen eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, und zwar gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall.

14. Abzählbare Mengen und die Sätze von Arzelà-Ascoli und Peano

Def. Eine Menge X heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Bijektion von $\{1, 2, \dots, n\}$ auf X gibt. Insbesondere ist \emptyset eine endliche Menge.

X heißt *abzählbar*, wenn es eine Bijektion von \mathbb{N} auf X gibt.

X heißt *höchstens abzählbar*, wenn X endlich oder abzählbar ist, d.h. wenn es eine Folge (a_n) in X gibt mit $X = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Fakt 1. Eine Teilmenge einer abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.

Fakt 2. Genau dann ist eine Menge X höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von \mathbb{N} auf X gibt.

Fakt 3. Sind X_1, X_2, \dots höchstens abzählbare Teilmengen einer Menge Z , so ist $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$ höchstens abzählbar.

Beispiele: $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und \mathbb{Q} sind abzählbar.

Satz 1. \mathbb{R} ist überabzählbar, d.h. weder endlich noch abzählbar.