Analysis III WS 13/14

Singhof

6. Dezember 2013

Kapitel I: Maß- und Integrationstheorie

1. Quader und Figuren

Bez. Sei X eine Menge. Mit $\mathscr{P}(X)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen von X.

Wünschenswert wäre eine Abbildung $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(0) $\mu(\emptyset) = 0$.

(1) Ist Q ein Quader in $\mathbb{R}^n$ mit den Kantenlängen $c_1, \ldots, c_n$, so ist $\mu(Q) = c_1 \cdot \ldots \cdot c_n$.

(2) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ paarweise disjunkt, so ist
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\ .$$

(3) Sind $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ kongruent zueinander, so ist $\mu(A) = \mu(B)$.

Eine solche Abbildung gibt es aber nicht, wie aus dem Banach-Tarski-Paradoxon folgt, für dessen Beweis man allerdings das Auswahlaxiom braucht. Dieses ,,Paradoxon" besagt:

Seien $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ zwei beliebige Mengen mit nicht-leerem Inneren, $n \geq 1$. Dann gibt es Mengen $C_1, C_2, \ldots, D_1, D_2, \ldots \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- A ist die disjunkte Vereinigung von $C_1, C_2, \ldots$.
- B ist die disjunkte Vereinigung von $D_1, D_2, \ldots$.
- C_i ist kongruent zu D_i für alle i.

Wenn es also ein μ wie oben gäbe, so hätten alle Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die ein nichtleeres Innere haben, dasselbe Volumen! Deswegen müssen wir in einem komplizierten Prozess definieren, wann eine Menge ,,messbar" ist, also ein Volumen besitzt.

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
$$\begin{aligned} a \leq b :\ &\Leftrightarrow\ a_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \\ a < b :\ &\Leftrightarrow\ a_i < b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ist $a \leq b$, so sei $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x < b\}$. Eine solche Menge heißt ein (achsenparalleler, halboffener) *Quader* in $\mathbb{R}^n$.
Ist $a \leq b$, aber nicht $a < b$, so ist $[a, b[= \emptyset$.
Die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathscr{Q}^n$ bezeichnet.
Für $[a, b[\in \mathscr{Q}^n$ sei
$$\lambda^n([a, b[) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Eine Vereinigung von endlich vielen Quadern in $\mathbb{R}^n$ heiße *Figur* in $\mathbb{R}^n$. Es sei $\mathscr{F}^n$ die Menge aller Figuren in $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei X eine Menge und $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X)$.
$\mathscr{R}$ heißt ein *Ring von Teilmengen* von X, falls gilt:

(1) $\emptyset \in \mathscr{R}$.

(2) Sind $A, B \in \mathscr{R}$, so ist $A \cup B \in \mathscr{R}$.

(3) Sind $A, B \in \mathscr{R}$, so ist $A \setminus B \in \mathscr{R}$.

Satz 1. $\mathscr{F}^n$ ist ein Ring von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei X eine Menge, $\mathscr{R}$ ein Ring von Teilmengen von X. Eine Abbildung $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt ein *Prämaß* auf $\mathscr{R}$, falls gilt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu(A) \geq 0 \;\; \forall\, A \in \mathscr{R}$.

(3) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{R}$ paarweise disjunkt und ist $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathscr{R}$, so ist $\mu(\bigcup_m A_m) = \sum_m \mu(A_m)$.

Satz 2. Es gibt genau ein Prämaß λ^n auf $\mathscr{F}^n$ mit

$$\lambda^n([a, b\,[) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) \;\; \forall\, [a, b\,[\in \mathscr{Q}^n.$$

2. σ-Algebren und Maße

Def. Sei X eine Menge und $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Dann heißt $\mathscr{A}$ eine *σ-Algebra* in X, wenn gilt:

(1) $\mathscr{A}$ ist ein Ring von Teilmengen von X.

(2) $X \in \mathscr{A}$

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathscr{A}$.

Lemma 1. Der Durchschnitt von beliebig vielen σ-Algebren in X ist eine σ-Algebra in X.

Satz 1 und Bezeichnung. Zu jeder Teilmenge $\mathscr{A}$ von $\mathscr{P}(X)$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{A})$ in X, die $\mathscr{A}$ enthält.

Beispiel: Sei X ein metrischer Raum, $\mathscr{T}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X. Die Elemente der σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{T})$ heißen die *Borel-Mengen* von X.
$\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{T})$ enthält alle offenen, alle abgeschlossenen und sehr viele weitere Mengen.

Def. Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X. Ein *Maß* auf $\mathscr{A}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $\mu(A) \geq 0 \;\; \forall\, A \in \mathscr{A}$

(3) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ paarweise disjunkt, so $\mu(\bigcup_m A_m) = \sum_m \mu(A_m)$.

Bem. Ein Prämaß auf einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ ist ein Maß auf $\mathscr{A}$.

Def. a) Ein Paar $(X, \mathscr{A})$, bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ in X, heißt ein *Messraum*.
b) Ein Tripel $(X, \mathscr{A}, \mu)$ heißt ein *Maßraum*, wenn $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum und μ ein Maß auf $\mathscr{A}$ ist.

Satz 2. (Maßfortsetzungssatz von Carathéodory)
Sei X eine Menge, $\mathscr{R}$ ein Ring von Teilmengen von X, μ ein Prämaß auf $\mathscr{R}$. Dann kann μ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{R})$ fortgesetzt werden.

Konstruktion dieser Fortsetzung:

1. Schritt: Wir setzen die Abbildung μ zu einer Abbildung $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fort:

Für $A \subseteq X$ sei $U(A)$ die Menge aller Folgen (B_m) in $\mathscr{R}$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$. Sei

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) \mid (B_m) \in U(A)\} .$$

Ist $U(A) = \emptyset$, so ist dies als $\mu^*(A) = \infty$ zu interpretieren.
Im Allgemeinen ist μ^* kein Maß auf $\mathscr{P}(X)$.

2. Schritt: $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist ein sogenanntes *äußeres Maß* auf X, d.h. μ^* hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu^*(A) \geq 0$ für alle $A \subseteq X$.

(3) Ist $A \subseteq B \subseteq X$, so ist $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(4) Ist (A_m) eine Folge in $\mathscr{P}(X)$, so ist $\mu^*(\bigcup\limits_{m} A_m) \leq \sum\limits_{m} \mu^*(A_m)$.

3. Schritt: Ist μ^* ein beliebiges äußeres Maß auf X, so nennt man ein $A \in \mathscr{P}(X)$ μ^*-*messbar*, falls gilt: Für jedes $Q \in \mathscr{P}(X)$ ist

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) .$$

Man zeigt dann:

(a) Die Menge $\mathscr{R}^*$ aller μ^*-messbaren Teilmengen von X ist eine σ-Algebra.

(b) $\mu^* \mid \mathscr{R}^*$ ist ein Maß auf $\mathscr{R}^*$.

4. Schritt: Ist μ ein Prämaß auf $\mathscr{R}$ und μ^* das im 1. Schritt definierte äußere Maß auf X, so ist $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{R}^*$. Weil $\mu^* \mid \mathscr{R}^*$ ein Maß auf $\mathscr{R}^*$ ist, so ist erst recht $\mu^* \mid \boldsymbol{\sigma}(\mathscr{R})$ ein Maß auf $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{R})$, welches μ fortsetzt.-

Def. Ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathscr{R}$ von Teilmengen von X heißt σ-*endlich*, wenn es eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ in $\mathscr{R}$ gibt, so dass gilt:

(1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$

(2) $X = \bigcup\limits_{m} A_m$

(3) $\mu(A_m) < \infty \;\; \forall\, m \in \mathbb{N}$.

Satz 3. Ist $\mathscr{R}$ ein Ring von Teilmengen einer Menge X und μ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathscr{R}$, so kann μ auf genau eine Weise zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathscr{A}(\mathscr{R})$ fortgesetzt werden.

3. Das Lebesgue-Maß

Mit $\mathscr{T}^n$ bezeichnen wir die Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die sogenannte *Topologie* von $\mathbb{R}^n$. Sei $\mathscr{B}^n = \boldsymbol{\sigma}(\mathscr{T}^n)$. Die Elemente von $\mathscr{B}^n$ heißen die *Borel-Mengen* in $\mathbb{R}^n$.

Auf dem Ring $\mathscr{F}^n$ haben wir das Prämaß λ^n. Dieses ist σ-endlich, lässt sich also nach §2 zu einem eindeutig bestimmten Maß auf $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{F}^n)$ fortsetzen, das wieder mit λ^n bezeichnet wird und das nach §1, Satz 2 durch seine Werte auf $\mathscr{Q}^n$ bestimmt ist.

Satz 1. $\boldsymbol{\sigma}(\mathscr{F}^n) = \mathscr{B}^n$.

Damit folgt:

Satz 2. Es gibt genau ein Maß λ^n auf der Menge $\mathscr{B}^n$ der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^n$, so dass für jeden Quader $[a, b[\, \in \mathscr{Q}^n$ gilt:

$$\lambda^n([a, b\,[) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

λ^n heißt das *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und $A \in \mathscr{B}^n$, so ist $f^{-1}(A) \in \mathscr{B}^n$.

Lemma 2 und Def. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, so erhält man ein Maß μ auf $\mathscr{B}^n$ durch

$$\mu(B) := \lambda^n(f^{-1}(B))\,.$$

Man schreibt $\mu =: f(\lambda^n)$ und nennt $f(\lambda^n)$ das *Bildmaß* von λ^n unter f.

Def. Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Translation*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $T(x) = x + a \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 3. Das Maß λ^n ist translationsinvariant, d.h. für jede Translation T ist $T(\lambda^n) = \lambda^n$.

Def. Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt H eine *affine Hyperebene* in $\mathbb{R}^n$, wenn es einen $(n-1)$-dimensionalen linearen Teilraum V von $\mathbb{R}^n$ und ein $a \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $H = a + V := \{a + v \mid v \in V\}$.

Def. Sei H eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$. Mit S_H bezeichnen wir die orthogonale Spiegelung an H. Sie ist folgendermaßen definiert: Ist $x \in \mathbb{R}^n$, so kann man x auf genau eine Weise in der Form $x = y + z$ schreiben, wobei $y \in H$ und $z \in V^\perp$. (Dabei ist V wie in der vorangehenden Definition und $V^\perp$ ist das Orthogonalkomplement von V, also der 1-dimensionale lineare Teilraum von $\mathbb{R}^n$, der senkrecht auf V steht.) Es ist

$$S_H(x) := y - z\,.$$

S_H ist ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $S_H^{-1} = S_H$.

Lemma 4. Sei H eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $S_H(\lambda^n) = \lambda^n$.

Ein müheloser Beweis von Lemma 4 geht folgendermaßen: Man bezeichnet mit φ eine Drehung, die den Teilraum $V_0 := \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \mid x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$ auf V abbildet. Aus Lemma 1 folgt:

$$\mathscr{B}^n = \boldsymbol{\sigma}(\varphi(\mathscr{Q}^n))\,.$$

Deswegen reicht es zu zeigen: Ist $Q \in \varphi(\mathscr{Q}^n)$, so ist $\lambda^n(S_H(Q)) = \lambda^n(Q)$.
Dies sieht man, indem man Lemma 3 anwendet.

Def. Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Bewegung* oder *Kongruenz*, wenn bzgl. der Euklidischen Norm gilt:

$$\| \, T(x) - T(y) \, \| = \| \, x - y \, \| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Aus der Linearen Algebra weiß man: Jede Bewegung ist das Produkt von endlich vielen Spiegelungen. Deswegen folgt aus Lemma 4:

Satz 3. Das Lebesgue-Maß λ^n ist bewegungsinvariant, d.h.: Ist T eine Bewegung, so ist $T(\lambda^n) = \lambda^n$.

Bem. Die Bewegungsinvarianz von λ^n bedeutet: Für jede Bewegung T und jedes $B \in \mathscr{B}^n$ ist $\lambda^n(T(B)) = \lambda^n(B)$.

Satz 4. Ist H eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, so ist $\lambda^n(H) = 0$.

Folgerung 1. Alle Borel-Mengen, die in einer affinen Hyperebene liegen, haben das Lebesgue-Maß 0. Insbesondere haben die einelementigen Mengen das Maß 0 (falls $n > 0$), und daher haben alle abzählbaren Mengen das Maß 0.

Folgerung 2. Das Lebesgue-Maß eines offenen oder abgeschlossenen, nicht notwendig achsenparallelen Quaders ist das Produkt der Kantenlängen.

Satz 5. Ist $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $B \in \mathscr{B}^n$, so ist $A(B) \in \mathscr{B}^n$ und

$$\lambda^n(A(B)) = |\det A| \cdot \lambda^n(B).$$

Beispiel einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$, die keine Borel-Menge ist:

Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$a \sim b :\Longleftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}\ .$$

Sei A eine Teilmenge von $[0, 1]$, die genau ein Element jeder Äquivalenzklasse enthält. Dann ist $\mathbb{R}$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $A + q$ mit $q \in \mathbb{Q}$. Wäre A eine Borel-Menge, so könnten wir $\lambda^1(A)$ bilden; wegen der Translationsinvarianz von λ^1 wäre $\lambda^1(A+q) = \lambda^1(A)$. Wegen $\lambda^1(\mathbb{R}) = \infty$ folgt, dass $\lambda^1(A) > 0$. Andererseits sind die Mengen $A + q$ für rationale Zahlen $q \in [0, 1]$ unendlich viele disjunkte Teilmengen von $[0, 2]$, was wegen $\lambda^1([0, 2]) = 2$ unmöglich ist.

4. Messbare Abbildungen

Def. Seien $(X, \mathscr{A}_X)$ und $(Y, \mathscr{A}_Y)$ Messräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *messbar* (bzgl. $\mathscr{A}_X$ und $\mathscr{A}_Y$), wenn gilt:
Ist $B \in \mathscr{A}_Y$, so ist $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}_X$.
Wir schreiben dann auch $f : (X, \mathscr{A}_X) \to (Y, \mathscr{A}_Y)$.

Satz 1. Seien X, Y metrische Räume, $\mathscr{B}_X$ und $\mathscr{B}_Y$ seien die Mengen der jeweiligen Borel-Mengen. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist $f : (X, \mathscr{B}_X) \to (Y, \mathscr{B}_Y)$ messbar.

Bem. Sind $f : (X, \mathscr{A}_X) \to (Y, \mathscr{A}_Y)$ und $g : (Y, \mathscr{A}_Y) \to (Z, \mathscr{A}_Z)$ messbar, so ist $g \circ f : (X, \mathscr{A}_X) \to (Z, \mathscr{A}_Z)$ messbar.

Bezeichnungen: a) $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

b) Ist X eine Menge, so nennen wir eine Abbildung $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine *numerische Funktion* auf X.

c) Sei $\overline{\mathscr{B}^1} := \{A \in \mathscr{P}(\overline{\mathbb{R}}) \mid A \cap \mathbb{R} \in \mathscr{B}^1\}$. Dann ist $\overline{\mathscr{B}^1}$ eine σ-Algebra in $\overline{\mathbb{R}}$. Ihre Elemente heißen die Borel-Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$. Die Elemente von $\overline{\mathscr{B}^1}$ sind von der Form B oder $B \cup \{\infty\}$ oder $B \cup \{-\infty\}$ oder $B \cup \{\infty, -\infty\}$ mit $B \in \mathscr{B}^1$.

d) Ist $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum, so heißt eine numerische Funktion f auf X *messbar*, wenn $f : (X, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathscr{B}^1})$ messbar ist.

Im Folgenden sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum.

Beispiel: Sei $A \in \mathscr{P}(X)$. Die *charakteristische Funktion* χ_A von A ist definiert durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls} \quad x \in A \\ 0 & , \quad \text{falls} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Es gilt: χ_A ist messbar $\Longleftrightarrow A \in \mathscr{A}$.

Satz 2. Sei f eine numerische Funktion auf X. Dann sind äquivalent:

a) f ist messbar.

b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{A}$.

c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in \mathscr{A}$.

d) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{A}$.

e) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\} \in \mathscr{A}$.

Satz 3. Seien f, g messbare numerische Funktionen auf X. Dann gilt:

a) $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \in \mathscr{A}$.

b) $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\} \in \mathscr{A}$.

c) $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathscr{A}$.

d) $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathscr{A}$.

Satz 4. Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind $f + g$ und fg messbar.

Man erweitert in naheliegender Weise die Begriffe „Supremum" und „Infimum" aus Analysis I, so dass man Abbildungen

$$\sup, \inf : \mathscr{P}(\overline{\mathbb{R}}) \to \overline{\mathbb{R}}$$

erhält:
Fall 1: Sei $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

- Ist A nicht-leer und nach oben beschränkt, so ist $\sup(A)$ wie üblich die kleinste obere Schranke von A.
- Ist A nicht nach oben beschränkt, so sei $\sup(A) := \infty$.
- Ist $A = \emptyset$, so sei $\sup(A) := -\infty$.

Fall 2: Ist $\infty \in A$, so sei $\sup(A) := \infty$.
Fall 3: Ist $\infty \notin A$, aber $-\infty \in A$, so sei $\sup(A) := \sup(A \cap \mathbb{R})$.

In analoger Weise betrachtet man den Limes einer Folge in $\overline{\mathbb{R}}$.

Def. Sei (a_n) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k \mid k \geq n\}) = \inf\{\sup\{a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k \mid k \geq n\}) = \sup\{\inf\{a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(Beachte: Die Folge $(\sup\{a_k \mid k \geq n\})_n$ ist monoton fallend, daher existiert ihr Limes in $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.)

Bem. Eine Folge (a_n) in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \overline{\mathbb{R}}$, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Satz 5. Seien f_n $(n \in \mathbb{N})$ messbare numerische Funktionen.

a) Die Funktionen $\sup\limits_n f_n$ und $\inf\limits_n f_n$ sind messbar.

b) Die Funktionen $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ sind messbar.

c) Die Folge (f_n) konvergiere punktweise in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ messbar.

5. Integrationstheorie

Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Def. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *nicht-negative Treppenfunktion* auf X, wenn gilt:

$f(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in X$,
f ist messbar,
f nimmt nur endlich viele Werte an.

Sei $\mathscr{T}^+ = \mathscr{T}^+(X)$ die Menge der nicht-negativen Treppenfunktionen auf X.

Bez. Sei $f \in \mathscr{T}^+$. Ist X die disjunkte Vereinigung von $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{A}$ und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in [0, \infty[$ mit $f = \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i\, \chi_{A_i}$ (wobei die α_i nicht notwendig verschieden sind), so nennen wir die Zerlegung $f = \sum \alpha_i\, \chi_{A_i}$ eine *Normaldarstellung* von f.

Def. Sei $f \in \mathscr{T}^+$ und sei $f = \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i\, \chi_{A_i}$ eine Normaldarstellung von f. Dann heißt $\int f\, d\mu := \sum\limits_{j=1}^m \alpha_i\, \mu(A_i)$ das *Integral* von f.

Satz 1. Sei $\mathscr{M}^+$ die Menge aller messbaren, nicht-negativen numerischen Funktionen auf X. Für jedes $f \in \mathscr{M}^+$ gibt es eine wachsende Folge (g_n) in $\mathscr{T}^+$ mit $f = \sup\limits_n g_n$.

Bew.: Man kann setzen

$$g_n := \sum_{i=0}^{n\cdot 2^n} \frac{i}{2^n}\, \chi_{A_{i,n}}$$

$$A_{i,n} := \{x \in X \mid \frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n}\} \text{ für } i = 0, 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n - 1$$

$$A_{n\cdot 2^n, n} := \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$$

Def. Sei $f \in \mathscr{M}^+$. Man wählt eine wachsende Folge (g_n) in $\mathscr{T}^+$ mit $f = \sup\limits_n g_n$ und setzt

$$\int f\, d\mu := \sup_n \int g_n\, d\mu.$$

Dies ist wohldefiniert, d.h. $\int f\, d\mu$ hängt nicht von der Wahl der Folge (g_n) ab.

Satz 2. (Satz von der monotonen Konvergenz)
Ist (f_n) eine wachsende Folge in $\mathscr{M}^+$, so ist $\sup\limits_n f_n \in \mathscr{M}^+$ und

$$\int \sup_n f_n\, d\mu = \sup_n \int f_n\, d\mu.$$

Folgerung: Ist (f_n) eine Folge in $\mathscr{M}^+$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathscr{M}^+$ und

$$\int (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Bez. Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sei $f^+ := \sup(f, 0)$, $f^- := (-f)^+ = -\inf(f, 0)$. Dann ist $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.
f ist genau dann messbar, wenn f^+ und f^- messbar sind.

Def. Eine numerische Funktion f auf X heißt $(\mu-)$*integrierbar*, wenn sie messbar ist und wenn $\int f^+\, d\mu$ und $\int f^-\, d\mu$ endlich sind. Dann schreiben wir

$$\int f\, d\mu := \int_X f(x)\, d\mu(x) := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

und nennen diese reelle Zahl das *Integral* von f.

Bem. Eine messbare Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn $\int |f|\, d\mu < \infty$.

Satz 3. Sind f, g integrierbare numerische Funktionen auf X, $\alpha \in \mathbb{R}$, so sind auch αf, $f + g$ (falls dies auf ganz X definiert ist), $\sup(f, g)$ und $\inf(f, g)$ integrierbar, und

$$\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu\ , \ \int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Ist $f \leq g$, so ist $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.
Insbesondere ist $|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu$.

Beispiel 1. Sei X eine Menge, $a \in X$. Betrachte den Maßraum $(X, \mathscr{P}(X), \delta_a)$ mit
$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } a \in A \\ 0 & , \text{ sonst}\,. \end{cases}$
Integrierbar bezüglich δ_a ist eine Funktion f genau dann, wenn $|f(a)| < \infty$, und dann ist $\int f\, d\delta_a = f(a)$.

Beispiel 2. Sei $X = \mathbb{N}$. Es gibt genau ein Maß μ auf $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ mit $\mu(\{n\}) = 1 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$.
Die numerischen Funktionen auf X sind die Folgen $f = (f(n))_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$.
Ist $f \in \mathscr{M}^+$, so ist $\int f\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.
(Bew.: Ist $\infty \in f(\mathbb{N})$, also etwa $f(m) = \infty$, so ist $f \geq n\chi_{\{m\}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\int f\, d\mu \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $\int f\, d\mu = \infty$.
Ist $\infty \notin f(\mathbb{N})$, so ist $g_n := f \cdot \chi_{\{1,\ldots,n\}} \in \mathscr{T}^+$, und (g_n) ist eine wachsende Folge mit $f = \sup g_n$. Daher ist

$$\int f\, d\mu = \sup \int g_n\, d\mu = \sup \int \ (\sum_{k=1}^{n} f(k)\chi_{\{k\}})\, d\mu = \sup \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\ .)$$

Eine numerische Funktion f auf $\mathbb{N}$ ist genau dann μ-integrierbar, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert, und dann ist $\int f\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Def. Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

a) $N \subseteq X$ heißt $\mu-$*Nullmenge*, wenn $N \in \mathscr{A}$ und $\mu(N) = 0$.

b) Sei E eine Eigenschaft, die jeder Punkt von X hat oder nicht hat. Wir sagen: "Fast alle Punkte von X besitzen die Eigenschaft E" oder "E gilt fast überall auf X", wenn alle Punkte, für die E nicht gilt, in einer Nullmenge enthalten sind.

Satz 4. Für $f \in \mathscr{M}^+$ gilt:

$$\int f\, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ fast überall.}$$

Folgerung. Zwei integrierbare Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, haben dasselbe Integral.
Wir nennen demgemäß von nun an eine Funktion *integrierbar*, wenn sie integrierbar im bisherigen Sinn wird, wenn man sie eventuell auf einer Nullmenge abändert oder ergänzt.

Bezeichnungen:
a) Ist f eine in diesem erweiterten Sinn λ^n-integrierbare numerische Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so heißt f *Lebesgue-integrierbar*; statt $\int f\, d\lambda^n$ schreibt man auch

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda^n(x) \quad \text{oder} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \quad \text{oder} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

und nennt dies das *Lebesgue-Integral* von f.
b) Allgemeiner: Ist $Y \in \mathscr{B}^n$, so sei $\mathscr{B}^n(Y) := \{B \in \mathscr{B}^n \mid B \subseteq Y\}$.
Dann ist $\mathscr{B}^n(Y)$ eine $\sigma-$Algebra in Y. Durch $B \mapsto \lambda^n(B)$ erhält man ein Maß $\lambda^n|\,Y$ auf $\mathscr{B}^n(Y)$.
Man hat also einen Maßraum $(Y, \mathscr{B}^n(Y), \lambda^n|\,Y)$.
Ist $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion, die integrierbar bezüglich $\lambda^n|\,Y$ ist, so schreibt man

$$\int\limits_Y f\, d\lambda^n \quad \text{oder} \quad \int\limits_Y f(x)\, d\lambda^n(x) \quad \text{oder} \quad \int\limits_Y f(x)\, dx \quad \text{oder} \quad \int\limits_Y f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

statt $\int f\, d(\lambda^n|\,Y)$.

6. Die Vertauschbarkeit des Integrals mit Grenzprozessen

Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.
Wir kennen bereits den Satz von der monotonen Konvergenz. Daraus folgt leicht:

Satz 1. ("Lemma von Fatou") Sei (f_n) eine Folge in $\mathscr{M}^+$ und $f := \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$.
Dann ist $f \in \mathscr{M}^+$ und

$$\int f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Satz 2. (Satz von der majorisierten Konvergenz)
Sei (f_n) eine Folge integrierbarer $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen auf X, die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare $\mathbb{R}$-wertige Funktion g auf X mit $|\,f_n(x)| \leq g(x) \;\; \forall\, x \in X, n \in \mathbb{N}$. Dann ist f integrierbar und

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Bew.: Wende das Lemma von Fatou an auf die Folge $(|f| + g - |f_n - f|)_n$.

Satz 3. Sei $\mu(X) < \infty$. Sei (f_n) eine Folge $\mathbb{R}$-wertiger integrierbarer Funktionen auf X, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Satz 4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f Lebesgue-integrierbar (im erweiterten Sinn wie am Ende von §5), und das Riemann-Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ und das Lebesgue-Integral $\int\limits_{[a,b]} f(x)\,d\lambda^1(x)$ stimmen überein.

Bemerkung. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die *uneigentlich* integrierbar ist im Sinne von Analysis I, ist nicht notwendigerweise Lebesgue-integrierbar, nämlich dann nicht, wenn $|f|$ nicht uneigentlich integrierbar ist, wie es z.B. für die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ der Fall ist.

Bezeichnungen: Ist I ein Intervall mit den Endpunkten a, b, wobei $-\infty \le a < b \le \infty$, und ist f eine auf I Lebesgue-integrierbare numerische Funktion, so schreibt man $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ statt $\int\limits_I f\,d\lambda^1$.

Wenn man irgendwo $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ liest, ist immer zu klären, ob es sich um das Integral einer Lebesgue-integrierbaren Funktion oder um ein uneigentliches Integral handelt!

Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Für $t \in I$ sei $f_t : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_t(x) := f(t, x)$.
Für $x \in X$ sei $f^x : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f^x(t) := f(t, x)$.
Wenn f^x an der Stelle t differenzierbar ist, so schreiben wir

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) := (f^x)'(t)$$

und sagen, dass $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ existiert.

Satz 5. $f : I \times X \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:

a) Für alle $t \in I$ ist f_t integrierbar.

b) Für alle $t \in I, x \in X$ existiere $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$.

c) Es gebe eine integrierbare Funktion g mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \le g(x) \quad \forall\, t \in I, x \in X.$$

Definiere $F : I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := \int\limits_X f(t, x)\,d\mu(x).$$

Dann gilt:

1) F ist differenzierbar.

2) $(\frac{\partial f}{\partial t})_t : X \to \mathbb{R}$ ist integrierbar für $t \in I$.

3) $F'(t) = \int\limits_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x) \;\; \forall\, t \in I$.

7. Der Satz von Fubini

Bezeichnungen: a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $N := n + m$.
Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^N$ in der Form (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$.
b) Ist $E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, so sei

$$E_x := \{\eta \in \mathbb{R}^m |\, (x, \eta) \in E\},$$

$$E^y := \{\xi \in \mathbb{R}^n |\, (\xi, y) \in E\}.$$

Satz 1. Sei $E \in \mathscr{B}^N$. Dann gilt:

1) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $E_x \in \mathscr{B}^m$.

2) Die numerische Funktion $x \mapsto \lambda^m(E_x)$ auf $\mathbb{R}^n$ ist messbar.

3) $\lambda^N(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lambda^m(E_x)\, d\lambda^n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda^n(E^y)\, d\lambda^m(y)$.

Folgerung. (Cavalierisches Prinzip) Seien $E, E' \in \mathscr{B}^N$ mit $\lambda^m(E_x) = \lambda^m(E'_x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\lambda^N(E) = \lambda^N(E')$.

Satz 2. Sei f eine messbare nicht-negative numerische Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und sei

$$M^f := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t < f(x)\}.$$

Dann ist $M^f \in \mathscr{B}^{n+1}$ und

$$\lambda^{n+1}(M^f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda^n.$$

Beispiel. Das Kugelvolumen. Sei $B_{n,r} := \{x \in \mathbb{R}^n |\, \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2\}$. Man zeigt durch Induktion nach n:

$$\lambda^n(B_{n,r}) = \begin{cases} \frac{1}{m!}\, \pi^m\, r^{2m} & \text{für} \quad n = 2m \\ \frac{2^m}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2m-1)}\, \pi^{m-1}\, r^{2m-1} & \text{für} \quad n = 2m-1. \end{cases}$$

Satz 3. Sei f eine messbare nicht-negative numerische Funktion auf $\mathbb{R}^N$, $N = n+m$. Dann sind die folgenden 4 numerischen Funktionen messbar und nicht negativ:

1) $x \mapsto f(x, y)$ für festes $y \in \mathbb{R}^m$,

2) $y \mapsto f(x, y)$ für festes $x \in \mathbb{R}^n$,

3) $y \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, d\lambda^n(x)$,

4) $x \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, d\lambda^m(y)$,

und es gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d\lambda^N(x,y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\lambda^m(y)\Big)\,d\lambda^n(x)\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\lambda^n(x)\Big)\,d\lambda^m(y).\end{aligned}$$

Satz 4. (Fubini) Sei f eine integrierbare numerische Funktion auf $\mathbb{R}^N$, $N = n+m$. Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist dann die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar auf $\mathbb{R}^m$, die f.ü. definierte Funktion $x \mapsto \int f(x,y)\,d\lambda^m(y)$ ist integrierbar auf $\mathbb{R}^n$, und es gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d\lambda^N(x,y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\lambda^m(y)\Big)\,d\lambda^n(x)\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\lambda^n(x)\Big)\,d\lambda^m(y).\end{aligned}$$

Folgerung. Sei f Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda^n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\dots \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\Big) \dots \Big)\,dx_n.$$

Man kann auch jede andere Reihenfolge der Variablen $x_1,\dots,x_n$ benutzen.

Bem. Im Satz von Fubini ist die Voraussetzung, dass f integrierbar ist, wichtig. In vielen Fällen überprüft man für messbares f diese Voraussetzung so:
Man muss zeigen, dass $|f\,|$ integrierbar ist, d.h. dass $\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f\,|\,d\lambda^N < \infty$. Dafür rechnet man $\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f\,|\,d\lambda^N$ mithilfe von Satz 3 aus.

8. Die Transformationsformel

Def. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\,,\infty\}$ und seien U, V offen in $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ heißt ein C^k-*Diffeomorphismus* von U nach V, wenn gilt:
a) φ ist eine Bijektion,
b) φ ist von der Klasse C^k,
c) $\varphi^{-1} : V \to U$ ist von der Klasse C^k.

Bem. a) C^0-Diffeomorphismus = Homöomorphismus.
b) Ist $\varphi : U \to V$ ein Homöomorphismus und $A \subseteq U$ eine Borel-Menge, so ist $\varphi(A) = (\varphi^{-1})^{-1}(A)$ eine Borel-Menge nach Paragraph 4, Satz 1.

Satz 1. (Transformationsformel) Seien U, V offen in $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \to V$ sei ein C^1-Diffeomorphismus.
a) Ist $A \subseteq U$ eine Borel-Menge, so ist

$$\lambda^n(\varphi(A)) = \int\limits_A |\det D\varphi(x)\,|\,dx.$$

b) Ist eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist $|\det D\varphi\,| \cdot (f \circ \varphi) : U \to \mathbb{R}$ integrierbar und

$$\int\limits_V f(y)\,dy = \int\limits_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)\,|\,dx.$$

Der Beweis benutzt unter anderem die folgenden Resultate: Aus der Analysis II die Kettenregel und den Umkehrsatz, aus der Analysis III den Satz von der monotonen

Konvergenz, Fubini und den Satz 5 aus §1, der sagt, wie sich das Volumen unter einer linearen Abbildung ändert.

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten. Definiere $\varphi : [0,\infty[\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ durch $\varphi(r,t) := (r\cdot\cos t, r\cdot\sin t)$.

Satz 2. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist die Funktion

$$(r,t) \mapsto r\cdot f(\varphi(r,t))$$

über $[0,\infty[\times[0,2\pi]$ integrierbar und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos t, r\sin t)\cdot r\,dr\,dt.$$

Bew. Wende Satz 1 an mit $U :=]0,\infty[\times]0,2\pi[$, $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \geq 0\}$.
Dann liefert φ einen C^1-Diffeomorphismus von U auf V, und $\mathbb{R}^2 \setminus V$ und $([0,\infty[\times[0,2\pi]) \setminus U$ sind Nullmengen.

Anwendung:

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\Big)^2 = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\Big)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi$$
$$= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\,dr = 2\pi\Big[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^{\infty} = \pi$$
$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

9. Die Räume L^p

Bezeichnungen: Sei $(X,\mathscr{A},\mu)$ ein Maßraum, $p \in [1,\infty[$.

a) Ist f eine messbare numerische Funktion auf X, so sei

$$\| f \|_p := \Big(\int | f |^p\,d\mu\Big)^{1/p} \in [0,\infty].$$

(Beachte: Mit f sind auch $| f |$ und $| f |^p$ nach Paragraph 4 messbar.)

b) $\mathscr{L}^p(X) := \mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu) := \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist messbar und } \| f \|_p < \infty\}$.

Bem. $\mathscr{L}^1(X) = \{$ integrierbare $\mathbb{R}$-wertige Funktionen auf $X\}$.

Beispiel: Sei $X = \{1,2,\ldots,n\}, \mathscr{A} = \mathscr{P}(X), \mu(\{k\}) = 1\ \ \forall\, k \in X$.

Dann sind alle Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar, und $\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(i)$. Die Menge aller Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ kann mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden vermöge $f \leftrightarrow (f(1),\ldots,f(n))$. Also $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu) = \mathbb{R}^n$, und unter dieser Identifikation gilt für $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\| x \|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Dies ist die übliche p-Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Satz 1. (Höldersche Ungleichung) Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $1 < p < \infty$, und sei q definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Dann gilt für zwei messbare reellwertige Funktionen f, g auf X:

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q .$$

Sind insbesondere $f, g \in \mathscr{L}^2(X)$, so ist fg integrierbar.

Folgerung. Ist $\mu(X) < \infty$, so ist $\mathscr{L}^p(X) \subseteq \mathscr{L}^1(X)$ für $p \geq 1$.

Satz 2. (Minkowskische Ungleichung) Ist $1 \leq p < \infty$ und sind f, g messbare reellwertige Funktionen auf X, so ist

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p \; + \; \| g \|_p \; .$$

Sind insbesondere $f, g \in \mathscr{L}^p(X)$, so ist auch $f + g \in \mathscr{L}^p(X)$.
Daher ist $\mathscr{L}^p(X)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Bem. Im Allgemeinen ist $(\mathscr{L}^p(X), \| \, . \, \|_p)$ *kein* normierter Raum, denn es kann Funktionen $f \neq 0$ geben mit $\| f \|_p = 0$.
Nach Paragraph 5, Satz 4 ist

$$\{f \in \mathscr{L}^p(X) \mid \; \| f \|_p = 0\} = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und } f = 0 \text{ f.ü.}\} =: \mathscr{N}(X).$$

Dies ist ein Untervektorraum von $\mathscr{L}^p(X)$.

Def. $L^p(X) := \mathscr{L}^p(X)/\mathscr{N}(X)$.

Ist $f \in \mathscr{L}^p(X)$, so bezeichne $\tilde{f}$ die Klasse von f in $L^p(X)$.
Durch $\| \tilde{f} \|_p :=\| f \|_p$ wird $L^p(X)$ zu einem normierten Raum.

Satz 3. (Fischer-Riesz) Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(X)$ ein Banach-Raum.