Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2012/13

Wilhelm Singhof

1. Die reellen Zahlen

Mathematische Objekte (z.B. Zahlen, Funktionen, Punkte oder Geraden in der Ebene, ...) können zu *Mengen* zusammengefasst werden. Ist M eine Menge und a ein mathematisches Objekt, so schreibt man $a \in M$, wenn a zu M gehört und nennt a ein *Element* von M; andernfalls schreibt man $a \notin M$.

Beispiel: Sei M die Menge, die aus den beiden natürlichen Zahlen 1 und 2 besteht. Man schreibt $M = \{1, 2\}$. Es ist $1 \in M$, $3 \notin M$.

Sind M und N zwei Mengen und ist jedes Element von N auch Element von M, so nennt man N eine *Teilmenge* von M und schreibt $N \subseteq M$. Zwei Mengen M und N heißen *gleich* (in Zeichen $M = N$), wenn sie dieselben Elemente enthalten, also genau dann, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ ist.

Die Menge, die keine Elemente enthält, nennt man die *leere Menge*; sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Für jede Menge M ist $\emptyset \subseteq M$.

Die *reellen Zahlen* sind eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit zwei Rechenvorschriften, die je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ und ein Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, wobei ferner eine Teilmenge $\mathbb{R}_{>0}$ von $\mathbb{R}$ ausgezeichnet ist, deren Elemente die *positiven Zahlen* heißen (wir schreiben $x > 0$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$), so dass die folgenden drei Gruppen I, II, III von Axiomen erfüllt sind:

I. Algebraische Axiome:

I.a) **Kommutativgesetze:** $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$.
I.b) **Assoziativgesetze:** $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(xy)z = x(yz)$.
I.c) **Null und Eins:** Es gibt Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und $x + 0 = x$ und $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
I.d) **Inverse Elemente:** Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $-x \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$; zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gibt es eine Zahl $x^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$.
I.e) **Distributivgesetz:** $x(y + z) = xy + xz$.

Statt „ $\mathbb{R}$ erfüllt die Axiome I.a) - I.e)" sagt man kurz: „ $\mathbb{R}$ ist ein Körper ".

II. Anordnungsaxiome:

II.a) Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt genau eine der folgenden 3 Möglichkeiten:

$$x > 0 \ , \ x = 0 \ , \ -x > 0.$$

II.b) Ist $x > 0$ und $y > 0$, so ist $x + y > 0$ und $xy > 0$.

Bevor wir III formulieren können, müssen wir einige Bemerkungen zu den Axiomengruppen I und II machen:

(1) $1 > 0$.

Bew.: Nach I.c) ist $1 \neq 0$. Nach II.a) ist daher entweder $1 > 0$ oder $-1 > 0$. Angenommen, es wäre $-1 > 0$, so wäre $(-1) \cdot (-1) > 0$ nach II.b), also, da $(-1) \cdot (-1) = 1$ nach I., auch $1 > 0$. Damit wäre gleichzeitig $1 > 0$ und $-1 > 0$, im Widerspruch zu II.a). Deswegen ist die Annahme $-1 > 0$ falsch, und es gilt $1 > 0$.

(2) Die Elemente $x \in \mathbb{R}$ mit $-x > 0$ heißen *negativ*. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so schreiben wir $x < y$ oder $y > x$, falls $y - x > 0$.
Insbesondere bedeutet $x < 0$, dass $-x > 0$, also dass x negativ ist.
Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt nach II.a) genau eine der folgenden Möglichkeiten:

$$x > y \ , \ x = y \ , \ x < y.$$

(3) Ist $x < 0$ und $y < 0$, so ist $xy > 0$.

(4) Ist $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$, so ist $x^2 > 0$.

(5) Sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $y < z$, so ist $x < z$.

(6) Ist $x < y$ und $z > 0$, so $xz < yz$.
Ist $x < y$ und $z < 0$, so $xz > yz$.

(7) Ist $x < 0$ und $z > 0$, so ist $xz < 0$.

(8) Ist $x > 0$, so ist $x^{-1} > 0$.

(9) Ist $x < y$ und $z \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $x + z < y + z$.

(10) Ist $0 < x < y$, so ist $y^{-1} < x^{-1}$.

(11) Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so schreiben wir $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$. Für $x \leq y$ schreiben wir auch $y \geq x$.

(12) Ist $0 < x < y$, so ist $x^2 < y^2$.
Sind $x, y > 0$ und ist $x^2 < y^2$, so ist $x < y$.

Def. Ist $x \in \mathbb{R}$, so sei

$$| x | := \begin{cases} x & , \quad \text{falls } x \geq 0, \\ -x & , \quad \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

$| x |$ heißt der *Absolutbetrag* von x.

(13) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $| -x | = | x | \geq 0$; ist $x \neq 0$, so ist $| x | > 0$.
$| x - y |$ ist, anschaulich gesprochen, der Abstand zwischen x und y.

(14) $x \leq | x |$.

(15) Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $| xy | = | x | \cdot | y |$.

(16) **Dreiecksungleichung:** $| x + y | \leq | x | + | y |$.

(17) $| \, | x | - | y | \, | \leq | x - y |$.

(18) Es ist $0 < 1 < 2 = 1 + 1 < 3 = 2 + 1 < \ldots$. Diese Zahlen sind also alle voneinander verschieden. Die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet; ihre Elemente heißen *natürliche Zahlen*.
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Die Menge $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}$ heißt die Menge der *ganzen Zahlen*, und $\mathbb{Q} := \{\frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}\}$ heißt die Menge der *rationalen Zahlen*. $\mathbb{Q}$ erfüllt die Axiome I und II.

Kommentar hierzu: Sind M und N zwei Mengen, so sei $M \cup N$ die Menge, die aus allen Elementen besteht, die in M oder in N (oder in beiden) liegen. $M \cup N$ heißt die *Vereinigung* von M und N.

$M \cap N$ sei die Menge, die aus allen Elementen besteht, die in M und in N liegen. $M \cap N$ heißt der *Durchschnitt* von M und N.

$\{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: $-x \in \mathbb{N}$.
Also $\{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\} = \{-1, -2, -3, \ldots\} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt M *nach oben beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c$ für alle $x \in M$. Ein solches c heißt eine *obere Schranke* von M.
M heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq d$ für alle $x \in M$. Ein solches d heißt eine *untere Schranke* von M.
M heißt *beschränkt*, wenn es nach oben und unten beschränkt ist.
Wenn es eine kleinste obere Schranke c von M gibt (d.h. c ist obere Schranke und jedes $c' \in \mathbb{R}$ mit $c' < c$ ist keine obere Schranke von M), so heißt c das *Supremum* von M; schreibe $c =: \sup M$. Wenn es eine größte untere Schranke d von M gibt, so heißt d das *Infimum* von M; schreibe $d =: \inf M$.

III. Vollständigkeitsaxiom: Ist M eine nicht-leere nach oben beschränkte Menge, so besitzt M ein Supremum.

Satz 1: Ist $a \in \mathbb{R}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq a$.

Satz 2: Ist $b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq b$.

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es ein $x_o \in M$ gibt mit $x \leq x_o$ für alle $x \in M$, so heißt x_o das *Maximum* von M; schreibe $x_o =: \max M$. Entsprechend definiert man das *Minimum* $\min M$.

Bem. a) Wenn $\max M$ existiert, so ist M nach oben beschränkt, und $\max M = \sup M$.
b) Wenn M nach oben beschränkt ist und $\sup M \in M$ gilt, so ist $\sup M$ das Maximum von M.

Bez. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *(abgeschlossenes Intervall)*

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *(offenes Intervall)*

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *(halboffenes Intervall)*

$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ *(halboffenes Intervall)*

Bem. Wir werden in §5 sehen: Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so gibt es genau ein $b \geq 0$ mit $b^n = a$. Wir schreiben

$$b =: \sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} .$$

Nach (4) gilt: Ist $a < 0$ und ist n gerade, so gibt es kein $b \in \mathbb{R}$ mit $b^n = a$. Ist $a > 0$ und ist n ungerade, so ist

$$(-\sqrt[n]{a})^n = -a .$$

2. Folgen und ihre Grenzwerte

Def. Sind X und Y Mengen, so ist eine *Abbildung* von X in Y eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man schreibt dafür

$$f : X \to Y\,.$$

Def. Ist Y eine Menge, so ist eine *Folge in* Y eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to Y$; man schreibt oft a_n statt $a(n)$ und spricht von der ,, Folge (a_n)" statt von der Folge a.
Statt ,, Folge in $\mathbb{R}$" sagen wir kurz ,, Folge".
Gelegentlich lassen wir auch zu, dass eine Folge a auf einer Teilmenge $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$ von $\mathbb{Z}$ statt auf $\mathbb{N}$ definiert ist und reden dann von der Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$.

Def. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und sei $b \in \mathbb{R}$. Die Folge heißt *konvergent* gegen b, falls gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\mid a_n - b \mid < \epsilon$ für alle $n \geq N$.
Man nennt dann b den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge (a_n) und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ oder ,, $a_n \to b$ für $n \to \infty$".

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent.*

Satz 1. Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beispiel (1): Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a_n := a \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Dann heißt (a_n) eine *konstante Folge.* Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiel (2): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Beispiel (3): Sei $a_n := (-1)^n$. Dann konvergiert (a_n) nicht.

Beispiel (4): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Def. Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Bem. Genau dann ist (a_n) beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mid a_n \mid \leq M \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Satz 2. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Def. Eine Folge (a_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt eine *Nullfolge.*

Bem. Sei (a_n) eine Folge. Genau dann ist $a_n \to a$, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

Satz 3. Ist (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkte Folge, so ist $(a_n b_n)$ Nullfolge.

Satz 4. (Rechenregeln für Grenzwerte) (a_n) und (b_n) seien Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$.
1) $a_n + b_n \to a + b$, $a_n - b_n \to a - b$.
2) $a_n b_n \to ab$.
3) Ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n, und $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.

Beispiel (5): $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{3n^2 + 1} = \dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} \to \dfrac{1}{3}$

Satz 5. Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen, $a_n \to a$, $b_n \to b$. Falls $a_n \geq b_n$ für fast alle n, so ist $a \geq b$.

Satz 6. (Bernoullische Ungleichung) Sei $x \geq -1$. Dann gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 7. Für $\mid a \mid < 1$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, und für $\mid a \mid > 1$ divergiert die Folge (a^n).