Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2013

Wilhelm Singhof

Teil I: Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

1. Normierte und metrische Räume: Definitionen und Beispiele

Def. Sei V ein (reeller) Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\| \,.\, \|: V \to \mathbb{R}\,,\; v \mapsto \| v \|\,,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

(1) $\| v \| \geq 0$ für alle $v \in V$.

(2) $\| v \| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

(3) $\| \alpha v \| = | \alpha | \cdot \| v \|$ für $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$ für alle $v, w \in V$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *normierter Raum* ist ein Paar $(V, \| \,.\, \|)$, wobei V ein Vektorraum und $\| \,.\, \|$ eine Norm auf V ist. Meist sagt man: "Sei V ein normierter Raum" statt "sei $(V, \| \,.\, \|)$ ein normierter Raum".

Beispiel: Auf $V = \mathbb{R}^n$ erhält man Normen $\| \,.\, \|_1$, $\| \,.\, \|_\infty$ und $\| \,.\, \|_2$ folgendermaßen: Ist $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so sei

$$\begin{aligned}
\| v \|_1 &:= | x_1 | + \ldots + | x_n |, \\
\| v \|_\infty &:= \max\{ | x_1 |, \ldots, | x_n | \}, \\
\| v \|_2 &:= (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Um die Dreiecksungleichung für $\| \,.\, \|_2$, die sog. *Euklidische Norm*, nachzuweisen, braucht man:

Satz 1. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sind $v = (x_1, \ldots, x_n)$, $w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$| x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n | \leq \| v \|_2 \cdot \| w \|_2\,.$$

Bem. Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist $\| v \|_\infty \leq \| v \|_2 \leq \| v \|_1 \leq n \cdot \| v \|_\infty$.

Allgemeiner gilt: Zwei Normen $\| \,.\, \|$ und $| \,.\, |$ auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive reelle Zahlen a, A gibt mit

$$a \,\| v \| \leq | v | \leq A \,\| v \| \quad \forall\, v \in V.$$

Def. Sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden vier Eigenschaften:

(I) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

(II) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(III) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

(IV) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x, y, z \in X$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge und d eine Metrik auf X ist. Man sagt oft „X ist metrischer Raum " statt „(X, d) ist metrischer Raum".

Beispiel: Sei V ein normierter Raum. Definiere $d : V \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \| x - y \| .$$

Dann ist V ein metrischer Raum.

Beispiel: Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$, so wird Y mit der Einschränkung von d auf $Y \times Y$ ein metrischer Raum.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann heißt die Menge

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$$

die *offene Kugel* und

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$$

die *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r.

2. Einige grundlegende topologische Begriffe

Def. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt A *offen in* X, wenn gilt: Ist $x \in A$, so existiert ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq A$.

Satz 1. Eine offene Kugel in einem metrischen Raum X ist offen in X.

Satz 2. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

a) X und $\emptyset$ sind offen in X.

b) Ist I irgendeine Menge und sind die A_i mit $i \in I$ offen in X, so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen in X.

c) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $A_1, \ldots, A_n$ offen in X, so ist $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ offen in X.

Beispiel: $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ ist offen in $\mathbb{R}$. Aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt *Umgebung* von x in X, wenn es eine offene Teilmenge A von X gibt mit

$$x \in A \subseteq U.$$

Eigenschaften von Umgebungen:

(1) Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

  (a) U ist Umgebung von x.

  (b) Es gibt ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq U$.

(2) Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.

(3) Ist U Umgebung von x und $V \supseteq U$, so ist V Umgebung von x.

(4) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von x ist eine Umgebung von x.

Beispiel: Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit den Normen $\| \, . \, \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Diese drei Normen besitzen dieselben offenen Mengen.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.
x heißt *Häufungspunkt* von A, falls in jeder Umgebung von x ein von x verschiedener Punkt von A liegt.
x heißt *Berührungspunkt* von A, falls in jeder Umgebung von x ein Punkt von A liegt.

Bem. x ist Berührungspunkt von $A \iff x \in A$ oder x ist Häufungspunkt von A.

Satz 3. und Def. Sei X metrischer Raum, $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

(a) A enthält alle Häufungspunkte von A.

(b) A enthält alle Berührungspunkte von A.

(c) $X \setminus A$ ist offen in X.

Wenn A diese Eigenschaften hat, so heißt A *abgeschlossen* in X.

Satz 4. Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

1) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

2) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Satz 5. Sei X ein metrischer Raum und A eine endliche Teilmenge von X. Dann ist A abgeschlossen in X.

Def. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *Grenzwert* der Folge (x_n), wenn eine der vier folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ für $n \geq N$.

2. $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x_0) = 0$ im Sinne von Analysis I.

3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ für $n \geq N$.

4. Für jede Umgebung U von x_0 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq N$.

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. Wenn (x_n) den Grenzwert x_0 besitzt, so sagt man, dass (x_n) gegen x_0 *konvergiert* und schreibt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ oder $x_n \to x_0$.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\| \, . \, \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Sei $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $x^k = (\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$ und sei $x^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n$.
Genau dann ist $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^0$, wenn für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq n$ gilt: $\lim\limits_{k \to \infty} \xi_\nu^k = \xi_\nu^0$.

Bem. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$.

a) x ist Berührungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \to x$.

b) x ist Häufungspunkt von $A \iff$ es existiert eine Folge (x_n) in A mit $x_n \neq x$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x$.

c) A ist abgeschlossen in $X \iff$ ist (x_n) eine Folge in A, so dass $x_0 = \lim x_n$ in X existiert, so ist $x_0 \in A$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $x \in X$. Dann heißt x ein *innerer Punkt* von A, wenn A eine Umgebung von x ist. Sei $\mathring{A}$ die Menge aller inneren Punkte von A; sie heißt das *Innere* von A.

Satz 6. Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist $\mathring{A}$ die größte offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist.

Satz 7. Ist V ein normierter Raum, $x \in V$, $r > 0$ und $A := \overline{B}_r(x)$, so ist $\mathring{A} = B_r(x)$.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Sei $\overline{A}$ die Menge aller Berührungspunkte von A in X. Sie heißt der *Abschluss* von A.

Satz 8. a) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

b) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A umfasst.

Def. Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X\,, x \in X$.
x heißt *Randpunkt* von A in X, wenn x Berührungspunkt von A und von $X \setminus A$ ist.
Sei ∂A die Menge der Randpunkte von A in X, also $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
∂A heißt der *Rand* von A in X.

Bem. ∂A ist abgeschlossen in X.
X ist die disjunkte Vereinigung von $\mathring{A}\,, \partial A$ und $(X \setminus A)^\circ$.

3. Stetige Abbildungen

Def. Seien $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $x_0 \in X$. Dann heißt f *stetig im Punkt* x_0, wenn eine der folgenden 3 äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass gilt: Ist $x \in X$ mit $d(x_0, x) < \delta$, so ist $d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$.
3. Zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subseteq V$.

Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Beispiele:1) Eine konstante Abbildung ist stetig.

2) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist stetig.

3) Seien X, Y, Z metrische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, $x_0 \in X$. Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig ist, so ist $g \circ f : X \to Z$ in x_0 stetig.

Satz 1. Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:

a) f ist stetig.

b) Ist A offen in Y, so ist $f^{-1}(A)$ offen in X.

c) Ist B abgeschlossen in Y, so ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X.

d) Ist (x_n) eine konvergente Folge in X, so ist $(f(x_n))$ konvergente Folge in Y und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.

Satz 2. Seien X, Y metrische Räume, $f, g : X \to Y$ stetig.
Dann ist $A := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X.

Satz 3. Sei X ein metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $A := \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ abgeschlossen in X.

Bem. Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ mit Abbildungen $f_k : X \to \mathbb{R}$. Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\| \cdot \|_\infty$, $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_1$.
Genau dann ist f stetig, wenn alle f_k stetig sind.

Def. Eine Teilmenge X eines normierten Raumes V heißt *beschränkt*, wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $\| v \| \leq M$ für alle $v \in X$.

Satz 4. Sei X eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und $f : X \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $f(X)$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Insbesondere nimmt f auf X sein Maximum und sein Minimum an.

4. Partielle Ableitungen

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $U_i := \{t \in \mathbb{R} \mid (x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in U\}$.
Dann ist U_i eine offene Umgebung von x_i in $\mathbb{R}$.
Man definiert $F_i : U_i \to \mathbb{R}$ durch

$$F_i(t) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

f heißt *im Punkt x partiell differenzierbar*, wenn für $i = 1, \ldots, n$ die Funktion F_i in x_i differenzierbar ist. Schreibe dann

$$D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := F_i'(x),$$

und nenne dies die *i-te partielle Ableitung* von f in x.
f heißt *partiell differenzierbar*, wenn es in jedem Punkt von U partiell differenzierbar ist.

Bem. a)Man berechnet die i-te partielle Ableitung, indem man f als Funktion der i-ten Variablen allein auffasst und die anderen Variablen konstant hält.
b) Für $n = 2$ schreibt man meist (x, y) statt (x_1, x_2) und $\frac{\partial f}{\partial x}$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Für $n = 3$ schreibt man oft (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3).

Beispiel: $f(x, y) = e^{xy} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$.

Beispiel: Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

In jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f offensichtlich partiell differenzierbar. f ist aber auch in $(0, 0)$ partiell differenzierbar:
$f_1(\xi) = f(\xi, 0) = 0$ und $f_2(\xi) = f(0, \xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R} \Longrightarrow D_1 f(0, 0) = 0$ und $D_2 f(0, 0) = 0$.
f ist also auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar.
Aber f ist in $(0, 0)$ *nicht* stetig: Denn für $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, ist $f(x, x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x^2} = \dfrac{1}{2}$, während $f(0, 0) = 0$.

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in U. Wenn alle partiellen Ableitungen $D_1 f, \ldots, D_n f : U \to \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sind, so kann man $D_j D_i f := D_j(D_i f)$ bilden und sagt, dass f zweimal partiell differenzierbar ist. Induktiv definiert man, was es für $k \in \mathbb{N}$ bedeutet, dass f *k-mal partiell differenzierbar* ist. Schreibe auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := D_j D_i f \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := D_i^2 f := D_i D_i f \text{ usw.}$$

Wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind (dazu gehört insbesondere, dass f selbst als partielle Ableitung der Ordnung 0 stetig ist), so sagt man, f sei *von der Klasse* C^k. Wenn f stetige partielle Ableitungen von jeder Ordnung hat, so heißt f *von der Klasse* C^∞ oder *glatt*. Schließlich heißt f *von der Klasse* C^0, wenn es stetig ist.

Satz 1. (Satz von H. A. Schwarz) Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2. Sei $a \in U$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a).$$

Von nun an schreiben wir die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren. Wir schreiben also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)^T \ .$$

Ist X eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so ist f von der Form

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_m)^T$$

mit $f_i : X \to \mathbb{R}$.

Bez. Ist U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so erhält man eine Abbildung

$$\nabla f = \mathrm{grad} f : U \to \mathbb{R}^n$$

durch $\nabla f(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$.
∇f heißt der *Gradient* von f.

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$. f heißt *partiell differenzierbar* (bzw. *von der Klasse* C^k), wenn alle f_i partiell differenzierbar (bzw. von der Klasse C^k) sind. Man schreibt dann für $x \in U$:

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$Df(x)$ heißt die *Funktionalmatrix* oder die *Jacobimatrix* oder die *Ableitung* von f an der Stelle x.
$Df(x)$ ist eine $m \times n$- Matrix; ihre i-te Zeile ist der transponierte Gradient von f_i an der Stelle x.
Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$, so ist $Df(x) \cdot \xi \in \mathbb{R}^m$.

5. Differenzierbare und stetig differenzierbare Abbildungen

Satz 1. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \dots, f_m)^T : U \to \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Abbildung, so dass alle Funktionen $D_j f_i : U \to \mathbb{R}$ stetig sind. Sei $x \in U$ fest.
Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$, so definiere $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$ durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi).$$

Dann ist

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\| \xi \|} = 0.$$

(Dies soll heißen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\| \xi \| < \delta$ und $\xi \neq 0$ gilt:

$$x + \xi \in U \text{ und } \frac{\| \varphi(\xi) \|}{\| \xi \|} < \varepsilon.)$$

Def. Ist U offen in $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so heißt f *differenzierbar* in x, wenn f in x partiell differenzierbar ist und wenn Folgendes gilt:
Definiert man $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$ durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi),$$

so ist $\lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{\varphi(\xi)}{\| \xi \|} = 0$.

Satz 2. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $x \in U$. Wenn f in x differenzierbar ist, so ist f in x stetig.

Für den Beweis braucht man:

Lemma Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig.
Es gibt ein $\alpha \geq 0$ mit $\| A\xi \| \leq \alpha \| \xi \|$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Folgerung aus Satz 1 und Satz 2: Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen $D_j f_i$ alle stetig, so ist f stetig, d.h. f ist von der Klasse C^1, m.a.W. f ist stetig differenzierbar.
Allgemeiner: Ist f k-mal partiell differenzierbar und sind alle k-ten partiellen Ableitungen stetig, so ist f von der Klasse C^k.

Beispiel: Sei A eine reelle $m \times n$-Matrix. Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $f(x) := A \cdot x$. Dann ist f von der Klasse C^∞. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $Df(x) = A$, denn ist $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, so

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \text{ für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

also $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$. Alle höheren partiellen Ableitungen von f sind 0.

Für den Beweis der Kettenregel brauchen wir:

Satz 3. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$. Es gebe eine $m \times n$-Matrix A mit

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\| \xi \|} (f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dann ist f differenzierbar in x und $Df(x) = A$.

Dies zeigt, wie man den Begriff der Differenzierbarkeit weiter verallgemeinern kann: Sind V, W endlich dimensionale normierte Räume, ist U offen in V, ist $f : U \to W$ eine Abbildung und ist $x \in U$, so heißt f differenzierbar an der Stelle x, wenn es eine lineare Abbildung $A : V \to W$ gibt, so dass

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\| \xi \|}(f(x+\xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dieses A ist dann eindeutig bestimmt; man bezeichnet es mit $Df(x)$ und nennt es die Ableitung von f an der Stelle x.

Satz 4. (Kettenregel) Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, V offen in $\mathbb{R}^m$ und seien $g : U \to \mathbb{R}^m$ und $f : V \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar mit $g(U) \subseteq V$. Dann ist die Abbildung $f \circ g : U \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar und

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \ \ \forall\, x \in U.$$

(Dabei steht auf der rechten Seite das Produkt der Matrizen $Df(g(x))$ und $Dg(x)$.) Sind f und g von der Klasse C^k mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist auch $f \circ g$ von der Klasse C^k.

Spezialfall: Ist $p = 1$, also $f \circ g : U \to \mathbb{R}$, so ist

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Dabei sind die Variablen in $\mathbb{R}^m$ mit $y_1, \ldots, y_m$ bezeichnet.

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $U_v := \{t \in \mathbb{R} \,|\, x + tv \in U\}$ eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$. Definiere $F_v : U_v \to \mathbb{R}$ durch

$$F_v(t) := f(x + tv).$$

Wenn F_v in 0 differenzierbar ist, so heißt

$$D_v f(x) := F_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x))$$

die *Richtungsableitung* von f im Punkt x in Richtung v.

Bem. $D_{e_i} f = D_i f$.

Bez. Für $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$, $w = (w_1, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sei

$$< v, w > := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

also $\| v \|_2 = < v, v >^{\frac{1}{2}}$.

Satz 5. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung v und

$$D_v f(x) = < v, \nabla f(x) > .$$

Anschauliche Interpretation des Gradienten: Der Vektor grad$f(x)$ gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f an.

6. Mittelwertsatz und Taylor-Formel

Der Mittelwertsatz aus Analysis I lautet: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]\, a, b\, [$. Dann gibt es ein $\xi \in\,]\, a, b\, [$ mit

$$(\star) \qquad f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

In dieser Form lässt sich der Mittelwertsatz nicht auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern. Betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = (\cos x, \sin x).$$

Dann ist $f(0) = f(2\pi)$, aber $Df(x) \neq \binom{0}{0}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aus $(\star)$ folgt: Wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $|f'(\xi)| \leq M$ für alle $\xi \in]a, b[$, so ist $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |\, b - a|$. Dies lässt sich verallgemeinern.

Def. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. Dann heißt f *(Riemann-) integrierbar*, wenn alle f_i integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int_a^b f(x)\, dx := \Big(\int_a^b f_1(x)\, dx, \dots, \int_a^b f_m(x)\, dx \Big) \in \mathbb{R}^m.$$

Bem. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ Riemann-integrierbar, so ist $\|\, f\, \| : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intergierbar und

$$\Big\| \int_a^b f(x)\, dx \Big\| \leq \int_a^b \|\, f(x)\, \|\, dx.$$

(Dabei ist $\|\, .\, \|$ eine der Normen $\|\, .\, \|_\infty$, $\|\, .\, \|_1$, $\|\, .\, \|_2$.)
Dies benutzen wir beim Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1. (Mittelwertsatz) Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1. Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke

$$\{x + t\xi \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

zwischen x und $x + \xi$ ganz in U liegt. Dann gibt es ein $M \geq 0$, so dass

$$\|Df(x + t\xi) \cdot v\| \leq M\|v\| \ \ \forall\, t \in [0, 1]\,, \ \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n,$$

und für jedes solches M ist

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq M \cdot \|\xi\|.$$

Satz 2. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und habe die folgende Eigenschaft:
Je zwei Punkte von U können durch einen Streckenzug verbunden werden, der ganz in U verläuft. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant.

Bez. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

a) Ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, so sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + a_n,$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \ \ldots \ \cdot \alpha_n!.$$

Ein solches α heißt *n-Multiindex*.

b) Ist α wie in a) und f von der KLasse $C^{|\alpha|}$, so sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dabei ist $D_i^0 f := f$ zu setzen.

c) Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so sei $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$.

Satz 3. (Taylor -Formel) Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^{k+1}.

a) Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke zwischen x und $x + \xi$ in U liegt. Dann ist

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + (k+1) \sum_{|\alpha| = k+1} \int_0^1 (1-t)^k \frac{D^\alpha f(x + t\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha dt.$$

b) Ist $x \in U$ und definiert man

$$R(\xi) := f(x+\xi) - \sum_{|\alpha| \le k+1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + \xi \in U$, so ist

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{R(\xi)}{\|\xi\|^{k+1}} = 0.$$

7. Extremwerte und kritische Stellen

Def. Sei X ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. f besitzt in x_0 ein *lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$f(x_0) \ge f(x) \ \ \forall\, x \in U.$$

f besitzt in x_0 ein *striktes lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$f(x_0) > f(x) \ \ \forall\, x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Entsprechend definiert man, wann f in x_0 ein *(striktes) lokales Minimum* bzw. *Extremum* besitzt.

Satz 1. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Wenn f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum besitzt, so ist

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0.$$

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Ist $x_0 \in U$ mit $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$, so heißt x_0 eine *kritische Stelle* von f.

Def. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2. Ist $x \in U$, so sei $Hf(x)$ die reelle $m \times n$-Matrix (a_{ij}) mit

$$a_{ij} := D_i D_j(x).$$

$Hf(x)$ heißt die *Hessesche Matrix* von f an der Stelle x.

Bem. Nach dem Satz von Schwarz ist $a_{ij} = a_{ji}$, d.h. $Hf(x)$ eine symmetrische Matrix.

Def. Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix.
A heißt *positiv definit*, wenn $\langle A(x), x \rangle > 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
A heißt *negativ definit*, wenn $\langle A(x), x \rangle < 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
A heißt *indefinit*, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle A(x), x \rangle > 0$ und ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle A(y), y \rangle < 0$ gibt.

Satz 2. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2. Sei x_0 eine kritische Stelle von f.
a) Ist $Hf(x_0)$ positiv definit, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Minimum.
b) Ist $Hf(x_0)$ negativ definit, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.
c) Ist $Hf(x_0)$ indefinit, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.

Erinnerungen an die Lineare Algebra:
Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Eine komplexe Zahl λ heißt Eigenwert von A, wenn es ein $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Ax = \lambda x$. Mit

$$\chi_A(t) = \det(tI - A)$$

bezeichnen wir das charakteristische Polynom von A. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A.
Ist A eine symmetrische Matrix, so sind alle Eigenwerte von A reell, und es gilt:

- A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.
- A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.
- A ist indefinit genau dann, wenn A einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt.

Kriterium von Hurwitz: Sei $A = (a_{ij})$ symmetrisch,

$$\Delta_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

A positiv definit $\iff \Delta_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$.
A negativ definit $\iff (-1)^k \Delta_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$.

Beispiel 1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2$ (Sattelfläche)
$\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. Einzige kritische Stelle: $(0, 0)$.
$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit. Also besitzt f überhaupt keine lokalen Extrema.

Beispiel 2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - y^3$.
$\operatorname{grad} f(x, y) = (3x^2, -3y^2)$. Einzige kritische Stelle: $(0, 0)$.
$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$, insbesondere $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dies ist weder positiv definit noch negativ definit noch indefinit. In jeder Umgebung von $(0, 0)$ nimmt f positive und negative Werte an, besitzt also auch in $(0, 0)$ kein lokales Extremum.

Beispiel 3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Kritische Stellen: $(0, 0)$ und $(1, 1)$.
Man kann Satz 2 anwenden: Kein lokales Extremum in $(0, 0)$, striktes lokales Minimum in $(1, 1)$.

Teil II: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

8. Beispiele und Problemstellungen

Sei U offen in $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

(a) $(x, \varphi(x)) \in U$,

(b) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$,

so heißt φ eine *Lösung der Differenzialgleichung*

(c) $y' = f(x, y)$;

man nennt (c) eine *explizite gewöhnliche Differenzialgleichung 1.Ordnung.*
Ist $(x_0, y_0) \in U$ und ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (c) mit $x_0 \in I$ und $\varphi(x_0) = y_0$, so sagt man, dass φ die *Anfangsbedingung*

(d) $y(x_0) = y_0$

erfüllt.

Beispiel 1: Sei $U = J \times \mathbb{R}$, wobei J ein offenes Intervall ist, und sei $g : J \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $f : U \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := g(x)$, d.h. betrachte die DGl.

$$y' = g(x).$$

Ihre Lösungen sind die Stammfunktionen von g.

Beispiel 2: Sei $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und $f : U \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) := y$, d.h. betrachte die DGl.

$$y' = y.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ definiere $\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_c(x) := c\, e^x.$$

Dann ist φ_c eine Lösung, und jede andere Lösung entsteht durch Einschränken eines φ_c auf ein Teilintervall. Für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

Beispiel 3: Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = y^2$, d.h. betrachte die DGl.

$$y' = y^2.$$

Sei φ_0 die Nullfunktion. Für $c \in \mathbb{R}$ definieren wir $\varphi_c^+ :]\, c, +\infty\, [\to \mathbb{R}$ und
$\varphi_c^- :] - \infty, c\, [\to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_c^\pm(x) := \frac{1}{c - x}.$$

Dann sind die Funktionen φ_0, φ_c^+ und φ_c^- Lösungen von $y' = y^2$, und jede Lösung dieser DGl. entsteht daraus durch Einschränkung auf ein Teilintervall. Für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine Lösung, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt und die einen maximalen Definitionsbereich hat.

Beispiel 4: Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = 3\, y^{2/3}$, d.h. betrachte die DGl.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ sei $\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi_c(x) := (x-c)^3.$$

Dann ist φ_c eine Lösung mit $\varphi_c(c) = 0$ und $\varphi_c'(c) = 0$. Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $a < b$ definiere $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_{a,b}(x) := \begin{cases} \varphi_a(x) & \text{für} \quad x \leq a \\ 0 & \text{für} \quad a < x < b \\ \varphi_b(x) & \text{für} \quad b \leq x. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_{a,b}$ differenzierbar und Lösung von $y' = 3\,y^{2/3}$. Für jede Anfangsbedingung gibt es also unendlich viele verschiedene Lösungen!

Verallgemeinerung: Sei U offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ seien stetig. Sei I ein offenes Intervall und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

(a) $\quad (x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in U$,

(b) $\quad \varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ für $i = 1, \ldots, n$,

so heißen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Lösungen des Differenzialgleichungssystems

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Schreibt man $f := (f_1, \ldots, f_n)$ und $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, so schreiben sich die Bedingungen (a) und (b) in der Form

(a) $\quad (x, \varphi(x)) \in U$,

(b) $\quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Statt des Systems (c) schreibt man einfach wieder

$$y' = f(x, y)$$

und nennt weiterhin φ eine Lösung dieser expliziten gewöhnlichen DGl. erster Ordnung.