PIERRAT Jules
LAVERDURE Charles
Point numéro 43

Rapport TP Moindres carrés

Le TP de moindres carrés du 11 février 2020 nous a permis de mettre en application nos connaissances sur les estimations de mesures par la technique des moindres carrés :

Ce travail se divise en deux parties :
- Une partie pratique de prise de mesures sur le terrain
- Une partie programmation sous python afin d'extraire un résultat de notre jeu de données

Le but de ce TP était de partir d'un point de coordonnées inconnues (dans notre cas le point 43) puis de réaliser une série de 10 mesures entre ce point et quatre points de coordonnées connus. Sur ces mesures, 5 étaient réalisées au mètre ruban et les 5 autres grâce à la méthode des doubles pas pour un total de 40 mesures de distances. Grâce à la méthode d'estimation par moindres carrés, nous avons ensuite pu déterminer les coordonnées en Lambert 93 du point 43 le plus précisément possible.

1) Partie pratique de mesure des distances

a) Mesure par méthode des doubles pas

Nous avons débuté par étalonner nos double pas afin de pouvoir les reconvertir en mètres ensuite. Cet étalonnage s'est effectué entre deux bases : 100 et 101. Par la suite, nous avons mesuré la distance entre notre point et les points de références. Nous avons dû estimer les fractions de doubles pas nous séparant du point quand notre pied ne terminait pas exactement sur le repère.

b) Mesure par méthode du mètre ruban

Ensuite, nous avons effectué nos mesures au mètre ruban. Nous avons été chanceux de pouvoir prendre un ruban de 20 mètres, ce qui nous a permis d'augmenter la précision de nos mesures en évitant le report sur les références les plus proches de nous et en limitant ce report à 1 sur celle éloignées.

PIERRAT Jules
LAVERDURE Charles
Point numéro 43

2) Partie programmation sous Python

a) Importation des données

Nous avons débuté par importer les données récupérées sur le terrain ainsi que celles de l'autre groupe assigné au point 43 sous la forme d'un fichier mesures_2019.dat en ayant préalablement converti les mesures double pas en mètres. Tout cela grâce à l'utilisation de la commande numpy genformtxt.

b) Détermination du modèle

Notre modèle était de la forme d'une équation de distance donc non linéaire, ce qui nous a fait réaliser que nous allions devoir avoir recours à une linéarisation. Cette distance était entre un point de référence dont les coordonnées étaient extraites du « fichier coord_points_reference.dat » et un point de valeur approché x0 pris au départ comme le barycentre du nuage de points formé par nos coordonnées de référence. Les coordonnées de ce point x0 ont été calculés par la fonction « CoordsMoyennes ».

Modèle : f(x) = $\sqrt{(Xr - X0)^2 + (Yr - Y0)^2}$ avec (Xr,Yr) les coordonnées du point de ref

c) Recherche des vecteurs mesure et pseudo mesure et de la matrice modèle

La réalisation du vecteur des mesures consistait simplement en la transformation de notre liste de mesure en un vecteur de dimension 80*1 par la fonction « MatriceMesures ». Pour le vecteur des pseudo mesures, nous avons appliqué la formule b-f(x0) → B avec f notre modèle, b notre vecteur mesure et x0 expliqué ci-dessus. Ce second vecteur est calculé grâce à la fonction « MatricePseudoMesure ». Enfin, avec la fonction « MatriceModele » nous avons calculé la matrice modèle en suivant la formule f'(x0) → A. Cette matrice était de dimension (80,2).

d) Base de la matrice de poids

Afin de calculer le vecteur des estimations des paramètres et en attendant de pouvoir l'affiner, nous avons créé une matrice de diagonale de poids arbitraire en attribuant un facteur 1 aux mesures double pas et un facteur deux au mesures rubans dans une fonction « MatricePoids ». Par la suite, grâce à l'importation des données de l'année précédente, nous avons pu déterminer une moyenne du jeu de donnée ainsi qu'un écart type faisant office de poids pour nos mesures. Cela se retrouve dans les fonctions « MoyenneListe » et « VarianceListe ». Nous avons ensuite assigné un poids calculé de 0.2703 pour les mesures au double pas et de 59.3209 pour les mesures au ruban.

e) Calcul du vecteur des paramètres estimés

Pour cette partie, nous avons simplement utilisé la formule de cour $X = (A^TPA)^{-1} A^T B$. Cela en utilisant les fonctions np.dot() et np.linalg.ivn(). Tout ceci dans la fonction « CalculXEstim »

f) Calcul du vecteur des résidus estimés

Meme chose ici avec la fonction « CalculVEstim » en utilisant la formule V = B-AX

g) Calcul du facteur unitaire de variance

Encore une application stricte de formule dans cette fonction « FacteurUnitaireDeVariance » : on a σ^2=$V^TPV/(n-p)$ avec (n=dim(B)) et (p=dim(X)).

h) Calcul des résidus normalisés

Il s'agit ici de tout d'abord calculer la variance de nos résidus grâce a la fonction « VarianceVestim » en application direct de la formule var(V) = $\sigma^{2*}(A^T\ P\ A)^{-1}$. La normalisation s'effectue ensuite en prenant le vecteur des résidus estimés divisé par la racine de la variance associée. Ce calcul étant effectué dans la fonction « VNormalisé ».

i) Calcul des paramètres normalisés

Similaire au calcul des residus normalisés dans les fonctions « VarianceXestim » et « XNormalisé »

k) Linéarisation

Dans une fonction « Linéarisation » nous avons réunis toutes nos fonctions afin de pouvoir les mettre en action dans une boucle « while ». Cette boucle while a pour point d'arret un float epsilon representant la distance minimale entre deux estimations de position de notre point. Nous avons mis tous nos calculs de fonctions à la suite jusque l'obtention d'une nouvelle valeur pour les paramètres estimés composé de la valeur de l'itération précédente plus la nouvelle valeur de paramètre obtenue par moindre carrés.

l) Gestion des résidus

La fonction « VNormalisé » nous permet d'avoir la liste complète de nos résidus normalisés. Grâce à cette fonction, nous pouvons afficher l'histogramme des résidus dans la fonction « histogramme_residus ». Cet histogramme nous a permis de visualiser les erreurs de mesures trop importantes. La fonction suivante « TestRésidusNormalises » nous permet, suivant les instructions du cours de nous débarrasser des mesures trop éloignées de notre moyenne de coordonnées de points. Si la valeur de nos résidus normalisés était supérieure à 3, nous nous débarrassons du paramètre correspondant et reprenons le calcul d'approximation des coordonnées du point inconnu sans cette valeur.

Conclusion et discussion des résultats

Nos coordonnées estimées par moindres carrés pour le point numéro 43 en Lambert 93 sont (669734.0999 E ; 6860265.9934N). Ces coordonnées, après vérifications sur géoportail puis sur le parvis nous paraissent cohérentes. L'ensemble des mesures réalisées par notre binôme et celui de l'autre groupe se sont révélées relativement fiable avec peu de résidus normalisés en dehors de la limite fixé et donc peu de mesures divergentes du reste. Grâce à une application pratique des moindres carrés ce TP nous a permis de nous rendre compte de leur utilité dans cette configuration précise et de mieux nous représenter les concepts du cours. Comme exemple flagrant de cela, nous étions retournés sur le parvis pour vérifier nos résultats obtenus sur géoportail mais nous nous sommes rendu compte que nous étions 50 cm trop au sud. Ceci était avant que nous n'ayons mis en place les tests sur les résidus normalisés. Suite à ces tests, nous sommes tombés sur la bonne position et cela nous a fait nous rendre compte de l'utilité de ces tests car forcement, nos plus grosses erreurs de mesures se situait par rapport aux points de référence les plus éloignés situés au sud du parvis et « tirant » donc à eux les mesures. Pour conclure, nous avons tous deux trouvé ce TP très stimulant et intéressant et sommes confidents quant à notre approximation de coordonnées même si elle reste relative aux moyens de mesures mis à notre disposition.