A n^2.5 algorithm for maximum matchings in bipartite graphs

John E. Hopcroft

Cornell University

Ithaca, N.Y.

Richard M. Karp

University of California

Berkeley, California

用于构造二分图最大匹配的 O(n^2.5)算法

翻译：熊怀东

摘要

本文展示了如何在$O((m+n)\sqrt{n})$时间内，为一个具有n个结点和m条边的二分图构造最大匹配。

1 简介

假设我们有一个矩形阵列，其中每个单元被指定为“已占用的”或“未占用的”。给定一集单元，如果其中没有两个单元位于同一行或同一列，就称这一集单元是**独立的**。我们的目标是构造一集已占用的独立单元，使其单元数目达到最大。

下面给出一种形象解释（**译者注：**这种解释源自所谓“稳定婚姻问题”）。设阵列的行表示的是男孩，列表示的是女孩。单元(i,j)被指定为“占用的”，当且仅当男孩i和女孩j能够和平共处。我们希望配对最大数目的能够和平共处的夫妇。

还可以通过将阵列的行与列看成是二分图的结点，从而给问题做出另一种陈述。单元(i,j)被指定为“占用的”，当且仅当对应于行i和列j的结点被一条边连接起来。此时我们想寻找最大的匹配，即最大数目的边，其中没有两条边具有公共结点。

此问题具有广泛的应用[3, 4, 5]。包括偏序集链式分解的确定，群陪集代表元的确定，有区别代表的系统（systems of distinct representatives）的确定，及稀疏矩阵的块式三角分解。在 Hitchcock 交通问题的解决方案中，和确定给定的树是否同构于另一棵树的子树问题中，该问题也作为子例程出现。

鉴于如此广泛的应用，人们对于寻找二分图的最大匹配问题的计算复杂性尤其感兴趣。之前的方法[1, 3, 4, 5]似乎要求 $O(mn)$ 步计算，其中 m 是边的数目，n 是结点的数目。我们这里给出的方法只要求 $O((m+n)\sqrt{n})$ 步计算。

我们希望将结果扩展到非二分图的情形（参见文献[2]），因此在第 2 节中，所有结果都是为一般的图推导的。在第 3 节中，我们将结果特殊化用于二分图。

2 匹配和增广路径

设 $G=(V,E)$ 是一个有限的无向图（没有环或多重边），结点集为 V，边集为 E。与结点 v 和 w 相连的边写作 $\{v,w\}$。称集 $M\subseteq E$ 是一个**匹配**，如果没有结点 $v\in V$ 与 M 中多于一条边相连接（**译者注：**否定的说法费解，定义实则等价于说每个结点 $v\in V$ 至多与 M 中一条边相连接）。具有最大基数的匹配被称为**最大匹配**。

下面给出一些相对于匹配 M 的定义。

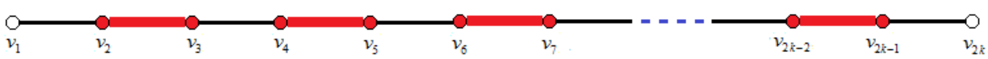
如果一个结点 v 不与匹配 M 中的边相连接，就称该结点是自由的。

称一条路径（没有重复结点）

$$P=(v_1,v_2)(v_2,v_3)\cdots(v_{2k-1},v_{2k})$$

是匹配 M 的**增广路径**，如果它的端点 v_1 和 v_{2k} 都是自由的，且它的边在 $E-M$ 和 M 中交替出现，即：

$$P\cap M=\{(v_2,v_3),(v_4,v_5),(v_6,v_7),\cdots,(v_{2k-2},v_{2k-1})\}。$$



（**译者注：**画个图会更容易理解。容易看出属于 $E-M$ 的边数恰好比属于 M 的多 1，故增广路径的长度必然是一个奇数，而增广路径具有的结点数目必然是一个偶数。尽管增广路径上有些边不在 M 中，但除了端点是自由的外，路径上的其它结点都是非自由的——或称是

匹配的。）

当不发生歧义时，我们既用 P 表示增广路径上的边组成的集合，又用 P 表示这些边的序列即路径本身。若 S 和 T 是集合，则 $S\oplus T$ 表示 S 和 T 的对称差，$S-T$ 表示 S 中不在 T 中的元素组成的集合。如果 S 是有限集，则 $|S|$ 表示 S 的基数。

引理 1 若 M 是匹配，P 是 M 的增广路径，则 $M\oplus P$ 也是匹配，且 $|M\oplus P|=|M|+1$。

定理 1 设 M 和 N 是匹配，如果 $|M|=r$，$|N|=s$，且 $s>r$，则 $M\oplus N$ 至少有 $s-r$ 条 M 的无公共结点（vertex-disjoint）增广路径。

证明 考虑图 $\overline{G}=(V,M\oplus N)$，其结点集为 V，边集为 $M\oplus N$。

由于 M 和 N 是匹配，故每个结点与 $N-M$ 中至多一条边和 $M-N$ 中至多一条边相连接，

因此 $\overline{G}$ 的每个（连通）分量只能是以下三种情况之一：

①一个孤立结点；

②一个长度为偶数的环，其边交替地属于于 $M-N$ 和 $N-M$；

③一条路径，其边交替地属于于 $M-N$ 和 $N-M$。

设 $\overline{G}$ 的分量为 $C_1,C_2,\cdots,C_g$，其中 $C_i=(V_i,E_i)$。

令 $\delta(C_i)=|E_i\cap N|-|E_i\cap M|$，

则 $\delta(C_i)\in\{-1,0,1\}$，且 $\delta(C_i)=1$ 当且仅当 C_i 是 M 的增广路径。

$$\sum_i\delta(C_i)=|N-M|-|M-N|=s-r$$

因此至少存在 $\overline{G}$ 的 $s-r$ 个分量 C_i 使得 $\delta(C_i)=1$，这些分量是两两无公共结点的，且每一个都是 M 的增广路径。■

推论 1 （Berge[1]）匹配 M 是最大匹配，当且仅当 M 没有增广路径。

推论 2 设 M 是一个匹配，$|M|=r$，且最大匹配的基数为 s，$s>r$，则 M 有一条长度不超过 $2\left\lfloor\dfrac{r}{s-r}\right\rfloor+1$ 的增广路径。

证明 设 N 是一个最大匹配。

则 $M\oplus N$ 有 $s-r$ 条 M 的无公共结点（从而也无公共边）增广路径。

这些增广路径一起至多包含 r 条来自 M 的边，

故其中某条增广路径至多包含 $\left\lfloor \frac{r}{s-r} \right\rfloor$ 条来自 M 的边，

则这条路径总共有至多 $2\left\lfloor \frac{r}{s-r} \right\rfloor + 1$ 条边。■

设 M 是一个匹配，M 的增广路径 P 被称作 M 的一条**最短增广路径**，如果在 M 的所有增广路径中 P 具有最小基数。

定理 2 设 M 是一个匹配，P 是 M 的一条最短增广路径，P' 是 $M \oplus P$ 的增广路径，则 $|P'| \geq |P| + 2|P \cap P'|$。（**译者注：**原文没有系数 2，但译者怀疑是原作者弄错了，见证明过程注。不过这个错误并没有影响到本文结论的正确性，因为后面的推理不依赖于系数的值。）

证明 令 $N = M \oplus P \oplus P'$，则 N 是一个匹配，且 $|N| = |M| + 2$，

因此 $M \oplus N$ 有 2 条 M 的无公共结点增广路径，设为 P_1 和 P_2，

由于 $M \oplus N = P \oplus P'$，

故有 $|P \oplus P'| \geq |P_1| + |P_2|$，

又由 P 的最短性知，$|P_1| \geq |P|$ 且 $|P_2| \geq |P|$，

从而 $|P \oplus P'| \geq |P_1| + |P_2| \geq 2|P|$，

同时我们还有恒等式 $|P \oplus P'| = |P| + |P'| - 2|P \cap P'|$，

（**译者注：**错误就在这儿，原文是 $|P \oplus P'| = |P| + |P'| - |P \cap P'|$，这是错误的。正确的恒等式为：$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$。$|A \cup B|$ 才是没有系数 2 的情况：$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。）

因此 $|P'| \geq |P| + 2|P \cap P'|$。■

设想如下的计算过程：从一个匹配 M_0 开始，计算序列 $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_i, \cdots$。其中 P_i 是 M_i 的一条最短增广路径，且 $M_{i+1} = M_i \oplus P_i$。

推论 3 $|P_i| \leq |P_{i+1}|$。

推论 4 对所有的i,j，若$|P_i|=|P_j|$，则P_i与P_j无公共结点。

证明 用反证法，假设$i<j$使得$|P_i|=|P_j|$，且P_i与P_j有公共结点。

则必存在满足$i\le k<l\le j$的k,l，使得P_k与P_l有公共结点，

且对每个满足$k<m<l$的m，P_m与P_k和P_l没有公共结点。

则P_l是$M_k\oplus P_k$的一条增广路径，

故$|P_k|\ge|P_l|+2|P_k\cap P_l|$（**译者注**：原文没有系数 2，但推理不依赖于系数），

但$|P_k|=|P_l|$，故$|P_k\cap P_l|=0$，从而知P_k与P_l没有公共边。

但由于P_k与P_l有公共结点v，

故P_k与P_l理当有一条公共边，该边与结点v相连且在$M_k\oplus P_k$中。

这样就得到了矛盾，从而知假设不成立。P_i与P_j必无公共结点。■

定理 3 设s为某最大匹配的基数，则序列

$$|P_0|,|P_1|,\dots,|P_i|,\dots$$

中不同整数的数目小于或等于$2\lfloor\sqrt{s}\rfloor+2$。

证明 令$r=\lfloor s-\sqrt{s}\rfloor$，

则（**译者注**：文章没有指出$M_0=\varnothing$。若$M_0=\varnothing$，则由引理 1 知$|M_i|=i$）

$|M_r|=r$，

由推论 2，

$|P_r|\le 2\left\lfloor\dfrac{r}{s-r}\right\rfloor+1\le 2\lfloor\sqrt{s}\rfloor+1$（**译者注**：原文将$r$代换了，不容易看清楚），

因此对每个满足$i<r$的i，$|P_i|$是小于或等于$2\lfloor\sqrt{s}\rfloor+1$的$\lfloor\sqrt{s}\rfloor+1$个正奇数之一。

同时$|P_{r+1}|,\dots,|P_s|$贡献至多$s-r=\lceil\sqrt{s}\rceil$个不同整数，

故不同整数的数目小于或等于：

$\lfloor\sqrt{s}\rfloor+1+\lceil\sqrt{s}\rceil\le 2\lfloor\sqrt{s}\rfloor+2$ ■

基于推论 3、推论 4 和定理 3，序列$\{M_i\}$的计算可分为至多$2\lfloor\sqrt{s}\rfloor+2$阶段，在各阶段中所找到的所有增广路径都是无公共结点的且具有相同的长度。由于这些路径无公共结点，故它们都是相应阶段开始时的匹配的增广路径。这给了我们描述最大匹配计算的另一种方式。

算法 A 最大匹配算法

0．$M \leftarrow \varnothing$。

1．设$l(M)$是M的最短增广路径的长度，查找路径的最大集合$\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_t\}$使得：

a）对每个i，Q_i是M的增广路径且$|Q_i| = l(M)$；

b）这些Q_i是无公共结点的。

2．$M \leftarrow M \oplus Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_t$，返回到 1。

推论 5 如果一个最大匹配的基数为s，则算法 A 通过执行$2\lfloor\sqrt{s}\rfloor+2$次步骤 1 构造一个最大匹配。

最大匹配的这种描述方式表明，我们不应该将连续的增广步骤当成独立的计算，而应当关注整个阶段（即算法 A 中的步骤 1）的高效实现。下一节将展示当G为二分图时这种方式的优点。

3 二分图情形

图$G=(V,E)$被称为二分图，如果结点集V可被划分为两个集X和Y，使得G的每条边连接X中的一个结点和Y中的一个结点。X中的元素被称作**男孩**，Y中的元素被称作**女孩**。

设M是二分图G的一个匹配。在算法 A 的步骤 1 中，M的无公共结点最短增广路径的最大集合被找到，我们来讨论其实现。

我们构造一个有向图$\hat{G}=(\hat{V},\hat{E})$，它将方便地显示出$M$的所有最短增广路径。定义：

a） $L_0 = \{x \in X \mid x\text{相对于}M\text{是自由的}\}$

b）对 $i = 0,1,2,...$

$E_{2i} = \{[y,x] \mid x \in L_{2i}, y \notin L_1 \cup L_3 \cup \cdots \cup L_{2i-1}, \text{且}\{x,y\} \in E - M\}$

$L_{2i+1} = \{y \mid \text{对某个}x, [y,x] \in E_{2i}\}$

c）对 $i = 1,2,3,...$

$E_{2i-1} = \{[x,y] \mid y \in L_{2i-1}\text{且}\{x,y\} \in M\}$

$L_{2i} = \{x \mid \text{对某个}y, [x,y] \in E_{2i-1}\}$

构造继续下去直到第一次某集合 L_{2i^*+1} 包含一个自由女孩，则

$$\hat{V} = \bigcup_{j=0}^{2i^*+1} L_j \quad \text{且} \quad \hat{E} = \bigcup_{j=0}^{2i^*} E_j$$

$\hat{G}$ 的以下性质是显然的：

①位于偶数层的结点是男孩，位于奇数层的结点是女孩；

②如果 $[u,v]$ 是 $\hat{G}$ 的一条边，则 v 位于 u 所在层的前面一层；

③ L_{2i}（ $i > 0$ ）中的每个男孩具有出度 1，且每个女孩具有出度 ≥ 1；

④ M 的最短增广路径与 $\hat{G}$ 中开始于自由女孩并结束于自由男孩的路径一一对应。

为了方便起见，我们为每个结点 u 关联集合 $PRED(u) = \{v \mid [v,u] \in \hat{E}\}$ 与 $SUCC(u) = \{v \mid [u,v] \in \hat{E}\}$，并令 $\#(u) = |SUCC(u)|$。由③，如果 $u \notin L_0$，则 $\#(u) > 0$。

给定 $\hat{G}$，我们可以轻松构造 M 的最短增广路径中结点的序列。只须选择 L_{2i^*+1} 中一个自由女孩 y_0，并构造序列 $u_1, u_2, \ldots, u_{2i^*+1}$，其中 $y_0 = u_0$ 且 u_{i+1} 是 $SUCC(u_i)$ 中的第一个元素。回溯是不必要的，因为对每个结点 $u \notin L_0$， $SUCC(u) \neq \varnothing$。

随着最短增广路径相继被找到，删除它们的结点是有必要的，因为找到的所有路径必然是无公共结点的。删除这些结点可能使我们发现其他某些结点是无用的，这里无用是指它们不能到达 L_0 中的任何结点。这些无用的结点也必须被删除，因为如果留下它们，增广路径

的搜索将由于存在死胡同的可能而变得复杂。故我们需要一个算法，对给定的 $\hat{G}$ 和路径 P，该算法删除 P 的结点及由该删除过程导致无用的所有其他结点。该算法如下：

删除算法

0．$U \leftarrow P$ 中结点构成的集合

　　$T \leftarrow U$

1．**if** $U = \varnothing$，停止；

　　else 任选 $u \in U$，

　　$U \leftarrow U - \{u\}$

　　for each $v \in PRED(u) - T$

　　　　$SUCC(v) \leftarrow SUCC(v) - \{u\}$

　　　　$\#(v) \leftarrow \#(v) - 1$

　　　　if $\#(v) = 0$

　　　　　　$U \leftarrow U \cup \{v\}$

　　　　　　$T \leftarrow T \cup \{v\}$

　　for each $v \in SUCC(u) - T$

　　　　$PRED(v) \leftarrow PRED(v) - \{u\}$

　　goto 1

删除算法的效果是从 $\hat{G}$ 中移除进入集合 T 的所有结点，以及与这些结点相连接的边。算法运行后得到的有向图记作为 $\hat{G}\Delta P$。

定理 4 设 $P_1, P_2, \ldots P_k$ 是 $\hat{G}$ 中从自由女孩到自由男孩的无公共结点的路径，令 $G_0 = \hat{G}$，$G_{i+1} = G_i \Delta P_i$。则 G_{k+1} 中从自由女孩到自由男孩的路径，正好就是 $\hat{G}$ 中从自由女孩到自由男孩的且与 $P_1, P_2, \ldots P_k$ 都无公共结点的路径。

定理 5 G_{k+1} 中每个不是自由男孩的结点具有出度 ≥ 1。

一个阶段的实现由两部分组成，先构造 $\hat{G}$，接着是一个迭代，在每轮迭代中，我们找

到一条增广路径并执行删除算法。当所有自由女孩被删除时，迭代停止。容易看到，在首先构造 $\hat{G}$ 时，G 的每条边被检查一次；如果之后该边的一个端点被删除，则该边被再检查一次。通过选择适当的数据结构，使得每次检查只执行少量的几条机器指令是可能的。实际上，这样的实现已使用 Algol W 语言做出。

一个阶段的执行时间是 $O(m+n)$，其中 m 是 G 中边的数目，n 是结点的数目。因此整个算法的执行时间是 $O((m+n)\sqrt{s})$，其中 s 是一个最大匹的基数。

如果 G 有 n 个结点，则 $m \le \frac{n^2}{4}$ 且 $s \le \frac{n}{2}$，这样执行时间的上界为 $O(n^{5/2})$。

参考文献

1．Berge, C., “Two Theorems in Graph Theory”, Proc. Nat. Acad. Sci. 43, pp. 842-844(1957).

2．Edmonds, J., “Paths, Trees and Flowers”, Candadian J. Math., XVII, pp. 449-467(1965).

3．Ford, L. R. and D.R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press(1965).

4．Hall, M., “Distinct Representatives of Subsets”, Bull. Amer. Math. Soc. 54, pp. 922-926(1948).

5．Kuhn, H. W., “The Hungarian Method for the Assignment Problem”, Naval. Res. Log. Quart. 2, pp. 83-97(1955).