Lecture 5

掷骰子问题第二问

Q: E(掷出6的步数的期望|掷出6之前数列是不减的)
ANSWER： 2

Prove:
回忆一下几何分布，如果成功概率是p,那么期望下达到平均的步数是$\frac{1}{p}$, 同时也可以知道，期望下失败的次数是$(\frac{1}{p}-1)$
先分析一个最简单的情况，如果只有5、6两个选择，那么

$$E_{56}=E(\text{掷出6的步数的期望}|\text{掷出6之前数列是不减的, 只有5、6})=?$$

容易知道，这时候，问题等价于几何分布问题，这里掷出5表示失败，掷出6表示成功，所以可知，5出现的次数的期望是1,$E_{56}=2$
进一步分析一个简单的情况，这时我们有4、5、6三个选择，那么此时

$$E_{456}=E(\text{掷出6的步数的期望}|\text{掷出6之前数列是不减的, 只有4、5、6})=?$$

观察后可以发现，当我们只分析4出现的次数时，同样也等价于一个几何分布，这时，掷出4表示失败，掷出5或者6表示成功，那么成功的概率是$\frac{2}{3}$，因此，4出现的次数的期望是$\frac{1}{2}$。而当第一次出现不是4的数时，5、6出现的概率相等，对应的进入只有6的情况与E_{56}对应的情况。
如果用E_6表示只有6时掷出6需要的次数（显然是1），那么有

$$E_{456}=E(4\text{出现的次数}|\text{掷出6之前数列是不减的, 只有4、5、6})+E_{56}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}E_{56}+\frac{1}{2}E_6=2$$

同理有

$$E_{3456}=E(3\text{出现的次数}|\text{掷出6之前数列是不减的, 只有3、4、5、6})+\frac{1}{3}E_{456}+\frac{1}{3}E_{56}+\frac{1}{3}E_6=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=2$$

最终有$E_{123456}=E_{23456}=2$
所以原问题的答案为2。

PS：这道题诡异的地方在于$E_{456}=E_{56}$，看出去前者多了一个4作为“缓冲”，但实际上4作为缓冲区会降低进入E_{56}对应的子过程的概率。而且需要注意的是，所有非减的串一定是由6结尾的。