

# **Compte rendu de TP - TS217**

## **Performances des égaliseurs linéaires et non-linéaires**

Maxime PETERLIN - maxime.peterlin@enseirb-matmeca.fr  
Gabriel VERMEULEN - gabriel@vermeulen.email

ENSEIRB-MATMECA, Bordeaux

19 janvier 2014

### **Table des matières**

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Implémentation des signaux reçus</b>	<b>3</b>
<b>2 Égaliseur ZF</b>	<b>4</b>
<b>3 Égaliseur MMSE</b>	<b>8</b>
<b>Conclusion</b>	<b>11</b>

## Introduction

Les réseaux de communication sans fil apportent aujourd'hui de nombreux avantages tels que des déploiements facilités et à coûts réduits, cependant de nombreuses limitations viennent altérer leur fonctionnement. En effet, les ondes transportant l'information sont perturbées et voient leur puissance diminuer au cours de leur propagation de l'émetteur au récepteur.

Cela est dû à quatre causes principales :

- la distance entre l'émetteur et le récepteur ;
- l'environnement (obstacles sur le chemin de propagation, ondes parasites, etc...) ;
- la mobilité du récepteur et/ou de l'émetteur ;
- le multitrajet de l'onde (i.e. lorsque la même onde passe par des chemins différents et arrive à un même récepteur introduisant ainsi des interférences).

Afin de caractériser un canal, on utilise  $\Delta_\tau$  qui est l'étalement temporel du canal et  $T_c$  le temps de cohérence du canal. On notera  $T_s$  le temps symbole. Le canal de propagation peut être sélectif en temps et/ou en fréquence.

Le canal de propagation varie au cours du temps et la sélectivité en temps nous permet de savoir à quelle fréquence il est nécessaire de l'estimer afin de compenser ses effets. On dit qu'il est sélectif en temps si  $T_s > T_c$ , dans ce cas, on passe plus de temps à estimer le canal qu'à communiquer.

Si le canal de propagation est sélectif en fréquence (i.e.  $T_s < \Delta_\tau$ ), alors il introduit des distorsions sur le signal transmis. Le fait de diminuer le temps symbole et donc d'augmenter le débit va avoir pour effet de perturber le signal transmis, ce qui est problématique pour la mise en place de réseaux de communication sans fil à haut débit.

En résumé, la condition devant être réalisée afin d'obtenir une transmission idéale sans distorsion et où l'on passe plus de temps à communiquer qu'à estimer le canal est

$$\Delta_\tau \ll T_s \ll T_c$$

Pour les communications sans fil terrestres, le canal est, en général, non sélectif en temps. Cependant, cette condition implique l'introduction d'une valeur maximale au débit pour un environnement de propagation donné. Si l'on veut augmenter le débit, il est nécessaire d'accepter l'introduction de distorsions qu'il faudra alors compenser. La condition à vérifier en général devient alors la suivante :

$$T_s < \Delta_\tau < T_c$$

L'objectif de ce TP est justement la compensation de ces distorsions grâce à l'égalisation des signaux reçus. Pour cela nous implémenterons plusieurs méthodes permettant de réaliser cela.

Pour la suite du rapport, on définit  $\underline{S}_n$  le vecteur colonne des symboles envoyés,  $\underline{W}_n$  le vecteur colonne du bruit introduit par le canal,  $\underline{f}$  le vecteur colonne des coefficients du filtre ZF,  $\underline{y}_n$  le vecteur colonne des données reçus et  $Z_n$  le symbole reçu à l'instant  $n$  (après égalisation).

On part du principe que le canal  $h$  est RIF et de longueur  $K$ , ainsi  $H(z) = \sum_{k=0}^{K-1} h_k z^{-k}$ .

L'égaliseur est ici de longueur  $P$  :  $F(z) = \sum_{p=0}^{P-1} \bar{f}_p z^{-p}$ .

D'une manière plus précise, on a

$$\underline{S}_n = \begin{bmatrix} S_n \\ \vdots \\ S_{n-(P+K-2)} \end{bmatrix}, \underline{W}_n = \begin{bmatrix} W_n \\ \vdots \\ W_{n-P+1} \end{bmatrix}, \underline{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{P-1} \end{bmatrix}, \underline{y}_n = \begin{bmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_{n-P+1} \end{bmatrix}$$

Lorsque les symboles  $\underline{S}_n$  sont envoyés et qu'ils traversent le canal de propagation, les données reçues sont alors les suivantes :

$$\underline{y}_n = H\underline{S}_n + \underline{W}_n$$

où  $H$  est la matrice de convolution du canal de taille  $P \times (P + K - 1)$

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & \dots & h_{K-1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & h_0 & \dots & h_{K-1} \end{pmatrix}$$

Pour retrouver le symbole  $Z_n$  à partir des données reçues  $y_n$ , on utilise la relation

$$Z_n = \underline{f}^* \underline{y}_n$$

## 1 Implémentation des signaux reçus

Ce TP se base sur trois canaux de propagation. Dans un premier temps, nous étudierons leur réponse fréquentielle, ainsi que leur effet sur la transmission de symboles par leur biais.

Les trois canaux considérés ici, et que l'on nommera  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ , possèdent les réponses fréquentielles qui suivent.

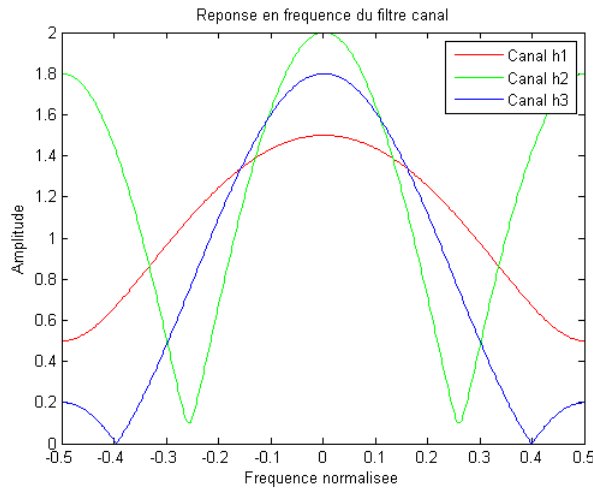
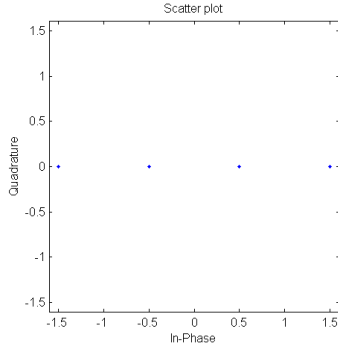
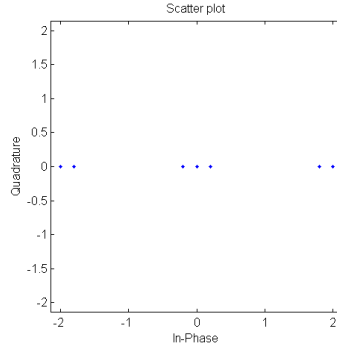


FIGURE 1 – Réponses fréquentielles des trois canaux  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$

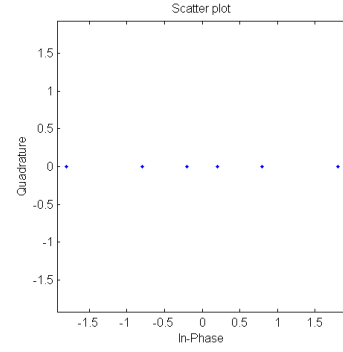
On remarque que les canaux présentent différentes sélectivités en fréquence avec  $h_1$  le moins sélectif et  $h_3$  le plus sélectif. Nous allons à présent transmettre une séquence de  $N = 5000$  symboles BPSK à travers ces canaux avec un SNR de  $20dB$ . On obtient alors les constellations suivantes :



(a) Constellation de symboles après transmission via le canal  $h_1$



(b) Constellation de symboles après transmission via le canal  $h_2$



(c) Constellation de symboles après transmission via le canal  $h_3$

On remarque que le canal 1 n'est que très peu touché par des interférences entre symboles et qu'il est tout de même possible de détecter sans erreur les symboles, à l'inverse des deux autres canaux. En effet le canal 2 possède une ambiguïté sur le symbole reçu en 0. Enfin le 3ème canal est très touché par ces interférences et certains symboles se retrouvent dans la mauvaise zone de détection ce qui entraîne des erreurs de décision.

Le but des parties suivantes va être de se débarrasser de ces distorsions, afin de décoder le message envoyé.

## 2 Égaliseur ZF

La première méthode d'égalisation que nous allons implémenter est l'égaliseur ZF. Le principe de cette méthode est d'inverser la réponse fréquentielle  $H(z)$  du canal considéré.

Le problème étant qu'une inversion de cette réponse peut potentiellement amplifier le bruit pour certaines plages de fréquences, c'est pourquoi on ne tiendra pas compte du bruit pour le filtre ZF.

Ainsi, en se basant sur les équations données dans l'introduction, on en déduit que

$$\underline{Z}_n = \underline{f}^* H \underline{S}_n$$

Le but final est d'obtenir  $\underline{Z}_n$ . En se basant sur l'équation précédente, on trouve la relation permettant de concevoir le filtre ZF :

$$H^* \underline{f} = \underline{e}_{d+1}$$

où  $d$  est un retard à choisir.

Le système obtenu est sur-déterminé et n'admet pas de solutions en général. En pratique, on cherche la solution au sens des moindres carrés. On cherche alors le vecteur  $\underline{f}$  qui minimise la relation  $\|H^* \underline{f} - \underline{e}_{d+1}\|$ .

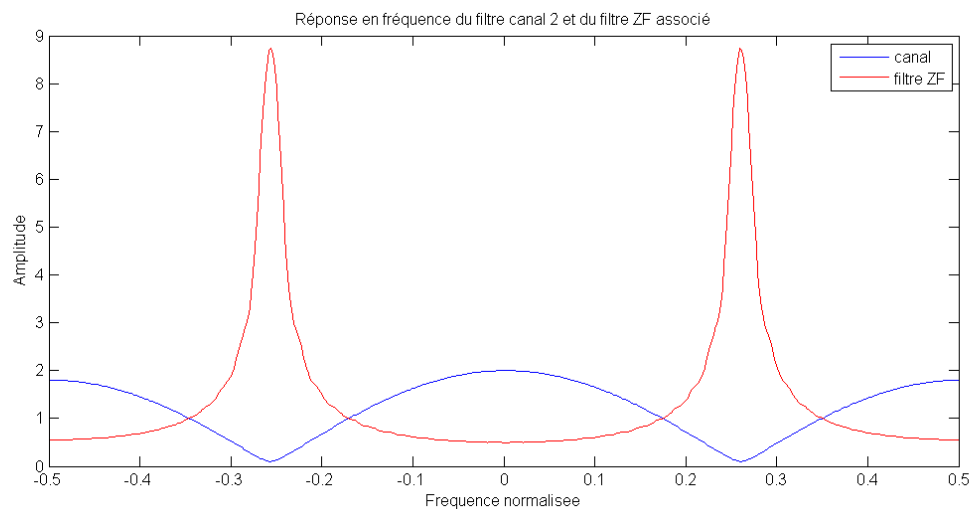
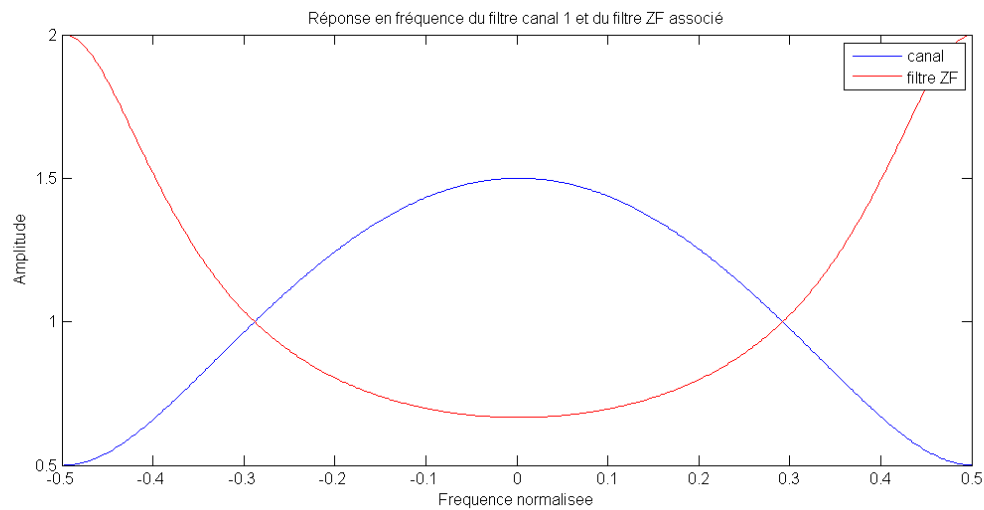
La solution est alors

$$\underline{f} = (H \cdot H^*)^{-1} H$$

Il reste encore à déterminer le retard  $d$ . En pratique, il sera choisi de manière à minimiser l'énergie de l'IES résiduelle, ce qui est exprimée par la formule suivante :

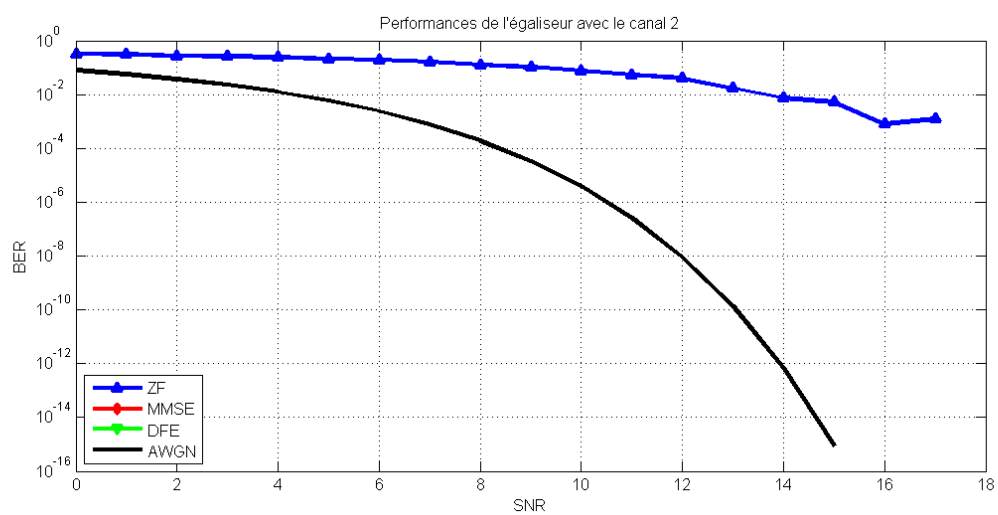
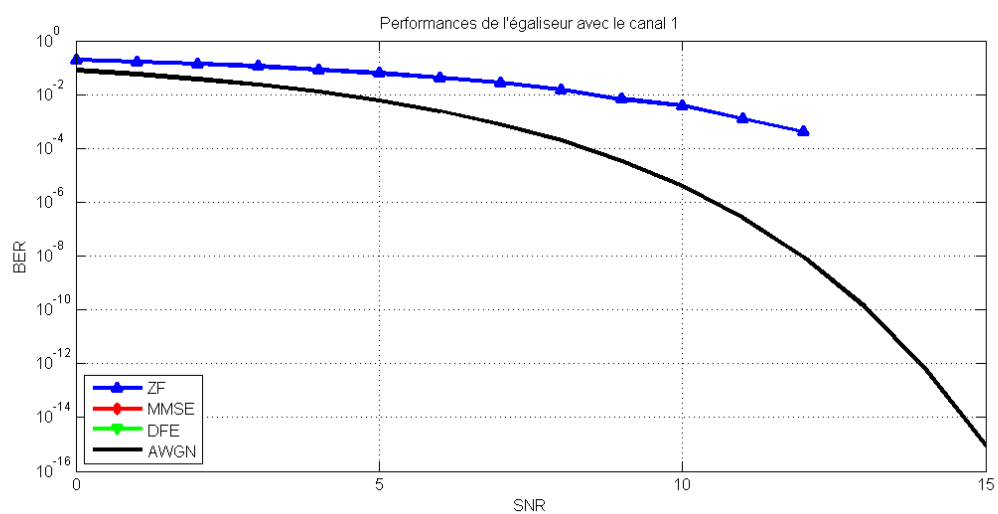
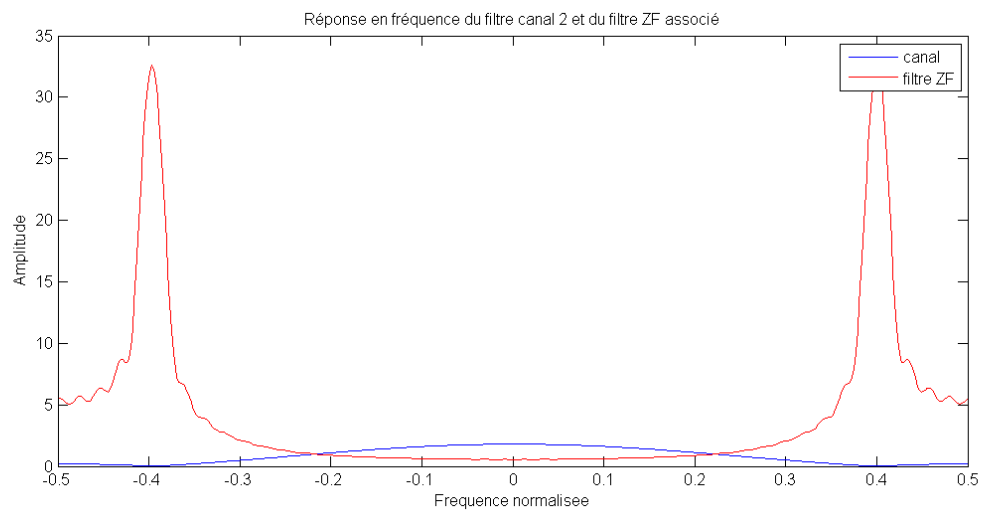
$$\hat{d} = \argmin \| (I - H^* (H H^*)^{-1} H) \underline{e}_{d+1} \|$$

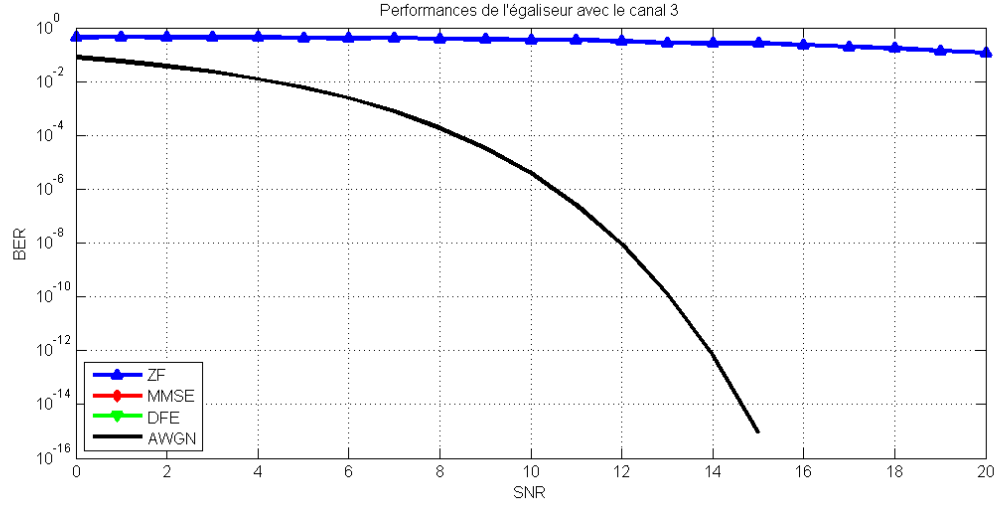
Nous allons à présent voir comment notre implémentation du filtre ZF sur MATLAB gère les distorsions engendrées par les trois différents canaux utilisé dans le cadre de ce TP.



Les réponses fréquentielles des égaliseurs sont bien, comme on peut l'observer sur les figures, l'inverse des réponses des différents canaux.

De plus, la forte sélectivité en fréquence des canaux se manifeste par des pics de résonance dans la réponse fréquentielle des égaliseurs.





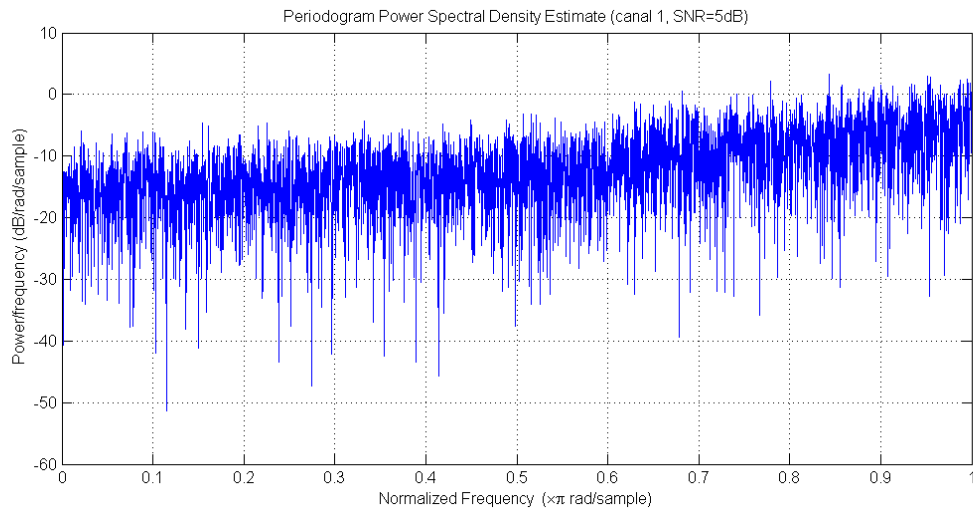
Pour ce qui est des performances de l'égaliseur, pour le premier canal la méthode semble relativement bien adaptée, même si l'on reste assez loin du TEB théorique sans IES représenté par la courbe du canal AWGN. Cependant, pour les canaux 2 et 3, même avec un SNR élevé il est difficile d'obtenir un TEB faible du fait de la forte sélectivité en fréquence de ces deux canaux. De plus, si l'on calcule l'énergie de l'IES en sortie de l'égaliseur dont l'expression théorique est la suivante

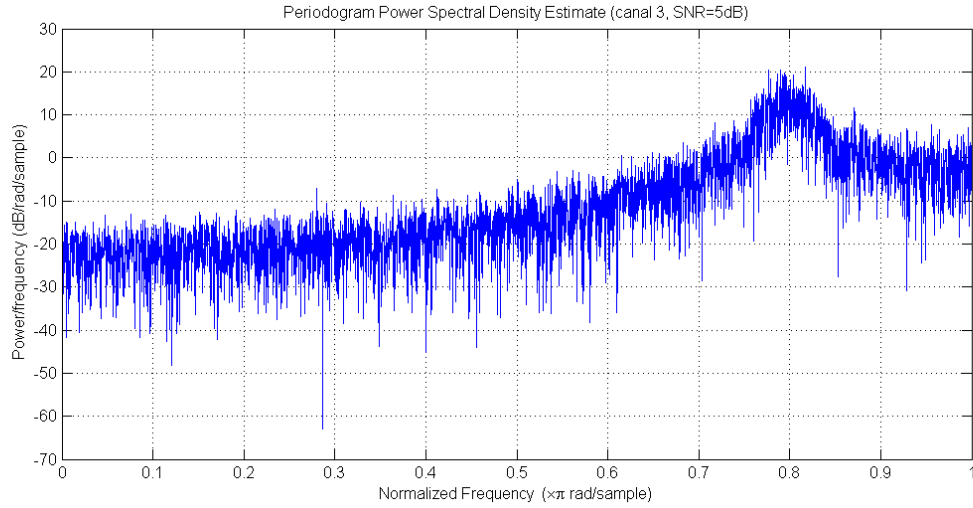
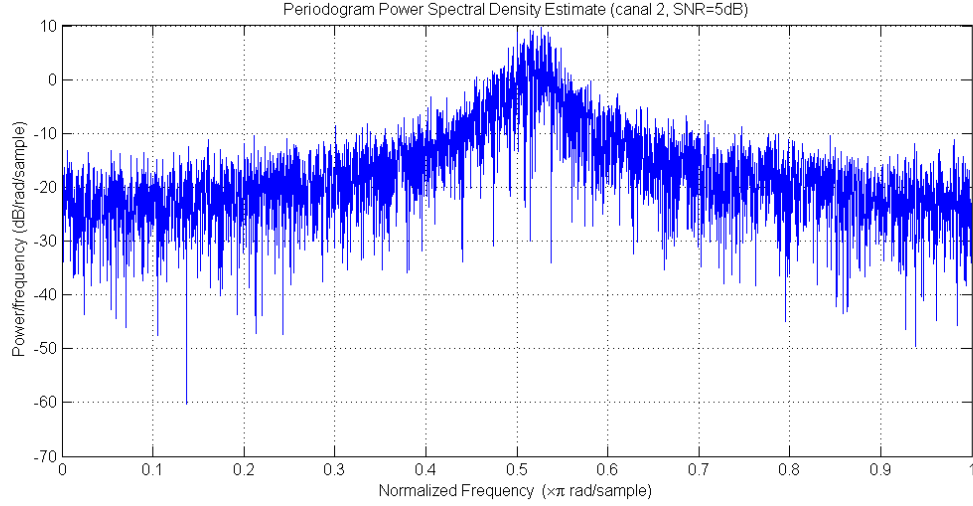
$$E[|\widetilde{\epsilon}_n|^2] = \|(I - H^*(HH^*)^{-1}H)e_{d+1}\|^2$$

On peut remarquer que si le filtre est sélectif en fréquence alors l'énergie de l'IES sera d'autant plus grande.

- **IES - canal 1** : 0 J
- **IES - canal 2** :  $0.945 \cdot 10^{-5}$  J
- **IES - canal 3** : 0.945 J

Nous allons à présent tracer les périodogrammes du bruit seul en sortie des égaliseurs des trois canaux.





L'énergie du bruit en sortie de l'égaliseur ZF a pour expression

$$E[\|\widetilde{W}_n\|^2] = \|(HH^*)^{-1}He_{d+1}\|^2$$

Ce résultat implique que si  $(HH^*)^{-1} \rightarrow 0$ , alors l'énergie en sortie peut être élevée.

Au vu des résultats précédents, on remarque que le filtre ZF, qui se base sur l'inversion de la réponse fréquentielle du canal qu'il cherche à égaliser, a des performances correctes pour des canaux peu sélectif en fréquence. Dans le cas contraire, le filtre va amplifier certaines fréquences et rendre l'égalisation impossible même avec un SNR très élevé.

### 3 Égaliseur MMSE

La seconde méthode employée est celle utilisant un filtre MMSE (Minimum Mean Square Error). Ce filtre a l'avantage de tenir compte du bruit, ce qui lui permet d'être plus performant que le filtre ZF. Le



principe de ce filtre est de minimiser l'erreur quadratique moyenne entre la sortie de l'égaliseur et le symbole que l'on souhaite estimer. Cela se traduit par l'équation suivante :

$$F(z) = \underbrace{\operatorname{argmin}}_{\tilde{F}(z)} (E[|\tilde{F}(z) \cdot y_n - s_{n-d}|^2])$$

Comme précédemment avec le filtre ZF, le filtre MMSE est de type RIF. On définit alors une fonction de coût  $J$  que l'on souhaite minimiser :

$$J(f) = E[|f \cdot y_n - s_{n-d}|^2]$$

Cette fonction peut également s'écrire sous cette forme :

$$J(f) = f^* (H \cdot H^* + \sigma^2 \cdot I) f + 1 - 2\operatorname{Re}(f^* \cdot H \cdot e_{d+1})$$

Avec :

$$f = (H \cdot H^* + \sigma^2 \cdot I)^{-1} H \cdot e_{d+1}$$

Le vecteur  $f$  correspond aux coefficients du filtre MMSE recherché. On remarque que son expression dépend bien du bruit, mais également d'un retard  $d$ .

Il nous reste donc à choisir un retard optimal. Il a été prouvé que cela revient à maximiser l'expression suivante :

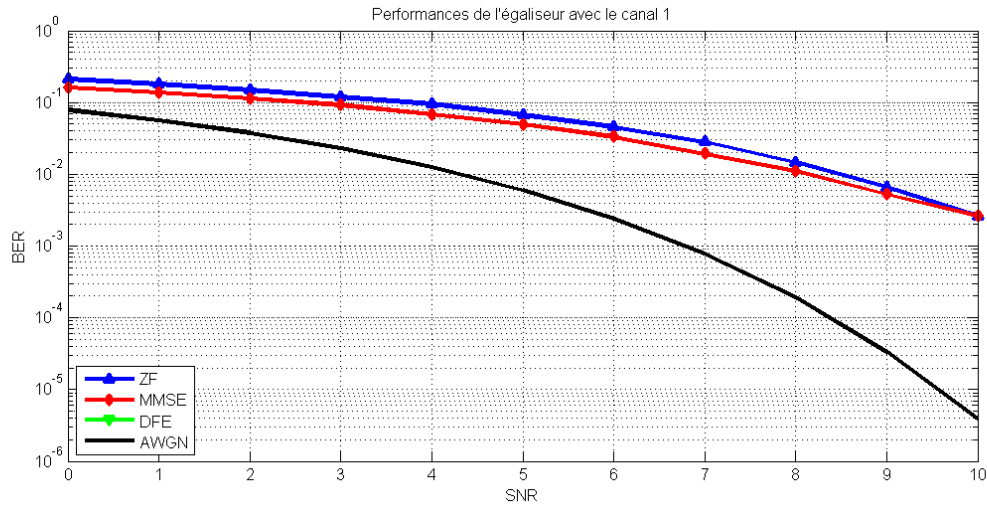
$$\left\| (H \cdot H^* + \sigma^2 \cdot I)^{-1/2} H \cdot e_{d+1} \right\|^2$$

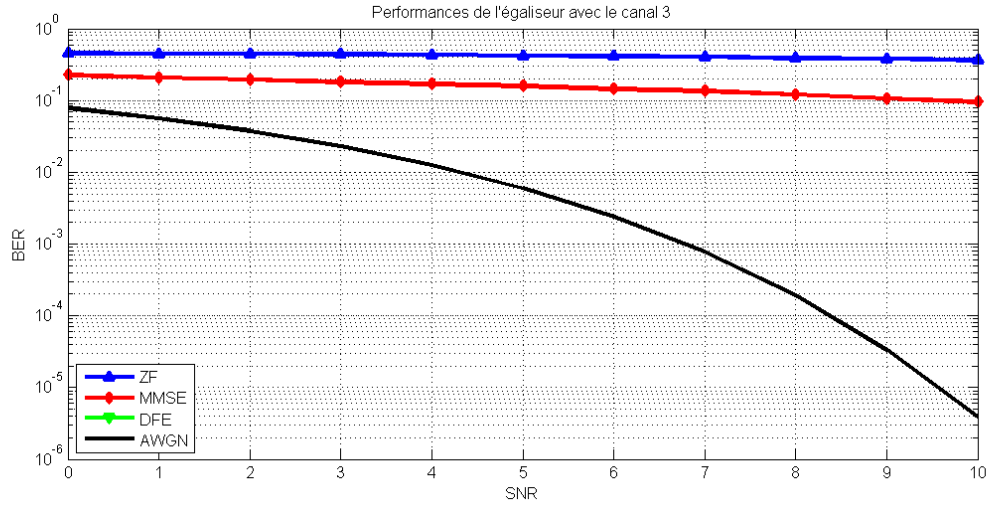
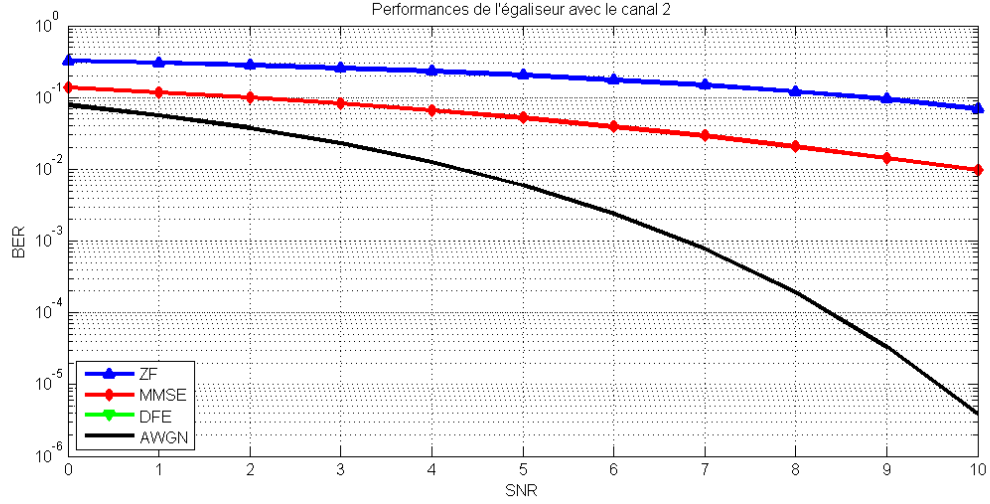
d'où :

$$\hat{d} = \underbrace{\operatorname{argmax}}_d \left\| (H \cdot H^* + \sigma^2 \cdot I)^{-1/2} H \cdot e_{d+1} \right\|^2$$

Il est alors possible de déterminer les coefficients du filtre MMSE.

A présent, nous allons étudier les performances de notre égaliseur MMSE implémenté sur MATLAB.





Dans les trois cas, les performances sont meilleures que celles du filtre ZF, même si pour les canaux 2 et 3 le TEB reste toujours relativement élevé par rapport au canal AWGN.

L'expression théorique de l'énergie de l'IES en sortie de l'égaliseur est la suivante :

$$E[|\widetilde{e}_n|^2] = 1 - \left\| (HH^* + \sigma^2 I)^{-\frac{1}{2}} H e_{d+1} \right\|^2$$

Les énergies calculées pour les trois canaux avec un SNR de 10dB sont :

- **IES - canal 1** : 0.056742 J
- **IES - canal 2** : 0.081734 J
- **IES - canal 3** : 0.193603 J

Comme pour ZF, l'énergie de l'IES est d'autant plus grande que le canal est sélectif en fréquence.

## Conclusion

En résumé, l'objectif de ce TP a été la mise en place de différentes techniques d'égalisation pour pallier aux distorsions introduites par le canal de propagation. Notre étude s'est basée sur trois canaux représentant chacun différents degrés de sélectivité en fréquence.

La première méthode implémentée a été celle du Zero-Forcing. Bien qu'elle soit efficace pour des canaux peu sélectifs en fréquence, les performances diminuent rapidement pour des canaux sélectifs.

Le second égaliseur utilisé a été le MMSE dont nous l'avons par rapport à l'égaliseur ZF et il s'est montré plus performant que ce dernier sur chacun des canaux.