

Project 6.27. The circle map and mode locking

Керований згасаючий маятник може бути апроксимований одновимірної різничним рівнянням для діапазону амплітуд і частот рушійних сили. Це різничне рівняння відоме як відображення окружності і задається

$$\Theta_{n+1} = (\Theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\Theta_n) \pmod{1}$$

Змінна Θ являє собою кут, і Ω являє собою відношення частот, ставлення власної частоти маятника до частоти періодичного рушійної сили. Параметр K є мірою міцності з'єднання нелінійного маятника до зовнішньої сили. Важливою величиною є число обертання, яка визначається як

$$W = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \Delta\theta_n,$$

де $\Delta\theta_n = \Omega - (K/2\pi) \sin 2\pi\theta_n$.

- а. Розглянути лінійний випадок, коли $K = 0$. Вибрати $\Omega = 0.4$ та $\Theta_0 = 0.2$ і визначити W . Перевірити, що якщо Ω є відношенням двох цілих чисел, то $W = \Omega$ і траєкторія є періодичною. Яким буде значення W , якщо Ω , ірраціональне число? Переконатися, що $W = \Omega$ і, що траєкторія приходить як завгодно близько до якого-небудь конкретного значення θ . Чи може θ_n коли-небудь повернутися точно до свого первісного значення? Цей тип поведінки траєкторії називається квазіперіодичним.
- б. При $K > 0$, ми знайдемо, що $W \neq \Omega$ і "замикання" в раціональних значеннях частот для діапазону значень K та Ω . Цей тип поведінки називається блокуючим. При $K < 1$, траєкторія є або періодичною або квазіперіодичною. Визначити величину W для $K = 1/2$ і значення Ω в діапазоні $0 < \Omega \leq 1$. Ширина Ω для різних значень блокуючих областей де W фіксується з збільшенням K . Розглянути інші значення K та намалювати схему в $K - \Omega$ площину ($0 \leq K, \Omega \leq 1$) так що ці частини площини, що відповідають блокуючим частотам, заштриховані. Ці заштриховані області називаються язиками Арнольда (Arnold tongues).

- в. Для $K = 1$, всі траєкторії є періодичними частотно блокованими траєкторіями. Зафіксуйте $K = 1$ та визначте залежність W від Ω . Намалюйте залежність W від Ω для $K = 1$.

Результати роботи

За допомогою програмного комплексу MatLab, було розроблено програму, що розв'язує поставлену задачу.

а. $W = 0.4000$

б. $K > 0$

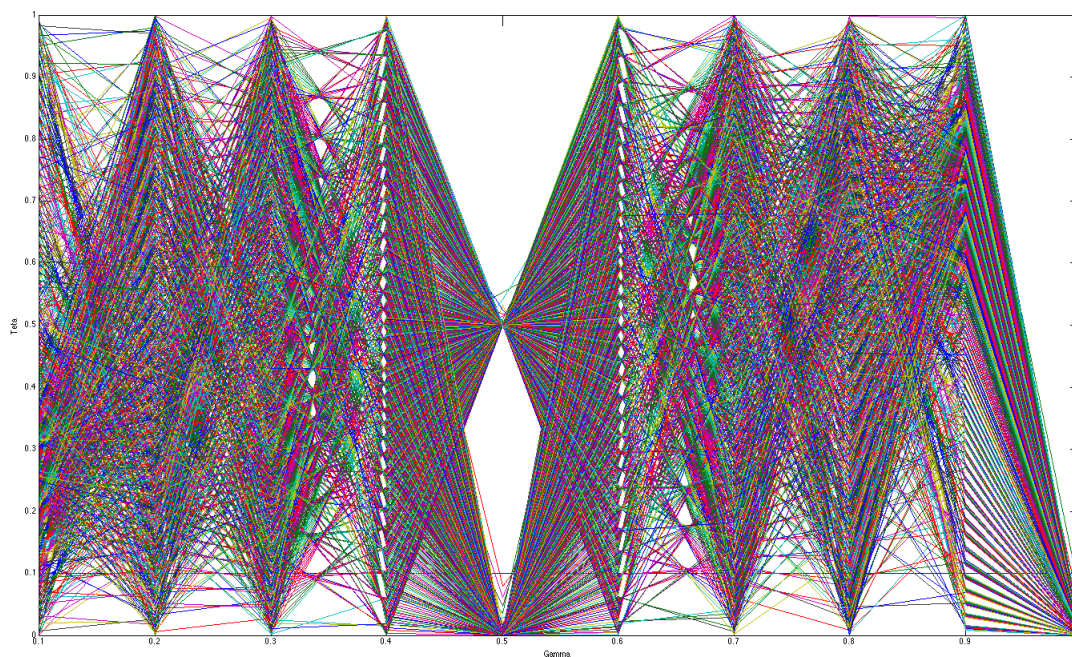


Рис 2.1 — Arnold tongues $K = 1/2$

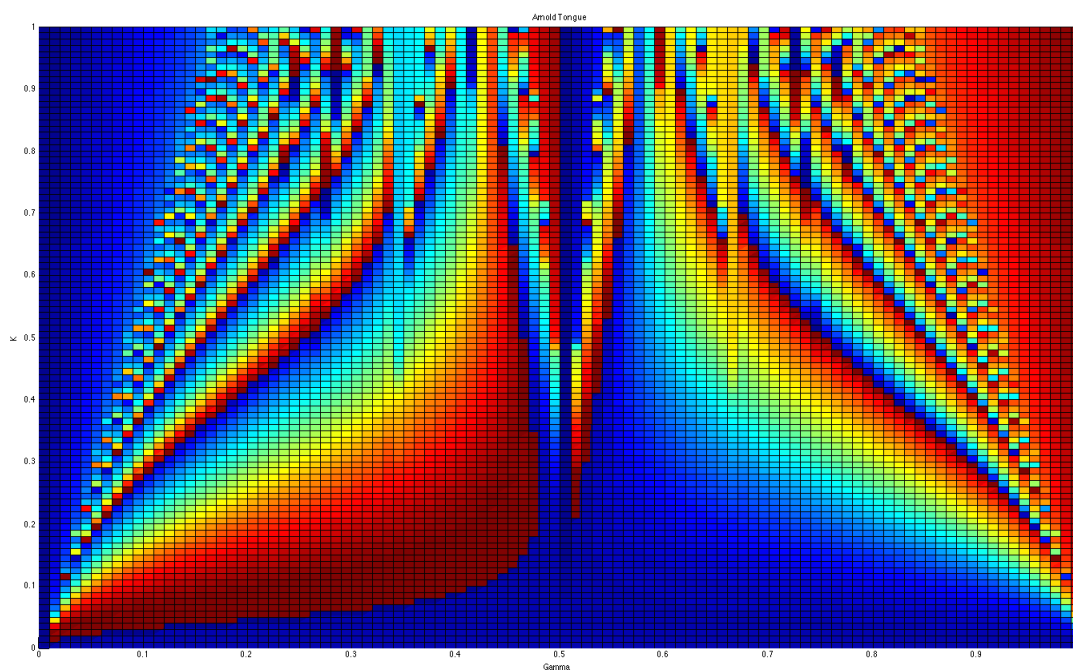


Рис 2.2 — Arnold tongues $K - \Omega$ ($0 \leq K, \Omega \leq 1$)

в. Графік залежності W від Ω при $K = 1$

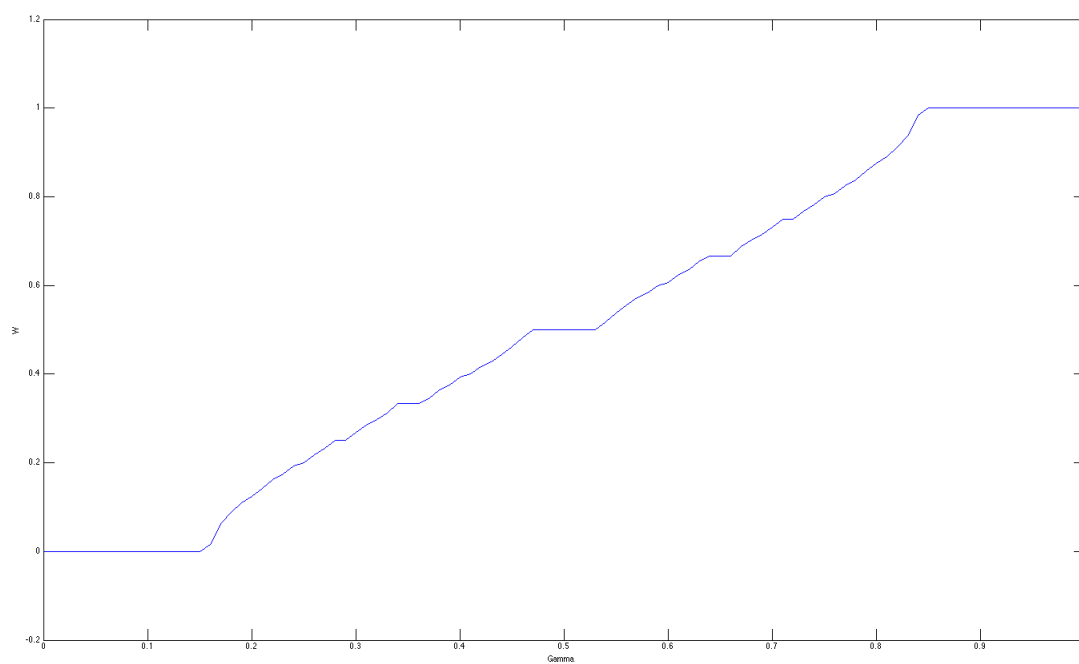


Рис 2.3 — Залежність W від Ω при $K = 1$