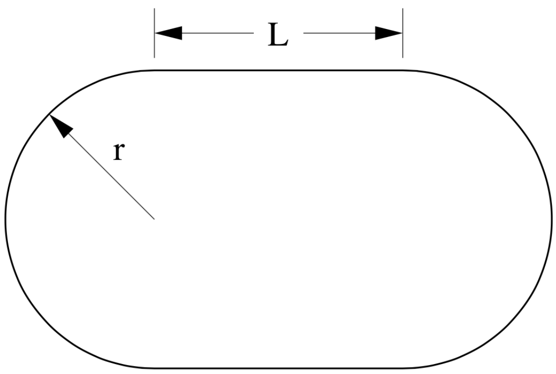
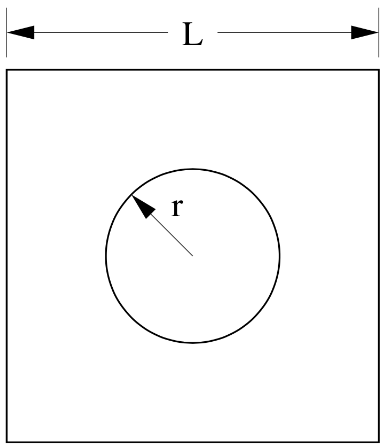
Project 6.26. Billiard models

Розглянемо двовимірну геометрію, в якій частка рухається з постійною швидкістю по прямій лінії доки пружно не відбивається від межі. Це прямолінійний рух відбувається в різних ”більярдних” системах. Простим прикладом такої системи є частка, що рухається з постійною швидкістю в межах кола. В цій геометрії кут між імпульсом частинки і дотичній до кордону при відображенні є однаковим для всіх точок.

Припустимо, що ми ділимо коло на дві рівні частини і з’єднаємо їх прямими лініями довжиною L, як показано на малюнку 1.1 а. Ця геометрія називається стадіонною більярдною моделлю. Як рух частинки на стадіоні порівняти з рухом в колі? В обох випадках ми можемо знайти траєкторію частинки геометричними міркуваннями. Стадіонна більярдна модель та аналогічна геометрія відома як більярдна модель Синай (рис 1.1 б) були використані в якості модельних систем для вивчення основ статистичної механіки. Також присутній великий інтерес у співвіднесенні поведінку класичної частинки в різних більярдних моделей до вирішення рівняння Шредінгера для одних і тих же геометрій.



(а)



(б)

Рис 1.1 — (а) геометрія стадіонної більярдної моделі; (б) геометрія більярдної моделі Синай

a. Напишіть програму, яка імітує модель стадіонної більярдної моделі. Використовуйте радіус r напівкіл в якості одиниці довжини. Алгоритм для визначення шляху частинки полягає в наступному:

(i) Почніть з початковою позиції (x_0, y_0) і імпульсу (p_{x0}, p_{y0}) частки такого, що $|p_0| = 1$.

(ii) Визначити, в яку з чотирьох сторін влучить частинка. Можливі верхні і нижні відрізки та праве й ліве півкільця.

(iii) Визначити наступну позицію частинки від перетину прямої лінії, що визначається поточним положенням та імпульсу, та рівняння для сегмента, де відбувається наступне відображення.

(iv) Визначте новий імпульс (p'_x, p'_y) частки після відбиття, так що кут падіння дорівнює куту відбиття. Для відбиття від відрізків ми маємо $(p'_x, p'_y) = (p_x, -p_y)$. Для відбиття від півкіл ми маємо
$p'_x = [y^2 - (x - x)^2]p_x - 2(x - x_c)yp_y$
$p'_y = -2(x - x_c)yp_x + [(x - x)^2 - y^2]p_y$,
де $(x_c, 0)$ є центром кола. (Зверніть увагу, що імпульс p_x, а не p'_x знаходиться в правій стороні. Пам'ятайте, що всі довжини масштабуються відносно радіусу кола.)

(v) Повторіть кроки (ii) - (iv).

б. Визначте чи є динаміка частинок хаотичною, оцінюючи найбільший показник Ляпунова. Один із способів зробити це, запустити дві частинки з майже однаковими позиціями і/або моментів (що відрізняються наприклад на 10^{-5}). Обчислюється різниця Δs двох траєкторій фазового простору в залежності від числа відбиттів n, де Δs визначається як $\Delta s = \sqrt{|r_1 - r_2|^2 + |p_1 - p_2|^2}$.
Оберіть L = 1 і R = 1. Показник Ляпунова можна знайти з напівлогарифмічного графіку Δs в порівнянні з n. Повторіть розрахунок для різних початкових умов і усередніть значення Δs перед побудовою. Повторіть розрахунок для $L = 0.5$ та 2.0 та визначте, чи залежать ваші результати від L.

в. Ще одним тест на існування хаосу є оборотність руху. Розверніть імпульс після того як частинка зробить n відбиттів, та малюйте траєкторію кольором фону, таким чином шлях буде стертий. Які обмеження робить округлення помилки для ваших результатів? Повторіть цю симуляцію для L = 1 і L = 0.

г. Помістіть невеликий отвір діаметром d в одному з круглих перерізів стадіону, так що частинка може через нього вийти. Виберіть L = 1 і встановити d = 0.02. Дайте частинці випадкове положення і імпульс, і запишіть час, коли частка виходить через отвір. Повторіть принаймні для 10^4 часток і обчислить частку частинок $S(n)$, що залишається після заданого числа відбиттів n. Функція $S(n)$ буде спадати з n. Визначnt функціональну залежність S від n, та обчисліть характерний час згасання, якщо $S(n)$ убуває експоненціально. Повторіть ці дії для L = 0,1, 0,5 і 2,0. Чи є час виходу функцією від L? Чи $S(n)$ убуває експоненціально для кругової більярдної моделі (L = 0) (див Бауер та Бертш)?

д. Виберемо довільну початкову позицію для частинки в стадіонній геометрії з L = 1, і невеликий отвір, як в частині (д). Виберіть принаймні 5000 значень початкового значення p_{x0} рівномірно розподілених між 0 і 1. Виберіть p_{y0} так, що $|p| = 1$. Зобразіть час виходу відносно p_{x0}, та опишіть візуальний образ траєкторій. Потім виберіть 5000 значення p_{x0} в меншому інтервалі з центром в p_{x0}, для якого час виходу був максимальним. Зобразіть ці значення часу виходу відносно p_{x0}. Чи бачите ви які-небудь докази самоподібності?

е. Повторіть кроки (а) - (д) для більярдної моделі Синай.

Результати роботи

2.1. Стадіонна більярдна модель

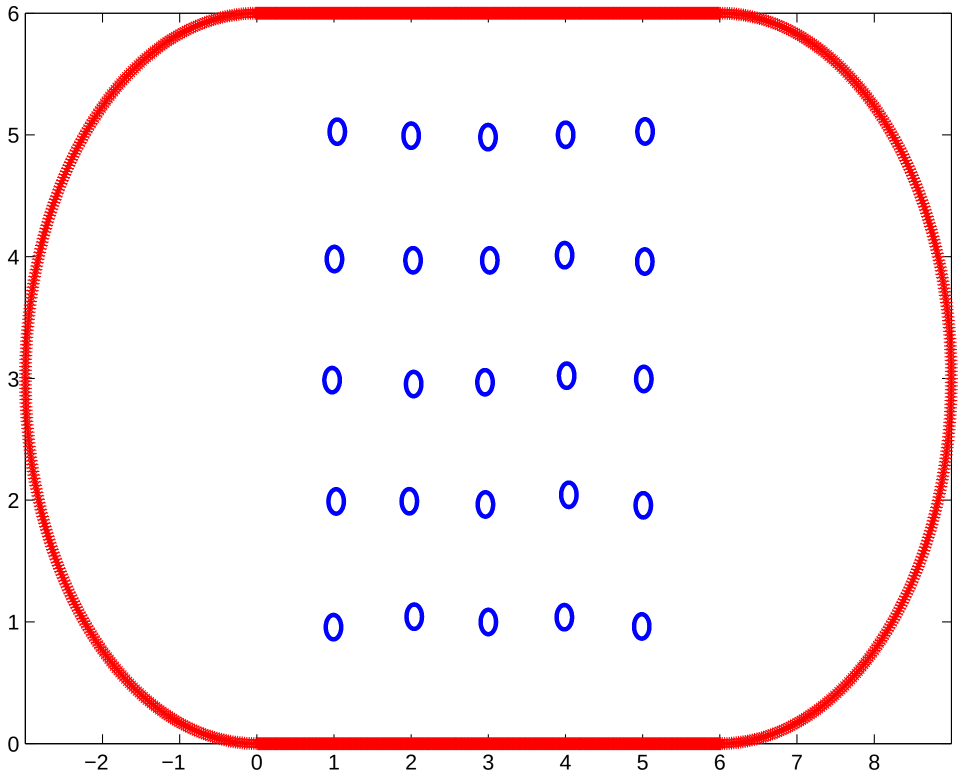


Рис 2.1 — Перший крок моделювання

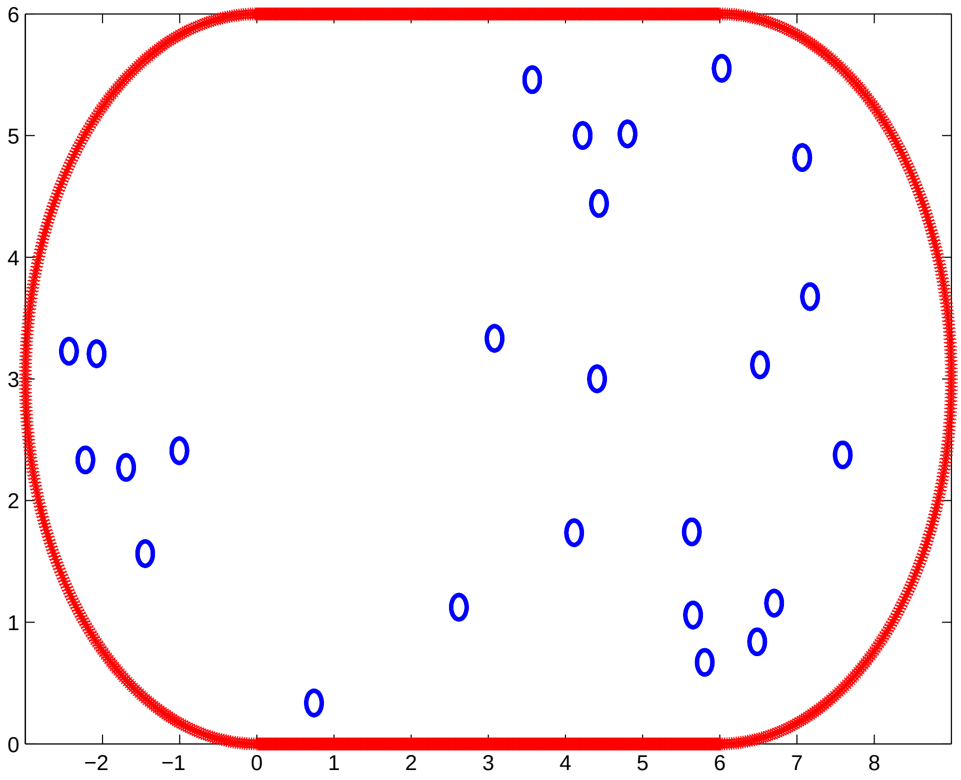


Рис 2.2 — Проміжний крок моделювання

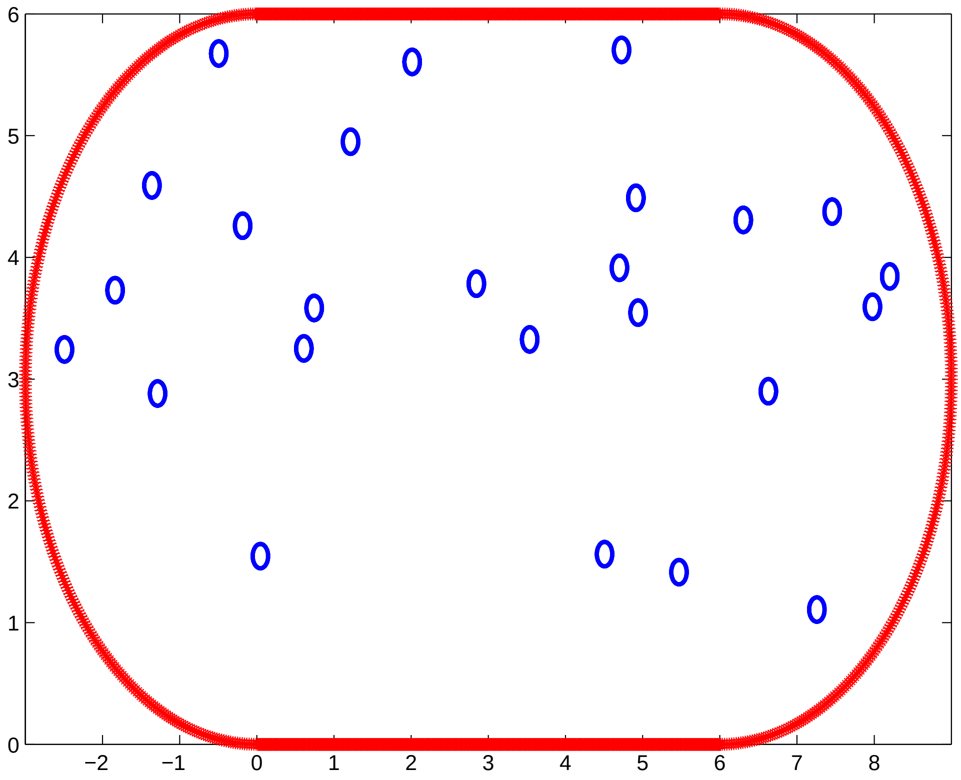


Рис 2.3 — Останній крок моделювання

2.2. Більярдна модель Синай

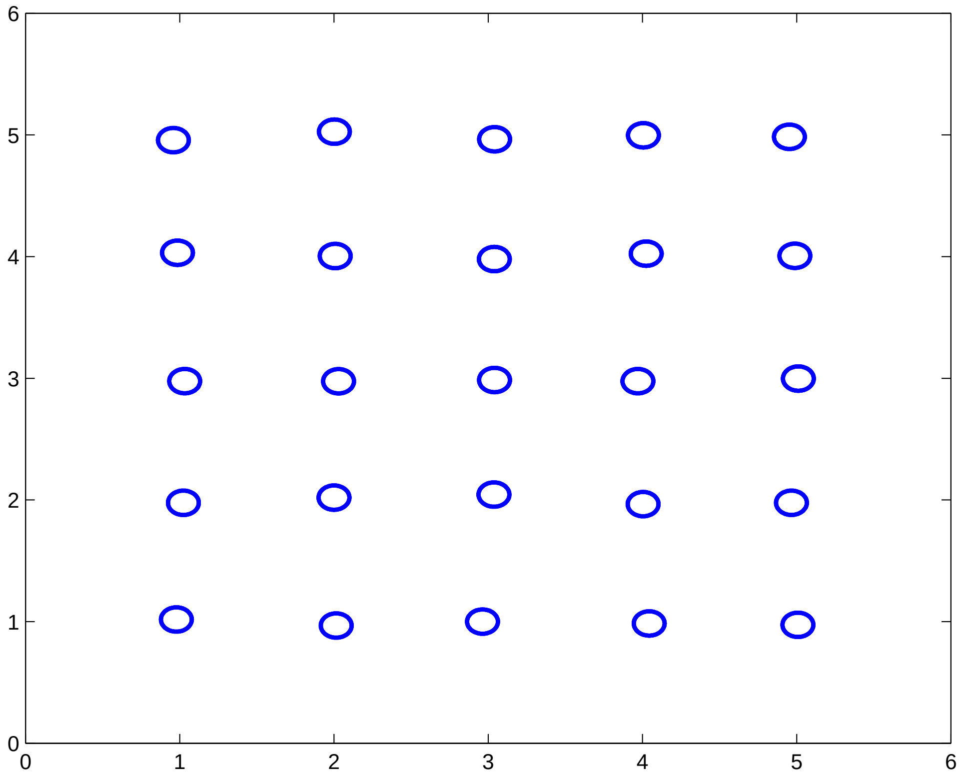


Рис 2.4 — Перший крок моделювання

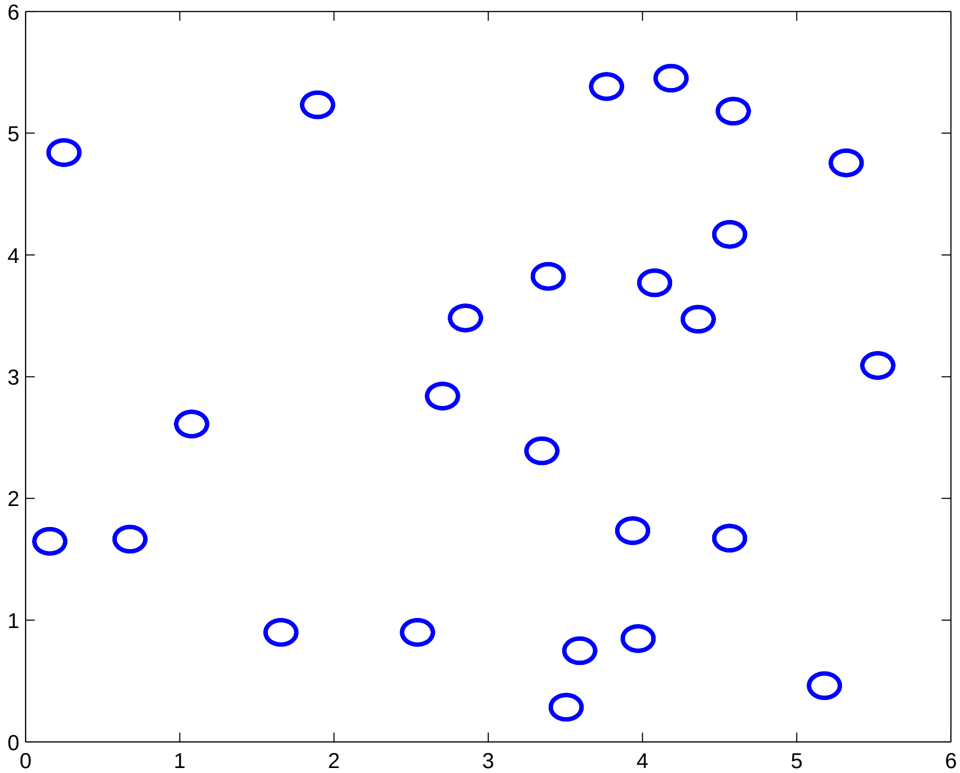


Рис 2.5 — Проміжний крок моделювання

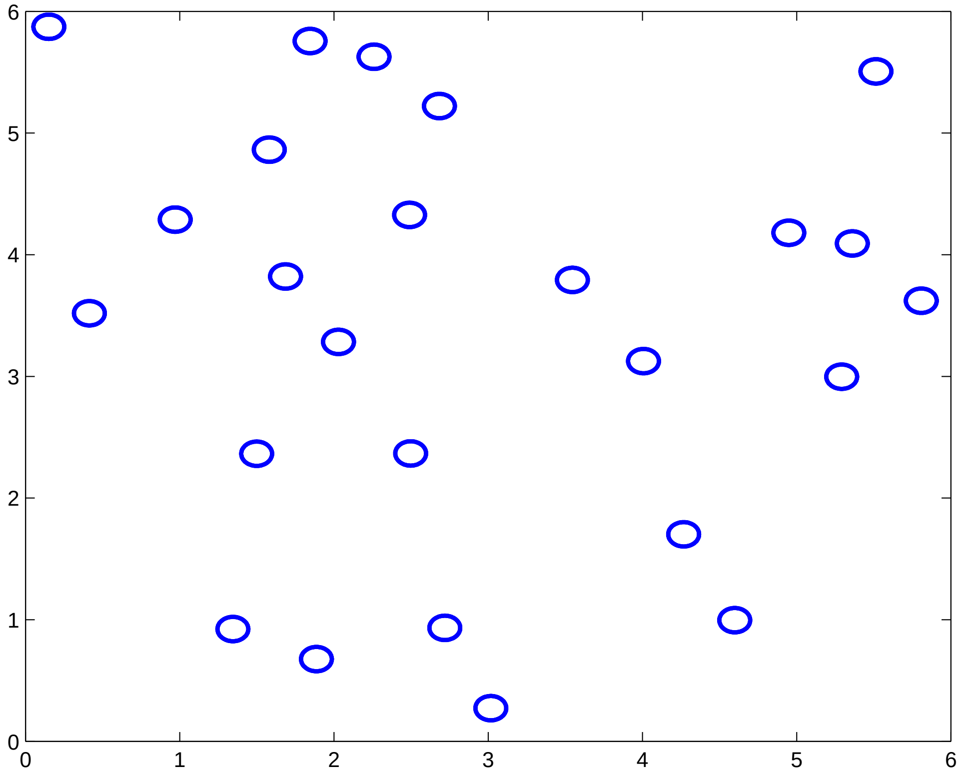


Рис 2.6 — Останній крок моделювання