Algebra Boole'a

Metoda wnioskowania boolowskiego pochodzi z 1847 roku od Boole'a i była rozwijana przez innych matematyków końca XIX-go wieku. Idee te zostały ponownie odkryte w kontekście nowych zastosowań w naukach przyrodniczych końca XX-go wieku.

Definicja 1. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a n dowolną, ustaloną liczbą naturalną. Dowolne przekształcenie $d\colon X^n \to X$ nazywamy *n-argumentowym działaniem* określonym w zbiorze X, przy czym *działaniem zero-argumentowym* nazywamy dowolnie ustalony element zbioru X.
Definicja 2. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a n dowolną, ustaloną liczbą naturalną. *Strukturą algebraiczną* nazywamy strukturę składającą się ze zbioru X wraz z pewną liczbą działań d_i $(i = 1, \ldots, n)$ określonych w tym zbiorze. Strukturę algebraiczną zapisujemy w postaci układu $(X, d_1, \ldots, d_n)$.
Definicja 2. Niech $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ będzie strukturą algebraiczną, w której B jest niepustym zbiorem, $\vee$ i $\wedge$ są działaniami dwuargumentowymi, $\neg$ jest działaniem jednoargumentowym, a 0 i 1 działaniami zero-argumentowymi. Strukturę tę nazywamy *algebrą Boole'a*, jeżeli działania $\vee, \wedge, \neg, 0, 1$ są tak określone, że spełniają następujące cztery warunki:

1. Działania $\vee$ i $\wedge$ są łączne i przemienne.

2. Działanie $\vee$ jest rozdzielne względem $\wedge$ i odwrotnie.

3. Dla dowolnego $a \in B$:
   $a \vee (\neg a) = 1$,
   $a \wedge (\neg a) = 0$,
   $a \vee 0 = a$,
   $a \wedge 1 = a$

4. Elementy 0 i 1 są różne. Elementy zbioru B nazywamy *stałymi boolowskimi*, zaś każdą zmienną przyjmującą wartości ze zbioru B nazywamy *zmienną boolowską*.

Prawa pochłaniania:
$a \vee a = a$,
$a \vee (a \wedge b) = a$,
$a \wedge a = a, a \wedge (a \vee b) = a$,
Prawa de Morgana:
$\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$,
$\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$,

Dwuwartościową algebrą Boole'a (BA) nazywamy algebrę Boole'a dla której $B = \{0, 1\}$, zaś działania $\vee, \wedge, \neg$ odpowiadają logicznej alternatywie, koniunkcji i negacji.

Stałe boolowskie 0 i 1 wraz ze wszystkimi zmiennymi boolowskimi algebry BA i ich zaprzeczeniami nazywamy *literałami boolowskimi*.

Definicja 4. Niech $BA = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ będzie dwuwartościową algebrą Boole'a. *Zbiór wyrażeń (formuł) boolowskich* algebry BA jest najmniejszym zbiorem spełniającym następujące dwa warunki:

1. Dowolna stała lub zmienna boolowska algebry BA należy do zbioru formuł boolowskich algebry BA.

2. Jeśli a, b są formułami boolowskimi algebry BA, to również $\neg a$, $a \wedge b$ i $a \vee b$ są formułami boolowskimi algebry BA.

Wartościowanie W wyrażeń (formuł) boolowskich algebry BA jest funkcją przyporządkowującą każdemu wyrażeniu boolowskiemu liczbę ze zbioru $\{0, 1\}$. Dla dowolnego wyrażenia boolowskiego b, liczbę $W(b)$ nazywamy wartością wyrażenia b i obliczamy ją w zwykły sposób, tzn. poprzez wykonanie wszystkich działań występujących w wyrażeniu b zgodnie z ich określeniem oraz w kolejności wskazywanej przez nawiasy występujące w wyrażeniu b.

Definicja 5. Niech $BA = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ będzie dwuwartościową algebrą Boole'a, a n dowolną, ustaloną liczbą naturalną. Dowolną funkcję $f \colon B^n \to B$ nazywamy *funkcją boolowską n zmiennych.*

Funkcję boolowską określamy za pomocą odpowiedniego wyrażenia boolowskiego. Można także opisywać funkcję boolowską za pomocą tabelki zawierającej wszystkie możliwe argumenty ze zbioru $\{0, 1\}^n$ wraz z odpowiadającymi im wartościami ze zbioru $\{0, 1\}$.

Przykład: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$.

Twierdzenie 1. Funkcję boolowską n-zmiennych f można przedstawić w dwóch postaciach:

1. $f(x) = \bigvee(x_1^{a_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{a_n})$, gdzie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ przebiega zbiór $f^{-1}(1) \subseteq \{0, 1\}^n$,
2. $f(x) = \bigwedge(x_1^{a_1} \vee \ldots \vee x_n^{a_n})$, gdzie $a = (a_1, \ldots, a_n)$ przebiega zbiór $f^{-1}(0) \subseteq \{0, 1\}^n$,

przy czym oznaczenie $x_i^{a_i}$ jest równe x_i, jeśli $a_i = 1$ i $\neg x_i$, jeśli $a_i = 0$. Postać pierwszą nazywamy *alternatywną postacią normalną* (disjunctive normal form) i oznaczamy przez DNF_f. Postać drugą nazywamy *koniunkcyjną postacią normalną* (conjunctive normal form) i oznaczamy przez CNF_f.

Z powodów technicznych szczególnie atrakcyjna jest sytuacja, gdy do przedstawienia funkcji boolowskiej wystarczą dwa tzw. poziomy logiczne: poziom koniunkcji (na którym występuje koniunkcja stałych lub zmiennych boolowskich) i poziom alternatywy (gdzie wyrażenia koniunkcyjne z pierwszego poziomu tworzą alternatywę). Taką postać funkcji boolowskiej nazywamy *wielomianem boolowskim.*

Definicja 6. Niech f będzie funkcją boolowską n-zmiennych.

1. *Jednomianem boolowskim* (monom) nazywamy dowolne wyrażenie boolowskie będące koniunkcją literałów boolowskich. *Kosztem obliczeniowym* jednomianu boolowskiego nazywamy liczbę literałów boolowskich tworzących jednomian boolowski.
2. *Wielomianem boolowskim* (polynomial) nazywamy dowolne wyrażenie boolowskie będące alternatywą jednomianów boolowskich. *Kosztem obliczeniowym* wielomianu boolowskiego nazywamy sumę arytmetyczną kosztów obliczeniowych wszystkich jednomianów boolowskich tworzących wielomian boolowski.
3. Wielomian boolowski p *oblicza funkcję boolowską* f wtedy i tylko wtedy, gdy
$\forall x \in f^{-1}(B) \colon p(x) = f(x)$.
4. Wielomian boolowski p nazywamy *wielomianem boolowskim o najmniejszym koszcie obliczeniowym* dla funkcji boolowskiej f wtedy i tylko wtedy, gdy p oblicza f i nie istnieje inny wielomian boolowski obliczający f i mający mniejszy koszt obliczeniowy niż p.

Proces prowadzący do przedstawienia funkcji boolowskiej w postaci wielomianu boolowskiego o najmniejszym koszcie obliczeniowym nazywamy *minimalizacją funkcji boolowskiej.* Definicję wielomianu boolowskiego obliczającego daną funkcje boolowską spełnia postać DNF tej funkcji, a zatem dla każdej funkcji boolowskiej istnieje chociaż jeden wielomian boolowski obliczający tę funkcję. Zatem istnieje również wielomian o najmniejszym koszcie obliczeniowym.

$\mathbf{Definicja7}.Niech \mathrm{f} bdziefunkcjboolowsk \mathrm{n}-zmiennych.$

Funkcję boolowską $f_{imp}(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{a_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}^{a_k}$, gdzie $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ oraz $a_i \in \{0, 1\}$ (dla $i = 1, \ldots, k$), nazywamy *implikantem funkcji boolowskiej* f wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek: $\forall x \in B^n \colon (f_{imp}(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1)$.

Zbiór wszystkich implikantów funkcji f oznaczamy przez $I(f)$.

Definicja 8. Niech f będzie funkcją boolowską n-zmiennych i niech implikant $g \in I(f)$. Implikant g nazywamy *implikantem pierwszym*, jeśli jest implikantem minimalnym ze względu na liczbę czynników. Zbiór wszystkich implikantów pierwszych funkcji f oznaczamy przez $PI(f)$.

Implikant pierwszy danej funkcji boolowskiej ma taką własność, że odrzucenie z niego dowolnego czynnika powoduje, że powstała w ten sposób funkcja nie jest już implikantem.

Twierdzenie 2. Wielomian boolowski o najmniejszym koszcie obliczeniowym dla funkcji boolowskiej f jest zbudowany tylko z implikantów funkcji f.