t 检验总结与应用

BWB

目录

1 单样本 t 检验

1.1 1.1 目的

单样本 t 检验用于检验一个样本的均值是否与已知的总体均值有显著差异。

1.2 1.2 应用场景

- 验证某产品的平均性能是否达到标准。
- 判断实验结果是否与预期值一致。

1.3 1.3 数据要求

- 样本是随机抽取的。
- 数据来自正态分布或样本量较大（$n \geq 30$）。
- 样本观测值相互独立。

1.4 1.4 假设

- 原假设 H_0：$\mu = \mu_0$
- 备择假设 H_1：$\mu \neq \mu_0$（双尾检验）或 $\mu < \mu_0$（左尾检验）、$\mu > \mu_0$（右尾检验）

1.5 1.5 HATPC 步骤

1.5.1 1.5.1 假设（Hypotheses）

- 原假设 H_0：$\mu = \mu_0$
- 备择假设 H_1：根据研究目的确定

1.5.2 1.5.2 假设条件（Assumptions）

- 样本是随机独立抽样的。
- 样本来自正态分布或样本量较大。

1.5.3 1.5.3 检验统计量（Test Statistic）

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

其中:

- $\bar{X}$：样本均值
- μ_0：总体均值（原假设中的值）
- S：样本标准差
- n：样本容量

1.5.4 1.5.4 P 值计算（P-value）

- 自由度 $df = n - 1$
- 根据 t 分布计算 P 值，或使用统计软件直接获得。

1.5.5 1.5.5 结论（Conclusion）

- 若 P 值小于显著性水平 α，则拒绝原假设。
- 做出关于总体均值的统计推断。

1.6 1.6 说明

单样本 t 检验通过比较样本均值与已知的总体均值，判断两者之间是否存在显著差异。在实践中，通常用于验证某一特定参数是否达到预期标准。例如，检验某品牌电池的平均寿命是否达到厂商声称的数值。

1.7 1.7 示例

问题描述：

假设我们有一款电池，厂商声称其平均寿命为 1000 小时。我们随机抽取了 15 个电池进行测试，得到的寿命数据如下（单位：小时）：

$$950, 970, 930, 960, 940, 980, 920, 955, 965, 945, 935, 975, 985, 925, 950$$

我们想检验这些电池的平均寿命是否低于厂商声称的值。

1.8 1.8 R 代码示例

下面的代码使用 R 语言的 `t.test` 函数对电池寿命数据进行单样本 t 检验。

Listing 1: 单样本 t 检验的 R 实现

```
# 样本数据
battery_life <- c(950, 970, 930, 960, 940, 980, 920, 955, 965, 945, 935, 975, 985,
   925, 950)
```

```r
# 执行单样本 t 检验
t_test_result <- t.test(battery_life, mu = 1000, alternative = "less")
print(t_test_result)

# 显著性水平
alpha <- 0.05

# 判断是否拒绝原假设
if (t_test_result$p.value < alpha) {
  cat("拒绝原假设，有足够证据表明平均寿命低于 1000 小时。\n")
} else {
  cat("无法拒绝原假设，缺乏证据表明平均寿命低于 1000 小时。\n")
}
```

解答:

运行上述代码，我们得到:

- t 值约为 -8.78，自由度为 14。
- P 值非常小（约为 1.04×10^{-7}），小于显著性水平 0.05。

因此，我们拒绝原假设，认为电池的平均寿命显著低于 1000 小时。

2 双样本 t 检验

2.1 1.1 目的

双样本 t 检验用于比较两个独立样本的均值是否有显著差异。

2.2 1.2 应用场景

- 比较两种教学方法对学生成绩的影响。
- 评估两种药物的疗效差异。

2.3 1.3 数据要求

- 两组样本彼此独立。
- 两组数据来自正态分布或样本量较大。
- 方差齐性（如果假设方差不等，需使用 Welch's t 检验）。

2.4 1.4 假设

- 原假设 H_0：$\mu_1 = \mu_2$
- 备择假设 H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$（双尾检验）

2.5 1.5 HATPC 步骤

2.5.1 1.5.1 假设（Hypotheses）

- 原假设 H_0：$\mu_1 = \mu_2$
- 备择假设 H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$

2.5.2 1.5.2 假设条件（Assumptions）

- 两组样本是独立的随机样本。
- 两组数据来自正态分布。
- 方差齐性（可通过方差齐性检验验证）。

2.5.3 1.5.3 检验统计量（Test Statistic）

当方差相等时：

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

其中，合并标准差 S_p 为：

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

当方差不等时，使用 Welch's t 检验：

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

2.5.4 1.5.4 P 值计算（P-value）

- 自由度：方差相等时，$df = n_1 + n_2 - 2$；方差不等时，使用 Welch-Satterthwaite 公式计算自由度。
- 根据 t 分布计算 P 值。

2.5.5 1.5.5 结论（Conclusion）

- 若 P 值小于显著性水平 α，则拒绝原假设。
- 做出关于两组均值差异的统计推断。

2.6 1.6 说明

双样本 t 检验用于比较两组独立样本的均值，判断两者之间是否存在显著差异。在教育研究中，可以用于比较不同教学方法的效果；在医学研究中，可以用于比较不同治疗方法的疗效。

2.7 1.7 示例

问题描述：

某研究想比较 A、B 两种教学方法对学生考试成绩的影响。随机选取了两组学生，A 组和 B 组的成绩数据如下（单位：分）：

A 组（$n_1 = 15$）：

$$85, 88, 90, 87, 86, 89, 91, 84, 88, 90, 86, 87, 89, 85, 88$$

B 组（$n_2 = 15$）：

83, 80, 85, 82, 81, 84, 83, 79, 82, 80, 81, 83, 82, 80, 84

我们想检验两组学生的平均成绩是否有显著差异。

2.8 1.8 R 代码示例

下面的代码使用 R 语言的 t.test 函数对两组成绩数据进行双样本 t 检验。

Listing 2: 双样本 t 检验的 R 实现

```r
# A 组成绩
group_A <- c(85, 88, 90, 87, 86, 89, 91, 84, 88, 90, 86, 87, 89, 85, 88)

# B 组成绩
group_B <- c(83, 80, 85, 82, 81, 84, 83, 79, 82, 80, 81, 83, 82, 80, 84)

# 检验方差齐性
var_test <- var.test(group_A, group_B)
print(var_test)

# 根据方差齐性结果选择 var.equal 参数
if (var_test$p.value > 0.05) {
  var_equal <- TRUE
} else {
  var_equal <- FALSE
}

# 执行双样本 t 检验
t_test_result <- t.test(group_A, group_B, var.equal = var_equal)
print(t_test_result)

# 显著性水平
alpha <- 0.05

# 判断是否拒绝原假设
if (t_test_result$p.value < alpha) {
  cat("拒绝原假设，有足够证据表明两组平均成绩有显著差异。\n")
} else {
  cat("无法拒绝原假设，缺乏证据表明两组平均成绩有显著差异。\n")
}
```

解答:

运行上述代码，我们得到:

- 方差齐性检验 P 值大于 0.05，认为方差相等。
- t 值约为 8.25，自由度为 28。
- P 值非常小（约为 2.14×10^{-9}），小于显著性水平 0.05。

因此，我们拒绝原假设，认为两组平均成绩存在显著差异。

3 配对 t 检验

3.1 1.1 目的

配对 t 检验用于比较两个相关样本（同一对象的两个测量值）的均值差异。

3.2 1.2 应用场景

- 测试治疗前后患者的健康指标变化。
- 评估培训前后员工技能的提升。

3.3 1.3 数据要求

- 数据成对存在，且每对之间是相关的。
- 差值近似正态分布或样本量较大。
- 各对差值彼此独立。

3.4 1.4 假设

- 原假设 H_0：$\mu_D = 0$
- 备择假设 H_1：$\mu_D \neq 0$（双尾检验）或根据研究目的确定方向

3.5 1.5 HATPC 步骤

3.5.1 1.5.1 假设（Hypotheses）

- 原假设 H_0：$\mu_D = 0$
- 备择假设 H_1：$\mu_D > 0$（药物有效降低血压）

3.5.2 1.5.2 假设条件（Assumptions）

- 成对数据的差值是独立的随机样本。
- 差值近似正态分布。

3.5.3 1.5.3 检验统计量（Test Statistic）

$$t = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}}$$

其中：

- $\bar{D}$：差值的样本均值
- S_D：差值的样本标准差
- n：配对样本的数量

3.5.4 1.5.4 P 值计算（P-value）

- 自由度 $df = n - 1$
- 根据 t 分布计算 P 值。

3.5.5 1.5.5 结论（Conclusion）

- 若 P 值小于显著性水平 α，则拒绝原假设。
- 做出关于差值均值的统计推断。

3.6 1.6 说明

配对 t 检验用于比较同一对象在不同条件下的测量结果，例如治疗前后的健康指标。通过分析成对差值，判断是否存在显著变化。

3.7 1.7 示例

问题描述:
一组 10 名患者在服用某药物前后血压的测量值如下（单位：mmHg）:

患者编号	服药前血压	服药后血压	差值（前 - 后）
1	150	140	10
2	160	145	15
3	155	150	5
4	148	138	10
5	152	140	12
6	158	147	11
7	149	135	14
8	153	142	11
9	151	139	12
10	154	143	11

表 1: 患者服药前后血压及差值

我们想检验药物是否有效降低了患者的血压。

3.8 1.8 R 代码示例

下面的代码使用 R 语言的 `t.test` 函数对患者服药前后的血压进行配对 t 检验。

Listing 3: 配对 t 检验的 R 实现

```
# 服药前后血压数据
before <- c(150, 160, 155, 148, 152, 158, 149, 153, 151, 154)
after <- c(140, 145, 150, 138, 140, 147, 135, 142, 139, 143)

# 计算差值
diff <- before - after

# 检查差值的正态性(可选)
shapiro.test(diff)

# 执行配对 t 检验
t_test_result <- t.test(before, after, paired = TRUE, alternative = "greater")
print(t_test_result)

# 显著性水平
alpha <- 0.05

# 判断是否拒绝原假设
if (t_test_result$p.value < alpha) {
  cat("拒绝原假设,有足够证据表明药物有效降低血压。\n")
} else {
  cat("无法拒绝原假设,缺乏证据表明药物有效。\n")
}
```

解答:

运行上述代码,我们得到:

- t 值约为 11.87,自由度为 9。
- P 值非常小(约为 1.16×10^{-7}),小于显著性水平 0.05。

因此,我们拒绝原假设,认为药物有效降低了患者的血压。

4 随机变量及其性质

4.1 期望和方差

对于随机变量 X：

$$E(X) = \mu \text{ (均值)}$$
$$Var(X) = \sigma^2 \text{ (方差)}$$
$$SD(X) = \sigma \text{ (标准差)}$$

4.2 随机变量的运算

对于独立的随机变量 $X_1, X_2, ..., X_n$：

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$
$$Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)$$

对于常数 c 和随机变量 X：

$$E(cX) = cE(X)$$
$$Var(cX) = c^2 Var(X)$$

4.3 R 实现

Listing 4: R 中的随机变量运算

```r
# 生成随机变量
X1 <- rnorm(1000, mean = 10, sd = 2)
X2 <- rnorm(1000, mean = 5, sd = 1)

# 计算均值和方差
mean_X1 <- mean(X1)
var_X1 <- var(X1)
mean_X2 <- mean(X2)
var_X2 <- var(X2)

# 随机变量的和
X_sum <- X1 + X2
mean_sum <- mean(X_sum)
var_sum <- var(X_sum)

# 打印结果
cat("E(X1) =", mean_X1, "\n")
```

```
cat("Var(X1) =", var_X1, "\n")
cat("E(X2) =", mean_X2, "\n")
cat("Var(X2) =", var_X2, "\n")
cat("E(X1 + X2) =", mean_sum, "\n")
cat("Var(X1 + X2) =", var_sum, "\n")
```

4.4 示例：测试啤酒瓶容量

让我们考虑一个实际例子，我们想测试啤酒瓶的平均容量是否与声称的 375 毫升有显著差异。

4.4.1 步骤 1：陈述假设

- 原假设 (H_0)：真实平均容量为 375 毫升 ($\mu = 375$)
- 备择假设 (H_1)：真实平均容量不是 375 毫升 ($\mu \neq 375$)

4.4.2 步骤 2：收集数据并计算置信区间

我们将使用 R 来分析给定的数据并计算 95% 置信区间。

Listing 5: R 中的置信区间和假设检验

```
# 给定数据
beer_data <- c(374.8, 375.0, 375.3, 374.8, 374.4, 374.9)

# 计算样本均值
sample_mean <- mean(beer_data)
print(paste("样本均值:", round(sample_mean, 4)))

# 执行t检验并计算置信区间
test_result <- t.test(beer_data, mu = 375, conf.level = 0.95)

# 打印结果
print(test_result)
```

4.4.3 步骤 3：解释结果

让我们查看输出：

```
[1] "样本均值: 374.8667"


    单样本 t 检验
```

```
数据:  beer_data
t = -0.70711, df = 5, p-value = 0.5108
备择假设: 真实均值不等于 375
95 percent 置信区间:
 374.5183 375.2151
样本估计:
   x的均值
 374.8667
```

从这个输出，我们可以解释:

- 样本均值是 374.87 毫升。
- 95% 置信区间是 [374.52 毫升, 375.22 毫升]。
- p 值为 0.5108，大于我们通常使用的 0.05 显著性水平。

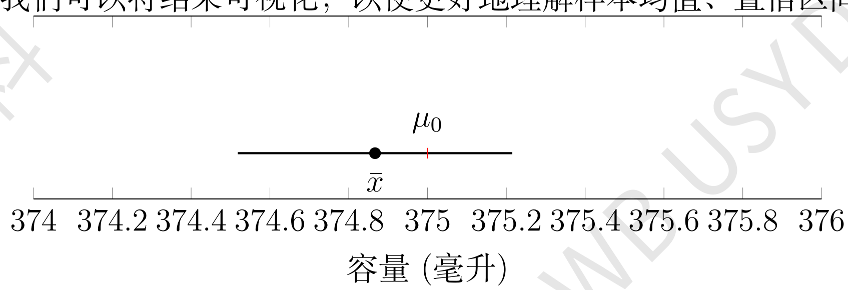
4.4.4 步骤 4：得出结论

基于这些结果，我们可以得出结论:

- 由于 p 值 (0.5108) 大于 0.05，我们未能拒绝原假设。
- 我们没有足够的证据表明真实平均容量与 375 毫升有显著差异。
- 95% 置信区间 (374.52 毫升到 375.22 毫升) 包含了 375 毫升，进一步支持了我们的结论。
- 尽管样本均值 (374.87 毫升) 略小于 375 毫升，但考虑到我们的样本大小和变异性，这个差异在统计学上并不显著。

4.5 结果可视化

我们可以将结果可视化，以便更好地理解样本均值、置信区间和假设值之间的关系。



在这个可视化中:

- 蓝线表示 95% 置信区间。

- 蓝点表示样本均值。
- 红色竖线表示假设的总体均值（375 毫升）。

如我们所见，假设值 375 毫升落在我们的置信区间内，这与我们未能拒绝原假设的决定一致。样本均值接近 375 毫升，且差异在统计学上并不显著。

5 功效分析

5.1 功效的定义

统计功效是正确拒绝错误原假设的概率。它受以下因素影响：

- 样本大小
- 效应量
- 显著性水平 (α)

5.2 Cohen's d 效应量

Cohen's d 是一种标准化的效应量度量：

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma}$$

其中 μ_1 和 μ_2 是两组的均值，σ 是合并标准差。

5.3 R 中的功效计算

Listing 6: R 中 t 检验的功效计算

```r
library(pwr)

# 计算功效
power_result <- pwr.t.test(n = 30, d = 0.5, sig.level = 0.05, type = "two.sample",
    alternative = "two.sided")

# 打印结果
print(power_result)

# 计算80%功效所需的样本量
sample_size_result <- pwr.t.test(power = 0.8, d = 0.5, sig.level = 0.05, type = "two
    .sample", alternative = "two.sided")

print(sample_size_result)
```

6 统计概念可视化

7 统计概念可视化

7.1 正态分布和置信区间