

# ANOVA

BWB

## 1 Two-way ANOVA 概述

### 1.1 定义

Two-way ANOVA（双因素方差分析）用于估计一个定量因变量的均值如何根据两个分类自变量的水平而变化。

### 1.2 应用场景

当需要同时考虑两个因素对一个结果变量的影响时，可以使用 Two-way ANOVA。

## 2 关键概念

- 因变量：一个定量变量，我们想要研究的结果。
- 自变量（因素）：两个分类变量，每个都有多个水平。
- 主效应：每个自变量单独对因变量的影响。
- 交互效应：两个自变量共同对因变量的影响。

## 3 假设检验

### 3.1 原假设 ( $H_0$ )

- 第一个自变量的各水平之间因变量的平均值没有差异。
- 第二个自变量的各水平之间因变量的平均值没有差异。
- 两个自变量之间没有交互作用。

### 3.2 备择假设 ( $H_1$ )

与原假设相反的陈述。

## 4 Assumption Check

1. Homogeneity of variance (a.k.a. homoscedasticity): 直接看 residual 本身是否有一个 constant variance  
The variation around the mean for each group being compared should be similar among all groups.

2. Independence of observations: 自变量之间应该相互独立

Your independent variables should not be dependent on one another i.e. one should not cause the other).

3. Normally-distributed dependent variable: 因变量应该呈正态分布

如果没有，需要有 logtransformation

## 5 结果解释

Two-way ANOVA 的结果可以帮助我们确定：

- 每个自变量是否对因变量有显著影响。
- 两个自变量之间是否存在显著的交互作用。

如果发现显著差异，通常需要进行事后检验（如 Tukey's HSD）来确定具体哪些组之间存在差异。

## 6 研究背景

本研究旨在分析不同类型电极的电阻性能。我们对 20 名受试者进行了测试，每人使用 5 种不同类型的电极，测量其电阻值。

## 7 数据分析方法

### 7.1 数据预处理

原始数据包含三个变量：受试者 ID、电极类型和电阻值。我们首先对数据进行了对数转换，以满足正态性假设。以下是对数转换的 R 代码：

```
1 resist_long$y = log(resist_long$resistance)
```

### 7.2 统计分析

我们进行了两种 ANOVA 分析：

1. 单因素 ANOVA：仅考虑电极类型对电阻的影响。

2. 双因素 ANOVA：同时考虑电极类型和受试者对电阻的影响。

以下是 ANOVA 分析的 R 代码：

```
1 # 单因素 ANOVA
2 fit1 = aov(y ~ electrode, data = resist_long)
3 summary(fit1)

4

5 # 双因素 ANOVA
6 fit2 = aov(y ~ Subject + electrode, data = resist_long)
7 summary(fit2)
```

## 8 结果

### 8.1 单因素 ANOVA 结果

表 1: 单因素 ANOVA 结果

| 源    | 自由度 | 平方和   | 均方     | F 值   | p 值  |
|------|-----|-------|--------|-------|------|
| 电极类型 | 4   | 5.09  | 1.2719 | 1.503 | 0.21 |
| 残差   | 75  | 63.48 | 0.8464 |       |      |

### 8.2 双因素 ANOVA 结果

表 2: 双因素 ANOVA 结果

| 源    | 自由度 | 平方和   | 均方     | F 值   | p 值      |
|------|-----|-------|--------|-------|----------|
| 受试者  | 15  | 33.27 | 2.2180 | 4.405 | 1.77e-05 |
| 电极类型 | 4   | 5.09  | 1.2719 | 2.526 | 0.05     |
| 残差   | 60  | 30.21 | 0.5036 |       |          |

## 9 讨论

比较单因素和双因素 ANOVA 的结果，我们发现：

1. 残差平方和：双因素 ANOVA (30.21) 显著低于单因素 ANOVA (63.48)，表明考虑受试者因素后，模型解释了更多的变异。
2. 自由度：双因素 ANOVA 的残差自由度 (60) 小于单因素 ANOVA (75)，这是由于引入了受试者因素。
3. 残差均方：双因素 ANOVA (0.5036) 小于单因素 ANOVA (0.8464)，indicating better model fit。
4. 电极类型的 F 值：双因素 ANOVA (2.526) 大于单因素 ANOVA (1.503)，表明考虑受试者因素后，电极类型的效应更为显著。
5. p 值：双因素 ANOVA 中电极类型的 p 值 (0.05) 低于单因素 ANOVA (0.21)，接近统计显著性水平。

## 10 Two-way ANOVA 表格

表 3: \*

Total sum of square = Treatment sum of squares + Block sum of squares + Residual sum of squares

**Two-way ANOVA table**

| Source of Variation | Sum of squares | df               | Mean square                                      | F-ratio                               |
|---------------------|----------------|------------------|--|---------------------------------------|
| Blocks              | Block Sum Sq.  | $n - 1$          |  |                                       |
| Treatments          | Trt Sum Sq.    | $g - 1$          | Trt MS = $\frac{\text{Trt Sum Sq.}}{g-1}$        | $\frac{\text{Trt MS}}{\text{Res MS}}$ |
| Residual            | Res Sum Sq.    | $(n - 1)(g - 1)$ | Res MS = $\frac{\text{Res Sum Sq.}}{(n-1)(g-1)}$ |                                       |
| Total               | Total Sum Sq.  | $ng - 1$         |  |                                       |

Block 是 location (1,2,3,4)

Treatment 是不同的 method (1,2,3,4,5)

| Locations | Method 1 | Method 2 | Method 3 | Method 4 | Method 5 |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1         | 21.6     | 30.0     | 76.8     | 45.6     | 99.0     |
| 2         | 39.6     | 64.8     | 108.6    | 90.0     | 144.3    |
| 3         | 66.6     | 72.3     | 133.8    | 98.7     | 158.1    |
| 4         | 119.7    | 135.9    | 239.1    | 163.5    | 272.4    |

## 11 使用秩的调整: 双因素 Friedman 检验

### 11.1 Friedman 检验概述

Friedman 检验是一种基于秩的双因素布局检验方法:

- 每个观测值都被替换为其组内秩次
- 对这些秩次进行单因素 ANOVA F 检验

### 11.2 实现方法

Friedman 检验可以通过以下方式进行:

- 置换法
- 对等价统计量进行  $\chi^2$  近似

等价统计量为:

$$\frac{\text{Treatment sum of squares of the ranks}}{\text{Total sum of squares of the ranks}/n(g - 1)}$$

在原假设 (所有处理效果相等) 下, 该统计量近似服从自由度为  $g - 1$  的  $\chi^2$  分布。

### 11.3 R 中的实现

使用  $\chi^2$  近似方法:

```
1 friedman.test(y ~ electrode | Subject, data = resist_long)
```

输出结果:

```
Friedman rank sum test
```

```
data: y and electrode and Subject
```

```
Friedman chi-squared = 5.4522, df = 4, p-value = 0.244
```

使用模拟/置换方法获取 p 值:

```
1 fried.stat = friedman.test(y ~ electrode | Subject, data = resist_long)$statistic
2 B = 1000
3 fr.st = vector("numeric", length = B)
4 for(i in 1:B) {
5   fr.st[i] = friedman.test(sample(y) ~ electrode | Subject, data = resist_long)$statistic
6 }
7 mean(fr.st>=fried.stat)
```

输出结果:

```
[1] 0.244
```

这两种方法得到的 p 值相同, 都是 0.244。

## 12 理论基础

双因素 ANOVA 可以检验:

- 每个自变量的主效应
- 两个自变量之间的交互作用

数学模型可表示为:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

其中,  $Y_{ijk}$  是观察值,  $\mu$  是总体平均值,  $\alpha_i$  和  $\beta_j$  是主效应,  $(\alpha\beta)_{ij}$  是交互作用,  $\epsilon_{ijk}$  是误差项。

## 13 实例分析: ToothGrowth 数据集

我们将使用 R 内置的 ToothGrowth 数据集来演示双因素 ANOVA 的应用。

## 13.1 数据描述

ToothGrowth 数据集记录了豚鼠牙齿生长情况，包含以下变量：

- len: 牙齿长度
- supp: 补充剂类型 (VC: 维生素 C, OJ: 橙汁)
- dose: 剂量 (0.5, 1, 2 mg/day)

## 13.2 数据准备和探索

首先，我们加载数据并进行初步探索：

```
1 # 加载数据
2 data(ToothGrowth)
3 # 将dose转换为因子
4 ToothGrowth$dose <- as.factor(ToothGrowth$dose)
5
6 # 查看数据结构
7 str(ToothGrowth)
8
9 # 基本统计描述
10 summary(ToothGrowth)
```

Listing 1: 数据准备和探索

## 13.3 进行双因素 ANOVA

现在，我们进行双因素 ANOVA 分析：

```
1 # 进行双因素ANOVA
2 aov_result <- aov(len ~ supp * dose, data = ToothGrowth)
3 #下面的跟上面的是同样的效果
4 aov(len ~ supp + dose + supp : dose, data = ToothGrowth)
5
6 # 查看结果
7 summary(aov_result)
```

Listing 2: 双因素 ANOVA 分析

## 13.4 双因素 ANOVA 公式解释

在双因素 ANOVA 中，我们经常会遇到一些特殊符号，这些符号在 R 语言中有特定的含义。让我们详细解释一下这些符号：

## 13.5 公式符号解释

- $Y \sim A + B$ : 这个公式表示我们要分析 Y (因变量) 如何受到 A 和 B (两个自变量) 的影响。这里的“+”表示我们要考虑 A 和 B 的主效应，但不考虑它们之间的交互作用。
- $Y \sim A * B$ : 这个公式等价于  $Y \sim A + B + A:B$ 。“\*”符号表示我们不仅要考虑 A 和 B 的主效应，还要考虑它们之间的交互作用。

- **A:B**: 这个符号专门表示 A 和 B 之间的交互作用。它检验 A 的效应是否依赖于 B 的水平，反之亦然。

## 13.6 结果解释

ANOVA 表的输出结果可能如下：

| 表 4: 双因素 ANOVA 结果 |     |        |        |       |          |
|-------------------|-----|--------|--------|-------|----------|
| 源                 | 自由度 | 平方和    | 均方     | F 值   | P 值      |
| supp              | 1   | 205.4  | 205.4  | 15.57 | 0.000231 |
| dose              | 2   | 2426.4 | 1213.2 | 92.00 | < 2e-16  |
| supp:dose         | 2   | 108.3  | 54.2   | 4.11  | 0.021860 |
| 残差                | 54  | 712.1  | 13.2   |       |          |

根据这些结果，我们可以得出以下结论：

1. 补充剂类型 (supp) 对牙齿生长有显著影响 ( $p < 0.001$ )。
2. 剂量 (dose) 对牙齿生长有极其显著的影响 ( $p < 0.001$ )。
3. 补充剂类型和剂量之间存在显著的交互作用 ( $p < 0.05$ )。

## 14 结论

通过对 ToothGrowth 数据集的分析，我们发现补充剂类型和剂量都对豚鼠牙齿生长有显著影响，并且它们之间存在交互作用。这表明不同类型的补充剂在不同剂量下可能会产生不同的效果。

在实际应用中，这种分析可以帮助研究人员优化补充剂的类型和剂量，以达到最佳的牙齿生长效果。

## 15 交互作用的图形解释

在分析双因素 ANOVA 结果时，图形可以帮助我们直观地理解交互作用。让我们看两个例子来说明这一点。

## 15.1 毒药和解药实验

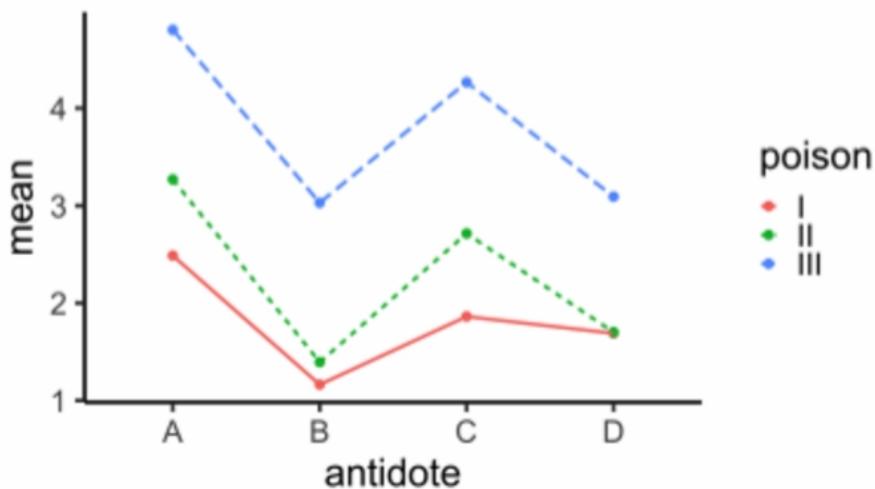


图 1: 毒药和解药实验的交互作用图

图 1展示了毒药和解药实验的结果。我们可以观察到：

- 三种毒药 (I, II, III) 对应的线条并不平行。
- 在某些点上，线条之间有交叉。

这种模式表明毒药和解药之间可能存在交互作用。不同类型的毒药对不同解药的反应不同，这意味着解药的效果取决于所使用的毒药类型。

## 15.2 纸飞机实验

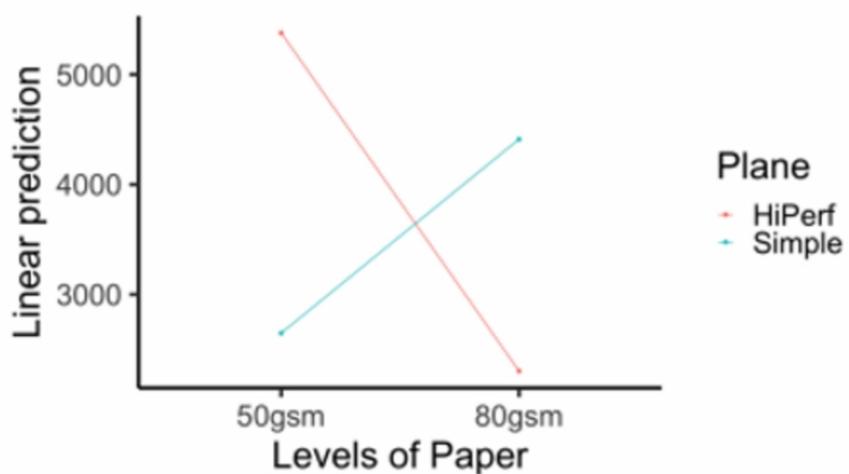


图 2: 纸飞机实验的交互作用图

图 2展示了纸飞机实验的结果。这里我们可以看到：

- 两种飞机设计 (HiPerf 和 Simple) 对应的线条明显不平行。

- 线条之间有一个非常明显的交叉点。

这种模式强烈暗示了纸张重量和飞机设计之间存在显著的交互作用：

- 对于轻质纸（50gsm），高性能设计（HiPerf）的表现明显优于简单设计（Simple）。
- 然而，对于重质纸（80gsm），情况完全相反，简单设计的表现反而更好。

### 15.3 比较和结论

通过比较这两个图，我们可以得出以下结论：

- 在毒药和解药实验中，交互作用虽然存在，但可能不如纸飞机实验中那么强烈。线条的交叉不太明显，可能需要进一步的统计分析来确认交互作用的显著性。
- 在纸飞机实验中，交互作用非常明显。线条的交叉清晰可见，这强烈表明纸张重量对飞机性能的影响高度依赖于飞机的设计。