Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

# Cours d'IN41

## Chapitre 3 – Analyse des signaux apériodiques

Semestre de printemps 2016

# Table des matières

# 1 Passage de la décomposition en séries de Fourier (DSF) à la transformée de Fourier (TF)

Le passage d'un signal périodique à un signal apériodique peut se faire en considérant que la période $T$ devient de plus en plus grande pour tendre finalement vers $+\infty$.

**Définition 1** (Signal apériodique)

Un signal apériodique $x(t)$ peut être défini à l'aide de son intégrale de Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(if)e^{i2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$X(if) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$X(if)$ est la transformée de Fourier directe de $x(t)$. $x(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $X(if)$.

$$X(if) = \mathrm{TF}\{x(t)\}$$

$$x(t) = \mathrm{TF}^{-1}\{X(if)\}$$

La courbe $X(if)$ en fonction de la fréquence f est le spectre du signal x. Si le signal $x(t)$ ne possède pas de symétries particulières, sa densité spectrale d'amplitude est une fonction complexe :

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(if) = X_r(if) + iX_i(if)$$

La décomposition d'un signal $x(t)$ en ses composantes spectrales ($\mathrm{TF}\{x(t)\} = X(if)$) à l'aide de la transformée de Fourier porte le nom d'analyse spectrale ou analyse de Fourier.

Inversement, la synthèse d'un signal à l'aide de la transformée de Fourier inverse est la synthèse ou synthèse de Fourier.

## 1.1 Propriétés

**Linéarité :**

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(if) \\ y(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} Y(if) \end{array}\right\} \implies ax(t) + by(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} aX(if) + bY(if) \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{C}^2$$

Donc la transformée de Fourier est une transformation linéaire.

**Décalage temporel :**

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(if)$$
$$x(t+t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(if)e^{i2\pi f t_0}$$

### 1.1.1 Décalage fréquentiel

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(if)$$
$$x(t)e^{i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} X(i(f-f_p))$$

**Changement d'échelle :**

$$\text{TF}\{x(at)\} = \frac{1}{||a||}X(i(\frac{f}{a})) \text{ avec } a \neq 0$$

**Parité :** Si le signal $x$ est pair :

$$X(if) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)\mathrm{d}t$$

Si le signal $x$ est impair :

$$X(if) = -2i\int_0^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\mathrm{d}t$$

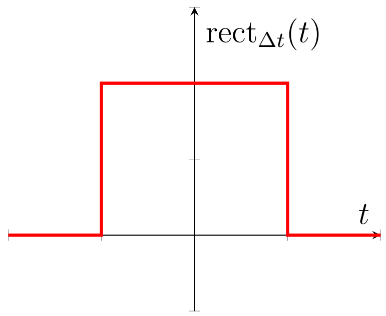


Figure 1 – Représentation d'une impulsion rectangulaire

**Spectre d'une impulsion rectangulaire** $\text{rect}_{\Delta t}(t)$ **de largeur** $\Delta t$ **:**

$$\text{rect}_{\Delta t}(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| \leq \dfrac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Spectre de $\text{rect}_{\Delta t}(t)$ :

$$\text{RECT}_{\Delta t}(if) = \text{TF}\{\text{rect}_{\Delta t}(t)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}_{\Delta t}(t) e^{-i2\pi f t} \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} A e^{-i2\pi f t} \mathrm{d}t$$
$$= A[\frac{e^{-i2\pi f t}}{-i2\pi f}]_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}$$
$$= \frac{A}{\pi f}(\frac{e^{i\pi f \Delta t} - e^{-i\pi f \Delta t}}{2i})$$
$$= \frac{A\Delta t}{\pi f \Delta t} \sin(\pi f \Delta t)$$
$$= \mathrm{sinc}(\pi f \Delta t) = A\Delta t \times \mathrm{sinc}(\pi f \Delta t) = \mathrm{TF}\{\mathrm{rect}_{\Delta t}(t)\}$$

La densité spectrale d'amplitude d'nue impulsion rectangulaire centrée en t=0 est donnée par un sinus cardinal.

### Spectre d'un sinus amorti

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ A e^{-at} \sin(2\pi f_p t) \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$Y(if) = A \frac{2\pi f_p}{(s + i2\pi f)^2 + (2\pi f_p)^2} \in \mathbb{C}$$

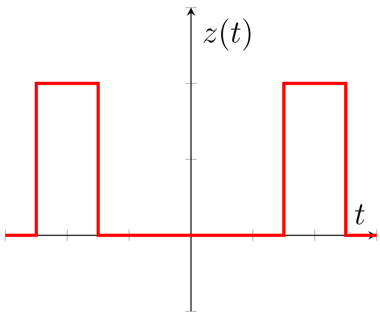


FIGURE 2 – Représentation de deux impulsions rectangulaires

### Spectre de deux impulsions

$$z(t) = \mathrm{rect}_{\Delta t}(t - \frac{t_0}{2}) + \mathrm{rect}_{\Delta t}(t + \frac{t_0}{2})$$

Comme la transformée de Fourier est linéaire et $\mathrm{TF}\{x(t + t_0)\} = X(if)e^{i2\pi f t_0}$, on a :

$$Z(if) = 2A\Delta t \times \mathrm{sinc}(\underbrace{\pi f \Delta t)(e^{-i\pi f t_0} + e^{i\pi f t_0})}_{cos(\pi f t_0)}$$

**Spectre de l'exponentielle décroissante :**

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-at} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$X(if) = \frac{1}{a + i2\pi f}$$

**Spectre de l'exponentielle décroissante symétrique :**

$$x(t) = e^{-a|t|} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$X(if) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

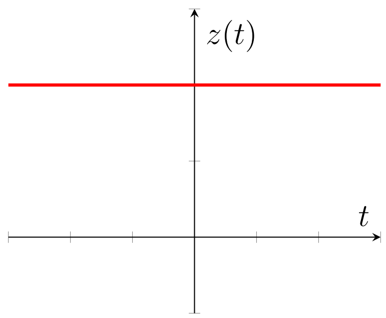


Figure 3 – Représentation de deux impulsions rectangulaires

**Spectre du signal unité :** Le signal $x(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ peut être décrit à partir de l'exponentielle décroissante :

$$x(t) = 1 = \lim_{a \to 0} e^{-a|t|} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{TF}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a \to 0} e^{-a|t|} e^{-i2\pi f t} \mathrm{d}t$$

$$X(if) = \lim_{a \to 0} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq 0 \\ +\infty & \text{si } f = 0 \end{cases}$$

On obtient une impulsion de Dirac :

$$\mathrm{TF}\{x(t) = 1\} = X(if) = \delta(f)$$

**Spectre d'un phaseur** Un phaseur de fréquence $f_0$ peut s'écrire :

$$x(t) = e^{i2\pi f_0 t} = \lim_{a \to 0} e^{-a|t|} e^{i2\pi f_0 t}$$

En utilisant :

$$\begin{cases} \mathrm{TF}\{e^{-a|t|} = \dfrac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}\} \\ x(t)e^{i2\pi ft} \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(i(f-f_0)) \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned} X(if) &= \lim_{a\to 0} \frac{2a}{a^2+(2\pi(f-f_0))^2} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } f = f_0 \\ 0 & \text{si } f \neq f_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la transformée de Fourier d'un phaseur de fréquence $f_0$ est une impulsion de Dirac située en $f = f_0$ :

$$X(if) = \delta(f - f_0)$$

**Spectre d'un signal sinusoïdal :** Un signal sinusoïdal peut être vu comme la somme de deux phaseurs complexes conjugués.

$$\begin{aligned} x(t) = \cos(2\pi f_0 t) &= \frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2} \\ \implies X(if) &= \mathrm{TF}\{\frac{1}{2}e^{i2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-i2\pi f_0 t}\} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{TF}\{e^{i2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathrm{TF}\{e^{i2\pi(-f_0)t}\} \\ &= \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0) \end{aligned}$$