Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

Cours d'IN41

Chapitre 1 – Représentation et classification des signaux

Semestre de printemps 2016

Table des matières

Définition 1 (Signal)

Un signal est une information relative à une grandeur physique qui évolue dans le temps. C'est une fonction définie telle que :

$$S : E \to \mathbb{R} \qquad \text{avec } E \subset \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto S(t)$$

1 Types de signaux

Signal analogique : si E est un intervalle réel $\implies$ signal analogique ou continu.
Signal numérique : si $E = \mathbb{Z} \implies$ signal discret ou numérique.
Signal échantillonné : si $E = \{t_1, t_2, ..., t_n\} \implies$ signal échantillonné.

2 Analyse et reconstitution des signaux

Étape 1 : Reconstituer un signal : déterminer le signal s à partir de la superposition des fonctions élémentaires données pour obtenir une synthèse.
Étape 2 : Analyser un signal : écrire le signal sous forme d'une somme finie ou infinie de fonctions élémentaires.

3 Classification des signaux

Classification dimensionnelle :
En fonction du nombre de variables

Classification réels/complexes :
Si $s(t) \in \mathbb{R} \implies s$ est réel.
Si $s(t) \in \mathbb{C} \implies s$ est complexe.

Classification déterministe/aléatoire :
Déterministe : évolution prédictible par un modèle mathématique approprié.
Aléatoire : évolution non prédictible et non reproductible d'une expérience à l'autre.

Classification continu/discret :
Voir 1.1

Classification spectrale :
En fonction du domaine de fréquences occupé par son spectre ΔF (largeur de bande du signal).

$\Delta F = F_{max} - F_{min}$
On considère la fréquence moyenne $F_{moy} = \dfrac{F_{max} + F_{min}}{2}$.

Signaux à bande étroite : $\dfrac{\Delta F}{F_{moy}}$ est une petite valeur.
Signaux à bande large : $\dfrac{\Delta F}{F_{moy}}$ est une grande valeur.

Classification énergétique :
Il y a deux types de signaux : les signaux à énergie finie ($0 < \omega_s < +\infty$) et les signaux à énergie infinie ($\omega_s \approx +\infty$).

Définition 2 (Énergie et valeur instantanée)

Énergie d'un signal :

$$\omega_s = \int_{-\infty}^{+\infty} ||s(t)||^2 \mathrm{d}t$$

Valeur instantanée d'un signal :

$$s(t_0) \text{ (valeur de } s(t) \text{ quand } t = t_0\text{)}$$

Définition 3 (Valeur moyenne)

Valeur moyenne d'un signal :

$$s_{moy} = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} s(t) \mathrm{d}t$$

si le signal est T-périodique :

$$s_{moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \mathrm{d}t$$

Définition 4 (Puissance moyenne)

Puissance moyenne d'un signal :

$$p_{moy} = \lim_{\Delta t \to +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |s(t)|^2 \mathrm{d}t$$

si le signal est T-périodique :

$$p_{moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |s(t)|^2 \mathrm{d}t$$

4 Les signaux classiques

Signal harmonique ou sinusoïdal :

$$s(t) = \underbrace{A}_{\text{amplitude}} \cos(\overbrace{\underbrace{2\pi f t}_{\text{pulsation } \omega} + \underbrace{\varphi}_{\text{phase à l'origine}}}^{\text{phase instantanée}}) = e^{i2\pi f t}$$

Fonctions d'excitation :
Fonctions utilisées pour modéliser des sources d'excitation des circuits électriques.

Rampe unitaire $r(t)$:

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

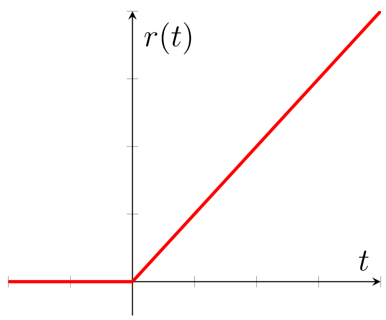

FIGURE 1 – Représentation de la rampe unitaire $r(t)$

Échelon unitaire de Heaviside $\Gamma(t)$:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

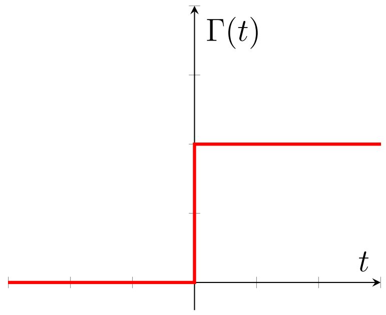

FIGURE 2 – Représentation de l'échelon unitaire de Heaviside $\Gamma(t)$

Fonction signe $sgn(t)$ **:**

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

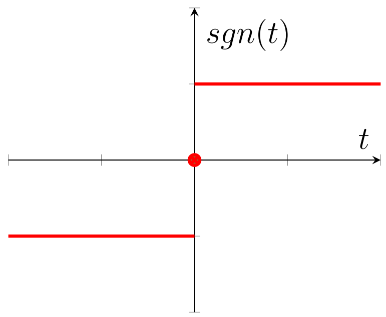

FIGURE 3 – Représentation de la fonction signe $sgn(t)$

Fonction fenêtre rectangulaire $rect(t)$ **:**

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$rect_T(t) = \Gamma(t + \frac{T}{2}) - \Gamma(t - \frac{T}{2})$$

Signal utilisé pour observer un signal sur un horizon fini de durée T. On dit qu'on applique un fenêtrage rectangulaire sur $s(t)$.

Fonction fenêtre triangulaire $tri(t)$ **:**

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T}|t| & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

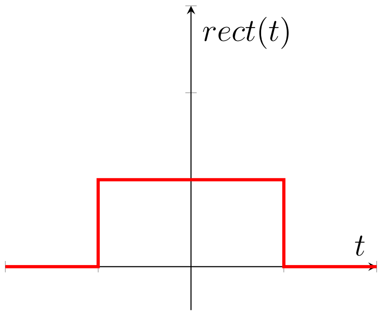

Figure 4 – Représentation de la fonction fenêtre rectangulaire $rect(t)$

$$tri_T(t) = \frac{2}{T} r(t + \frac{T}{2}) - \frac{4}{T} r(t) + \frac{2}{T} r(t - \frac{T}{2})$$

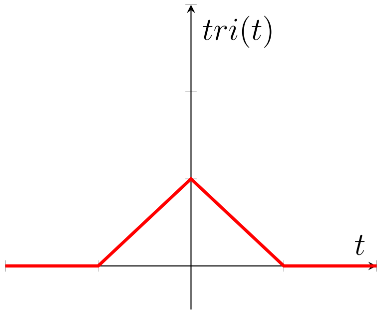

Figure 5 – Représentation de la fonction fenêtre triangulaire $tri(t)$

Impulsion de Dirac $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'impulsion $\delta(t)$ est un opérateur qui extrait la valeur du signal lorsque $t = 0$.

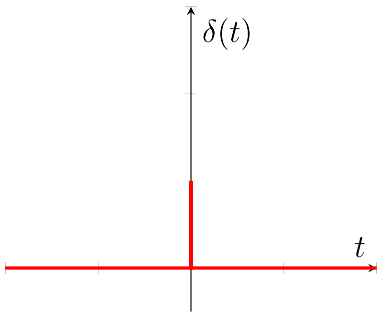

Figure 6 – Représentation de l'impulsion de Dirac $\delta(t)$

Peigne de Dirac $\text{Ш}_T(t)$:

$$\text{Ш}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

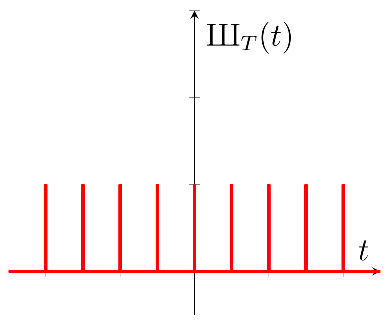

FIGURE 7 – Représentation du peigne de Dirac $Ш(t)$

Fonction sinus cardinal $sinc(t)$ **:**

$$sinc(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{sin(\pi t)}{\pi t} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$sinc(-t) = sinc(t)$$

$$\forall t = k \in \mathbb{Z}^*, sinc(t) = 0$$

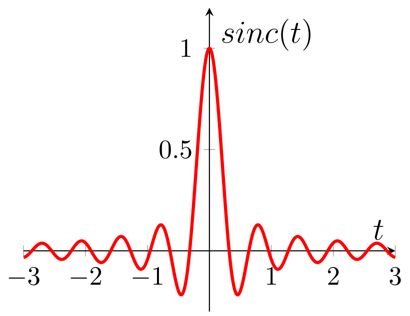

FIGURE 8 – Représentation de la fonction sinus cardinal $sinc(t)$

5 Convolution de signaux à temps continu

Le produit de convolution de deux signaux à temps continu $x(t)$ et $y(t)$ est :

$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\nu)y(t-\nu)\mathrm{d}\nu$$

Propriétés : commutativité, associativité, distributivité et élément neutre

Convolution par $\delta(t)$ **:**

$$s(t) \otimes \delta(t-t_0) = s(t-t_0)$$

Convolution par un peigne de Dirac $\text{Ш}_T(t)$:

$$s(t) \otimes \text{Ш}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT)$$

Convoluer un signal par un peigne de Dirac revient à périodiser le signal à la période T.