
COURS D'IN41

Chapitre 2 – Analyse des signaux périodiques

Semestre de printemps 2016

Table des matières

1	Représentation d'un signal	2
2	Les séries de Fourier	2
2.1	Séries de Fourier en cosinus	2
2.2	Séries de Fourier complexes	3
2.3	Quelques propriétés des séries de Fourier :	3
2.4	Suites d'impulsions	4
2.4.1	Suites d'impulsions rectangulaires	4
2.4.2	Suites d'impulsions triangulaires	4
2.4.3	Suites d'exponentielles décroissantes	5
2.5	Énergie d'un signal	5
2.6	Formule de Parseval	5
2.7	Décalage temporel	6
2.8	Modulation d'amplitude	6

1 Représentation d'un signal

Un signal ($s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \alpha)$) peut être représenté dans un espace à 3 dimensions :

- projection sur l'axe du temps \implies une sinusoïde continue
- projection sur l'axe des fréquences \implies une raie située en $f = f_0$ et de hauteur A

2 Les séries de Fourier

Définition 1 (Série de Fourier)

Toute fonction T -périodique s peut être décomposée en une somme infinie de fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T}$.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \frac{a_0}{2} & : \text{valeur moyenne ou composante continue} \\ a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(2\pi f_0 k t) dt & : \text{coefficient de Fourier en cosinus} \\ b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(2\pi f_0 k t) dt & : \text{coefficient de Fourier en sinus} \end{cases}$$

Harmonique de rang k du signal :

$$h_k(t) = a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)$$

2.1 Séries de Fourier en cosinus

En prenant en compte la relation :

$$A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \times \cos\left(x + \arctan\left(\frac{-B}{A}\right)\right)$$

le développement en séries de Fourier peut s'écrire :

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k)$$

La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de spectre unilatéral.

2.2 Séries de Fourier complexes

Rappel de la relation d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

On montre que la série de Fourier peut être transformée en une série complexe :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(ik) e^{i2\pi k f_0 t}$$

avec $X(ik)$ le coefficient complexe de la série de Fourier :

$$X(ik) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de spectre bilatéral.

$$X(ik) = \frac{a_k - ib_k}{2} \text{ et } X(-ik) = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

$$a_k = X(ik) + X(-ik) \text{ et } b_k = i[X(ik) - X(-ik)]$$

$$\arg(X(ik)) = -\arg(X(-ik)) = \alpha_k$$

Dans le cas des spectres bilatéraux :

$$||X(ik)|| = ||X(-ik)|| = \frac{A_k}{2} \text{ avec } k \neq 0$$

$$||X(0)|| = A_0$$

$$||X(ik)|| = \left| \frac{a_k - ib_k}{2} \right| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} = \frac{A_k}{2}$$

$$\arg(X(ik)) = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) = \alpha_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = -\arg(X(-ik))$$

2.3 Quelques propriétés des séries de Fourier :

$$X(ik) = \frac{A_k}{2} e^{i\alpha_k}$$

$$X(-ik) = \frac{A_k}{2} e^{-i\alpha_k}$$

Signal pair ($s(t) = s(-t)$) :

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \text{ et } b_k = 0$$

Signal pair ($s(t) = s(-t)$) :

$$a_k = 0 \text{ et } b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

Exemple :

$$\text{Soit le signal } s : s(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } t \in]2n\pi; (2n+1)\pi[\\ -\frac{\pi}{4} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$s \text{ est impair} \implies a_k = 0 \text{ et } b_k = \frac{-1}{2k} [\cos(kt)]_0^\pi = \frac{1}{2k} \times -\cos(kt + 1)$$

2.4 Suites d'impulsions

2.4.1 Suites d'impulsions rectangulaires

Impulsions rectangulaires de largeur $2\Delta t$ et de période T :

$$X(ik) = \frac{A\Delta t}{T} \underbrace{\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t}}_{=\text{sinc}(k\pi f_0 \Delta t)}$$

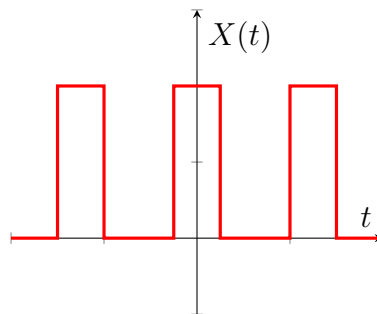


FIGURE 1 – Représentation de la suite d'impulsions rectangulaires

2.4.2 Suites d'impulsions triangulaires

Impulsions triangulaires de largeur $2\Delta t$ et de période T :

$$X(ik) = \frac{A\Delta t}{T} \text{sinc}^2(k\pi f_0 \Delta t)$$

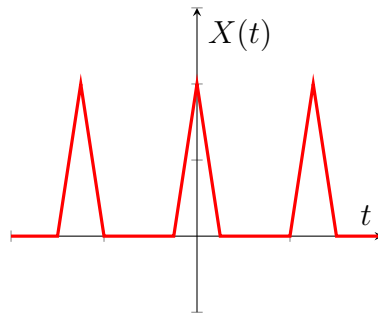


FIGURE 2 – Représentation de la suite d'impulsions triangulaires

2.4.3 Suites d'exponentielles décroissantes

$s(t) = \Delta e^{-t/\tau}$ avec τ le taux d'amortissement

$$S(ik) = \frac{A}{T} \frac{e^{-t(\frac{T}{\tau} + i2k\pi f_0 t)} - 1}{1 + i2\pi k f_0 \tau}$$

$$\tau \ll T \implies S(ik) = \frac{A\tau}{T} \frac{1}{1 + i2\pi k f_0 \tau}$$

2.5 Énergie d'un signal

$$E(x) = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt$$

Puissance fournie par une harmonique de rang p :

$$E_p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (a_p \cos(2\pi f_0 p t) + b_p \sin(2\pi f_0 p t)) dt = \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$$

2.6 Formule de Parseval

Définition 2 (Formule de Parseval)

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k^2}{2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} ||X(ik)||^2$$

2.7 Décalage temporel

$$\begin{aligned}x(t) &\longrightarrow y(t) = x(t + t_d) \\Y(ik) &= X(ik) + e^{i2\pi k f_0 t_d} \\ \underbrace{\arg(Y(ik))}_{\beta_k} &= \underbrace{\arg(X(ik))}_{\alpha_k} + 2\pi k f_0 t_d\end{aligned}$$

2.8 Modulation d'amplitude

$$x(t) = m(t) \times p(t)$$

Si $p(t)$ est sinusoïdale, on peut la remplacer par 2 phaseurs de fréquences $\pm f_p$.

$$\cos(2\pi k f_p t) = \frac{e^{i2\pi k f_p t} + e^{-i2\pi k f_p t}}{2}$$

On montre que :

$$x(t) = e^{\pm i2\pi f_p t} m(t) \Leftrightarrow X(ik) = M(i(kf_p \pm f_p))$$

À une multiplication par un phaseur dans le domaine temporel correspond à un décalage dans l'espace de fréquence.