Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

Cours d'IN41

Chapitre 5 – Systèmes de traitement de signal

Semestre de printemps 2016

Table des matières

1 Transformée de Laplace (TL)

Définition 1 (Transformée de Laplace (TL))

La tranformée de Laplace d'un signal $x(t)$ est donnée par :

$$\mathrm{TL}\{x(t)\} = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

avec $p = i2\pi f$ la fréquence complexe

1.1 Propriétés de la transformée de Laplace

$x(t) \xrightarrow{\mathrm{TL}} X(p)$

Linéarité : $ax(t) + by(t) \xrightarrow{\mathrm{TL}} aX(p) + bY(p)$

Homothétie : $x(at) \xrightarrow{\mathrm{TL}} \dfrac{1}{|a|}X(\frac{p}{a})$ avec $a \in \mathbb{R}$

Translation : $x(t-a) \xrightarrow{\mathrm{TL}} X(p)e^{-ap}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Dérivation :

$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\mathrm{TL}} pX(p) - x(0)$

$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} \xrightarrow{\mathrm{TL}} p^2X(p) - px(0) - x'(0)$

$\vdots$

$\frac{\mathrm{d}^nx(t)}{\mathrm{d}t^n} \xrightarrow{\mathrm{TL}} p^nX(p) - p^{n-1}x(0) - \cdots - p^0x^{(n-1)}(0)$

Intégration : $\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau \xrightarrow{\mathrm{TL}} \dfrac{1}{p}X(p)$

Définition 2 (Théorème de Borel)

$$x(t) \otimes y(t) \xrightarrow{\mathrm{TL}} X(p)Y(p)$$

$$x(t)y(t) \xrightarrow{\mathrm{TL}} X(p) \otimes Y(p)$$

1.2 Signaux classiques

Impulsion de Dirac : $\delta(t) \xrightarrow{\mathrm{TL}} 1$

Délai idéal : $\delta(t-\tau) \xrightarrow{\text{TL}} e^{-\tau p}$

Puissance n-ième : $\frac{t^n}{n!}\Gamma(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{p^{n+1}}$

Échelon : $\Gamma(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{p}$

Échelon retardé : $\Gamma(t-\tau) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{p}e^{-\tau p}$

Rampe : $t\Gamma(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{p^2}$

Décroissance exponentielle : $e^{-\alpha t}\Gamma(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{p+\alpha}$

Approche exponentielle : $(1-e^{-\alpha t})\Gamma(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$

Sinus : $\sin(\omega t)\Gamma(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Cosinus : $\cos(\omega t)\Gamma(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{p}{p^2+\omega^2}$

Décroissance exponentielle d'un sinus : $e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\Gamma(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

Décroissance exponentielle d'un cosinus : $e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\Gamma(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

Pour le TD : $\frac{(t-\tau)^n}{n!}e^{-\alpha(t-\tau)}\Gamma(t-\tau) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{e^{-\tau p}}{(p+\alpha)^{n+1}}$

Définition 3 (Transformée de Laplace d'une fonction T_0 périodique)

$$x(t) \xrightarrow{\text{TL}} X(p) = \frac{1}{1-e^{-pT_0}} \int_0^{T_0} e^{-pt}x(t)\mathrm{d}t$$

Définition 4 (Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale)

$$x(0) = \lim_{p\to+\infty} pX(p)$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)$$

2 Systèmes linéaires invariants dans le temps (SLIT)

Définition 5 (Systèmes linéaires invariants dans le temps)

Système : Structure physique recevant un signal d'entrée $x(t)$ et délivre un signal de sortie $y(t)$.
Si $x(t)$ et $y(t)$ sont analogiques, le système est dit analogique.

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{x_1(t)} \mathrm{SLIT} \xrightarrow{y_1(t)} \\ \xrightarrow{x_2(t)} \mathrm{SLIT} \xrightarrow{y_2(t)} \end{array}\right\} \implies \xrightarrow{ax_1(t)+bx_2(t)} \mathrm{SLIT} \xrightarrow{ay_1(t)+by_2(t)}$$

Système invariant dans le temps : Système dont les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps.

$$\xrightarrow{e(t)} \mathrm{SLIT} \xrightarrow{s(t)} \implies \xrightarrow{e(t-\tau)} \mathrm{SLIT} \xrightarrow{s(t-\tau)}$$

2.1 Analyse des systèmes invariants dans le temps

Analyse temporelle :
Observation du comportement en fonction du temps
$\implies$ utilisation de fonctions d'excitation (étude de régime transitoire)

Analyse fréquentielle :
Observation du comportement en fonction de la variation de la fréquence
$\implies$ connaître la réponse du système à une excitation sinusoïdale à différentes fréquences

2.1.1 Réponse impulsionnelle $h(t)$

$$\xrightarrow{\delta(t)} \mathrm{SLIT} \xrightarrow{h(t)}$$

But : apprécier la stabilité du système

Un système linéaire d'entrée $e(t)$ et de réponse impulsionnelle $h(t)$ a pour sortie $s(t)$ tel que :

$$s(t) = e(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\nu)h(t-\nu)\mathrm{d}\nu$$
$$\implies s(t) = \mathrm{TL}^{-1}\{H(p)\}$$

2.1.2 Réponse indicielle $d_i(t)$

$$\xrightarrow{\Gamma(t)} \mathrm{SLIT} \xrightarrow{d_i(t)}$$

But : observer l'évolution vers un régime permanent de la sortie suite à une discontinuité du signal d'entrée

$$d_i(t) = \int_0^t h(\nu)\mathrm{d}\nu$$
$$\implies s(t) = \mathrm{TL}^{-1}\{\frac{1}{p}H(p)\}$$

2.1.3 Réponse à une rampe $r(t)$

$$\xrightarrow{r(t)} \text{SLIT} \xrightarrow{R(t)}$$

But : utilisé à l'entrée des systèmes qui ne peuvent pas subir de varations trop brusques

$$r(t) = at^2 \xrightarrow{\text{TL}} \frac{a}{p^2}$$

Lien avec la réponse impulsionnelle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2} = h(t)$$

Lien avec la réponse indicielle :

$$r(t) = \int_0^t d_i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

2.1.4 Réponse fréquentielle

$$\xrightarrow{x(t)} \text{SLIT} \xrightarrow{y(t)}$$

Réponse à une entrée sinusoïdale

$H(j\omega)$: transmittance isochrone ou FT

2.1.5 Fonction de transfert

C'est la tranformée de Laplace de la réponse impulsionnelle : $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)}$ avec $Y(p) = \mathrm{TL}\{y(t)\}$ et $X(p) = \mathrm{TL}\{x(t)\}$

On a $p = i2\pi f = i\omega$
$H(p) = H(i\omega)$

Détermination isochrone de la FT équivalente :

En série : schéma 6

En paralèle : schéma 7

Lien avec la réponse indicielle $d_i(t)$:

$$d_i(t) = \mathrm{TL}^{-1}\{\frac{H(p)}{p}\}$$

2.1.6 Diagramme de Bode

Moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système

Deux tracés :

- Gain en décibel (dB) : $G_{dB} = 20\log(||H(j\omega)||)$
- Phase en degré : $arg(H(j\omega))$

L'échelle de pulsations est logarithmique et est exprimée en rad/s.

schéma 8

2.2 Stabilité des systèmes

Un système est stable au sens EBSB (Entrée Bornée Sortie Bornée) si tout signal d'entrée borné produit un signal de sortie borné c'est-à-dire que la réponse impulsionnelle est absolument intégrable.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ||h(t)||\mathrm{d}t = ||h||_1 < +\infty$$

Lien avec la réponse impulsionnelle $h(t)$:

- si $h(t) \to 0$, le système est asymptotiquement stable
- si $h(t)$ est borné sans tendre vers 0, le système est stable
- si $h(t)$ diverge, le système est instable