Exercice 0.1 Filtre de Sobel (exercice 2)

1 - Pour δ "petit", $f(x+\delta) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\delta + o(\delta^2)$ (formule de Taylor). Ainsi pour $\delta = 1$, on trouve $f'(x) = -f(x) + f(x+1)$. Cela revient à appliquer le filtre $h_1 = [1, -1]$ au vecteur 1D $[f(x), f(x+1)]$ (on n'oublie pas la symétrie centrale à opérer sur h_1 pour avoir le bon noyau de convolution).

2 - De même, $f(x-\delta) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!}\delta + o(\delta^2)$. Ainsi pour $\delta = 1$, on trouve $f'(x) = -f(x-1) + f(x)$. Cela revient à appliquer le filtre $h_2 = [1, -1]$ au vecteur 1D $[f(x-1), f(x)]$ (toujours en n'oubliant pas la symétrie).

En sommant les coordonnées correspondantes des deux noyaux de convolution 1 à 1 (on étend h_1 et h_2 en mettant à 0 toutes les valeurs en dehors des valeurs déclarées non nulles), on a le filtre 1×3 : $h = \frac{1}{2} \times [1, 0, -1]$ (après normalisation). C'est le filtre 1D permettant d'approximer la dérivée verticale.

3 - Avec la commande Matlab `fspecial('sobel')`, on obtient le filtre suivant : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Cela correspond au résultat sans normalisation de la convolution entre le filtre h (colonne) et un autre filtre (ligne) 1×3. Pour retrouver le deuxième filtre (ligne) 1×3, on doit trouver a, b, c tels que $h * [a, b, c] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Pour cela il faut $a = c = 1$, et $b = 2$.

A un facteur près, on reconnaît un filtre **moyenneur** 1D $[1, 2, 1]$ (présenté diapositive 38 du premier cours). On a vu en cours que ce genre de filtre permet de réduire le bruit d'une image (tout en limitant la quantité de flou par rapport à un filtre uniforme). On parle aussi de "lissage triangulaire" (puisqu'on a un 1, puis un 2, puis à nouveau un 1, cela fait comme un triangle si on trace les points). Ce deuxième filtre permet peut-être de compenser l'action du filtre qui approche le gradient en "moyennant" les valeurs données par le filtre de Sobel et obtenir un résultat plus satisfaisant.

On a ainsi **séparé** le filtre de Sobel en un filtre ligne et un filtre colonne.

4 - Avec ce filtre, on peut espérer **détecter les zones à fort gradient de couleur**, c'est-à-dire avec un contraste (intensité plus ou moins claire/sombre). Cela permet à priori de détecter les **contours** dans une image. Cela fonctionne bien par exemple sur l'image `'phone.jpg'` de la base d'images fournie avec le TP (figure 1). Les objets sont plutôt clairement définis. Cependant, on peut tout de même remarquer

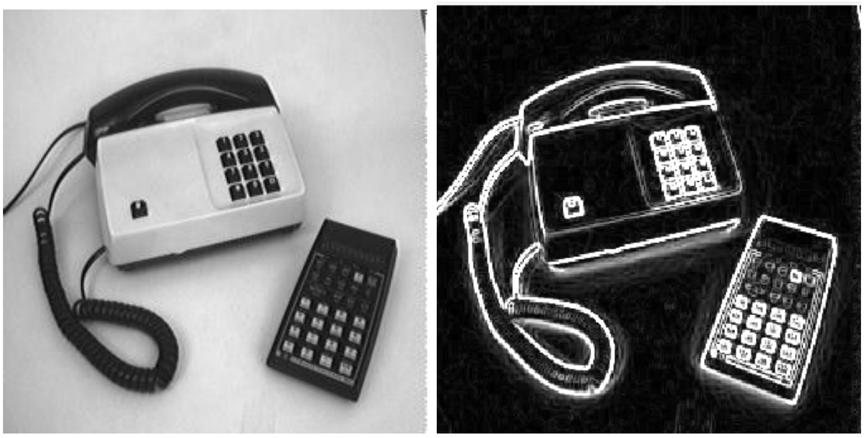

Figure 1 – Exemple de l'application du filtre de Sobel sur l'image `'phone.jpg'` (à gauche : avant et à droite : après)

qu'il y a **peu de contraste** entre le blanc du boitier et le blanc du support sur lequel est posé le téléphone. Par conséquent, le filtre détecte peu, voire pas du tout les bords blancs du boîtier du téléphone.

Pour trouver un autre exemple où le filtre donne un résultat qui n'est pas satisfaisant (contours mal détectés), on peut aussi chercher une **image sans contours clairement définis**. Par exemple, l'image

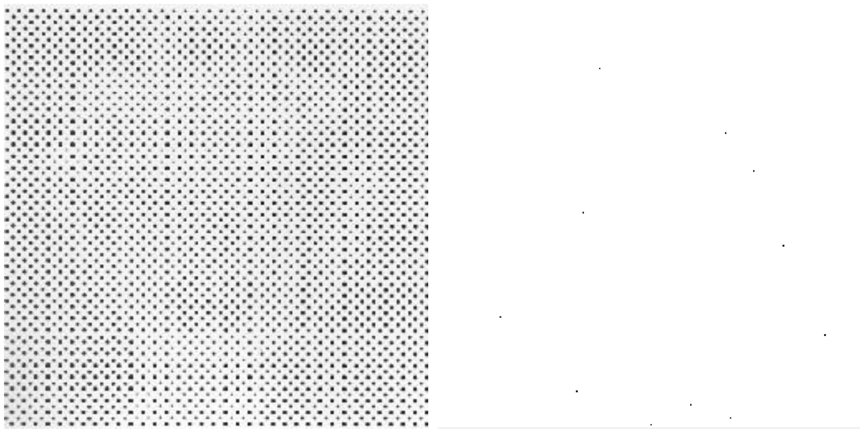

Figure 2 – Exemple de l'application du filtre de Sobel sur l'image `'marylin.jpg'` (à gauche : avant et à droite : après)

`marylin.jpg` est en fait une illusion d'optique, où il n'y a pas vraiment d'objet dont il faut délimiter le contour. Sur la figure 2, on voit que "l'illusion d'optique" de l'image d'origine n'est pas détectée par le filtre. Aussi, une image avec peu de contrastes comme celle du téléphone figure 1 fournit des résultats parfois décevants.

Exercice 0.2 Transformée de Fourier (exercice 4)

1 - La commande Matlab `class(s)` nous informe que les éléments de `s` sont de type `double`. `s` est une matrice contenant des nombres comblexes.

2 - La documentation indique :

> Y = abs(X) renvoie la valeur absolue de chaque élément dans l'entrée X. Si X est complexe, abs(X) renvoie l'amplitude complexe."

En terme de signal, `abs(s)` renvoie *l'amplitude* du signal

3 - La figure 3 présente l'affichage de `abs(s)` pour `bureau.jpg` et `barbara.jpg` respectivement. L'image observée pour le bureau est plus ordonnée, avec des angles droits, et on retrouve ce côté "ordonné" sur la transformée de Fourier de l'image avec deux lignes - une horizontale, une verticale -, qui correspondent aux éléments - verticaux et horizontaux - de l'image d'origine respectivement. Dans l'image `barbara.jpg`, on trouve moins d'éléments clairement horizontaux ou verticaux, ce qui fait que la transformée de Fourier de l'image a une structure un peu moins "clairement définie" que pour le bureau.

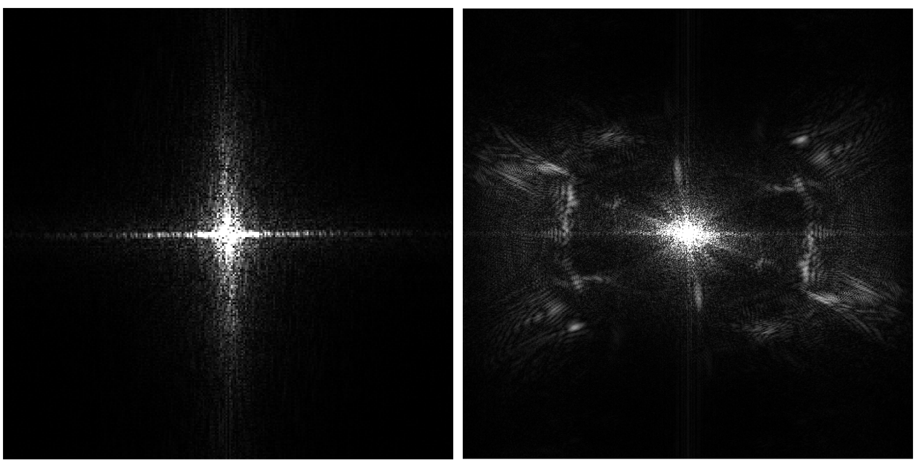

Figure 3 – Transformées de Fourier de `'bureau.jpg'` (à gauche) et `'barbara.jpg'` (à droite)

4 - On remarque tout d'abord que les lignes parallèles présentes (par exemple) sur les habits de la femme (pantalon, châle...) ont été comme "lissées" et ont quasiment disparu. D'autre part, à côté de zones à fort contraste comme la frontière du pied de la table, on peut voir apparaître des lignes verticales. Cela est dû au phénomène de Gibbs, traduisant le fait que la transformée de Fourier ne permet pas d'approximer correctement les zones de discontinuité du signal (dans le cas d'une image en niveaux de gris, les contrastes marqués blanc/noir, et donc des endroits comme le pied de la table ou les rayures des vêtements).

Figure 4 – version originale (à gauche) et reconstruction (à droite) par transformée de Fourier inverse de l'image `'barbara.jpg'`

Si j'ai bien compris suite à vos explications, lorsque l'on applique la transformée de Fourier inverse à l'image de la figure 3), on convolue le signal d'entrée par une fonction porte (puisque l'on se limite à un signal fini), et comme $TF((x * h)(t)) = X(f)H(f)$ (produit des transformées de Fourier) et que la transformée de Fourier de la fonction porte est un sinus cardinal, on a l'introduction de hautes fréquences qui permettraient d'expliquer les phénomènes comme celui qu'on observe autour du pied de la table. On visualise ce genre de phénomène sur un signal créneau avec des oscillations autour de la zone de discontinuité figure 5 :

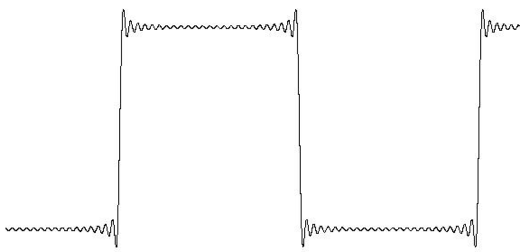

Figure 5 – "Approximation du créneau à l'ordre 50." Source : CC BY-SA 3.0, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=124556`

Les hautes fréquences seraient donc "coupées" par la fonction porte sur les extrémités de la représentation de Fourier (figure 3), expliquant les phénomènes qu'on observe. .