1) Czy rozwiązanie zadania: $\min \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}$ na zbiorze: $X_0 = \{x : Ax \le b, b \ge 0, x_i \ge 0\}$ jest globalne?

<u>Rozwiązanie:</u>

Tak, można tu wykorzystać twierdzenie o minimum funkcji wypukłych na zbiorze wypukłym.

Każda funkcja $\frac{1}{x_i}$ dla $x_i > 0$ jest wypukła.

Jak to wykazać:

$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}$ jest wypukła jako suma funkcji wypukłych (twierdzenie).

2) Wykazać, że algorytm Newtona – Rapsona zastosowany do funkcji $F(x) = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 2)^2 \; x \in R^2$ pozwoli osiągnąć jej minimum w jednym kroku.

<u>Rozwiązanie:</u>

$x^{k+1} = x^k - H^{-1} \cdot \nabla F(x^k)$

$$\nabla F(x^k) = \begin{bmatrix} 2(x_1^k - 3) \\ 8(x_2^k - 2) \end{bmatrix} \quad H^{-1}(x^k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$x^1 = x^0 - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2(x_1^0 - 3) \\ 8(x_2^0 - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Z drugiej strony wynik ten uzyskamy wykorzystując WK (WW) optymalności.

3) Sformułować warunki Kuhna-Tuckera dla zadania:

$$\max F(x)$$

$$h_i(x) \le 0 \quad i = 1 \ldots p$$

$$\nabla_x L\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = 0$$
$$\nabla_\lambda L\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) \le 0$$
$$\left(\hat{\lambda}\right)^T h\left(\hat{x}\right) = 0$$
$$\hat{\lambda} \le 0$$

Co uzyskujemy z pierwszego warunku Kuhna-Tuckera:

$\frac{\partial F\left(\hat{x}\right)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \hat{\lambda}_j \frac{\partial h_j(\hat{x})}{\partial x_i} = 0$ i z warunku:

$\max F(x) = \min(-F(x))$

$$-\frac{\partial F\left(\hat{x}\right)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \hat{\lambda}_j \frac{\partial h_j(\hat{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial F\left(\hat{x}\right)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \left(-\hat{\lambda}_j\right) \frac{\partial h_j(\hat{x})}{\partial x_i}$$

4) Wykorzystując metodę mnożników Lagrange'a znaleźć punkty ekstremalne funkcji $F(x) = x_1 x_2$ na zbiorze dopuszczalnym $x_1^2 + x_2^2 = 1$

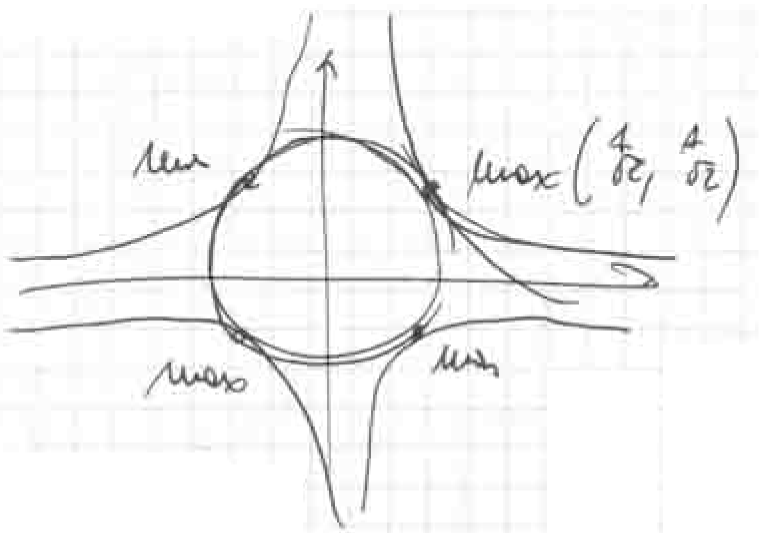
$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda x_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2\lambda x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_1^2 - 1$$

Przyrównanie do zera i rozwinięcie tych równań daje punkty ekstremalne jak na rysunku:




5) Rozwiązać zadanie wykorzystując wewnętrzną funkcję kary:

$$\min\left(\frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2\right)$$

$$x_1 \geq 1 \quad x_2 \geq 0$$

<u>Rozwiązanie:</u>

$$P(x, K^j) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 + \frac{K^j}{x_1 - 1} + \frac{K^j}{x_2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = (x_1 + 1)^2 - \frac{K^j}{(x_1 - 1)^2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 1 - \frac{K^j}{x_2^2} = 0$$

$$x_1(K^j) = \sqrt{1 + \sqrt{K^j}}$$

$$x_2(K^j) = \sqrt{K^j}$$