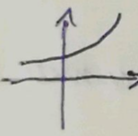
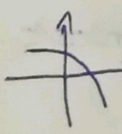
METODY I ALGORYTMY OPTYMALIZACJI

① FORMUŁOWANIE ZADAŃ OPTYMALIZACYJNYCH

1. Wyznaczenie zmiennej decyzyjnej i zbioru rozwiązań dopuszczalnych x_0
2. Funkcja celu $f(x)$
3. Ograniczenia

② BADANIE WYPUKŁOŚCI / WKLĘSŁOŚCI FUNKCJI


→ Funkcja wypukła - dowolny odcinek łączący dwa punkty znajduje się nad nią


→ Funkcja wklęsła - dowolny odcinek łączący dwa punkty znajduje się pod nią

DEF. wypukłości:

$F(x)$ jest wypukła na zbiorze $X \iff x_1, x_2 \in X \wedge \forall \lambda: 0 \le \lambda \le 1$ zachodzi

$$F(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \le \lambda F(x_2) + (1-\lambda)F(x_1)$$

$<$ - ściśle wypukła

TW.

Gdy funkcja wewnętrzna jest funkcją wypukłą, a funkcja zewnętrzna jest funkcją wypukłą rosnącą w sposób ciągły to funkcja złożenia jest funkcją wypukłą.

Gradient:

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

dla punktu stacjonarnego „gradient się zeruje"

Hesjan:

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

określoność hesjanu:

forma kwadratowa (w x_0)
- $x^T \cdot H(x)_{x_0} \cdot x \ge 0$ - dodatnio określona ($\Rightarrow$ wypukła)
- $x^T \cdot H(x)_{x_0} \cdot x > 0$ - ściśle dodatnio określona ($\Rightarrow$ ściśła wypukłość)
- dla ujemnych (niedodatnich) analogicznie

TW. SYLWESTERA

Forma kwadratowa jest ściśle dodatnio określona, kiedy wszystkie minory główne są dodatnie: $M_1 > 0, M_2 > 0 \dots, M_n > 0$, a ujemnie określona, gdy $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0$.

TW. Minimum jedna ściśle wklęsła funkcja składowa sprawia, że całe złożenie jest ściśle wklęsłe.
Złożenie funkcji jest wklęsłe jeśli funkcje składowe są wklęsłe i współczynniki nieujemne.

3 POSZUKIWANIE NA KIERUNKU

$$\delta(d) = \lim_{\tau \to 0} \frac{F(x^0+\tau d) - F(x^0)}{\tau}$$ ← pochodna w punkcie x^0 na kierunku d

3.1 Szukanie punktu ekstremalnego na kierunku podanym przez punkt.

1. $\nabla F(x^0) = d$ ← kierunek
2. $x = x^0 + \tau d$
3. $F'(x^0+\tau d) = 0 \Rightarrow \tau$; $F''(x^0+\tau d) \overset{?}{} 0$ – wklęsła, czy wypukła
4. Wyznaczenie punktu ekstremalnego na podstawie τ: $x = x^0 + \tau d$

4 ALGORYTM NEWTONA-RAPSONA

1. Określ punkt początkowy $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $k=0$
2. Określ kierunek $d^k = -H^{-1}(x^k) \cdot \nabla F(x^k)$. Gdy $d^k = 0 \Rightarrow \boxed{\text{STOP}}$
3. Wykonaj krok i wyznacz: $x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k) \cdot \nabla F(x^k)$
4. Podstaw: $x^k = x^{k+1}$, $k = k+1$, wróć do kroku 2

* jeśli funkcja celu jest ściśle wypukła, forma kwadratowa (wielomian 2 stopnia), to aproksymacja tej funkcji forma kwadratowa, jest tą funkcją; dla takich funkcji wystarcza jedna iteracja metody Newtona

5 TEST DWUSKOŚNY GOLDSTEINA

$F(x)$ – funkcja, x^0 – punkt, d – kierunek, p – pochodna w punkcie x^0, $\beta \in (0, \frac{1}{2})$

1. $\nabla F(x^0)$
2. $p = \nabla F(x^0)^T d < 0$ obliczam
3. Szukam τ z: $F(x^0) + (1-\beta) p \tau \leq \overbrace{F(x^0+\tau d)}^{F(\tau)} \leq F(x^0) + \beta p \tau$

⑥ ALGORYTM GRADIENTOWY (OGÓLNIE)

$F(x)$ - funkcja, x^0 - punkt początkowy, τ - krok

- $x^{k+1} = x^k - \tau \nabla F(x^k)$ w stałym kierunku

⑦ METODA GRADIENTU SPRZĘŻONEGO

$F(x)$ - funkcja, x^0 - punkt początkowy

1. Początkowy kierunek: $\xi^0 = -\nabla F(x^0)$
2. $F(x^0 + \lambda \xi^0)$
3. Wyznaczam λ_0 z $\frac{dF(x^0+\lambda\xi^0)}{d\lambda} = 0$; $\frac{d^2F(x^0+\lambda\xi^0)}{d\lambda^2}$ $< 0 \Rightarrow$ maks. $> 0 \Rightarrow$ min.
4. $x^k = x^{k-1} + \lambda_{k-1}\xi^{k-1}$ ← kolejny punkt
5. $\xi^k = \underbrace{\frac{\|\nabla F(x^k)\|^2}{\|\nabla F(x^{k-1})\|^2}}_{\text{współczynnik korekcji}} \cdot \xi^{k-1} - \nabla F(x^k)$ ← kolejny kierunek; wróć do ~~3~~ 2

- $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ← forma kwadratowa
- WARUNEK A SPRZĘŻONOŚCI (na kierunku d_1, d_2):

$$d_1^T A d_2 = 0 \text{ - sprzężone}$$
$$\neq 0 \text{ - niesprzężone}$$

$d_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

⑧ METODA ZŁOTEGO PODZIAŁU

$F(x)$ - funkcja, $\mathcal{I}_0$ - przedział niepewności, a^k, b^k - końce przedziału

1. $\alpha^2 + \alpha - \mathcal{I}_0 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1+\sqrt{1+4\mathcal{I}_0}}{2}$
2. $\begin{cases} x_1^0 = \alpha \\ x_2^0 = \mathcal{I}_0 - \alpha \end{cases} \vee \begin{cases} x_1^0 = \mathcal{I}_0 - \alpha \\ x_2^0 = \alpha \end{cases}$ ← obliczenie x_1^0 i x_2^0, x_1 musi być mniejsze od x_2
3. $F(x_2^k) > F(x_1^k)$:
   - $b^{k+1} = x_2^k$
   - $a^{k+1} = a^k$
   - $x_2^{k+1} = x_1^k$
   - $x_1^{k+1} = a^{k+1} + (1-\alpha)(b^{k+1} - a^{k+1})$

   $F(x_1^k) > F(x_2^k)$:
   - $b^{k+1} = b^k$
   - $a^{k+1} = x_1^k$
   - $x_1^{k+1} = x_2^k$
   - $x_2^{k+1} = b^{k+1} + (1-\alpha)(b^{k+1} - a^{k+1})$

(9) METODA POWELLA

$F(x)$ - funkcja, x^0 - punkt początkowy, $v^1 = [1\ 0]$, $v^2 = [0\ 1]$ kierunki początkowe

I iteracja:

1. $x^1 = \arg\{\min F[x^0 + \lambda v^1]\}$ - funkcja zależna od λ, znajduję minimum (dla kwadratowej $\lambda_{MIN} = -\frac{b}{2a}$): $x^1 = x^0 + \lambda_{MIN} \cdot v^1$

   $x^2 = \arg\{\min F[x^1 + \lambda v^2]\}$

2. $v^1 \Leftarrow v^2$; $v^2 \Leftarrow u^1 = (x^0 - x^2)$

3. $x^3 = \arg\{\min F[x^2 + \lambda v^2]\}$

II iteracja:

4. $x^4 = \arg\{\min F[x^3 + \lambda v^1]\}$

   $x^5 = \arg\{\min F[x^4 + \lambda v^2]\}$

5. $v^1 \Leftarrow v^2$; $v^2 \Leftarrow u^2 = (x^5 - x^3)$

6. $x^6 = \arg\{\min F[x^5 + \lambda v^2]\}$

(10) METODA MNOŻNIKÓW LAGRANGE'A (OGRANICZENIA RÓWNOŚCIOWE)

$F(x)$ - funkcja, warunki ograniczające równościowe

1. $L(x, \lambda) = F(x) + \lambda \cdot$ (warunek ograniczający $= 0$)

2. $$\begin{cases} \frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

(11) METODA ZMIENNYCH OSŁABIAJĄCYCH

$F(x)$ - funkcja, warunki ograniczające nierównościowe

I - $f(x) \geq 0$ II - $x \geq 0$

$f(x) - \theta^2 = 0$ $x - \theta^2 = 0$

1. $L(x, \lambda, \theta) = F(x) + \lambda \cdot$ (warunek ograniczający $= 0$ wraz z zapisanym za pomocą θ)