Zad. 1.

min $x_1^2 + x_2^2$ przy ograniczeniach: $x_1 + x_2 \geqslant 0$

- Obliczyć korzystając z wewn. funkcji kary (logarytmicznej)
- Czy rozwiązanie jest globalne?

ZP: min $P(x, K)$

$$P(x, K) = x_1^2 + x_2^2 - K \ln(x_1 + x_2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2x_1 - \frac{K}{x_1 + x_2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 2x_2 - \frac{K}{x_1 + x_2} = 0$$

$$x_1 = x_2$$

$$2x_1 - \frac{K}{2x_1} = 0$$

$$4x_1^2 - K = 0$$

Po przejściu do granicy z K otrzymujemy

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0$$

Jest to rozwiązanie globalne

Zbiór X_0 jest wypukły

$F(x) = x_1^2 + x_2^2$ - jest ściśle wypukła

$\underbrace{F(x) \geqslant F(\hat{x}) \text{ dla każdego } x \in X_0}$

Zad. 2.

min $e^{-x_1} - x_2^2$ przy ograniczeniach: $x_1^2 + x_2^2 \le 1$, $x_1^2 - 1 \le x_2$

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} -e^{-x_1} \\ -2x_2 \end{bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} e^{-x_1} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{-x_1} > 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

$$e^{-1} \cdot (-2) < 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

Hesjan nie jest dodatnio określony. Zatem nie jest to wypukły problem optymalizacji

Warunki KKT

~~dla~~

$$L(x, \lambda) = e^{-x_1} - x_2^2 + \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2 (x_1^2 - x_2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -e^{-x_1} + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$$

$$x_1^2 - x_2 - 1 \le 0$$

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$$

$$\lambda_2 (x_1^2 - x_2 - 1) = 0$$

$$\lambda_1 \ge 0 \quad \lambda_2 \ge 0$$

dla $x_1 = 1$ $x_2 = 0$

$$-\frac{1}{e} + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 =$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$0 \le 0$$

$$0 \le 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\lambda_1 \ge 0 \quad \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 \ge 0 \quad \lambda_2 \ge 0$$

Warunki KKT są spełnione w punkcie (1,0)

$\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -e^{-x_1} + 2\lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$x_1^2 - x_2 - 1 \leq 0$$

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \qquad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$\lambda_2 (x_1^2 - x_2 - 1) = 0$$

$\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 = 0$

Zad 3.

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + (x_1 - x_2)^4$$

- Znaleźć minimum na kierunku $d = [1 \ \ -3]^T$, z punktu $x_0 = [0, 0$
- Rozwiązanie: $x_1 = [\frac{1}{16} \quad -\frac{3}{16}]^T$

$$F(x^0 + \lambda d) = \lambda^2 + \lambda(-3\lambda) + (\lambda + 3\lambda)^4$$

$$-2\lambda^2 + (4\lambda)^4 = -2\lambda^2 + 256\lambda^4 =$$

$$= 2\lambda^2(128\lambda^2 - 1)$$

Zad. 4.

Co to jest odstęp dualności.

L_D - funkcja dualna

$F(x)$ - funkcja którą minimalizujemy

Jeśli w punkcie rozwiązania optymalnego jest $L_D(\hat{x}) < F(\hat{x})$
to mamy do czynienia z odstępem dualności.

Zad. 5.

Co to znaczy, że problem optymalizacji jest dobrze uwarunkowany?

Jeśli $f(x) : X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym, a algorytm dostarcza nam aproksymacji $\varphi(x) \in Y$, to dobre uwarunkowanie oznacza, iż spełniona jest implikacja: $x \approx x' \Rightarrow \varphi(x) \approx \varphi(x')$.