

# Sprawozdanie z laboratorium Teorii Optymalizacji

Imię i nazwisko	Jacek Gołda
Temat ćwiczenia	Optymalizacja jednowymiarowa. Minimalizacja w zadanym kierunku
Data i godzina wykonania ćwiczenia	2 marca 2016, 14:00

## 1 Wstęp

Celem laboratorium było ćwiczenie stosowania metod optymalizacji na kierunku.

## 2 Ćwiczenie 1

### Treść zadania:

Znaleźć minimum funkcji celu

$$Q(x_1, x_2) = 3n^2 x_1^2 + x_1 x_2 + 0.5x_2^2 - 2x_2 - 3x_1 + 2.5$$

na prostej w kierunku  $d = [1, 2]^T$ , przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Rozwiązać to zadanie analitycznie, a następnie porównać z wynikami numerycznymi, otrzymanymi metodami ekspansji, złotego podziału i aproksymacji parabolicznej.

Za parametr  $n$  przyjęto wartość 4.

### Rozwiązanie:

#### 2.1 Rozwiązanie analityczne

Wykorzystano równanie parametryczne prostej:

$$x = x_0 + k \cdot d$$

gdzie  $k$  — parametr,  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = 2k \end{cases}$$

Wstawiono parametr  $n$ .

$$Q(x_1, x_2) = 48x_1^2 + x_1 x_2 + 0.5x_2^2 - 2x_2 - 3x_1 + 2.5$$

Wstawiono powyższą parametryzację do wyrażenia określającego wartość funkcji  $Q$

$$q(k) = Q(k, 2k) = 52k^2 - 7k + 2.5$$

Jest to parabola o dodatnim współczynniku przy pierwszym wyrazie, więc będzie osiągała minimum w wierzchołku.

$$\hat{k} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \cdot 52} \approx 0.0673$$

Wtedy punkt  $\hat{x}$  będący minimum funkcji  $Q$  uzyskam korzystając z parametryzacji.

$$\begin{cases} x_1 \approx 0.0673 \\ x_2 \approx 2 \cdot 0.0673 = 1.346 \end{cases}$$

czyli ostatecznie

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.0673 \\ 1.346 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Rozwiązanie numeryczne

W rozwiązaniu numerycznym skorzystano z metod ekspansji, złotego podziału i aproksymacji parabolicznej. Zmodyfikowano funkcję *koszt*, aby obliczała wartość zadanej funkcji  $Q$ :

```
function [q,x]=koszt(x,z,d)

% KOSZT wylicza wskaźnik jakości dla wektora zmiennych
% decyzyjnych x+z*d.

if nargin==2, x=x+z;
elseif nargin==3, x=x+z*d;
end
x1 = x(1);
x2 = x(2);
n = 4;

q = 3 * n .^ 2 * x1 .^ 2 + x1 .* x2 + 0.5 * x2 .^ 2 - 2 * x2 - 3 * x1 + 2.5;
```

W celu rozwiązania problemu i zobrazowania funkcji stworzono następujący skrypt:

```
clear all;
close all;
clc;

% parametry:

x0 = [0; 0]
d = [1; 2]
zn = 0.1;
n = 4;
maxit=100;

% rysowanie wykresu funkcji
[x1,x2] = meshgrid(0:0.001:0.1, 0:0.001:0.2);
z_eks = 3 * n .^ 2 * x1 .^ 2 + x1 .* x2 + 0.5 * x2 .^ 2 - 2 * x2 - 3 * x1 + 2.5;
surf(x1, x2, z_eks);

min(min(z_eks))

% rysowanie płaszczyzny x2 = 2*x1;
hold on;
x1 = [0, 0.1; 0, 0.1];
x2 = 2 * x1;
z_eks = [min(min(z_eks)), min(min(z_eks)); max(max(z_eks)), max(max(z_eks))];
surf(x1, x2, z_eks, 'FaceColor','green');
axis tight
```

```

%-----

% 1. metoda ekspansji

[zw_eks, qw_eks, wskaz, z_eks, q_eks] = ekspan(x0, d, zn, maxit);
x_ekspan = x0 + zw_eks(2) * d

% 2. metoda zlotego podzialu

[zw_zlopod, qw, z, q] = zlopod(x0, d, zw_eks, qw_eks, maxit, z_eks, q_eks);

x_zlopod = x0 + zw_zlopod(2) * d

% 3. metoda aproksymacji parabolicznej
[zw_apropa, qw, z, q] = apropa(x0, d, zw_eks, qw_eks, maxit, z_eks, q_eks);

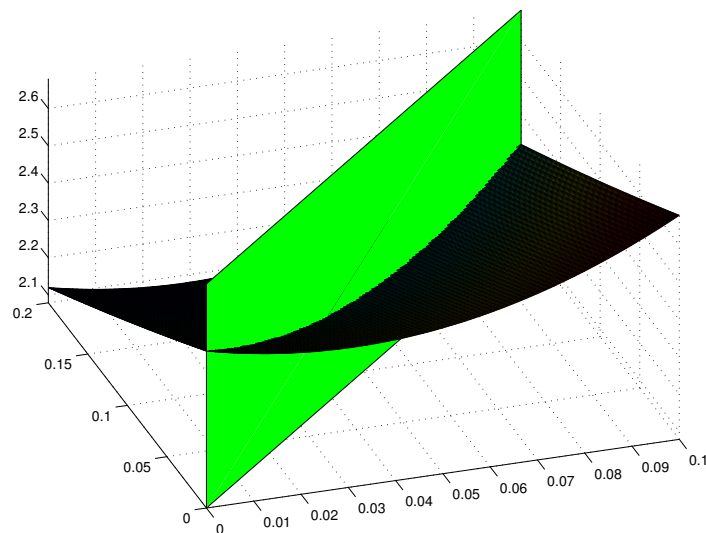
x_apropa = x0 + zw_apropa(2) * d

% 4. najpierw zloty podzial, a pozniej aproksymacja paraboliczna
[zw, qw, z, q] = zlopod(x0, d, zw_eks, qw_eks, maxit, z_eks, q_eks);
x = x0 + zw(2) * d
[zw, qw, z, q] = apropa(x0, d, zw, qw, maxit, z, q);
x = x0 + zw(2) * d

```

Zbadano osobno metodę złotego podziału, osobno metodę aproksymacji parabolicznej, a następnie najpierw metodę złotego podziału, a na podstawie jej wyników metodę aproksymacji parabolicznej. Taka kolejność wynika z tego, że aproksymacja paraboliczna lepiej sprawdza się w przypadku, gdy funkcja celu jest zbliżona do wielomianu 2 stopnia (można ją w miarę dobrze przybliżyć parabolą). Będzie się tak działo w sytuacji, gdy przedział nieokreśloności jest niewielki. Stąd najpierw stosuje się metodę złotego podziału.

Uzyskano następujący wykres:



Na zielono narysowana jest płaszczyzna reprezentująca kierunek  $d$ , a na czarno wartości funkcji  $Q$ . Widoczne jest minimum.

Tabela prezentuje uzyskane wyniki (przedstawiono wartość parametru  $k$ ):

Metoda	Wynik
Metoda ekspansji	0.1
Metoda złotego podziału	0.0673
Metoda aproksymacji parabolicznej	0.0673
Metoda złotego podziału & aproksymacji parabolicznej	0.0673

Bardzo niedokładny wynik metody ekspansji wynika z tego, że służy ona do wyznaczenia przedziału nieokreśloności — zawsze będzie to mocno zgrubne oszacowanie rozwiązania optymalnego.

Pozostałe dwie metody służą do zawężania przedziału nieokreśloności. Obydwie dały dobry wynik.

Połączenie obydwu metod w tym przypadku również daje dobry wynik, jednak nie widać poprawy w stosunku do stosowania metod pojedynczo, gdyż już wtedy znaleziono odpowiednio dobre przybliżenie.

### 3 Ćwiczenie 3

#### Treść zadania:

Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu:

$$w(x) = x^5 - 91.11x^4 - 899.989x^3 + 1100.009x^2 - 110.91x + 1$$

przez minimalizację wskaźnika:

$$Q(x) = w(x)^2$$

Należało rozwiązać to zadanie w sposób następujący:

1. Znaleźć jeden z pierwiastków za pomocą metody ekspansji i zawężania przedziału nieokreśloności
2. Podzielić uzyskany wielomian przez czynnik  $(x - \xi_1)$ , uzyskując wielomian stopnia niższego
3. Ponownie zastosować tę procedurę aż do momentu wyznaczenia wszystkich pierwiastków

#### Rozwiązanie:

Do prostej realizacji tego zadania zmodyfikowano nieznacznie definicje i wywołania wszystkich metod tak, aby umożliwiły przekazanie wektora współczynników wielomianu  $w$ . Dodano w tym celu kolejny argument. Nie zamieszczono wszystkich tych funkcji — nie wniosło by to wiele do sprawozdania.

Ponownie zmodyfikowano funkcję *koszt* do obliczania wartości wskaźnika  $Q$ :

```
function [q,x]=koszt(x,z,d,a)

% KOSZT wylicza wskaźnik jakości dla wektora zmiennych
% decyzyjnych x+z*d.

if nargin==3, x=x+z;
elseif nargin==4, x=x+z*d;
end

q = polyval(a, x).^2;
```

Stworzono skrypt służący do obliczania kolejnych pierwiastków i dzielenia wielomianu:

```

clear all;
close all;
clc;

% współczynniki i tablica na pierwiastki
wsp = [1, -91.11, -899.989, 1100.009, -110.91, 1];
pierw = zeros(1, 5);
n = length(wsp) - 1;

for i = 1:n
    wsp
    pierw(i) = prosta1(0, 0.01, wsp)
    old_wsp = wsp;
    wsp = ones(1, 6-i);
    for j = 2:(6-i)
        wsp(j) = old_wsp(j) + wsp(j-1) * pierw(i)
    end
end

pierw

```

Uzyskano następujące wyniki:

Pierwiastek dokładny	Pierwiastek wyznaczony numerycznie
0.01	0.0100
0.1	0.1000
1	0.9998
-10	-9.9958
100	99.9960

Uzyskano wyniki bardzo zbliżone do wyników dokładnych. Przy takiej metodzie obliczeń istnieje ryzyko, że w przy obliczaniu kolejnych pierwiastków powstaną błędy wynikające z nakładania się niewielkich błędów (błędy numeryczne, przybliżenie wartości dokładnej) i pierwiastki obliczane pod koniec procesu będą niedokładne.

## 4 Ćwiczenie 4

### Treść zadania:

Przeprowadzić minimalizację funkcjonału:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = n(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_3^2 - x_4)^2 + (1 - x_3)^2 + 10.1[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2] + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1)$$

Należy rozwiązać problem co najmniej przy standardowym zestawie parametrów:

1. początek układu jest punktem startowym
2. kierunek jest wektorem składającym się z samych jedynek
3. dopuszcza się pięciokrotną ekspansję
4. współczynnik ekspansji jest równy 3
5. krok początkowy jest równy 1
6. dokładność względna  $\epsilon = 0.0001$

Za parametr  $n$  przyjęto wartość 4.

## Rozwiązanie:

Rozpoczęto od analitycznego oszacowania minimum, analogicznie jak w pierwszym zadaniu.

### 4.1 Obliczenia analityczne

Ustalony jest kierunek  $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Analogicznie sparametryzowano prostą:

$$x = \begin{bmatrix} k \\ k \\ k \\ k \end{bmatrix}$$

Wstawiono powyższe wartości do funkcjonału i po zwinięciu uzyskano:

$$q(k) = Q(k, k, k, k) = 94(k-1)^2 \left( k^2 + \frac{21}{47} \right)$$

Pierwszy czynnik będzie większy bądź równy zero (równy 0 tylko dla  $k = 1$ ), a drugi czynnik będzie zawsze większy od zera. Oznacza to, że minimum równe 0 zostanie osiągnięte dla  $k = 1$ . Czyli poszukiwane minimum to:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 4.2 Obliczenia numeryczne

Ponownie zmodyfikowano funkcję obliczającą wartość funkcjonału  $Q$ :

```
function [q,x]=koszt(x,z,d)

% KOSZT wylicza wskaznik jakosci dla wektora zmiennych
% decyzyjnych x+z*d.

if nargin==2, x=x+z;
elseif nargin==3, x=x+z*d;
end
x1 = x(1);
x2 = x(2);
x3 = x(3);
x4 = x(4);
n = 4;

q = n*(x1.^2 - x2.^2).^2 + (1 - x1).^2 ...
    + 90 * ( x3.^3 - x4 ) .^ 2 + (1 - x3).^2 ...
    + 10.1 * ( (x2 - 1).^2 + (x4 - 1).^2 ) ...
    + 19.8 * (x2 - 1) .* ( x4 - 1 );
```

Następnie napisano skrypt służący do rozwiązywania zadania.

```
clear all;
close all;
clc

x0 = zeros(1, 4)';      % punkt początkowy
d = ones(4, 1);         % kierunek
zn = 1;                 % krok początkowy
maxit_eksp = 5;         % maksymalna ilość ekspansji
maxit = 100;            % maksymalna ilość iteracji pozostałych metod

% 1. metoda ekspansji
[zw_eks, qw_eks, wskaz, z_eks, q_eks] = ekspan(x0, d, zn, maxit_eksp);
x_ekspan = x0 + zw_eks(2) * d

% 2. metoda złotego podziału
[zw_zlopod, qw, z, q] = zlopod(x0, d, zw_eks, qw_eks, maxit, z_eks, q_eks);
x_zlopod = x0 + zw_zlopod(2) * d

% 3. metoda aproksymacji parabolicznej
[zw_apropa, qw, z, q] = apropa(x0, d, zw_eks, qw_eks, maxit, z_eks, q_eks);
x_apropa = x0 + zw_apropa(2) * d
```

Skorzystano w nim z metod ekspansji, złotego podziału i aproksymacji parabolicznej. Wymagane ograniczenia narzucono w początkowej części skryptu. Ograniczenie dotyczące współczynnika ekspansji jest zdefiniowane w postaci zmiennej *alfa* zdefiniowanej w pliku *ekspan.m*. W wersji pliku pobranej ze strony zmienna ta posiada wartość 3, czyli jest to wartość zgodna z wymaganiami zadania.

Ze względu na takie ograniczenia (w szczególności początkową wartość kroku) wszystkie zastosowane metody znajdują dokładne minimum  $\hat{x}$ . Założenie co do żądanej dokładności względnej jest w związku z tym również spełnione.

## 5 Podsumowanie

W ramach laboratorium zbadano działanie trzech metod: metody ekspansji, metody złotego podziału i metody aproksymacji parabolicznej.

Metoda ekspansji służy do pierwszego, zgrubnego określenia przedziału, w którym znajduje się minimum (przedziału nieokreśloności). Jako przybliżenie rozwiązania optymalnego zwraca ona jedną z kolejnych wyznaczonych wartości. Duża wartość współczynnika ekspansji (stosowano wartość 3) powoduje, że to przybliżenie jest bardzo mało dokładne.

Metoda złotego podziału i metoda aproksymacji parabolicznej służą do zmniejszania przedziału nieokreśloności. Obydwie metody dostarczyły poprawnych rozwiązań, bardzo bliskich dokładnym minimom.

Można również stosować dwie ostatnie metody razem, wykonywane kolejno: najpierw metodę złotego podziału, a na podstawie jej wyników metodę aproksymacji parabolicznej. W kłopotliwych przypadkach powinno dać to lepszy efekt. W trakcie laboratoriów nie zaobserwowano różnicy w uzyskiwanych wynikach.