Zadania z metod optymalizacji – Marta Kapusta

Zadanie 1

Znaleźć obszar wypukłości funkcji

$$F(x) = \frac{1}{x_1} + 2 \cdot x_2$$

Z tw.: Funkcja F jest wypukła na zbiorze X $\Leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall}$ jej hesjan H(x) jest dodatnio określony.

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1^2} \\ 2 \end{bmatrix} \qquad H(x_1, x_2) = \nabla^2 F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- hesjan jest dodatnio określony (<u>nie</u> ściśle dodatnio określony) dla $x_1 > 0$
- $F(x) = \frac{1}{x_1} + 2 \cdot x_2$ jest wypukła w zbiorze X_0, gdzie:
- $X_0 = \{x : x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}^1\}$ (czyli x_2 dowolne)

Zadanie 2

$d = (-1, -1)^T$. *Wyznaczyć analitycznie kierunek dopuszczalny poprawy. Optymalizować długość kroku na tym kierunku.*

$$F(x) = x_1 + x_2 \qquad h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \qquad x_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T$$

a) *czy d jest kierunkiem poprawy?*
b) *czy d jest kierunkiem dopuszczalnym?*

- $\nabla F(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 \\ 2 \cdot x_2 \end{bmatrix}$
- <u>Sektor (stożek) kierunków dopuszczalnych</u> w punkcie $\hat{x}$ definiujemy jako:
  $D_1 = \{d : \langle \nabla h_j(\hat{x}), d \rangle \le 0\}$ $\quad j \in A(\hat{x})$, gdzie $A(\hat{x})$ - zbiór ograniczeń aktywnych
  $$(2 \cdot \hat{x}_1 \quad 2 \cdot \hat{x}_2) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \le 0$$
  $$\sqrt{2} \cdot d_2 + \sqrt{2} \cdot d_2 \le 0$$
  $$d_1 \le -d_2 \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \{(d_1, d_2) : \quad d_1 \le -d_2\}$$
- <u>Stożek (sektor) kierunków spadku</u> w punkcie $\hat{x}$ definiujemy jako:
  $D_2 = \{d : \langle \nabla f(\hat{x}), d \rangle < 0\}$
  $$(1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} < 0$$
  $$d_1 \cdot d_2 < 0$$
  $$d_1 < -d_2 \qquad \Rightarrow \qquad D_2 = \{(d_1, d_2) : \quad d_1 < -d_2\}$$

- Stożek (sektor) kierunków poprawy to przecięcie D_1 oraz D_2.
  $D_3 = D_1 \cap D_2 = \left\{ d : \left\langle \nabla h_j(\hat{x}), d \right\rangle \le 0, \left\langle \nabla f(\hat{x}), d \right\rangle < 0 \right\}$
  w tym przypadku: $D_3 = \{(d_1, d_2) : \qquad d_1 < -d_2\}$
- łatwo sprawdzić, że kierunek $(-1 \quad -1)^T$, który jest kierunkiem dopuszczalnym, jest też kierunkiem poprawy

$$x = x^0 + \lambda \cdot d = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \end{cases}$$

$$h(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \right)^2 - 1 = 0$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lambda + \lambda^2 \right) - 1 = 0$$

$$1 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \sqrt{2} \cdot \lambda = 0$$

$$\lambda \cdot (\lambda - \sqrt{2}) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \vee \qquad \lambda = \sqrt{2}$$

Zadanie 3

Udowodnić, że $u, v \rightarrow \textit{wektory własne} \Rightarrow \langle u, Av \rangle = 0, \qquad A > 0.$

Wektory u i v dodatnio określonej macierzy A są kierunkami sprzężonymi względem tej macierzy.

- Jeśli u, v — wektory własne macierzy a, to zachodzi:

$$\begin{matrix} (A - I \cdot \lambda) \cdot v = 0 & & (A - I \cdot \lambda) \cdot u = 0 \\ A \cdot v = \lambda_v \cdot v & \text{oraz} & A \cdot u = \lambda_u \cdot u \end{matrix}$$

$$\langle u, A \cdot v \rangle = \langle u, \lambda_v \cdot v \rangle = \lambda \cdot v \cdot \langle u, v \rangle = 0$$

$$\langle v, A \cdot u \rangle = \langle v, \lambda_u \cdot u \rangle = \lambda \cdot u \cdot \langle v, u \rangle = 0$$

$\lambda \cdot v \ne \lambda \cdot u \qquad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = 0 \qquad$ (u,v – wektory własne)

Zadanie 4

Kuhna-Tucker: $\qquad \min\left\{ -x^2 - x^3 \right\}, \qquad x^2 \le 1.$

Wyznaczyć pary (x, λ), *które spełniają warunki konieczne optymalności Kuhna-Tuckera.*

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot h(x) = -x^2 - x^3 + \lambda \cdot (x^2 - 1)$$

Warunki K-T:

1. $\nabla_x F(x,\lambda) = -2\cdot x - 3\cdot x^2 + 2\cdot\lambda\cdot x = 0$
2. $\nabla_\lambda F(x,\lambda) = x^2 - 1 = 0$
3. $\lambda\cdot(x^2-1) = 0$
4. $\lambda \geq 0$ (bo minimalizujemy)

z (3): $\lambda = 0 \quad \wedge \quad \lambda^2 - 1 \leq 0$

$\lambda = 0$	$x = 1 \quad \vee$	$x = -1$
$-2\cdot x - 3\cdot x^2 = 0$	$-2-3+2\cdot\lambda = 0$	$2-3+2\cdot\lambda = 0$
$x(-2-3\cdot x) = 0$	$2\cdot\lambda = 5$	$2\cdot\lambda = -1$
$x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}$	$\lambda = \frac{5}{2}$	$\lambda = -\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ sprzeczne, bo $\lambda \geq 0$!!

Odp:

- $\lambda = 0 \quad x = 0$, wtedy $f(x) = 0$
- $\lambda = 0 \quad x = -\frac{2}{3}$, wtedy $f(x) = -\frac{4}{27}$
- $\lambda = \frac{5}{2} \quad x = 1$, wtedy $f(x) = -2$

Zadanie 5

Dla zadania $\min\{x_1^2 + x_2^2\}$, $\quad x_1 + x_2 \geq 0 \quad h(x) = -x_1 - x_2 \leq 0$ *znajdź funkcję dualną.*

- Funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(-x_1 - x_2)$$

- Funkcja dualna:

$$L_D(\lambda) = \min_x L(x,\lambda)$$

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 2\cdot x_1 - \lambda \\ 2\cdot x_2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 2\cdot x_1 = \lambda & \Rightarrow & x_1 = \frac{\lambda}{2} \\ 2\cdot x_2 = \lambda & \Rightarrow & x_2 = \frac{\lambda}{2} \end{matrix}\right\} \text{co daje nam rozwiązanie } \left\{\begin{matrix} \hat{x}_1 = \frac{\lambda}{2} \\ \hat{x}_2 = \frac{\lambda}{2} \end{matrix}\right.$$

- Wyliczamy funkcję dualną:

$$L_D(\lambda) = L(\hat{x}(\lambda,\lambda)) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda\cdot\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\cdot(-\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^2 = -\frac{\lambda^2}{2}$$

Funkcja dualna ma postać: $L_D(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2}$

- Rozwiązanie zadania $\max L_{D_{(\lambda\geq 0)}}(\lambda)$ jest uzyskiwane dla

  $L_D'(\lambda) = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\lambda = 0 \quad \Rightarrow \qquad \lambda = 0$

Zadanie 6

Podać pierwsze rozwiązanie bazowe:

$$\max\{2\cdot x_1 + x_2\}$$
$$3\cdot x_1 + x_2 \leq 7$$
$$2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \geq 10$$

$Q(x) = 2\cdot x_1 + x_2$

Wprowadzamy dodatkowe zmienne:

$3\cdot x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 7$

$2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - x_4 + x_5 \qquad = 10$

$x_i \geq 0 \qquad$ dla $i = 1,\dots,5$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Pierwsze rozwiązanie bazowe wyliczamy ze wzoru:

  $\overline{x}_B = B^{-1}\cdot b$, gdzie:

  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - macierz bazowa *(na początku musi być macierzą jednostkową!)*

  $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ - wektor prawych stron (Ax=b)

  $\overline{x}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

- $\overline{x}_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$ pierwsze rozwiązanie bazowe

Zadanie 7, 15

Operacja krzyżowania dla pary chromosomów – czy zmienia wartość funkcji przyrostowania odpowiadającej tej parze?

Odp.: Operator krzyżowania zmienia układ bitów w chromosomie, wpływa zatem na wartość funkcji przyrostowania. W przypadku krzyżowania jednopunktowego dla chromosomu o długości n możliwe jest wylosowanie z jednakowym prawdopodobieństwem 5(n-1) różnych punktów krzyżowania z jednej pary rodziców. Może zatem powstać jedna z (n-1) par potomków.

Uwaga: Jeśli funkcja przyrostowania jest liniowa lub jeśli krzyżowanie następuje w miejscach, w których geny poszczególnych chromosomów są identyczne, wówczas nie zmienia się wartość przyrostowania

Zadanie 8

Rozwiązać metodą wewnętrznej funkcji kary:

$$\min\{(x_1+1)^3 + x_2\}$$

$x_1 \geq 1 \quad \Rightarrow \qquad x_1 - 1 \geq 0$

$x_2 \geq 10 \Rightarrow \qquad x_2 - 10 \geq 0$

- Funkcja kary: $\Phi(x,k_j)=\frac{k_j}{x_1-1}+\frac{k_j}{x_2-10}$

$$P_j(x,k_j)=(x_1+1)^3+x_2+\frac{k_j}{x_1-1}+\frac{k_j}{x_2-10}$$

$$\frac{\partial P_j(x,k_j)}{\partial x_1}=3\cdot(x_1+1)^2-k_j\cdot\frac{1}{(x_1-1)^2}=0 \qquad \frac{\partial P_j(x,k_j)}{\partial x_2}=1-k_j\cdot\frac{1}{(x_2-10)^2}=0$$

$$1=k_j\cdot\frac{1}{(x_2-10)^2} \quad\Rightarrow\quad k_j=(x_2-10)^2$$

$$\sqrt{k_j}=x_2-10 \quad\Rightarrow\quad x_2=\sqrt{k_j}+10$$

$$x_2=10$$

$$3\cdot(x_1+1)^2=k_j\cdot\frac{1}{(x_1-1)^2}$$

$$3\cdot(x_1+1)^2\cdot(x_1-1)^2=k_j$$

$$\sqrt{3}\cdot(x_1+1)\cdot(x_1-1)=\sqrt{k_j} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{k_j}=\sqrt{3}\cdot(x_1^2-1)$$

$$(x_1^2-1)=\sqrt{\frac{k_j}{3}} \quad\Rightarrow\quad x_1^2=\sqrt{\frac{k_j}{3}}+1 \quad\Rightarrow\quad x_1=\sqrt{\sqrt{\frac{k_j}{3}}+1}$$

$$x_1=1$$

Odp.: $x=\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}$

Zadanie 11

Czy funkcja $F(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ *jest:* *a) wypukła*

b) wklęsła

c) wypukła na podzbiorach (jakich?)

$$\nabla F(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x_1^2}\\ -\frac{1}{x_2^2}\end{pmatrix}$$

Z tw.: Funkcja F jest wypukła na zbiorze X $\Leftrightarrow \underset{x\in X}{\forall}$ jej hesjan H(x) jest dodatnio określony.

$$H(x_1,x_2)=\nabla^2 F(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\frac{2}{x_1^3} & 0\\ 0 & \frac{2}{x_2^3}\end{bmatrix}$$

Z tw.: Gdy $\underset{x \in X}{\forall}$ hesjan jest ściśle dodatnio określony $\Rightarrow \underset{x \in X}{\forall}$ F(x) jest ściśle wypukła (*warunek dostateczny*)

- W tym przypadku: H(x) jest ściśle dodatnio określony $\Leftrightarrow x_1 > 0 \quad \wedge \quad x_2 > 0$

Z powyższego twierdzenia wynika, że funkcja $F(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ jest ściśle wypukła w następującym zbiorze: $X_0 = \{(x_1, x_2): \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0\}$

Zadanie 13

Dla jakiego a kierunki $d_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *są sprzężone względem* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Z tw: Niezerowe kierunki (wektory) $d_1, d_2, ..., d_k \in \mathbb{R}, \quad k \le n$ nazywamy sprzężonymi względem symetrycznej, dodatnio określonej macierzy A (czyli A-sprzężonymi), jeśli:

$$\underset{i,j \in \{1,...,k\}}{\forall} (d_i)^T \cdot A \cdot d_j = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a - 2 \cdot a = 0$$

Odp.: $a \neq 0$ - musi być różne od 0, bo wektory $d_1, d_2, ..., d_k$ muszą być niezerowe.

Zadanie 16

Funkcja celu: $\min\{(x_1+1)^3 + x_2\} \qquad x_1 \ge 1, \quad x_2 \ge 0$

Przekształcić do postaci umożliwiającej zastosowanie wewnętrznej funkcji kary.

$$\Phi(x, k_j) = \frac{k_j}{x_1 - 1} + \frac{k_j}{x_2} \quad (x_1 \ge 1, \quad x_2 \ge 0)$$

$$P_j(x, k_j) = (x_1+1)^3 + x_2 + \frac{k_j}{x_1 - 1} + \frac{k_j}{x_2}$$

$$\frac{\partial P_j(x, k_j)}{\partial x_1} = 3 \cdot (x_1+1)^2 - k_j \cdot \frac{1}{(x_1 - 1)^2} = 0 \qquad \frac{\partial P_j(x, k_j)}{\partial x_2} = 1 - k_j \cdot \frac{1}{x_2^{\ 2}} = 0$$

$$3 \cdot (x_1+1)^2 = k_j \cdot \frac{1}{(x_1 - 1)^2}$$

$$3 \cdot (x_1+1)^2 \cdot (x_1 - 1)^2 = k_j$$

$$\sqrt{3} \cdot (x_1+1) \cdot (x_1 - 1) = \sqrt{k_j} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{k_j} = \sqrt{3} \cdot (x_1^{\ 2} - 1)$$

$$(x_1^{\ 2} - 1) = \sqrt{\frac{k_j}{3}} \quad \Rightarrow \quad x_1^{\ 2} = \sqrt{\frac{k_j}{3}} + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{k_j}{3}} + 1}$$

$$x_1 = 1$$

$$1 = k_j \cdot \frac{1}{x_2^{\,2}} \qquad \Rightarrow \qquad x_2^{\,2} = k_j$$

$$x_2 = 0$$

Odp.: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zadanie 18

$$F(x_1, x_2) = x_1^{\,2} + 2 \cdot x_2^{\,2} + x_1 \cdot x_2$$

a) *gradient* $\qquad \nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 + x_2 \\ 4 \cdot x_2 + x_1 \end{bmatrix}$

b) *hesjan* $\qquad H(x_1, x_2) = \nabla^2 F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) *Hesjan jest ściśle dodatnio określony* $\Rightarrow$ *funkcja* $F(x_1, x_2) = x_1^{\,2} + 2 \cdot x_2^{\,2} + x_1 \cdot x_2$ *jest ściśle wypukła.*

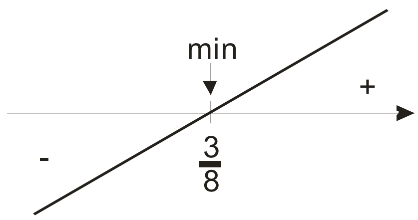
d) *Jakiej długości należy wykonać krok z punktu (1,0) na kierunku* $d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$*, aby osiągnąć ekstremum?*

$$x = x_0 + \lambda \cdot d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$F(\lambda) = (1+\lambda)^2 + 2 \cdot \lambda^2 + (1+\lambda) \cdot \lambda = 4 \cdot \lambda^2 + 3 \cdot \lambda + 1$$

$$F'(\lambda) = 8 \cdot \lambda + 3$$

$$F'(\lambda) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{3}{8}$$



Odp.: Aby osiągnąć ekstremum (minimum) z punktu (1,0) na kierunku $d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, należy wykonać krok o $\lambda = -\frac{3}{8}$.

Zadanie 19

Minimum formy kwadratowej $F(x) = x^T \cdot A \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^n$ będzie osiągnięte w jednym kroku przez algorytm Newtona-Rapsona pod warunkiem, że **forma kwadratowa jest dodatnio określona.**

Zadanie 20

$$\min\left\{(x_1+1)^3 + x_2\right\}$$

$$g_1(x) = x_1 - 1 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_2 \geq 0$$

Jak będzie wyglądała funkcja celu po zastosowaniu metody wewnętrznej funkcji kary?

$$\Phi(x, k_j) = \frac{k_j}{x_1 - 1} + \frac{k_j}{x_2} \quad \left(x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0\right)$$

$$P_j(x,k_j) = (x_1+1)^3 + x_2 + \frac{k_j}{x_1-1} + \frac{k_j}{x_2}$$

$$\frac{\partial P_j(x,k_j)}{\partial x_1} = 3\cdot(x_1+1)^2 - k_j\cdot\frac{1}{(x_1-1)^2} = 0 \qquad \frac{\partial P_j(x,k_j)}{\partial x_2} = 1 - k_j\cdot\frac{1}{x_2^{\,2}} = 0$$

$$3\cdot(x_1+1)^2 = k_j\cdot\frac{1}{(x_1-1)^2}$$

$$3\cdot(x_1+1)^2\cdot(x_1-1)^2 = k_j$$

$$\sqrt{3}\cdot(x_1+1)\cdot(x_1-1) = \sqrt{k_j} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{k_j} = \sqrt{3}\cdot(x_1^{\,2}-1)$$

$$(x_1^{\,2}-1) = \sqrt{\frac{k_j}{3}} \quad\Rightarrow\quad x_1^{\,2} = \sqrt{\frac{k_j}{3}}+1 \quad\Rightarrow\quad x_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{k_j}{3}}+1}$$

$$x_1 = 1$$

$$1 = k_j\cdot\frac{1}{x_2^{\,2}} \quad\Rightarrow\quad x_2^{\,2} = k_j$$

$$x_2 = 0$$

Odp.: $x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Zadanie 24

$$\max\left\{(x-4)^2\right\}, \qquad x\in\mathbb{R}^1 \qquad 1\le x\le 6$$

Czy w punkcie x=6 spełnione są warunki konieczne Khuna-Tuckera?

- Ograniczenia: $\begin{cases} x\le 6 \\ x\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6\le 0 \\ 1-x\le 0\end{cases}$

$$\max f(x) = -\min(-f(x))$$

$$\max\left\{(x-4)^2\right\} = -\min\left\{-(x-4)^2\right\}$$

$$L(x,\lambda) = -(x-4)^2 + \lambda_1\cdot(x-6) + \lambda_2\cdot(1-x)$$

1. $\nabla_x L(x,\lambda) = -2\cdot(x-4) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
2. $\nabla_{\lambda_1} L(x,\lambda) = x-6 \le 0$
3. $\nabla_{\lambda_2} L(x,\lambda) = 1-x \le 0$
4. $\lambda_1\cdot(x-6) = 0$
5. $\lambda_2\cdot(1-x) = 0$
6. $\lambda_1\ge 0,\ \lambda_2\ge 0$

$x = 6$

z (4): $\lambda_1 \neq 0$

$\lambda_2 = 0$

$-2 \cdot (6-4) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$-2 \cdot 2 + \lambda_1 = 0$

$\lambda_1 = 4 \geq 0$

Odp.: Tak, spełnione są warunki K-T!

Zadanie 22

Czy rozwiązanie zadania: $\min \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}$ *na zbiorze:* $X_0 = \{x : Ax \leq b, b \geq 0, x_i \geq 0\}$ *jest globalne?*

Tw.: Dowolne minimum lokalne wypukłej funkcji F(x) na wypukłym zbiorze X_0 jest jej minimum globalnym.

Tak, można tu wykorzystać twierdzenie o minimum funkcji wypukłych na zbiorze wypukłym.

- Czy funkcja $F(x_i) = \frac{1}{x_i}$ jest wypukła?

$\nabla F(x_i) = -\frac{1}{x_i^2} \qquad \nabla^2 F(x_i) = H(x_i) = \frac{2}{x_i^3} \quad \Rightarrow \quad F(x_i)$ jest wypukła, gdy $x_i \geq 0$

Tw.: Kombinacja liniowa funkcji wypukłych z nieujemnymi współczynnikami również jest funkcją wypukłą.

- Z powyższego twierdzenia wynika, że $F(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}$ jest sumą funkcji wypukłych, czyli jest funkcją wypukłą.

Odp.: Rozwiązanie jest minimum globalnym.

Zadanie 23

Wykazać, że algorytm Newtona – Rapsona zastosowany do funkcji $F(x) = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 2)^2 \ x \in R^2$ *pozwoli osiągnąć jej minimum w jednym kroku.*

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k) \cdot \nabla F(x^k)$$

$$\nabla F(x^k) = \begin{bmatrix} 2(x_1^k - 3) \\ 8(x_2^k - 2) \end{bmatrix} \qquad H^{-1}(x^k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$x^1 = x^0 - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2(x_1^0 - 3) \\ 8(x_2^0 - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Z drugiej strony wynik ten uzyskamy wykorzystując warunki konieczne (i wystarczające) optymalności.

Zadanie 24

Sformułować warunki Kuhna-Tuckera dla zadania:

$\max F(x)$

$h_i(x) \le 0 \quad i = 1 \ldots p$

$$\nabla_x L\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) = 0$$
$$\nabla_\lambda L\left(\hat{x}, \hat{\lambda}\right) \le 0$$
$$\left(\hat{\lambda}\right)^T h\left(\hat{x}\right) = 0$$
$$\hat{\lambda} \le 0$$

Co uzyskujemy z pierwszego warunku Kuhna-Tuckera:

$\dfrac{\partial F\left(\hat{x}\right)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \hat{\lambda}_j \dfrac{\partial h_j(\hat{x})}{\partial x_i} = 0$ i z warunku: $\quad \max F(x) = \min\left(-F(x)\right)$

$$-\frac{\partial F\left(\hat{x}\right)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \hat{\lambda}_j \frac{\partial h_j(\hat{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial F\left(\hat{x}\right)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \left(-\hat{\lambda}_j\right) \frac{\partial h_j(\hat{x})}{\partial x_i}$$

W pozostałe warunki K-T powyższa zmiana nie ingeruje

Zadanie 25

Wykorzystując metodę mnożników Lagrange'a znaleźć punkty ekstremalne funkcji $F(x) = x_1 x_2$ *na zbiorze dopuszczalnym*

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda x_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -2 \cdot \lambda \cdot x_1$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2\lambda x_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 - 4 \cdot \lambda^2 \cdot x_1 = 0$$
$$(1 - 4 \cdot \lambda^2) \cdot x_1 = 0$$
$$1 - 4 \cdot \lambda = 0$$
$$\lambda = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \lambda = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = -2 \cdot \lambda \cdot x_1$$
$$x_2 = -x_1 \vee \quad x_2 = x_1$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_1^2 - 1 = 0$$
$$2 \cdot x_1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1^2 = \frac{1}{2}$$
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \vee \qquad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- **max**
  $$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
  $$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
- **min**
  $$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
  $$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$