SPRAWOZDANIE

Analiza stochastyczna sygnałów rzeczywistych cz. 2

Data: 31.12.2017

Zadanie 1.

Dane:

-Układ inercyjny pierwszego rzędu z wymuszeniem losowym w postaci białego szumu jest opisany stochastycznym równaniem Ito:

$$dx = (-ax + bu)dt + \sqrt{g}dw, \quad u = \sin(\omega_1 t)\,, \quad a = 2, \quad b = 3, \quad \omega_1 = \pi$$

-w jest standardowym procesem Wienera

-warunek początkowy $N(x_0, K_0)$, $x_0 = 10$, $K_0 = 4$

-Średnia i wariancja procesu spełniają równania:

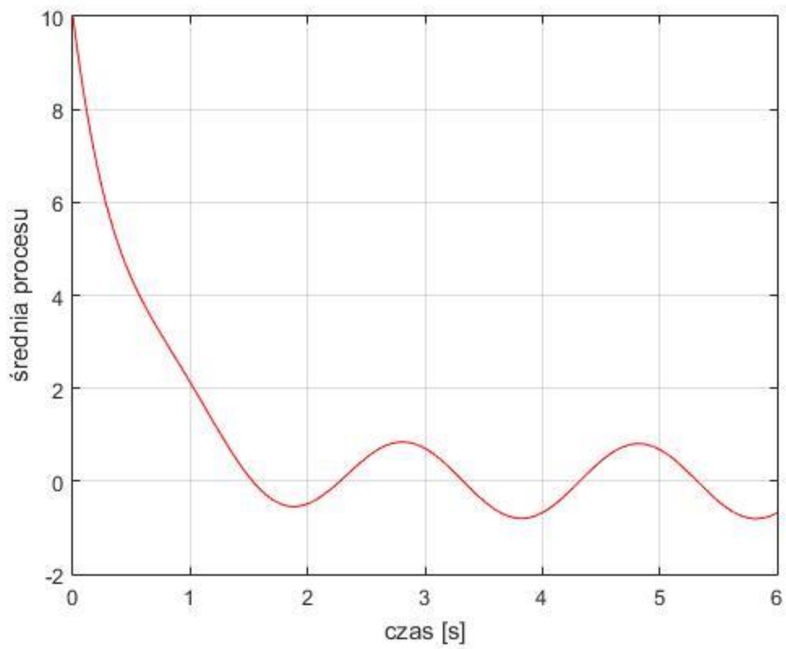
$$\dot{\mu} = -a\mu + bu, \qquad \mu(0) = x_0, \qquad \dot{K} = -2Ka + g, \qquad K(0) = K_0$$

Rozwiązanie:

Jawny wzór na rozkład prawdopodobieństwa procesu:

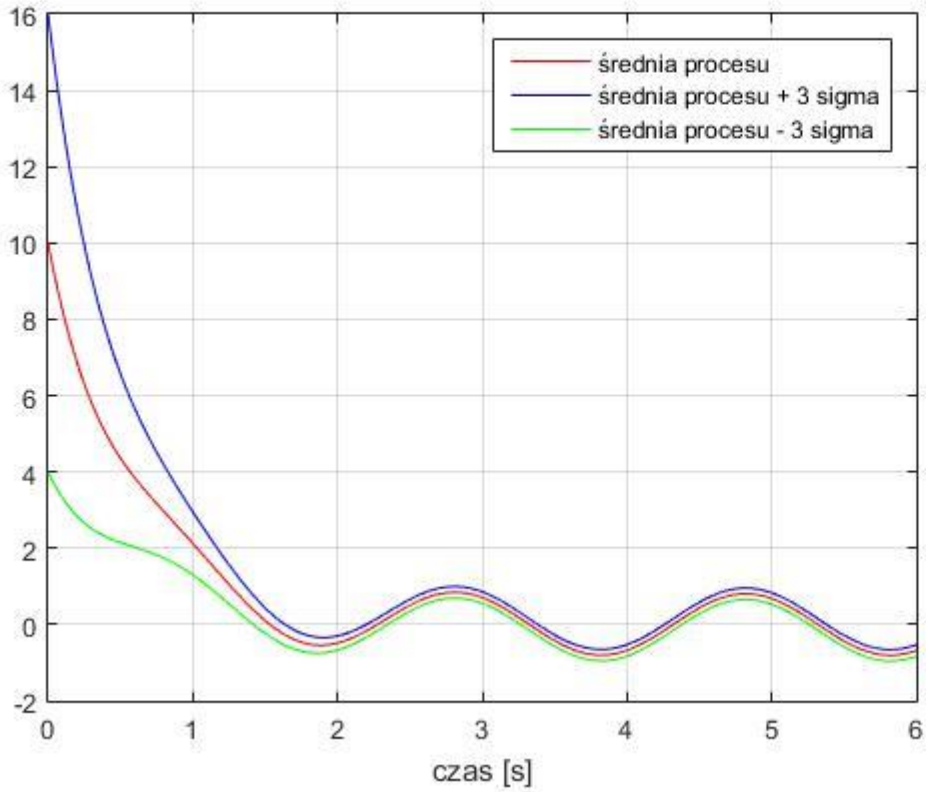
$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K(t)}} e^{-\frac{(x-\mu(t))^2}{2K(t)}}$$

Szukam rozwiązania równania różniczkowego opisującego średnią procesu, wykorzystując solver ode45(Runge-Kutta).



Wykres średniej procesu oraz linie określone równaniami:

$$m(t) = \mu(t) \pm 3\sigma(t), t \in [0,6s]$$



Prawdopodobieństwo ,że $x(t) \in [\mu(t) - 3\sigma(t), \mu(t) + 3\sigma(t)]$ wynosi:

$$\Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1, gdzie\ \Phi\ dystrybuanta\ N(0,1)$$

Wykorzystując w programie MATLAB funkcje normcdf stwierdzam ,że realizacja procesu x z prawdopodobieństwem 0,9973 będzie zawierać się w przedziale $[\mu(t) - 3\sigma(t), \mu(t) + 3\sigma(t)]$.

Przyjmuję ,że dla $t \to \infty \ \Rightarrow \dot{K} = 0$

Więc, $2aK - g = 0 \ \Rightarrow \ K_{asymptotyczne} = \frac{g}{2a} = 0.0025, dla\ t \to \infty\ \sigma(t) = 0.05$

Kod źródłowy realizacji zadania:

```
function du = funkcja1(t,u)
a=2;
b=3;
du=-a*u+b*sin(pi*t);
end
```

```
function dK = funkcja2(t,K)
a=2;
g=0.01;
dK=-2*K*a +g;
end
```

```
[T,u]=ode45(@funkcja1, [0:0.001:6], 10);
figure(1)
plot(T,u,'red');
grid on
xlabel('czas [s]');
ylabel('średnia procesu');
[T2,K]=ode45(@funkcja2, [0:0.001:6], 4);
figure(2)
plot(T,u,'red')
hold on
plot(T2,u+3*sqrt(K), 'blue')
plot(T2,u-3*sqrt(K), 'green')
grid on
xlabel('czas [s]');
legend('średnia procesu','średnia procesu + 3 sigma','średnia procesu - 3 sigma')
```

Zadanie 2.

Dane:

-oscylator harmoniczny

$$dx = (Ax + Bu)dt + Gdw,$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{g} \end{bmatrix},\ u = 0\ ,$$

$$\omega_0 = 1,\ \xi = 0.1,\ b = 1,\ g = 1,$$

-warunek początkowy jest zmienną losową o rozkładzie

$$\boldsymbol{N(x_0, K_0), x_0 = [15, 0]^T, K_0 = 0.1 * diag(1, 1)}$$

-średnia i macierz kowariancji spełniają równania

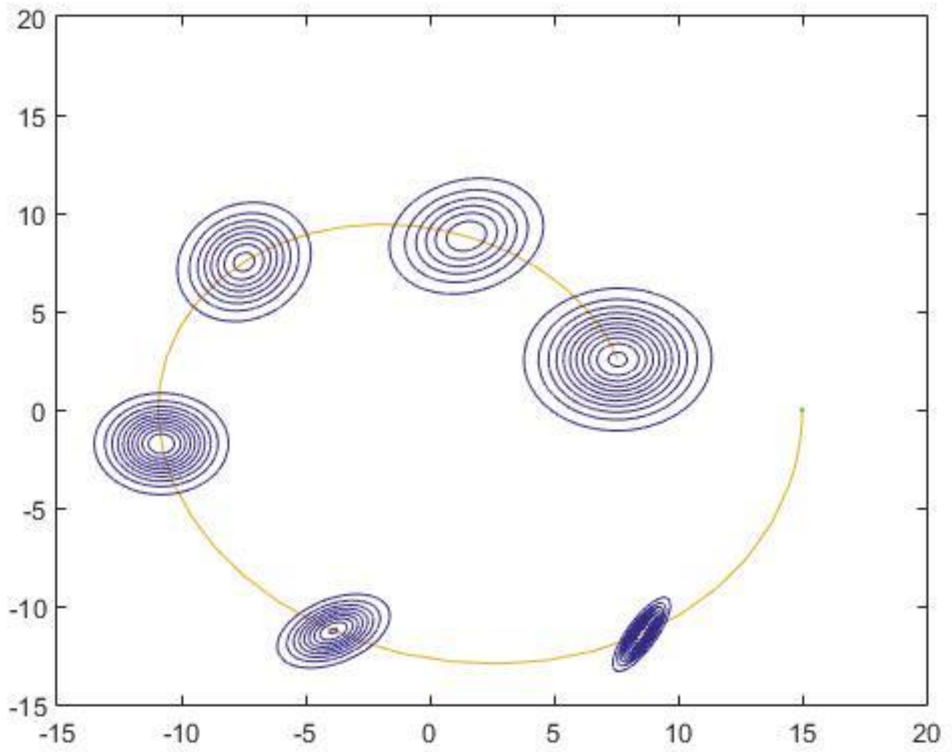
$$\dot{\mu} = A\mu + Bu\ ,\ \mu(0) = x_0\ ,$$
$$\dot{K} = KA^T + AK + GG^T\ ,\ K(0) = K_0\ .$$

Rozwiązanie:

Rozkład prawdopodobieństwa procesu x, w chwili t dane jest równaniem:

$$p(x,t) = \frac{1}{2\pi|K(t)|} e^{-0.5*(x-\mu(t))^T K(t)^{-1}(x-\mu(t))}$$

Trajektoria fazowa:



Prawdopodobieństwo , że :

$$P(|x_1(t) - \mu_1(t)| > 3\sqrt{K_{11}(t)}) \text{ dla } t = 6.$$

Wynosi 0.3%

Korzystając z podpowiedzi przyrównuję pochodne do zera:

$$0 = A * \mu$$

$$0 = 2 * K_{12}$$

$$0 = K_{22} - 2 * \xi * \omega_0 * K_{12} - {\omega_0}^2 * K_{11}$$

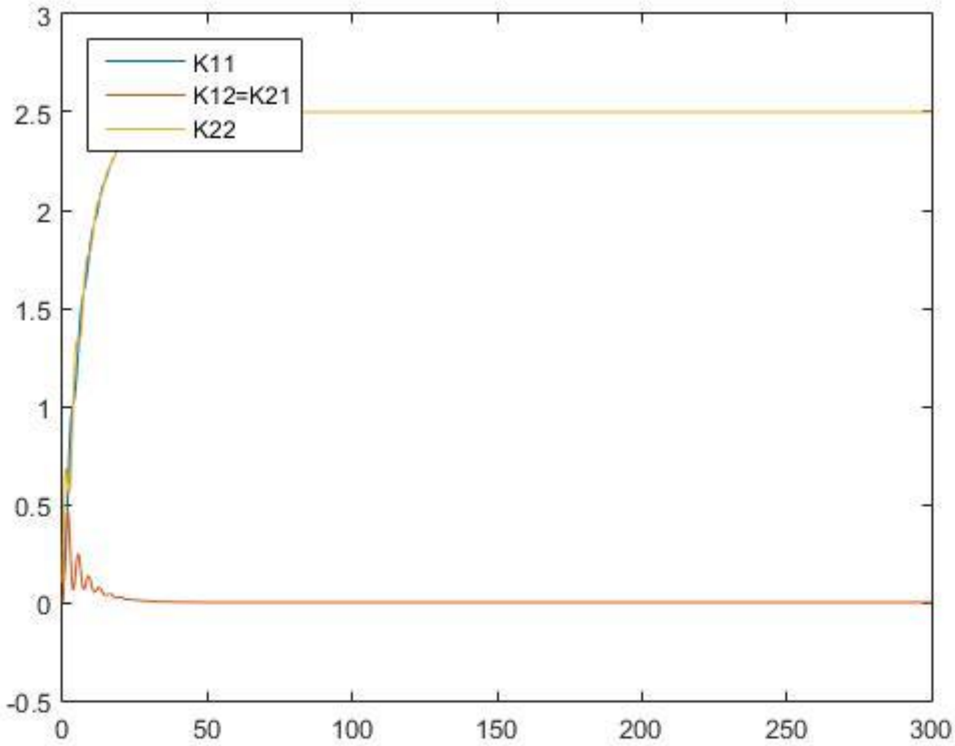
$$0 = -2 * \omega_0^2 * K_{12} - 4 * \xi \omega_{01} * K_{22} + g$$

Więc:

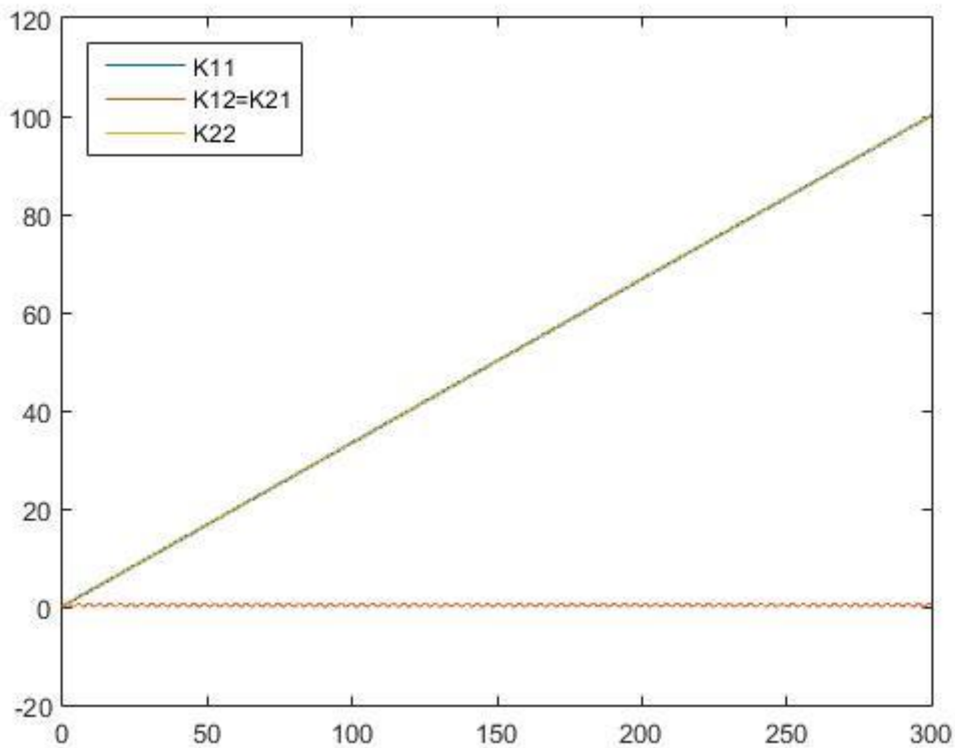
$$\mu_{asyptotyczne} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{asyptotyczne} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Numerycznie uzyskane współczynniki macierzy kowariancji:



Gdy założymy ,że $\zeta = 0$



W powyższym przypadku oscylator pozbawiony jest tłumienia. Kowariancja pomiędzy prędkością, a położeniem jest zmienna okresowo, wynika to ze związku pomiędzy prędkością i położeniem w układach oscylujących.