

## SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA.....	5
<b>1. PORTRETY FAZOWE SYSTEMÓW LINIOWYCH.....</b>	<b>7</b>
1.1. PODSTAWOWE POJĘCIA .....	7
1.2. PORTRETY FAZOWE .....	8
1.3. TYPOWE PORTRETY FAZOWE.....	10
1.4. PRZEBIEG ĆWICZENIA.....	13
1.5. OPRACOWANIE WYNIKÓW .....	14
1.6. LITERATURA .....	14
<b>2. CZĘSTOTLIWOŚCIOWE KRYTERIA STABILNOŚCI .....</b>	<b>15</b>
2.1. PODSTAWOWE POJĘCIA .....	15
2.2. TWIERDZENIE MICHAŁOWA .....	16
2.3. KRYTERIUM NYQUISTA .....	17
2.4. SYSTEMY Z OPÓŹNIENIEM .....	21
2.5. PRZEBIEG ĆWICZENIA.....	22
2.6. LITERATURA .....	23
<b>3. PIERWSZA METODA LAPUNOWA.....</b>	<b>24</b>
3.1. PODSTAWOWE POJĘCIA .....	25
3.2. STABILNOŚĆ W SENSIE LAPUNOWA.....	26
3.3. LINIOWE PRZYBLIŻENIE SYSTEMU NIELINIOWEGO W ZEROWYM PUNKCIE RÓWNOWAGI .....	28
3.4. PIERWSZA METODA LAPUNOWA .....	29
3.5. PRZEBIEG ĆWICZENIA.....	29
3.6. PRZYGOTOWANIE DO ZAJĘĆ .....	30
3.7. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE .....	30
3.8. LITERATURA .....	34
<b>4. DRUGA METODA LAPUNOWA I TWIERDZENIE LASALLE’A .....</b>	<b>35</b>
4.1. PODSTAWOWE POJĘCIA .....	35
4.2. TWIERDZENIE LAPUNOWA .....	37
4.3. ZASADA LASALLE’A .....	38
4.4. PRZEBIEG ĆWICZENIA.....	43
4.5. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA .....	44
4.6. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY .....	45
4.7. LITERATURA .....	48
<b>5. KRYTERIUM KOŁA I TWIERDZENIE POPOVA .....</b>	<b>50</b>
5.1. KRYTERIUM KOŁA .....	50
5.2. TWIERDZENIE POPOVA .....	55
5.3. WYKORZYSTANIE MATLAB-A .....	60
5.4. PRZEBIEG ĆWICZENIA.....	61
5.5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY .....	61
5.6. LITERATURA .....	62
<b>6. OPTIMALIZACJA PARAMETRYCZNA .....</b>	<b>63</b>
6.1. PODSTAWOWE POJĘCIA .....	63
6.2. ANALITYCZNE ROZWIĄZANIE ZADANIA OPTIMALIZACJI PARAMETRYCZNEJ.....	71
6.3. NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE ZADANIA OPTIMALIZACJI PARAMETRYCZNEJ .....	75
6.4. PRZEBIEG ĆWICZENIA.....	77
6.5. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE .....	78
6.6. LITERATURA .....	83

<b>7. SYSTEMY DYSKRETNE .....</b>	<b>84</b>
7.1. STEROWANIE KOMPUTEROWE .....	84
7.2. DOBÓR OKRESU PRÓBKOWANIA .....	85
7.3. SCHEMATY RÓŻNICOWE .....	87
7.4. DODATKOWE UWAGI NA TEMAT DYNAMIKI SYSTEMÓW DYSKRETNYCH .....	88
7.5. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA .....	92
7.6. LITERATURA .....	94
<b>8. UKŁADY LINIOWE Z REGULATORAMI PRZEKAŹNIKOWYMI.....</b>	<b>95</b>
8.1. WSTĘP.....	95
8.2. TYPY PRZEKAŹNIKÓW I KONSTRUKCJA PORTRETU FAZOWEGO .....	95
8.3. REŻIM ŚLIZGOWY .....	98
8.4. DYNAMIKA REŻIMU ŚLIZGOWEGO .....	99
8.5. CYKL GRANICZNY .....	100
8.6. PRZYKŁAD .....	102
8.7. PRZEBIEG ĆWICZENIA I OPRACOWANIE WYNIKÓW .....	105
8.8. LITERATURA .....	106
<b>9. ZBIORY STANÓW OSIĄGALNYCH .....</b>	<b>107</b>
9.1. ZBIORY STANÓW OSIĄGALNYCH W SYSTEMIE LINIOWYM II RZĘDU .....	107
9.2. ZBIORY OSIĄGALNOŚCI W SYSTEMIE NIELINIOWYM II RZĘDU .....	108
9.3. LITERATURA .....	110
<b>10. OBSERWATORY ASYMPTOTYCZNE.....</b>	<b>111</b>
10.1. OBSERWATOR LUENBERGERA PEŁNEGO RZĘDU .....	111
10.2. PRZEBIEG ĆWICZENIA .....	113
10.3. ZREDUKOWANY OBSERWATOR LUENBERGERA .....	113
10.4. PRZEBIEG ĆWICZENIA .....	116
10.5. OBSERWATOR LUENBERGERA DLA SYSTEMU NIELINIOWEGO .....	116
10.6. PRZEBIEG ĆWICZENIA .....	117
10.7. LITERATURA .....	118
<b>11. KOMPENSATOR DYNAMICZNY .....</b>	<b>119</b>
11.1. KOMPENSATOR DYNAMICZNY OPARTY NA ZLINEARYZOWANYM MODELU OBIEKT.....	119
11.2. REGULATOR OPTIMALNY W PROBLEMIE LINIOWO-KWADRATOWYM Z NIESKOŃCZONYM HORYZONTEM .....	121
11.3. PRZYKŁADY .....	122
11.4. LITERATURA .....	127
<b>12. FILTR KALMANA - BUCY .....</b>	<b>128</b>
12.1. MODEL SYSTEMU .....	128
12.2. POSTAWIENIE ZADANIA .....	128
12.3. FILTR KALMANA - BUCY .....	129
12.4. PRZYKŁADY .....	130
12.5. LITERATURA .....	131
<b>13. STABILIZACJA SYSTEMÓW DYSKRETNYCH .....</b>	<b>132</b>
13.1. STEROWALNOŚĆ W SYSTEMACH DYSKRETNYCH.....	132
13.2. REGULATOR DEAD-BEAT .....	134
13.3. OBSERWATOR LUENBERGERA DLA SYSTEMU DYSKRETNEGO .....	135
13.4. DYSKRETNY PROBLEM LINIOWO-KWADRATOWY .....	136
13.5. DYSKRETNE DYNAMICZNE SPRZĘŻENIE ZWROTNE.....	137
13.6. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA .....	138
13.7. LITERATURA .....	139

<b>14. SYSTEMY O „DZIWNEJ” DYNAMICE .....</b>	<b>140</b>
14.1. UKŁADY O DYNAMICE CHAOTYCZNEJ .....	140
14.2. SYSTEM LORENZA .....	140
14.3. OBWÓD ELEKTRYCZNY CHUY .....	142
14.4. ODWZOROWANIE LOGISTYCZNE .....	144
14.5. ZADANIA DO ROZWIĄZANIA .....	145
14.6. LITERATURA .....	146
 SKOROWIDZ.....	 147



# Przedmowa

Skrypt jest przeznaczony głównie dla studentów 3 i 4 roku kierunku *automatyka i robotyka*, który jest prowadzony na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH.

Skrypt zawiera wybrane zagadnienia z teorii sterowania i stanowi materiał pomocniczy do ćwiczeń laboratoryjnych. Teoria sterowania jest obecnie bardzo rozległą dziedziną wiedzy w dyscyplinie *automatyka i robotyka*, uprawianą nie tylko w naukach technicznych, i ma duże znaczenie dla praktyki. Metody teorii sterowania wykorzystuje się w bardzo wielu dziedzinach nauk stosowanych.

Burzliwy rozwój technik komputerowych i elektroniki wymusił wyodrębnienie z obszaru teorii sterowania nowych przedmiotów nauczania, takich jak sterowanie w czasie rzeczywistym, sterowanie komputerowe, modelowanie systemów dynamicznych, wyspecjalizowane metody numeryczne itp. Wykład z teorii sterowania jest również poprzedzony wykładem z podstaw automatyki, a jego naturalną kontynuacją są zajęcia z metod optymalizacji i sterowania optymalnego. Każdy z wymienionych przedmiotów zawiera w sobie odpowiednie zajęcia rachunkowe, laboratoryjne lub projektowe. Z tego powodu zaproponowano jedynie 14 ćwiczeń z następujących zagadnień: portrety fazowe systemów liniowych, częstotliwościowe kryteria stabilności, pierwsza metoda Lapunowa, druga metoda Lapunowa i twierdzenie LaSalle'a, kryterium koła i twierdzenie Popova, optymalizacja parametryczna, systemy dyskretnie, układy liniowe z regulatorami przekąźnikowymi, zbiory stanów osiągalnych, obserwatory asymptotyczne, kompensator dynamiczny, filtr Kalmana-Bucy, stabilizacja systemów dyskretnych, systemy o „dziwnej” dynamice. Przedstawiona problematyka nie wyczerpuje wszystkich zagadnień teorii sterowania, ale daje podstawy do projektowania układów regulacji. Realizacja niektórych tematów wymaga kilku spotkań. Ostatni temat, dotyczący „dziwnej dynamiki”, ma zwrócić uwagę czytelnika na fakt, że mała nieliniowa perturbacja układu liniowego tworzy nowy układ nieliniowy o dynamice niespotykanej w układzie liniowym (bez małej perturbacji).

Czytelnikowi proponuje się następującą filozofię projektowania układów sterowania automatycznego. Najpierw należy rozpoznać podstawowe własności dynamiczne układu, by wytypować własności do poprawy. Poprawę własności proponuje się uzyskiwać poprzez odpowiednie sprzężenia zwrotne. Sprzężenia zwrotne zaleca się projektować dla układu po linearyzacji i następnie weryfikować na modelu nieliniowym rozważanym przed linearyzacją (a następnie na obiekcie rzeczywistym), badając odpowiednie obszary przyciągania asymptotycznego (zakres poprawności działania regulatora).

Wykłady z teorii sterowania prowadzę od roku 1974 na różnych kierunkach studiów. W tym okresie czasu miałem możliwość obserwować wzajemne uwarunkowania rozwoju teorii i technologii. Maszyny i urządzenia analogowe, powszechnie używane do ćwiczeń w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku, zostały wyparte przez komputery. Technologia cyfrowa otworzyła zupełnie nowe możliwości obliczeniowe, analityczne, pomiarowe i implementacyjne. Wystarczy wspomnieć, że komputery umożliwiają prowadzenie skomplikowanych eksperymentów symulacyjnych, a także pełnią rolę regulatorów w układach sterowania w czasie rzeczywistym. Jest rzeczą naturalną, że znajduje to odbicie w teorii sterowania, która wciąż się rozwija tworząc narzędzia uwzględniające specyfikę cyfrowej reprezentacji informacji.

Na zakończenie składamy serdeczne podziękowania Recenzentowi, Panu Profesorowi Henrykowi Góreckiemu za cenne uwagi, które pozwoliły udoskonalić ostateczną wersję skryptu.

Wojciech Mitkowski  
(*Kraków, 20.07.2006*)

# 1. Portrety fazowe systemów liniowych

Celem ćwiczenia jest analiza własności dynamicznych liniowego układu autonomicznego drugiego rzędu. Dla systemu takiego, poza obserwacją przebiegów czasowych, istnieje możliwość badania własności dynamicznych na płaszczyźnie fazowej, a w szczególności, badania wpływu współczynników wielomianu charakterystycznego na postać obserwowanych trajektorii. Uzyskiwane na płaszczyźnie fazowej trajektorie pozwalają zaklasyfikować modelowane układy do jednej z trzech grup: układów niestabilnych, stabilnych lub asymptotycznie stabilnych.

## 1.1. Podstawowe pojęcia

Rozważony zostanie liniowy układ autonomiczny opisany równaniem różniczkowym stanu:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad x(0) = x_0, \quad A - \text{macierz rzeczywista } n \times n. \quad (1.1)$$

Zakładamy  $n = 2$ , czyli system jest drugiego rzędu. Własności dynamiczne układu (1.1) (a więc także stabilność) zależą od rozkładu wartości własnych macierzy  $A$ . Jak wiadomo, system liniowy o nieosobliwej macierzy stanu ma jedyny punkt równowagi w zerze. Badanie stabilności systemu (1.1) rozpoczynamy od określenia pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy  $A$ , czyli *widma* macierzy  $A$ :

$$\lambda(A) = \{s \in \mathbf{Z} : \det(sI - A) = 0\}, \text{ gdzie } \mathbf{Z} \text{ oznacza przestrzeń liczb zespolonych.}$$

Można sformułować następujące warunki asymptotycznej stabilności i stabilności układu opisanego równością (1.1):

- Układ (1.1) jest asymptotycznie stabilny  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ .
- Układ (1.1) jest stabilny  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$  oraz klatki Jordana macierzy  $J$  odpowiadające wartościom własnym macierzy  $A$  położonym na osi urojonej mają wymiary  $1 \times 1$ . Innymi słowy, wartości własne o częściach rzeczywistych równych zeru są związane z liniowymi dzielnikami elementarnymi; inaczej - są pojedynczymi zerami wielomianu minimalnego; jeszcze inaczej - z każdą wartością własną  $\lambda$  o krotności  $m$  i taką, że  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , jest związanych  $m$  liniowo niezależnych wektorów własnych.

Rozwiązanie równania stanu (1.1) ma postać

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Macierz fundamentalną  $e^{At}$  dla ustalonego  $t \in \mathbf{R}$  można przedstawić w postaci

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}. \quad (1.2)$$

$J = P^{-1}AP$  jest tutaj kanoniczną postacią Jordana macierzy  $A$ , a  $P$  jest macierzą, której kolumnami są odpowiednio zestawione wektory własne lub główne macierzy  $A$ . Znając  $J$  łatwo można podać wzór analityczny na macierz  $e^{Jt}$ , a w konsekwencji z równości (1.2) obliczyć  $e^{At}$ .

## 1.2. Portrety fazowe

Niech w równaniu (1.1)  $t \in [0, \infty) = T$ . Wykres rozwiązania  $x$  (trajektoria) równania (1.1) jest krzywą w przestrzeni  $\mathbf{R}^n \times T$ . Rzut trajektorii  $x$  na przestrzeń stanu  $\mathbf{R}^n$  stanowi trajektorię fazową rozważanego układu.

Dla układów drugiego rzędu przestrzeń stanu jest płaszczyzną i w tym wypadku interpretacja graficzna trajektorii fazowych jest szczególnie łatwa. Przestrzeń stanu nazywa się czasem przestrzenią fazową, w szczególności gdy zmienne stanu równania różniczkowego rzędu  $n$  powiązane są zależnościami  $\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n$ , czyli macierz stanu  $A$  jest macierzą Frobeniusa. Stąd wywodzi się nazwa *portrety fazowe*, którą określamy rodziny trajektorii fazowych rozpoczynających się z różnych warunków początkowych.

### Przykład

Założmy, że macierz  $A$  jest w postaci kanonicznej Jordana i ma wartości własne  $\lambda_1 = -1$  i  $\lambda_2 = -4$ . Równanie układu (1.1) ma postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

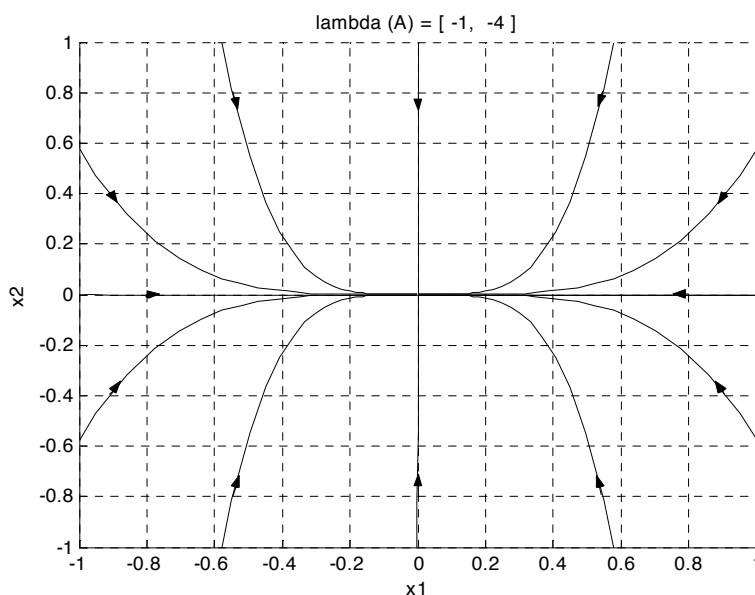
Po wyrugowaniu czasu i rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy równanie

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{4x_2}.$$

Całkujemy obustronnie  $\int_{x_{10}}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_{x_{20}}^{x_2} \frac{dx_2}{4x_2}$  i w wyniku otrzymujemy równanie rodziny swobodnych trajektorii fazowych systemu na płaszczyźnie stanu w postaci

$$x_2 = x_1^4 \frac{x_{20}}{x_{10}^4}.$$

Rodzina tych trajektorii fazowych (czyli portret fazowy) jest przedstawiona na rysunku 1.1. Dodatkowo strzałkami oznaczono kierunek poruszania się punktu  $(x_1(t), x_2(t))$  z upływem czasu  $t$ .



Rys. 1.1. Węzeł asymptotycznie stabilny dla macierzy  $A$  w postaci kanonicznej Jordana



Ten typ portretu fazowego nosi nazwę węzła. Używa się również określenia: punkt równowagi typu węzeł. Węzeł występuje w przypadku dwóch rzeczywistych wartości własnych jednego znaku. W naszym przypadku węzeł jest asymptotycznie stabilny, ponieważ obie wartości własne są ujemne, co powoduje, że trajektorie systemu zbiegają do zerowego punktu równowagi. Jak wiadomo, system liniowy o nieosobliwej macierzy stanu ma jedyny punkt równowagi w zerze. Gdyby wartości własne były dodatnie otrzymalibyśmy węzeł niestabilny. „Osie” węzła są wyznaczone przez kierunki wektorów własnych, które w przypadku macierzy Jordana pokrywają się z osiami  $x_1$  i  $x_2$ .

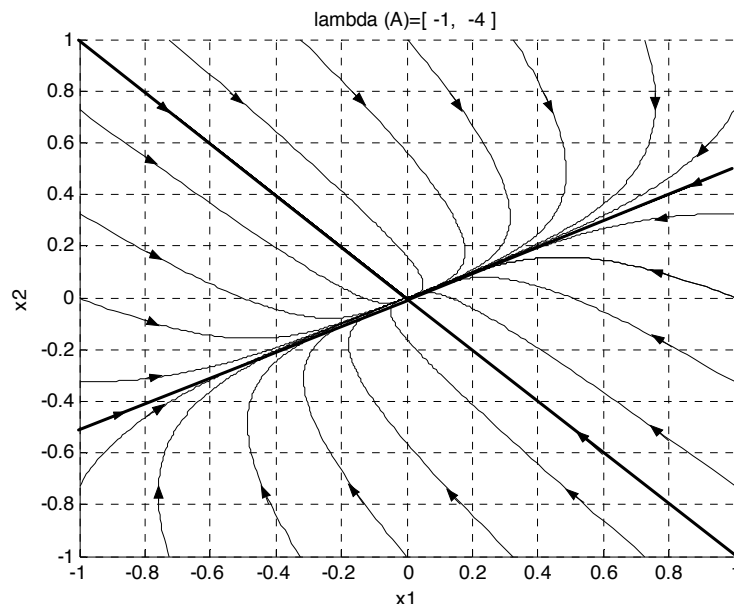
Rozważmy teraz przypadek, gdy macierz  $A$  ma wartości własne  $\lambda_1 = -1$  i  $\lambda_2 = -4$  (jak wyżej), ale nie jest w postaci kanonicznej Jordana:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Macierz  $A$  można sprowadzić do postaci kanonicznej poprzez przekształcenie przez podobieństwo  $J = P^{-1}AP$ , gdzie macierz przekształcenia  $P = [w_1 \ w_2]$  składa się z wektorów własnych macierzy  $A$ . Przypomnijmy, że wektor własny  $w_i \neq 0$  związany z  $i$ -tą wartością własną spełnia zależność  $(\lambda_i I - A)w_i = 0$ . Rozwiązując ten układ równań otrzymamy na przykład:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trajektorie fazowe przedstawione są na rysunku 1.2. Zauważmy, że w porównaniu z rysunkiem 1.1, trajektorie fazowe są obrócone i odpowiednio przeskalowane. „Osiami” węzła są, jak poprzednio, półproste o kierunkach wektorów własnych macierzy  $A$  oznaczone na rysunku linią pogrubioną. Oczywiście w tym przypadku, ponieważ macierz  $A$  nie jest w postaci kanonicznej Jordana, wektory te nie pokrywają się z osiami współrzędnych.



Rys. 1.2. Węzeł asymptotycznie stabilny dla macierzy  $A$ , która nie jest w postaci kanonicznej

Zauważmy, że trajektorie fazowe, które startują z punktów leżących na prostych o kierunkach wektorów własnych i przechodzące przez zero są zawarte w tych prostych. Przypomnijmy, że każda taka prosta jest podprzestrzenią niezmienniczą względem macierzy  $A$ .

Analizowany portret fazowy został narysowany w MATLABie za pomocą poniższego ciągu instrukcji:

```

A=[-2 2;1 -3]; T=6;
[w J]=eig(A);
figure; hold on; grid on;
a=0:(pi/10):(2*pi); X1=[cos(a); sin(a)];
X2=X1./[max(abs(X1));max(abs(X1))];M=size(X2,2);
for l=1:M
    x0=X2(:,l);
    puste = sim('MojModel',T);
    plot(x(:,1),x(:,2),'k-');
    plot([0,w(1,1)],[0,w(2,1)],'k-',[0,w(1,2)],[0,w(2,2)],'k-');
    title(['lambda (A)=[ ',num2str(J(1,1))',' ',num2str(J(2,2))
    , ' ]']);
    xlabel('x1');ylabel('x2');
end

```

Nazwa 'MojModel' występująca w instrukcji `sim` jest nazwą, pod jaką został zapisany model simulinkowy systemu.

### 1.3. Typowe portrety fazowe

Dla rzeczywistego układu drugiego rzędu można wyróżnić dziewięć różnych przypadków rozkładu wartości własnych macierzy  $A$ . W tabeli 1 zestawiono te przypadki wraz z odpowiadającymi im nazwami portretów fazowych.

Tabela 1.

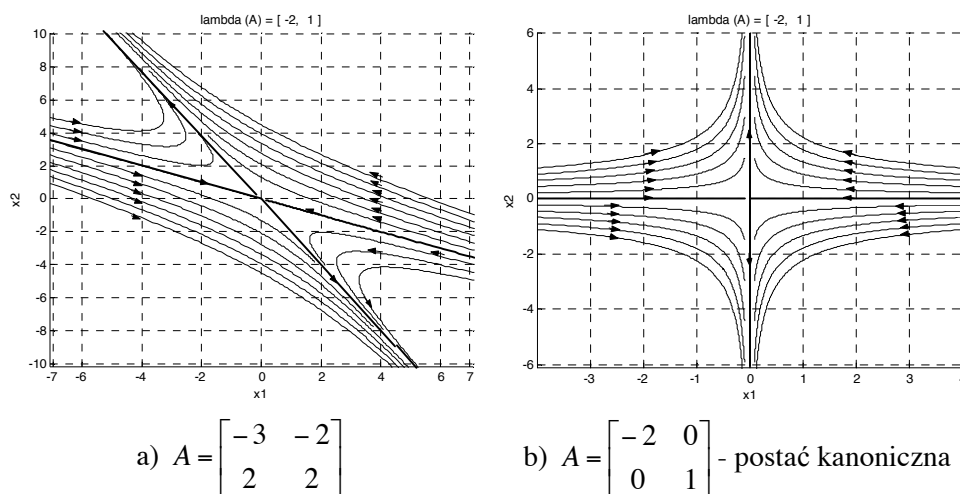
	Wartości własne	Typ portretu
$\det(A) \neq 0$	1. 2 wartości własne rzeczywiste różne, ale jednakowego znaku (obie ujemne lub obie dodatnie)	Węzeł (asymptotycznie stabilny lub niestabilny)
	2. 2 wartości własne rzeczywiste przeciwnych znaków (jedna dodatnia, druga ujemna)	Siodło
	3. 2 wartości własne zespolone sprzężone o niezerowych częściach rzeczywistych	Ognisko (asymptotycznie stabilne lub niestabilne)
	4. 2 wartości własne urojone sprzężone	Środek
	5. 2 wartości własne rzeczywiste równe, niezerowe i tylko jeden wektor własny liniowo niezależny	Węzeł zdegenerowany
	6. 2 wartości własne rzeczywiste równe, niezerowe i związane z nimi dwa wektory własne liniowo niezależne	Gwiazda
$\det(A) = 0$	7. 2 wartości własne różne (rzeczywiste, jedna równa zero)	
	8. 2 wartości własne zerowe, jeden liniowo niezależny wektor własny	
	9. $A=0$	

Przedstawiony w poprzednim punkcie tryb postępowania może być z powodzeniem zastosowany do analizy dowolnego portretu fazowego układu drugiego rzędu.

#### Dwie wartości własne rzeczywiste różne

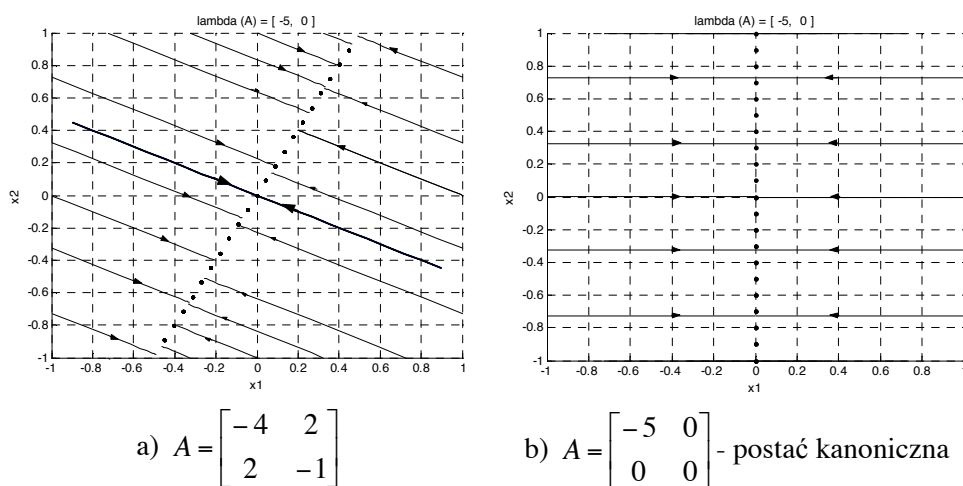
Analizowany uprzednio (zob. rysunki 1.1 i 1.2; wartości własne rzeczywiste, różne o tych samych znakach) węzeł należy również zaliczyć do tej grupy portretów. Kolejne przedstawione są na

rysunkach 1.3 i 1.4. Przedstawiony na rysunku 1.3 portret, zwany siodłem, dotyczy przypadku, gdy macierz stanu  $A$  ma wartości własne rzeczywiste, niezerowe o różnych znakach. W tabeli 1 jest to przypadek 2. Początek układu jest w tym przypadku niestabilnym punktem równowagi.



Rys. 1.3. Siodło. Wartości własne różnych znaków:  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$

Interesujący jest przypadek, kiedy jedna z wartości własnych jest równa zero. Zwróćmy uwagę, że macierz  $A$  systemu (1.1) jest wówczas osobliwa i system ma nieskończenie wiele punktów równowagi. Portret fazowy jest pokazany na rysunku 1.4. Trajektorie na płaszczyźnie stanu są liniami prostymi, co wynika z liniowej zależności pomiędzy zmiennymi stanu  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ . Zbiory punktów równowagi na rysunkach 5a i 5b stanowią proste oznaczone kropkami. Jeżeli obie wartości własne są równe zero, to każdy punkt płaszczyzny jest punktem równowagi i zarazem trajektorią fazową układu.

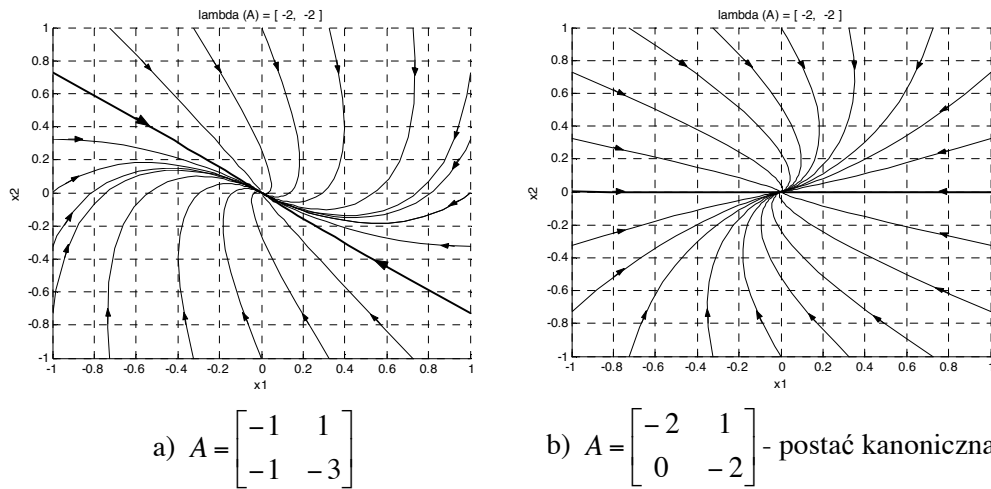


Rys. 1.4. Przypadek, gdy jedna z wartości własnych jest zerowa:  $\lambda_1 = -5$ ,  $\lambda_2 = 0$

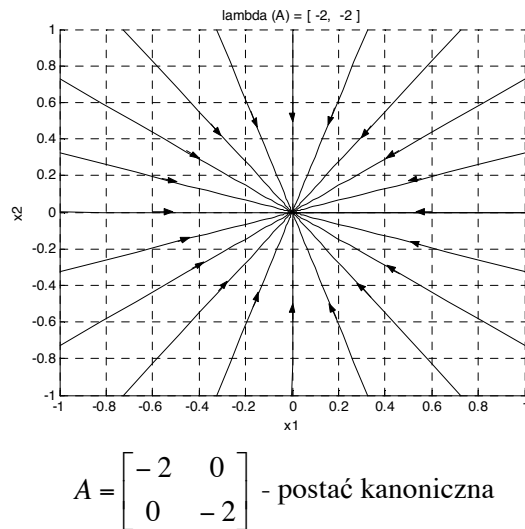
## Dwie wartości własne rzeczywiste równe

Jeżeli wartość własna jest podwójna, to portrety fazowe mają różną postać w zależności od tego, czy z taką podwójną wartością związany jest jeden czy też dwa liniowo niezależne wektory własne. Jeżeli występują dwa wektory własne liniowo niezależne (przypadek 6 z tabeli 1), to macierz Jordana (podobna do macierzy stanu  $A$ ) jest diagonalna. W przeciwnym wypadku macierz Jordana ma postać

klatki jordanowskiej z jedynką nad przekątną (zob. np. rysunek 1.5 b). W tabeli 1 przypadek ten jest oznaczony numerem 5 (Takahashi 1976, s. 99).



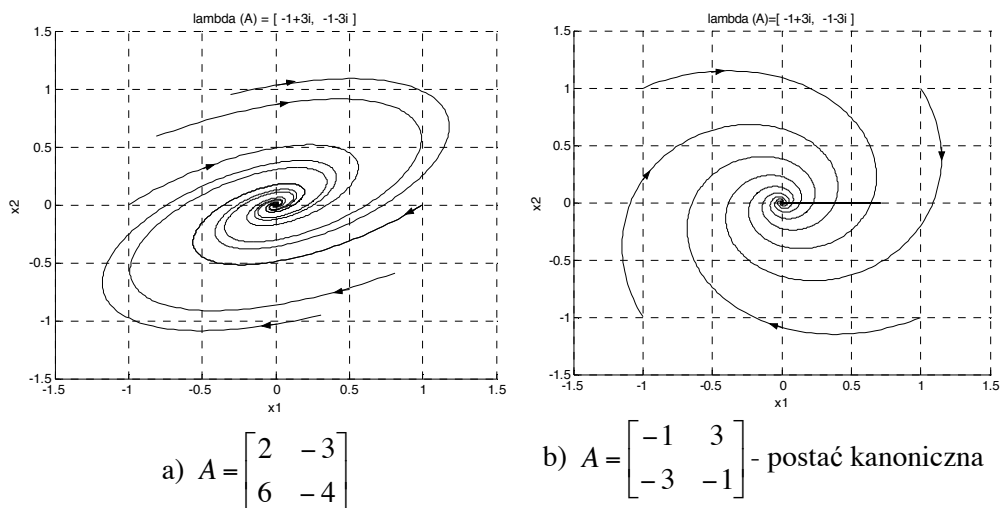
Rys. 1.5. Węzeł stabilny. Jeden wektor własny i jeden główny.  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$



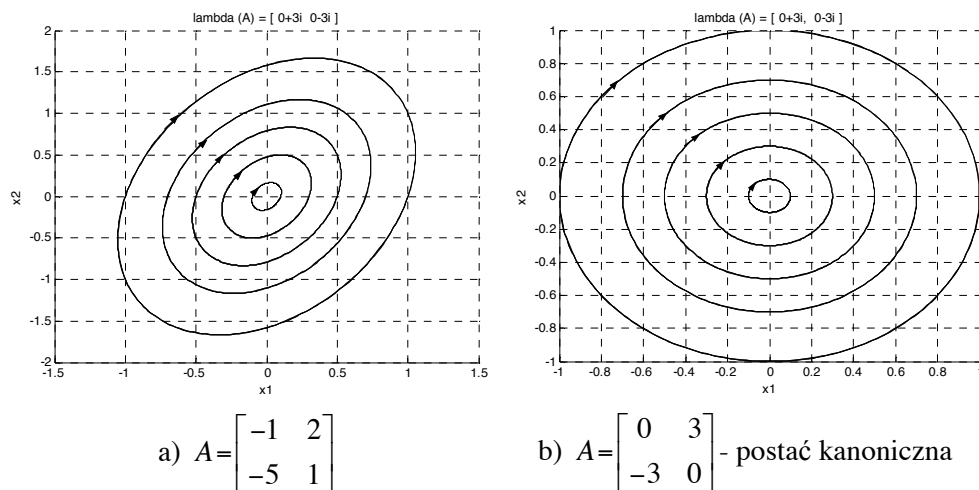
Rys. 1.6. Gwiazda stabilna.  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ . Dwa wektory własne liniowo niezależne

### Wartości własne zespolone (para zespolona sprzężona)

Portret fazowy układu oscylacyjnego tłumionego przedstawiony na rysunek 1.7 nazywamy ogniskiem. Natomiast portret fazowy układu nietłumionego przedstawiony na rysunku 1.8 nosi nazwę środka.



Rys. 1.7. Ognisko stabilne. Wartości własne zespolone o ujemnej części rzeczywistej:  
 $\lambda_1 = -1 + 3j$ ,  $\lambda_2 = -1 - 3j$



Rys. 1.8. Środek. Wartości własne czysto urojone:  $\lambda_1 = -3j$ ,  $\lambda_2 = 3j$

## 1.4. Przebieg ćwiczenia

Przed przystąpieniem do ćwiczenia, należy przygotować dziewięć macierzy, które wyczerpują wszystkie przypadki rozkładu wartości własnych przedstawione w tabeli 1. Należy skonstruować w Simulinku model wykorzystując blok *State-Space*. Model ten pozwoli śledzić odpowiedzi systemu dynamicznego drugiego rzędu (zob. (1.1) przy  $n = 2$ ).

Narysowanie portretu na płaszczyźnie fazowej wymaga symulacji dla różnych warunków początkowych. Najwygodniej jest napisać skrypt (m-file), w którym symulacja przedstawionego modelu będzie wielokrotnie wywoływana w pętli dla kolejnych warunków początkowych. Całą procedurę należy powtórzyć dla wszystkich przygotowanych macierzy  $A$  oraz dla kanonicznych postaci tych macierzy. Zestawienie należy uzupełnić portretami niestabilnymi. Przy symulacji komputerowej w Simulinku zaobserwować sposób poruszania się punktu  $x(t)$  po trajektoriach fazowych w zależności od części rzeczywistych i urojonych wartości własnych.

## 1.5. Opracowanie wyników

Dla każdego przypadku należy wyliczyć wektory własne (główne) i zamieścić je na otrzymanych portretach. Na rysunkach należy zaznaczyć zbiory punktów równowagi oraz jednowymiarowe (rzeczywiste) podprzestrzenie niezmiennicze.

## 1.6. Literatura

Grabowski P. (1996): *Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania*. Wydawnictwa AGH, skrypt nr 1453, Kraków (również wersja internetowa z roku 2004).

Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.

Mitkowski W. (2004): *Teoria sterowania. Notatki w internecie*, wykonali studenci: Ł.Czajczyk, Ł. Chornikowski, T. Kania.

<http://www.moodle.oen.agh.edu.pl/mod/resource/view.php?inpopup=true&id=83>.

Takahashi Y., Rabins M., Auslander D. (1976): *Sterowanie i systemy dynamiczne*. WNT, Warszawa.

## 2. Częstotliwościowe kryteria stabilności

Tematem ćwiczenia jest analiza stabilności systemów liniowych stacjonarnych za pomocą metod częstotliwościowych. Kryterium Michajłowa pozwala określić, czy pierwiastki wielomianu leżą w lewej półpłaszczyźnie. Z kolei twierdzenie Nyquista, które w prostych przypadkach da się wyprowadzić z twierdzenia Michajłowa, pozwala na badanie stabilności układu zamkniętego na podstawie cech transmitancji widmowej układu otwartego. Ćwiczenie to ma również pokazać, jak można zastosować kryterium Nyquista do układów z opóźnieniem.

### 2.1. Podstawowe pojęcia

Rozważmy wielomian stopnia  $n$ :  $M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ ,  $a_n > 0, a_i \in \mathbb{R}$ .

Wielomian stopnia  $n$  ma zawsze  $n$  pierwiastków liczonych wraz z krotnościami. Zakładamy, że wielomian ten nie ma pierwiastków na osi urojonej, czyli  $M(j\omega) \neq 0$  dla  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ . Podstawiając  $s = j\omega$ ,  $j^2 = -1$  otrzymujemy

$$M(j\omega) = a_n (j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n),$$

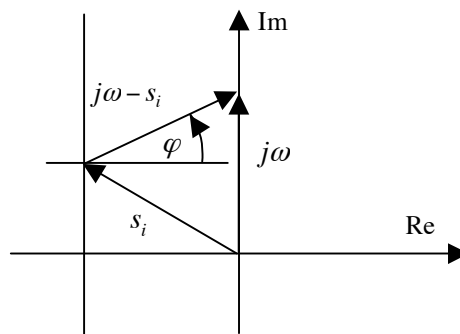
gdzie  $s_1, s_2, \dots, s_n$  są pierwiastkami wielomianu  $M(s)$ . Dalej mamy

$$M(j\omega) = |M(j\omega)| e^{j\varphi},$$

gdzie  $|M(j\omega)| = a_n |(j\omega - s_1)| |(j\omega - s_2)| \dots |(j\omega - s_n)|$ ,

oraz  $\varphi = \arg M(j\omega) = \arg(j\omega - s_1) + \arg(j\omega - s_2) + \dots + \arg(j\omega - s_n)$ .

Zauważmy, że na płaszczyźnie Gaussa czynnik  $j\omega - s_i$  może być przedstawiony jako różnica dwóch wektorów  $j\omega$  i  $s_i$ , co obrazuje rysunek 2.1.



Rys. 2.1. Czynnik  $j\omega - s_i$  na płaszczyźnie (zespolonej) Gaussa

Przedstawiony na rysunku pierwiastek  $s_i$  leży w lewej półpłaszczyźnie. Przy zmianie pulsacji (częstości)  $\omega$  od  $-\infty$  do  $+\infty$  wektor  $j\omega - s_i$  zmienia swój argument  $\varphi$  (w sposób ciągły) o  $\pi$  (od  $-\frac{1}{2}\pi$  do  $+\frac{1}{2}\pi$ ). Jeżeli  $s_i$  leży w prawej półpłaszczyźnie, to przyrost argumentu wyrażenia  $j\omega - s_i$

jest równy  $-\pi$ . Wynika stąd następujące twierdzenie (zob. np. Mitkowski 1991, s. 62, Mitkowski 1996, s. 76).

## 2.2. Twierdzenie Michajłowa

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg M(j\omega) = (l-p)\pi, \quad l+p=n,$$

$l$  jest liczbą pierwiastków (liczonych wraz z krotnościami) wielomianu  $M(s)$  o częściach rzeczywistych mniejszych od zera, a  $p$  jest liczbą pierwiastków (liczonych wraz z krotnościami) wielomianu  $M(s)$  o częściach rzeczywistych większych od zera.

Dla wielomianu asymptotycznie stabilnego wszystkie pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej. Z twierdzenia Michajłowa wynika, że dla  $n$  pierwiastków w lewej półpłaszczyźnie sumaryczna zmiana argumentu  $\varphi$  przy zmianie pulsacji (częstości)  $\omega$  od  $-\infty$  do  $\infty$  jest równa  $n\pi$ . W zastosowaniach, przy interpretacji parametru  $\omega$  jako odpowiedniej częstości sygnału, przyjmuje się zmianę  $\omega$  od 0 do  $\infty$ .

Możemy teraz sformułować twierdzenie będące kryterium asymptotycznej stabilności układu  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  z macierzą  $A$  o wymiarze  $n \times n$ . Niech  $M(s) = \det(sI - A)$ .

### Kryterium Michajłowa (asymptotycznej stabilności)

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg M(j\omega) = n\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re} s < 0 \text{ dla każdego } s, \text{ takiego że } M(s) = 0. \quad (2.1)$$

Zwróćmy uwagę, że pulsacja (częstość)  $\omega$  zmienia się od 0 do  $+\infty$  i stąd zmiana argumentu o  $n\frac{\pi}{2}$ .

Warunek (2.1) wygodnie jest sprawdzać graficznie. Można zauważyć, że warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy zera części rzeczywistej i urojonej  $M(j\omega)$ , czyli wielomianów  $f_1(\omega) = \operatorname{Re} M(j\omega)$  i  $f_2(\omega) = \operatorname{Im} M(j\omega)$ , leżą na przemian (Mitkowski 1996, s. 77).

Wykres  $M(j\omega)$  na płaszczyźnie zespolonej nazywany jest krzywą lub hodografem Michajłowa. Dowód twierdzenia Michajłowa można znaleźć w wielu pracach (np. Turowicz 1967, s. 68).

### Przykład (Mitkowski 1996, s. 77)

Założmy, że

$$M(s) = s^5 + s^4 + 20s^3 + 10s^2 + 64s + 9.$$

W tym przypadku

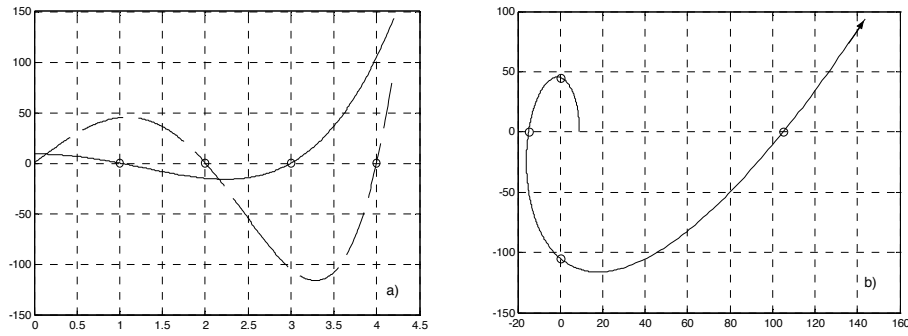
$$f_1(\omega) = \operatorname{Re} M(j\omega) = \omega^4 - 10\omega^2 + 9$$

oraz

$$f_2(\omega) = \operatorname{Im} M(j\omega) = \omega(\omega^4 - 20\omega^2 + 64).$$

Dla  $\omega \geq 0$ ,  $f_1(\omega) = 0$  dla  $\omega_1 = 1$  i  $\omega_2 = 3$  oraz  $f_2(\omega) = 0$  dla  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 2$  i  $\omega_3 = 4$ . Na rysunku 2.2.a linią ciągłą przedstawiono wielomian  $f_1(\omega)$  oraz linią przerywaną wielomian  $f_2(\omega)$ . Rysunek 2.2.b pokazuje hodograf Michajłowa. Wielomian jest asymptotycznie stabilny ponieważ zmiana argumentu  $M(j\omega)$  jest równa  $\frac{5}{2}\pi$ , gdyż  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} \rightarrow +\infty$  przy  $\omega \rightarrow +\infty$  i zatem  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .



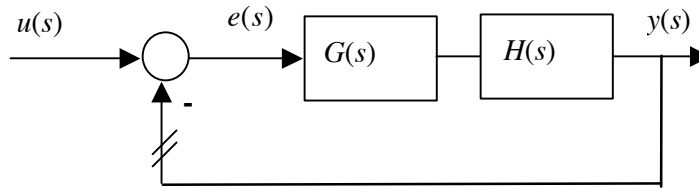


Rys. 2.2. a) Wielomiany  $f_1(\omega)$  i  $f_2(\omega)$ , b) Krzywa Michajłowa

## 2.3. Kryterium Nyquista

Kryterium to pozwala określić stabilność układu zamkniętego na podstawie badania transmitancji widmowej układu otwartego. Rozważać będziemy system sterowalny i obserwowalny (wtedy przy obliczaniu transmitancji nie występują „skrócenia”), o jednym wejściu i jednym wyjściu. W literaturze układ o jednym wejściu i jednym wyjściu nazywany jest układem SISO (single input- single output).

Rysunek 2.3 przedstawia zamknięty układ regulacji z ujemnym sprzężeniem zwrotnym



Rys. 2.3. Układ regulacji

Przerywamy pętlę sprzężenia zwrotnego (w miejscu oznaczonym na rysunku 2.3 dwoma ukośnymi kreskami) i obliczamy transmitancję układu otwartego

$$G_0(s) = H(s)G(s) = \frac{L_0(s)}{M_0(s)}. \quad (2.2)$$

Natomiast transmitancja układu zamkniętego ma postać

$$G_z(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + \frac{L_0(s)}{M_0(s)}} = \frac{L_0(s)}{M_0(s) + L_0(s)}.$$

Stąd otrzymujemy mianownik transmitancji układu zamkniętego, który decyduje o własnościach dynamicznych układu (między innymi o asymptotycznej stabilności), w postaci

$$M_z(s) = M_0(s) + L_0(s).$$

Wielomian  $M_z(s)$  jest wielomianem charakterystycznym (odpowiedniej macierzy stanu) układu zamkniętego przy założeniu sterowalności i obserwowalności. W układach realizowalnych fizycznie stopień wielomianu  $L_0(s)$  jest mniejszy od stopnia wielomianu  $M_0(s)$ . Z tego wniosek, że wielomiany  $M_z(s)$  i  $M_0(s)$  są tego samego stopnia (załóżmy, że stopnia  $n$ ). Z równości (2.2) mamy

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{L_0(s)}{M_0(s)} = \frac{M_0(s) + L_0(s)}{M_0(s)} = \frac{M_z(s)}{M_0(s)}$$

Uwzględniając przytoczone powyżej rozważania możemy napisać:

$$\begin{aligned} \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg(1 + G_0(j\omega)) &= \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg\left(\frac{M_z(j\omega)}{M_0(j\omega)}\right) = \\ &= \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg M_z(j\omega) - \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg M_0(j\omega) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Przypomnijmy, że celem naszych rozważań jest określenie warunku asymptotycznej stabilności układu zamkniętego. Na podstawie twierdzenia Michajłowa ma zachodzić

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg M_z(j\omega) = n \frac{\pi}{2}. \quad (2.4)$$

Dalej założmy, że układ otwarty opisany transmitancją  $G_0(s) = L_0(s)/M_0(s)$  może być niestabilny (wielomian  $M_0(s)$  ma  $m$  pierwiastków, licząc łącznie z krotnościami, o częściach rzeczywistych dodatnich) oraz nie ma pierwiastków na osi urojonej.  $G_0(j\omega)$  jest charakterystyką amplitudowo-fazową układu otwartego. Wykres  $G_0(j\omega)$  dla  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  nosi nazwę wykresu (lub plotu) Nyquista.

Wykorzystując równość (2.3) oraz twierdzenie i kryterium Michajłowa możemy sformułować twierdzenie Nyquista :

Układu zamknięty pokazany na rysunku 2.3 i spełniający założenia:

- układ jest sterowalny i obserwowalny oraz wszystkie sygnały są skalarne,
- układ otwarty jest opisany transmitancją  $G_0(s) = L_0(s)/M_0(s)$ , przy czym stopień  $L_0(s)$  jest mniejszy od stopnia  $M_0(s)$ , który jest równy  $n$ ,
- $M_0(s)$  nie ma zer na osi urojonej,
- wielomian  $M_0(s)$  posiada  $m$  pierwiastków (licząc łącznie z krotnościami) o częściach rzeczywistych dodatnich,

jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg(1 + G_0(j\omega)) = m\pi, \quad (2.5)$$

lub równoważnie, przy uwzględnieniu, że krzywa  $G_0(j\omega)$  jest symetryczna względem osi rzeczywistej

$$\Delta_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \arg(1 + G_0(j\omega)) = 2m\pi. \quad (2.5a)$$

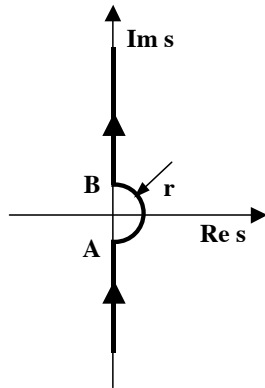
Podsumowując dotychczasowe rozważania należy zauważyć, że charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego  $G_0(j\omega)$  jest odwzorowaniem osi liczb urojonych płaszczyzny zmiennej zespolonej  $s$  poprzez funkcję  $G_0(s)$ .

Sprawdzenie warunku (2.5) lub (2.5a) komplikuje się, gdy wielomian  $M_0(s)$  ma zero w początku układu. (ogólniej, na osi urojonej). W tym przypadku charakterystyka  $G_0(j\omega)$  (przykładowa), przedstawiona na rysunku 2.5, ma punkt nieciągłości dla  $\omega = 0$ : moduł  $G_0(j\omega)$  zmierza do nieskończoności, a faza zmienia się skokowo o  $\pi$ . Dla nas ważne jest, jak wygląda domknięcie wykresu, gdy  $s$  zmierza do zera. Nie musimy znać dokładnie przebiegu tego domknięcia. Wystarczy, że znajdziemy punkt przecięcia osi rzeczywistej przez charakterystykę, a dokładniej wystarczy informacja, czy wykres przecina oś rzeczywistą na prawo, czy też na lewo od zera.

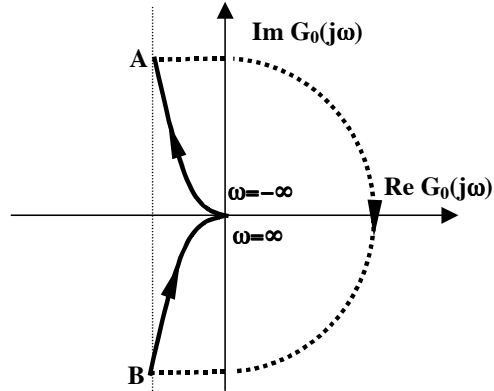
Posuwając się po osi urojonej na płaszczyźnie  $s$  (patrz rysunek 2.4) obejdźmy zero po półokręgu o promieniu  $r$  (dla ustalenia uwagi po prawej stronie). Na tym półokręgu zmienna zespolona  $s$  jest reprezentowana we współrzędnych biegunowych

$$s = re^{j\varphi} \text{ gdzie } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Gdy  $\varphi$  zmienia się od  $-\frac{\pi}{2}$  (w punkcie A) do  $\frac{\pi}{2}$  (w punkcie B), to  $\arg G_0(s)$  zmienia się od  $\frac{\pi}{2}$  do  $-\frac{\pi}{2}$ . Gdy promień półokręgu zmierza do zera,  $r \rightarrow 0$  to  $G_0(s) \rightarrow \frac{1}{re^{j\varphi}} = \infty \times \text{sgn}(-\varphi)$  co oznacza, że domknięcie wykresu Nyquista, zaznaczone na rysunku 2.5 linią przerywaną, przecina oś rzeczywistą w nieskończoności po dodatniej stronie.



Rys. 2.4. Kontur na płaszczyźnie  $s$



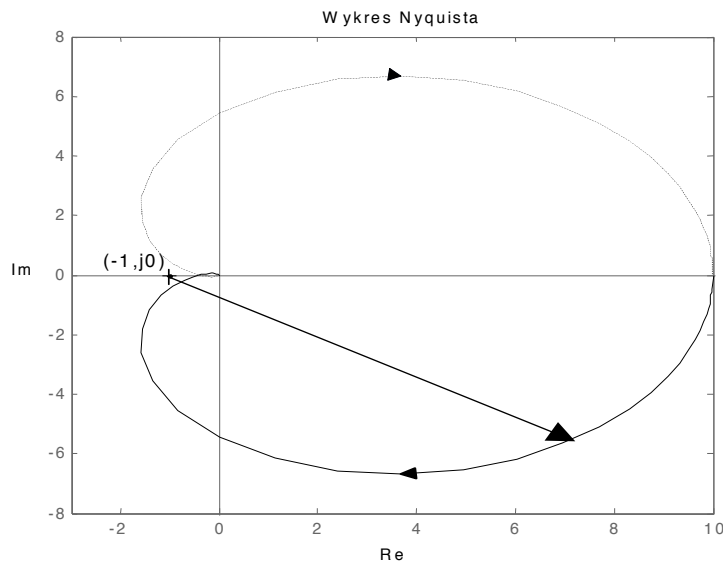
Rys. 2.5. Wykres Nyquista

### Przykład 1 (dla $m = 0$ )

Stosunkowo prosta jest interpretacja geometryczna warunku (2.5a) w przypadku  $m = 0$ . Załóżmy, że rozważamy układ z rysunku 2.3 o transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(10s^2 + 2s + 0.1)}$$

oraz  $H(s) = 1$ , czyli  $G_0(s) = G(s)$ . W tym przypadku pierwiastki mianownika transmitancji  $G_0(s)$  układu otwartego:  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = s_3 = -0.1$  są wszystkie rzeczywiste i ujemne, więc układ otwarty jest asymptotycznie stabilny. Zmianę fazy wyrażenia  $(1 + G_0(j\omega))$  możemy zaobserwować po wykreśleniu charakterystyki widmowej  $G(j\omega)$  na płaszczyźnie zespolonej (rysunek 2.6). Zwróćmy uwagę, że charakterystyka narysowana jest dla zmiennej  $\omega$  z przedziału  $-\infty$  do  $+\infty$  i jest w tym przypadku krzywą zamkniętą. Taki wykres nosi nazwę wykresu bądź plotu Nyquista. Linia przerywana odwzorowuje ujemne częstotliwości. Wektor  $(1 + G_0(j\omega))$  zaczepiony jest w punkcie  $(-1, j0)$ . Przy zmianie pulsacji  $\omega$  od  $-\infty$  do  $+\infty$ , gdy koniec tego wektora ślizga się po charakterystyce od punktu  $(0, j0)$  do punktu  $(10, j0)$  i dalej do punktu  $(0, j0)$ , zmiana argumentu  $(1 + G_0(j\omega))$  jest równa zeru. A więc na mocy warunku (2.5a) układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny.



Rys. 2.6. Wykres Nyquista

W tym przypadku twierdzenie Nyquista sformułować następująco:

Jeżeli układ otwarty  $G_0(s)$  jest asymptotycznie stabilny ( $m = 0$ ) to układ zamknięty  $G_z(s)$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres  $G_0(j\omega)$  nie obejmuje punktu  $(-1, j0)$  przy zmianie częstości  $\omega$  od  $-\infty$  do  $+\infty$ .

## Przykład 2

Rozważmy układ z rysunku 2.3, przy czym

$$G_0(s) = \frac{k}{s+1}.$$

Chcemy badać stabilność układu zamkniętego, gdy współczynnik wzmacnienia  $k$  zmienia się od  $-\infty$  do  $\infty$ . Łatwo można zauważyć, że warunek (2.5a) dla  $m = 0$

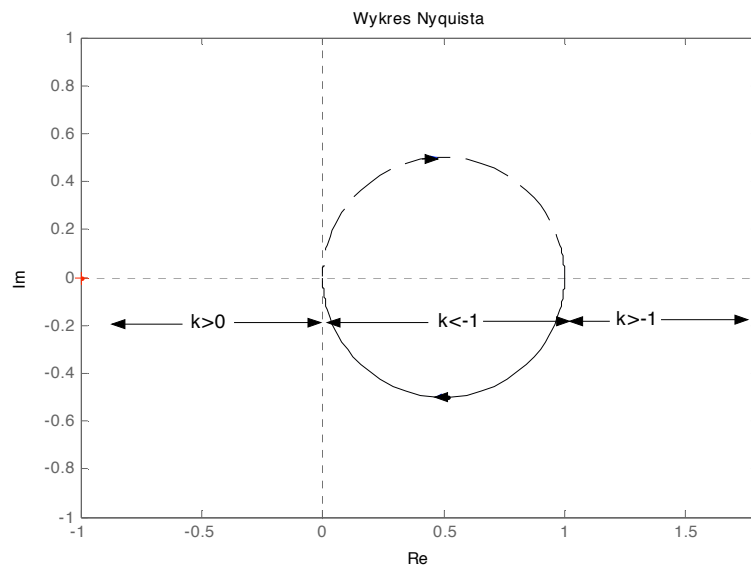
$$\Delta_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \arg(1 + G_0(j\omega)) = 0$$

jest równoważny warunkowi

$$\Delta_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \arg\left(\frac{1}{k} + \frac{G_0(j\omega)}{k}\right) = 0.$$

Oznacza to, że możemy narysować wykres Nyquista dla  $G_0(s) = \frac{1}{s+1}$  i, korzystając ze sformułowania twierdzenia dla  $m = 0$ , badać czy wykres obejmuje punkt  $(-\frac{1}{k}, j0)$ . Zauważmy, że gdy  $k$  zmienia się od  $-\infty$  do 0, to rozważany punkt przesuwa się po osi rzeczywistej od 0 do  $\infty$ , a przy zmianie  $k$  od 0 do  $\infty$ , punkt  $(-\frac{1}{k}, j0)$  przesuwa się od  $-\infty$  do 0.

Układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny dla  $-1 < k$ . Natomiast dla  $k < -1$  system jest niestabilny.



Rys. 2.7. Wykres Nyquista i przesuwający się punkt  $(-\frac{1}{k}, j0)$

#### Uwagi

- W przypadku zmiany częstotliwości  $-\infty < \omega < +\infty$  wykres Nyquista  $G_0(j\omega)$  jest krzywą zamkniętą i wtedy nie ma żadnych wątpliwości, co oznacza obejmowanie punktu  $(-1, j0)$ .
- Dla układów o wielu wejściach i wielu wyjściach MIMO (*Multi Input - Multi Output*) dla sformułowania twierdzenia Nyquista można wykorzystać zasadę argumentu Cauchy'ego.

## 2.4. Systemy z opóźnieniem

Można udowodnić, że twierdzenie Nyquista stosuje się do układów z opóźnieniem, gdy transmitancja otwartej pętli ma postać  $G_0(s) = G(s)e^{-\tau s}$  gdzie  $\tau > 0$  i  $G(s)$  jest asymptotycznie stabilna. Czynniki eksponentialne  $e^{-\tau s}$  wprowadza obroty wykresu  $G(j\omega)$  dla każdego  $\omega$  o kąt  $\omega\tau$  w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Amplituda funkcji  $G(j\omega)$  nie zmienia się pod wpływem czasu opóźnienia, ponieważ amplituda  $e^{-j\omega\tau}$  jest jednostkowa dla wszystkich częstotliwości.

Większość układów sterowania jest typu 1 lub wyższych i amplituda funkcji  $G_0(j\omega)$  zazwyczaj zmierza do zera, gdy  $\omega$  zmierza do nieskończoności. Więc wykres Nyquista transmitancji opisanej powyższym równaniem zmierza spiralnie w kierunku początku układu współrzędnych, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, dla wartości  $\omega$  zmierzających do nieskończoności. Powoduje to, że wykres przecina oś rzeczywistą i urojoną nieskończenie wiele razy. Postępując się kryterium Nyquista należy zbadać czy pierwsze przecięcie wykresu z osią rzeczywistą leży na prawo od punktu  $(-1, j0)$  co jest równoważne nie obejmowaniu tego punktu przez wykres Nyquista.

#### Przykład 3

Rozważmy układ z rysunku 2.3 z pętlą otwartą o transmitancji

$$G_0(s) = \frac{k}{s+1} e^{-s}, \tau = 1$$

Chcemy znaleźć wartości współczynnika wzmocnienia  $k$  dla których zamknięty układ będzie asymptotycznie stabilny. Transmitancja widmowa ma postać

$$G_0(j\omega) = \frac{ke^{-j\omega}}{j\omega + 1} = \frac{k}{1 + \omega^2} ((\cos \omega - \omega \sin \omega) - j(\sin \omega + \omega \cos \omega)). \quad (2.6)$$

Szukamy pierwszego przecięcia powyższej transmitancji z osią rzeczywistą. W tym punkcie część urojona  $\text{Im } G_0(j\omega)$  jest równa zeru, czyli  $\sin \omega + \omega \cos \omega = 0$ , co zachodzi dla  $\tan \omega = -\omega$ .

Rozwiązujemy to równanie dla najmniejszej wartości  $\omega$  i otrzymujemy

$$\omega = 2.0288.$$

Po podstawieniu tej wartości do wyrażenia na część rzeczywistą z równości (2.6) otrzymujemy  $\text{Re } G_0(j\omega) = -0.4421k$ .

Na mocy twierdzenia Nyquista układ zamknięty będzie asymptotycznie stabilny, jeżeli  $\text{Re } G_0(j\omega) = -0.4421k > -1$ , co prowadzi do warunku stabilności asymptotycznej układu zamkniętego w postaci:

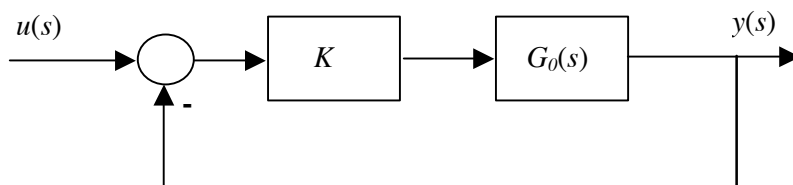
$$k < 2.2619.$$

Porównajmy ten przykład z poprzednim, w którym był rozważany system bez opóźnienia. Należy zbadać wpływ  $\tau > 0$  na własności układu zamkniętego.

## 2.5. Przebieg ćwiczenia

### Zadanie 1

Rozważamy układ zamknięty z regulatorem proporcjonalnym przedstawiony na rysunku 2.8.



Rys. 2.8. Zamknięty układ regulacji

gdzie 
$$G_0(s) = \frac{s + 1}{0.01s^4 + 0.5s^3 + 3s^2 - 10s + 10}.$$

Stosując kryterium Nyquista należy określić krytyczne wartości współczynnika wzmocnienia  $K$  definiujące przedziały stabilności dla układu zamkniętego.

Następnie należy narysować charakterystyki Bodego i zinterpretować otrzymane wyniki.

### Zadanie 2

Dany jest układ otwarty pierwszego rzędu z opóźnieniem  $\tau = 0.5$ ,

$$G_0(s) = \frac{4e^{-0.5s}}{s + 1}$$

Należy zbadać stabilność układu zamkniętego za pomocą kryterium Nyquista.

## 2.6. Literatura

- Grabowski P. (1996): *Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania*. Skrypt AGH nr 1453, Kraków (również wersja internetowa):  
[http://www.ia.agh.edu.pl/~pgrab/grabowski\\_files/newedition1453/nowyskrypt.xml](http://www.ia.agh.edu.pl/~pgrab/grabowski_files/newedition1453/nowyskrypt.xml)
- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.
- Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa AGH, Kraków.
- Turowicz A. (1967): *Geometria zer wielomianów*. PWN, Warszawa.

### 3. Pierwsza metoda Lapunowa

Ćwiczenie stanowi wstęp do badania własności skończenie wymiarowych, nieliniowych systemów dynamicznych, których trajektorie  $x$  są rozwiązaniami odpowiednich równań różniczkowych. Największy nacisk położono tu na zagadnienie stabilności.

Poznawczo interesujące jest pytanie, jakie związki zachodzą między daną trajektorią  $\tilde{x}$  systemu dynamicznego a trajektoriami sąsiednimi. W szczególności, czy trajektorie startujące w pobliżu punktu  $\tilde{x}(0)$  w chwilach późniejszych pozostają w pobliżu trajektorii  $\tilde{x}$  ( $\tilde{x}$  jest wtedy trajektorią stabilną), czy też oddalają się od  $\tilde{x}$  ( $\tilde{x}$  jest wtedy trajektorią niestabilną). W zależności od sposobu określenia „bliskości” trajektorii otrzymujemy różne definicje stabilności. W definicjach stabilności Lapunowa odległość trajektorii jest porównywana w każdej chwili czasu. Lapunow (praca z roku 1892) rozpatrywał dwa podejścia do badania stabilności trajektorii  $\tilde{x}$ , nazywane *pierwszą* i *drugą metodą Lapunowa*. Metoda pierwsza wymaga znajomości jawnej rozwiązań równania różniczkowego generującego system dynamiczny i zatem może być stosowana do ograniczonej klasy układów. Metoda druga (nazywana również metodą bezpośrednią lub metodą funkcjonałów Lapunowa) nie wymaga znajomości rozwiązań, co jest jej podstawową zaletą, oraz cechuje się dużym stopniem uniwersalności.

Podstawy teoretyczne pierwszej metody Lapunowa dla systemów nieliniowych sprowadzają się zwykle do zastępowania układu nieliniowego układem liniowym, np. przeprowadzając procedurę linearyzacji, mającą charakter lokalny. Jednym z ważniejszych twierdzeń o linearyzacji jest twierdzenie Grobmana-Hartmana, w którym określa się klasę układów nieliniowych, dla których lokalnie trajektorie fazowe układu nieliniowego i trajektorie fazowe jego liniowego przybliżenia zachowują się „podobnie”. Jest oczywiste, że liniowe przybliżenie o postaci  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  posiada jawne rozwiązanie dane wzorem  $x(t) = e^{At} x(0)$ , a zatem zachowanie tego rozwiązania (rodziny rozwiązań) może być analizowane w zależności od współczynników macierzy  $A$  i warunku początkowego  $x(0)$ .

Dalej omówione zostaną następujące zagadnienia:

- trajektorie stanu i trajektorie fazowe stanu systemu dynamicznego,
- stabilność trajektorii stanu systemu dynamicznego w sensie Lapunowa,
- punkty równowagi systemu dynamicznego,
- linearyzacja równania nieliniowego w otoczeniu punktu równowagi,
- badanie stabilności punktu równowagi przy użyciu pierwszej metody Lapunowa,
- określenie przewidywanego charakteru trajektorii fazowych układu nieliniowego na podstawie znajomości trajektorii jego liniowego przybliżenia.



### 3.1. Podstawowe pojęcia

Rozważmy stacjonarny (autonomiczny), skończenie wymiarowy, nieliniowy system dynamiczny, opisany równaniem różniczkowym

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $f(x) = [f_1(x) \ \cdots \ f_n(x)]^T$  jest wektorową funkcją wektorowego argumentu  $x(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$

$$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

Inaczej mówiąc,  $f$  jest wektorem  $n$  funkcji o wartościach skalarnych, z których każda jest funkcją  $n$  zmiennych

$$f_k : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad k = 1, \dots, n$$

Zmienną  $x(t)$  nazywamy *stanem* w chwili  $t$  systemu dynamicznego opisanego równaniem (3.1).

Przyjmuje ona wartości z *przestrzeni stanu*, którą tutaj stanowi zbiór  $\mathbf{R}^n$ . Zmienna  $t$  w praktycznych zastosowaniach jest interpretowana najczęściej jako czas. Wartość  $x(0)$  nazywamy *warunkiem początkowym* lub *stanem początkowym*. Zakładamy, że dla każdego  $x(0)$  istnieje dokładnie jedno rozwiązanie  $x$  określone dla  $t \geq 0$ , spełniające równanie (3.1). Równanie (3.1) nosi nazwę *równania stanu* systemu dynamicznego.

#### Trajektorie stanu, trajektorie fazowe stanu

Dla ustalonego warunku początkowego  $x(0)$ , rozwiązaniem równania (3.1) jest funkcja  $x$ , opisująca przebieg stanu w czasie

$$x : t \mapsto x(t)$$

Założmy, że dla pewnego  $x(0)$  funkcja  $x$ , przyjmująca wartości w  $\mathbf{R}^n$ , jest określona na przedziale  $[0, \infty)$  (rozwiązanie określone do  $\infty$ )

$$x : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$$

Weźmy  $t_1, t_2 \in [0, \infty)$  takie, że  $t_1 \leq t_2$ .

*Trajektorią stanu*  $x$  (wykresem funkcji  $x$ ) na odcinku  $[t_1, t_2]$  nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego  $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ , określony w następujący sposób

$$\{ (x(t), t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty) : t \in [t_1, t_2] \}$$

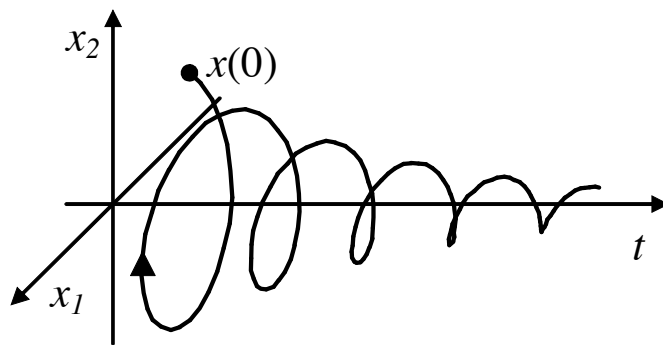
Różnym warunkom początkowym  $x(0)$  odpowiadają różne trajektorie stanu.

*Trajektorią fazową stanu* na odcinku  $[t_1, t_2]$  nazywamy podzbiór przestrzeni stanu  $\mathbf{R}^n$ , określony w następujący sposób

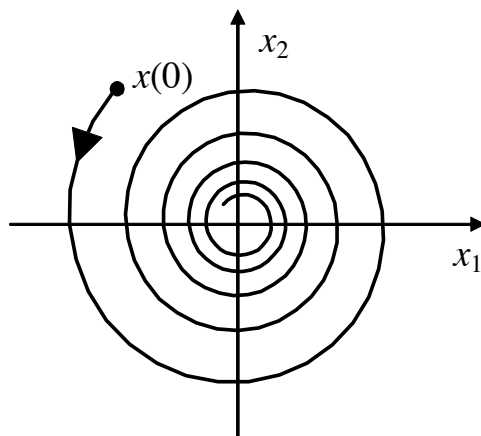
$$\{ x(t) \in \mathbf{R}^n : t \in [t_1, t_2] \}$$

Trajektorię fazową stanu nazywać będziemy w skrócie *trajektorią fazową*. Trajektorja fazowa jest rzutem trajektorii stanu na przestrzeń stanu  $\mathbf{R}^n$ .

Na rysunku 3.1 przedstawiono przykładową *trajektorię stanu* systemu drugiego rzędu, startującą z punktu  $x(0)$ . Odpowiadająca jej *trajektoria fazowa* pokazana jest na rysunku 3.2.



Rys. 3.1. Trajektoria stanu



Rys. 3.2. Trajektoria fazowa stanu

Zbiór trajektorii fazowych, startujących z wybranych punktów  $x(0)$ , tworzy tak zwane *portrety fazowe*. Dodatkowo strzałkami oznacza się kierunek poruszania się punktu  $x(t)$  wraz ze wzrostem czasu.

### 3.2. Stabilność w sensie Lapunowa

Niech funkcja  $\tilde{x}: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$  będzie szczególnym rozwiązaniem równania (3.1). Niech ponadto istnieje otoczenie trajektorii  $\tilde{x}$ , w którym istnieją rozwiązania równania (3.1) określone dla  $t \geq 0$ . Rozwiązanie  $\tilde{x}$  nazywamy stabilnym w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $t_0 \in [0, \infty)$  i dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że każda trajektoria stanu  $x$ , spełniająca warunek  $\|x(t_0) - \tilde{x}(t_0)\| < \delta$ , jest określona na  $[t_0, \infty)$  oraz  $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \varepsilon$  w przedziale  $[t_0, \infty)$  (patrz np. Mitkowski 1991, s. 30; Mitkowski 1996, s. 82), przy czym  $\|\cdot\|$  jest normą w przestrzeni  $\mathbf{R}^n$ .

Stała  $\delta$  jest zależna od  $t_0$  i  $\varepsilon$ . Jeżeli  $\delta > 0$  można dobrać niezależnie od  $t_0$ , to  $\tilde{x}$  jest *jednostajnie stabilne*. Stabilność jednostajna ma znaczenie dla układów niestacjonarnych  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ . W przypadku systemu stacjonarnego (3.1) można przyjmować  $t_0 = 0$ .

Układ dynamiczny nazywamy stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie rozwiązania równania stanu (3.1) układu są stabilne.

## Punkty równowagi

Punktem równowagi  $x^* \in \mathbf{R}^n$  systemu (3.1) nazywamy każde rozwiązanie równania

$$f(x^*) = 0 \quad (3.2)$$

Z (3.2) wynika, że stała w czasie funkcja  $x(t) = x^*$  jest rozwiązaniem równania (3.1). Trajektorią fazową tego rozwiązania jest punktem  $x^* \in \mathbf{R}^n$ .

W zależności od postaci funkcji  $f$ , system może posiadać skończoną lub nieskończoną (przeliczalną lub nie) ilość punktów równowagi, lub nie posiadać ich wcale. Każdemu punktowi równowagi odpowiada stałe w czasie rozwiązanie. W praktycznych zastosowaniach bada się głównie stabilność tych właśnie stałych w czasie rozwiązań. Zamiast używać sformułowania *stabilność rozwiązań stałych*, mówimy zazwyczaj o *stabilności punktów równowagi*.

Na wstępie podrozdziału podano definicję stabilności rozwiązania  $\tilde{x}$  równania (3.1) w sensie Lapunowa. Badanie stabilności rozwiązania  $\tilde{x}$  równania (3.1) jest równoważne badaniu stabilności zerowego rozwiązania pewnego innego równania różniczkowego. Zatem bez straty ogólności (zob. np. Mitkowski 1991, s. 31) w równości (3.1) możemy zakładać, że  $f(0) = 0$ , co oznacza, że zero jest punktem równowagi systemu (3.1).

Zerowy punkt równowagi  $x^* = 0$  systemu (3.1) z  $f(0) = 0$  jest stabilny w sensie Lapunowa, jeśli odpowiadająca mu trajektoria  $\tilde{x}(t) \equiv 0$  jest stabilna w sensie Lapunowa.

Zerowy punkt równowagi  $x^* = 0$  (zerowe rozwiązanie  $\tilde{x} = 0$ ) systemu (3.1) z  $f(0) = 0$  jest *asymptotycznie stabilny* w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie  $\tilde{x}(t) \equiv 0$  równania (3.1) z  $f(0) = 0$  jest stabilne w sensie Lapunowa oraz dla każdego  $t_0 \in [0, \infty)$  istnieje liczba rzeczywista  $\Delta > 0$ , taka że jeśli  $\|x(t_0)\| < \Delta$ , to  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  przy  $t \rightarrow \infty$ , przy czym  $x$  jest rozwiązaniem równania (3.1) z  $f(0) = 0$ .

Stabilność asymptotyczna punktu równowagi  $x^*$  oznacza, że wszystkie trajektorie startujące z pewnego otoczenia  $x^*$  zbiegają z czasem asymptotycznie do punktu równowagi.

## Obszar przyciągania

Niech  $x^* = 0$  będzie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi systemu (3.1) z  $f(0) = 0$ . *Obszarem przyciągania* lub *atrakcji* punktu  $x^* = 0$  nazywamy zbiór wszystkich punktów  $x_0$  należących do przestrzeni  $\mathbf{R}^n$ , takich że trajektorie  $x(t; x_0)$  startujące z tych punktów ( $x(t_0; x_0) = x_0$ ) zmierzają do  $x^* = 0$  przy  $t \rightarrow \infty$ . Wprowadzamy oznaczenie

$$D_{t_0} = \{x_0 \in \mathbf{R}^n : x(t; x_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x^*\}$$

Jeśli dla wszystkich  $t_0$  obszar przyciągania punktu równowagi  $x^*$  systemu (3.1) jest równy całej przestrzeni stanu ( $D_{t_0} = \mathbf{R}^n$ ,  $\forall t_0 \in [0, \infty)$ ), to taki punkt nazywamy *globalnie asymptotycznie stabilnym*.

### 3.3. Liniowe przybliżenie systemu nieliniowego w zerowym punkcie równowagi

Założmy, że w pewnym otoczeniu punktu równowagi  $x^* = 0$  funkcję  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  można przedstawić w postaci

$$f(x) = Ax + r(x)$$

gdzie  $A$  jest macierzą rzeczywistą o wymiarze  $n \times n$ , a dla funkcji  $r$  zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (3.3)$$

Jeśli w równaniu (3.1) z  $f(0) = 0$  zastąpić  $f(x(t))$  przez wyrażenie  $Ax(t)$ , to otrzymuje się tak zwane *liniowe przybliżenie* nieliniowego równania (3.1), obowiązujące w pewnym otoczeniu punktu równowagi  $x^* = 0$ , o postaci

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3.4)$$

Przybliżenie liniowe (3.4) nieliniowego systemu (3.1) z  $f(0) = 0$  w punkcie równowagi  $x^* = 0$  istnieje wówczas, gdy istnieje pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $x^* = 0$ , czyli gdy funkcja  $f$  jest w tym punkcie różniczkowalna.

#### Metoda wyznaczanie macierzy $A$

Jeśli w pewnym otoczeniu punktu  $x^*$  istnieją pochodne cząstkowe funkcji  $f_1, f_2, \dots, f_n$  względem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i są one w tym punkcie ciągłe, wówczas pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $x^*$  jest równa macierzy Jacobiego funkcji  $f$  w punkcie  $x^*$  (np. Żakowski, Kołodziej 1992, s. 40)

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} \quad (3.5)$$

Często stosuje się zapis uproszczony

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x}$$

Symbol  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  oznacza macierz Jacobiego dla wektorowej funkcji  $f$  i wektorowego argumentu  $x$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]_{n \times n} \quad (3.6)$$

Jeżeli system posiada więcej niż jeden punkt równowagi, dla każdego z nich można wyznaczyć przybliżenie liniowe. Przybliżenia liniowe w różnych punktach równowagi są na ogół różne. Pochodne funkcji  $f$  w każdym z nich w ogólności mają różne wartości. Jest oczywiste, że przez zmianę układu współrzędnych (przesunięcie) można początek układu współrzędnych umieszczać w kolejnych punktach równowagi, sprowadzając odpowiedni problem do badania zerowego punktu równowagi.

## Teoria Hartmana-Grobmana

Niech  $A$  będzie macierzą określoną równością (3.5) dla  $x^* = 0$ . Załóżmy, macierz  $A$  nie posiada wartości własnych o zerowych częściach rzeczywistych, czyli  $\det(j\omega I - A) \neq 0$ . Wówczas charakter trajektorii fazowych systemu nieliniowego (3.1) z  $f(0) = 0$  w otoczeniu zerowego punktu równowagi jest podobny do charakteru trajektorii fazowych przybliżenia liniowego (3.4). Podobieństwo, o którym mowa, ma charakter lokalny. W miarę oddalania się od punktu równowagi należy oczekiwać coraz większych różnic między zachowaniem się systemu nieliniowego i jego liniowego przybliżenia. Ścisłe sformułowanie opisanego podobieństwa portretów fazowych stanowi twierdzenie Hartmana-Grobmana (np. Grabowski 1996, s. 30).

### 3.4. Pierwsza metoda Lapunowa

Lapunow udowodnił następujące twierdzenie (patrz np. Mitkowski 1991, s. 34), które stanowi podstawę pierwszej metody Lapunowa badania stabilności nieliniowych systemów dynamicznych i jest również konsekwencją późniejszego twierdzenia Hartmana-Grobmana:

1. Jeżeli części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy stanu  $A$  liniowego przybliżenia (3.4) nieliniowego systemu (3.1) z  $f(0) = 0$  w punkcie równowagi  $x^* = 0$  są ujemne, to punkt równowagi  $x^*$  nieliniowego systemu (3.1) jest asymptotycznie stabilny.
2. Jeżeli któraś z wartości własnych macierzy  $A$  ma część rzeczywistą dodatnią, to punkt równowagi  $x^* = 0$  systemu nieliniowego (3.1) z  $f(0) = 0$  jest niestabilny.

Jeżeli co najmniej jedna z wartości własnych macierzy  $A$  ma zerową część rzeczywistą, a wszystkie pozostałe – ujemne, to nie można wnioskować o stabilności układu nieliniowego w otoczeniu badanego punktu.

### 3.5. Przebieg ćwiczenia

Należy zamodelować w MATLAB-ie i Simulinku systemy dynamiczne opisane równaniami (3.7), (3.8), (3.9). Następnie wykreślić rodziny trajektorii fazowych badanych systemów, wykonując szereg symulacji dla różnych warunków początkowych. Znaleźć punkty równowagi, zbadać ich stabilność i określić doświadczalnie obszary przyciągania wokół tych z nich, które są asymptotycznie stabilne. Poszukać trajektorii separujących, ograniczających obszary przyciągania. Następnie wyznaczyć liniowe przybliżenia rozważanych systemów nieliniowych. Porównać rodziny trajektorii systemów nieliniowych i ich liniowych przybliżeń w otoczeniu punktów równowagi.

#### System 1

Układ mechaniczny, składający się z masy i „nieliniowej” sprężyny z tłumieniem proporcjonalnym do prędkości ruchu, opisany jest następującym równaniem różniczkowym

$$\ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + c y(t) + d y^3(t) = 0 \quad (3.7)$$

$$b, c > 0, \quad |c| < |d|$$

Współrzędna  $y$  oznacza odchylenie drgającej masy od położenia równowagi trwałej. Współczynnik  $b$  charakteryzuje tarcie występujące w układzie, zaś współczynniki  $c$  i  $d$  opisują własności sprężyny o nieliniowej charakterystyce. Gdy  $d < 0$ , mówimy o sprężynie „miękkiej”, dla  $d > 0$  – o sprężynie „twardej”. Przed przystąpieniem do badań należy system dany skalarnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu (3.7) opisać za pomocą równania stanu, to znaczy zastąpić układem dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu. Można przyjąć tak zwane naturalne zmienne stanu; w tym przypadku są nimi: położenie  $x_1(t) = y(t)$  oraz prędkość  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ .

## System 2

Równanie ruchu wahadła tłumionego ma postać

$$\ddot{y}(t) + \frac{g}{l} \sin y(t) + \frac{c}{lm} \dot{y}(t) = 0 \quad (3.8)$$

gdzie  $g$  jest współczynnikiem przyspieszenia ziemskiego,  $m$  i  $l$  to odpowiednio masa i długość wahadła, zaś  $c$  jest współczynnikiem tłumienia. Zmienna  $y$  oznacza kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi trwałej (pozycja pionowo w dół). Przed przystąpieniem do badania stabilności należy opisać system (3.8) równaniami stanu.

## System 3

Układ równań Van der Pola ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - x_1^3(t) - ax_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Badania podanego systemu należy przeprowadzić dla  $a = 1$  lub innej wartości, podanej przez prowadzącego ćwiczenia.

## 3.6. Przygotowanie do zajęć

Dla każdego z systemów (3.7), (3.8) i (3.9) należy analitycznie:

- określić punkty równowagi,
- wyznaczyć macierze jacobianowe,
- określić wartości własne macierzy jacobianowych; jakiego typu portretów fazowych można się spodziewać w systemach nieliniowych w otoczeniu punktów równowagi?

## 3.7. Przykłady obliczeniowe

### Przykład 1

W pewnych sytuacjach pierwsza metoda Lapunowa nie daje odpowiedzi na pytanie o stabilność punktu równowagi nieliniowego systemu dynamicznego (3.1) z  $f(0) = 0$ , mimo istnienia liniowego przybliżenia (3.4). Jest tak wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy  $A$  przybliżenia liniowego mają zerowe części rzeczywiste lub też gdy część spośród nich ma zerowe, a wszystkie pozostałe – ujemne części rzeczywiste. Przypadek taki pokazuje poniższy przykład, w którym porównano skuteczność I i II metody Lapunowa.

Rozważamy następujący system dynamiczny

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = -x_1^3(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = -x_1^3(t) - x_2^3(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$x^* = [0 \ 0]^T$  jest punktem równowagi systemu (3.10), gdyż spełnia równanie (3.2). Asymptotyczną stabilność tego punktu można wykazać za pomocą drugiej metody Lapunowa, która jest tematem jednego z dalszych ćwiczeń (zobacz np. Mitkowski 1991, s. 33).

Weźmy funkcjonal Lapunowa postaci

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (3.11)$$

Wyznaczmy jego pochodną na trajektoriach systemu (3.10)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) \\ \dot{V}(x_1, x_2) &= x_1^3 \cdot (-x_1^3 + x_2) + x_2 \cdot (-x_1^3 - x_2^3) \\ \dot{V}(x_1, x_2) &= -x_1^6 - x_2^4 \end{aligned} \quad (3.12)$$

W zbiorze  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  funkcjonal (3.11) przyjmuje wartości dodatnie, zaś jego pochodna (3.12) – ujemne

$$\forall_{\substack{x \in \mathbf{R}^2 \\ x \neq 0}} V(x_1, x_2) > 0 \quad (3.13)$$

$$\forall_{\substack{x \in \mathbf{R}^2 \\ x \neq 0}} \dot{V}(x_1, x_2) < 0 \quad (3.14)$$

Dodatkowo zachodzi

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty \quad (3.15)$$

Ze wzorów (3.13), (3.14) oraz (3.15), na mocy drugiego twierdzenia Lapunowa, wynika globalna asymptotyczna stabilność zerowego punktu równowagi systemu (3.10).

Macierz Jacobiego dla systemu (3.10) dana jest wzorem (3.16). Jej wartość w zerowym punkcie równowagi  $[0 \ 0]^T$ , będącą macierzą stanu  $A$  liniowego przybliżenia (3.4), podaje wzór (3.17)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Macierz  $A$  ma postać kanoniczną Jordana. Posiada ona podwójną, zerową wartość własną, odpowiadającą nieliniowemu dzielnikowi elementarnemu. Tak więc, na mocy teorii stabilności systemów liniowych (np. Mitkowski 1991, s. 59), liniowe przybliżenie jest niestabilne.

Mimo niestabilności przybliżenia liniowego, zerowy punkt równowagi systemu (3.10) jest globalnie asymptotycznie stabilny.

## Przykład 2

Badamy stabilność systemu dynamicznego

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = x_1(t)x_2(t) - x_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = x_1^2(t)x_2(t) - x_2^2(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Rozpoczynamy od wyznaczenia jego punktów równowagi, rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} x_1(x_2 - x_1) &= 0 \\ x_2(x_1^2 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Posiada on dwa rozwiązania

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Obliczamy macierz Jacobiego (3.6) dla systemu (3.18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} &= x_2 - 2x_1 & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} &= x_1 & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} &= 2x_1 x_2 & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} &= x_1^2 - 2x_2 \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 & x_1 \\ 2x_1 x_2 & x_1^2 - 2x_2 \end{bmatrix} & f(x) &= [f_1(x) \quad f_2(x)]^T & x &= [x_1 \quad x_2]^T \end{aligned}$$

Wyznaczamy wartości macierzy jacobianowej w punktach równowagi systemu

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=(0,0)^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=(1,1)^T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Pierwsza z macierzy ma postać diagonalną. Podwójną zerową wartość własną można odczytać z przekątnej głównej. W tym przypadku pierwsza metoda Lapunowa nie rozstrzyga kwestii stabilności.

Wartości własne drugiej macierzy można obliczyć jako pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$\begin{aligned} w(s) = \det(sI - A) &= \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix} = (s+1)(s+1) - (-1) \cdot (-2) = (s+1)^2 - 2 \\ w(s) &= s^2 + 2s - 1 \end{aligned}$$

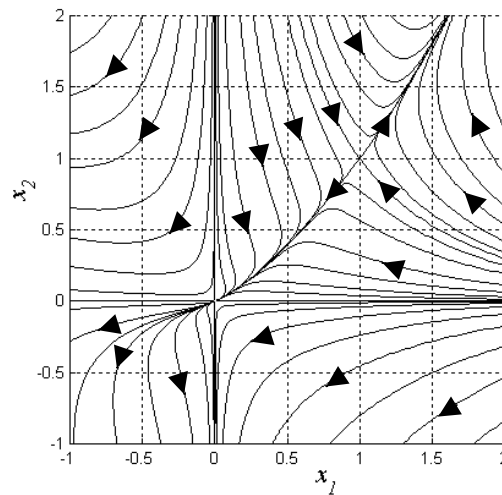
Są one następujące

$$\begin{aligned} s_1 &= -1 - \sqrt{2} \\ s_2 &= -1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

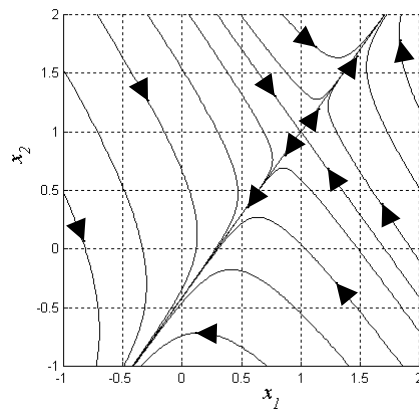
Rzeczywista wartość własna  $s_2$  jest dodatnia. Na mocy twierdzenia Lapunowa, punkt  $[1 \ 1]^T$  jest niestabilnym punktem równowagi nieliniowego systemu (3.18). Na rysunku 3.3 zamieszczono portret fazowy systemu nieliniowego (3.18) oraz portrety fazowe jego przybliżeń liniowych (3.4), z macierzami (3.20), w punktach równowagi (3.19). W otoczeniu punktu równowagi  $[1 \ 1]^T$  portrety fazowe systemów: nieliniowego i zlinearyzowanego wykazują podobieństwo charakteru (portret typu *siodło*). W otoczeniu punktu  $[0 \ 0]^T$ , gdzie macierz jacobianowa posiada zerowe wartości własne, portrety fazowe są zupełnie różne.



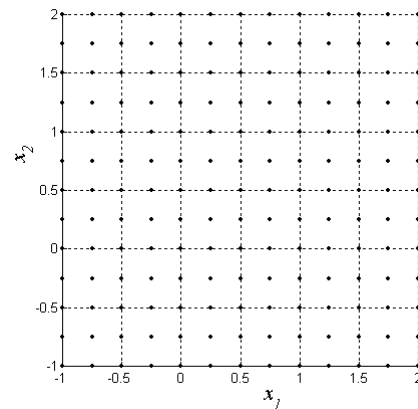
### System nieliniowy



### System zlinearyzowany w punkcie $[1 \ 1]^T$



### System zlinearyzowany w punkcie $[0 \ 0]^T$



Rys. 3.3. Portrety fazowe systemu nieliniowego i jego liniowych przybliżeń

### Przykład 3

Zbadaj stabilność punktu równowagi systemu nieliniowego

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2) = -2x_1(t) + 2x_2^2(t) \quad (3.21)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2) = 1 - x_2^3(t)$$

Skorzystaj z pierwszej metody Lapunowa. Porównaj portrety fazowe systemów: nieliniowego i jego liniowego przybliżenia, wyznaczonego w punkcie równowagi.

System (3.21) posiada jeden punkt równowagi

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1 \\ x_2^* &= 1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

który można wyznaczyć rozwiązując układ równań

$$-2x_1 + 2x_2^2 = 0$$

$$1 - x_2^3 = 0$$

Wyznamy wartość macierzy Jacobiego dla funkcji  $f$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -2 & 4x_2 \\ 0 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

gdzie

$$x = [x_1 \ x_2]^T, \quad f(x) = [f_1(x) \ f_2(x)]^T$$

Wartość macierzy jacobianowej (3.23) w punkcie równowagi (3.22) wynosi

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

A jest macierzą trójkątną, więc jej wartości własne można odczytać wprost z przekątnej. Są one następujące

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

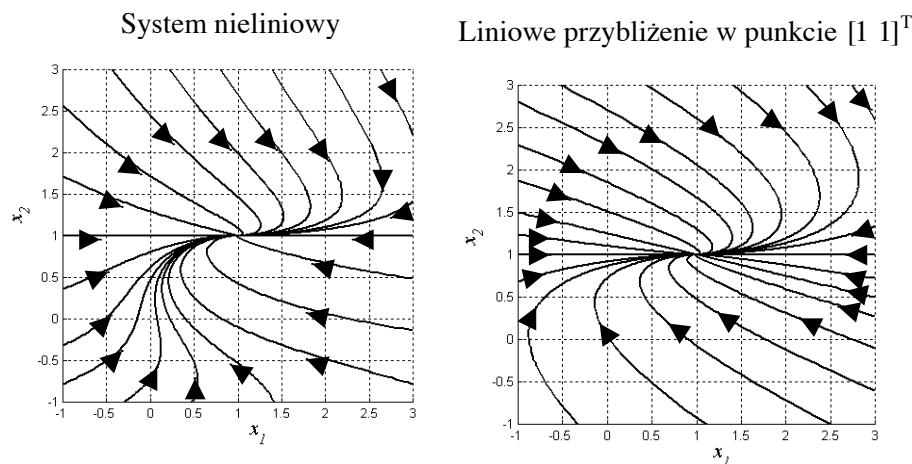
Ponieważ wszystkie wartości własne leżą w lewej, otwartej półpłaszczyźnie zespolonej, punkt (3.22) jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi systemu (3.21). Przybliżenie liniowe systemu nieliniowego (3.21) w punkcie równowagi (3.22) ma postać

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t)$$

gdzie:

$$\xi(t) = x(t) - x^*$$

Żadna z wartości własnych macierzy A nie leży na osi urojonej. Wynika stąd podobieństwo charakteru trajektorii fazowych stanu systemu nieliniowego i jego liniowego przybliżenia, w pewnym otoczeniu punktu równowagi (portret typu *węzeł stabilny*) (rysunek 3.4).



Rys. 3.4. Portrety fazowe systemu nieliniowego i jego liniowego przybliżenia

### 3.8. Literatura

- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa  
 Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. AGH, Kraków  
 Grabowski P. (1996): *Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania*. AGH, Kraków  
 Żakowski W., Kołodziej W. (1992): *Matematyka, cz. II, Podręczniki Akademickie. Elektrotechnika, Informatyka, Telekomunikacja*. WNT, Warszawa

## 4. Druga metoda Lapunowa i twierdzenie LaSalle'a

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z wybranymi metodami badania stabilności nieliniowych systemów dynamicznych. W instrukcji omówione są dwa twierdzenia, które można do tego celu wykorzystać:

- twierdzenie Lapunowa (np. Mitkowski 1991, s. 33; Mitkowski 1996, s. 84),
- twierdzenie LaSalle'a (np. Mitkowski 1991, s. 117; Mitkowski 1996, s. 87).

Tematem poprzedniego ćwiczenia była pierwsza metoda Lapunowa (metoda linearyzacji), wykorzystywana do badania stabilności punktów równowagi nieliniowych systemów dynamicznych na podstawie ich liniowego przybliżenia. Metoda linearyzacji jest prosta w użyciu, ale ma ograniczony zakres stosowalności:

- nie można z niej skorzystać, gdy system nieliniowy nie poddaje się linearyzacji,
- nie określa *obszaru przyciągania* asymptotycznie stabilnego punktu równowagi,
- nie jest w stanie wykazać przypadku *stabilności nieasymptotycznej*,
- nie daje odpowiedzi w sytuacji, gdy wśród wartości własnych macierzy stanu systemu zlinearyzowanego jest przynajmniej jedna o zerowej części rzeczywistej (istnieją wartości własne  $\lambda_k$  takie, że  $\text{Re } \lambda_k = 0$ ), a pozostałe mają ujemne części rzeczywiste.

Gdy pierwsza metoda Lapunowa nie pozwala zbadać stabilności punktu równowagi, w wielu przypadkach pomocna może się okazać druga metoda Lapunowa. Z kolei twierdzenie LaSalle'a umożliwia wyznaczenie pewnego przybliżenia obszaru przyciągania asymptotycznie stabilnego punktu równowagi.

### 4.1. Podstawowe pojęcia

Rozważany jest nieliniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy system dynamiczny z czasem ciągłym z zerowym punktem równowagi, opisany równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f(0) = 0, \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

Sformułowanie zapowiedzianych we wstępie twierdzeń poprzedzone zostanie przypomnieniem kilku objaśnionych w poprzednim rozdziale pojęć oraz wprowadzeniem nowych. W rozdziale pod tytułem *Pierwsza metoda Lapunowa* podano następujące definicje dotyczące układu (4.1):

- trajektorii stanu i trajektorii fazowej stanu,
- punktu równowagi,
- stabilności szczególnego rozwiązania równania (4.1) w sensie Lapunowa,
- stabilności systemu nieliniowego (4.1),
- stabilności punktu równowagi (rozwiązania stałego),
- asymptotycznej stabilności punktu równowagi,
- obszaru przyciągania (atrakcji) asymptotycznie stabilnego punktu równowagi,
- globalnej asymptotycznej stabilności punktu równowagi.

Znajomość wymienionych pojęć jest niezbędna do lektury dalszej części rozdziału.

### Kilka pojęć geometrycznych (topologicznych)

Niech  $x \in \mathbf{R}^n$  oraz niech  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ . Zbiór

$$K(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\| < r\}$$

nazywamy kulą o środku w  $a$  i o promieniu  $r > 0$ .

Zbiór zawarty w jakiejś kuli nazywamy **zbiorem ograniczonym**.

**Otoczeniem punktu**  $a \in \mathbf{R}^n$  nazywamy każdą kulę  $K(a, r)$ .

Zbiór nazywamy **otwartym**, gdy każdy jego punkt posiada otoczenie zawarte w tym zbiorze.

Zbiór  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  nazywamy **obszarem**, gdy każdy jego punkt należy do  $\Omega$  wraz z pewnym otoczeniem oraz każde dwa punkty należące do  $\Omega$  można połączyć łamaną zawierającą się całkowicie w  $\Omega$ .

Punkt  $a$  nazywamy **punktem skupienia** zbioru  $D$ , gdy do każdego otoczenia punktu  $a$  należy punkt zbioru  $D$  różny od  $a$ .

Zbiór wszystkich punktów skupienia obszaru do niego nie należących nazywamy **brzegiem** obszaru.

Zbiór  $D$  nazywamy zbiorem **domkniętym**, gdy wszystkie jego punkty skupienia należą do  $D$ .

Zbiór w  $\mathbf{R}^n$  domknięty i ograniczony nazywamy zbiorem **zwartym**.

**Brzegiem** zbioru  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  nazywamy zbiór wszystkich jego punktów brzegowych. Punkt  $\omega \in \mathbf{R}^n$  jest **punktem brzegowym** zbioru  $\Omega$ , jeśli w każdym otoczeniu punktu  $\omega$  znajduje się przynajmniej jeden punkt należący do zbioru  $\Omega$  i przynajmniej jeden punkt spoza tego zbioru (np. Żakowski, Kołodziej 1992, s. 12).

**Krzywa Jordana** to zbiór punktów przestrzeni  $\mathbf{R}^2$  o współrzędnych  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ , gdzie  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  są funkcjami ciągłymi, określonymi na przedziale  $[\alpha, \beta]$ , przy czym różnym wartościom parametru  $t \in [\alpha, \beta]$  odpowiadają różne punkty  $x(t)$  oraz zachodzi równość  $x(\alpha) = x(\beta)$  (np. Żakowski, Kołodziej 1992, s. 13).

### Funkcjonał Lapunowa

Funkcja  $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  (ogólniej wystarczy  $V: \mathbf{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , gdzie  $\Omega$  jest pewnym otoczeniem zera) jest **funkcjonałem Lapunowa** systemu (4.1), jeżeli:

- $V(x)$  jest ciągła wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi względem  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  w pewnym otoczeniu zerowego punktu równowagi systemu,
- $V(0) = 0$  oraz  $V(x) > 0$  w pewnym otoczeniu  $\Omega_1$  zera, z wyłączeniem zera,
- $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$  w pewnym otoczeniu  $\Omega_2$  zera.

Ostatni warunek oznacza, że pochodna funkcyjonału  $V$  względem czasu  $t$  wyznaczona na trajektoriach systemu (4.1), jest niedodatnia w pewnym otoczeniu zera. Na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej wielu zmiennych mamy

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \bigg|_{x=x(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \bigg|_{x=x(t)} \cdot f(x(t))$$

$$\dot{V}(x) = \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_k} f_k(x)$$

gdzie

$$f(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \cdots \quad f_n(x)]^T, \quad x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T.$$

## 4.2. Twierdzenie Lapunowa

1. Jeśli w pewnym otoczeniu zerowego punktu równowagi systemu (4.1) istnieje funkcjonal Lapunowa  $V(x)$ , to punkt równowagi jest *stabilny* ( $V(x) > 0$  i  $\dot{V}(x) \leq 0$ ).
2. Jeśli w pewnym otoczeniu zera istnieje funkcjonal Lapunowa  $V(x)$  i zachodzi tam nierówność silna  $\dot{V}(x) < 0$  dla  $x \neq 0$ , to zerowy punkt równowagi układu (4.1) jest *asymptotycznie stabilny* ( $V(x) > 0$  i  $\dot{V}(x) < 0$ ).
3. Jeśli istnieje funkcjonal Lapunowa  $V(x)$  o własnościach z punktu 2 zachodzących w całej przestrzeni  $\mathbf{R}^n$  ( $V(x) > 0$  i  $\dot{V}(x) < 0$  dla wszystkich  $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ ) i dodatkowo  $V(x) \rightarrow \infty$  gdy  $\|x\| \rightarrow \infty$ , to zerowy punkt równowagi systemu (4.1) jest *globalnie asymptotycznie stabilny*.

Twierdzenia Lapunowa formułuje tylko warunki wystarczające odpowiedniego rodzaju stabilności. Z niepowodzenia poszukiwań funkcjonu Lapunowa nie wynika, że zerowe rozwiązanie jest niestabilne. W tym miejscu warto wspomnieć, że istnieją twierdzenia o niestabilności. Np. jeżeli dla układu (4.1) znajdziemy funkcjonal taki, że  $V(x) > 0$  i równocześnie  $\dot{V}(x) > 0$ , to zerowe rozwiązanie równania (4.1) jest niestabilne.

Twierdzenie Lapunowa nie podaje, jak określić obszar przyciągania asymptotycznie stabilnego zerowego punktu równowagi. Pewna informacja o zbiorze przyciągania asymptotycznego jest zawarta w twierdzeniu LaSalle'a.

### Przykładowe funkcjonały Lapunowa

W literaturze można znaleźć różne propozycje doboru funkcjonu Lapunowa dla określonych klas systemów dynamicznych. Najpopularniejszy jest tak zwany funkcjonal „energetyczny” w postaci

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k^2 = \frac{1}{2} \|x\|^2 = \frac{1}{2} x^T x$$

gdzie  $x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ .

W przypadku systemu dynamicznego opisanego równościami (4.2), przy spełnieniu pewnych dodatkowych założeń, można stosować funkcjonal postaci (4.3) (LaSalle i Lefschetz 1996, s. 65; zobacz np. Mitkowski 1991, s. 119; Mitkowski 1996, s. 88).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - h(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -g(x_1(t)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi \tag{4.3}$$

Pochodna funkcjonu (4.3) na trajektoriach systemu (4.2) wyraża się wzorem

$$\dot{V}(x(t)) = -g(x_1(t)) \cdot h(x_1(t)).$$

Kolejna funkcja  $V$  typowana na funkcjonal Lapunowa dla systemu (4.1), zaproponowana przez A. Krasowskiego, dana jest wzorem (4.4) (Kaczorek 1977, s. 330). Może ona posłużyć do badania

stabilności zerowego punktu równowagi systemu (4.1), jeżeli dla wszystkich  $x$  z pewnego otoczenia zera i  $x \neq 0$  składowe funkcji  $f(x(t))$  nie zerują się jednocześnie.

$$V(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} f^T(x) P f(x) \quad (4.4)$$

gdzie  $P$  jest rzeczywistą symetryczną, dodatnio określoną macierzą kwadratową stopnia  $n$ .

Rozważmy równanie (względem  $D$ ) Lapunowa o następującej postaci:

$$A^T D + D A = -G, \quad G = G^T > 0.$$

Istnieje symetryczna, dodatnio określona macierz  $D$ , będąca rozwiązaniem równania Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy  $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ . Funkcja  $V(x) = x^T D x$  z tą macierzą  $D$  jest funkcjonałem Lapunowa (asymptotycznie stabilnego) układu liniowego  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ . Jeżeli układ  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  jest liniowym przybliżeniem systemu nieliniowego (4.1) i  $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ , to  $V(x) = x^T D x$  jest również funkcjonałem Lapunowa sytemu (4.1).

### 4.3. Zasada LaSalle'a

Rozważmy następujący system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f(0) = 0, \quad f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad f \in C(\mathbf{R}^n) \quad (4.5)$$

Niech  $x = x(t; t_0, x_0)$  oznacza rozwiązanie równania (4.5) jednoznacznie określone dla  $-\infty < t < +\infty$ . Jednoznaczność rozwiązania oznacza, że przez punkt  $(t_0, x_0) \in T \times \mathbf{R}^n$  przechodzi dokładnie jedna krzywa  $x$ , spełniająca równanie (4.5), przy czym  $T = (-\infty, +\infty)$ .

#### Zbiór inwariantny (niezmienniczy)

Zbiór  $M \subset \mathbf{R}^n$  jest zbiorem inwariantnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $x_0 \in M$  również  $x(t; t_0, x_0) \in M$  dla wszystkich  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Innymi słowy, jeśli punkt  $(t_0, x_0)$ , gdzie  $x_0 \in M$ , należy do pewnej trajektorii stanu systemu (4.5), to również wszystkie pozostałe punkty  $x(t; t_0, x_0)$  odpowiadającej trajektorii fazowej należą do  $M$  – zarówno dla wszystkich czasów  $t$  późniejszych od  $t_0$ , jak i wcześniejszych. Cała trajektoria fazowa zawiera się w  $M$ .

Zauważmy, że początek układu współrzędnych w  $\mathbf{R}^n$  (czyli  $0 \in \mathbf{R}^n$ ) jest zbiorem inwariantnym układu (4.5). Podobnie, jeżeli trajektoria fazowa układu (4.5) stanowi krzywa zamkniętą w  $\mathbf{R}^n$ , to jest zbiorem inwariantnym.

#### Obszar w $\mathbf{R}^n$

Zbiór  $\Omega \in \mathbf{R}^n$  jest obszarem, gdy spełnione są dwa warunki:

1.  $\forall x \in \Omega, \exists r > 0$  takie, że kula  $K(x, r) \subset \Omega$ .
2.  $\forall x_1 \in \Omega, \forall x_2 \in \Omega$  istnieje łuk łączący punkty  $x_1$  i  $x_2$  zawarty w całości w  $\Omega$ .

Poniżej podane zostaną dwie wersje twierdzenia LaSalle'a. Pierwsza z nich jest wersją uproszczoną, druga – pełną (LaSalle i Lefschetz 1966, s. 64; Demidowicz 1972, s.374). Zakres zastosowań pierwszej z nich jest ograniczony w stosunku do drugiej, która jest ogólniejsza. Mimo to umieszczono tutaj również wersję uproszczoną, ponieważ jej sformułowanie jest czytelniejsze i łatwiejsze do

przyswojenia, a jej znajomość ułatwia zrozumienie wersji pełnej. Obie wersje twierdzenia odnoszą się do systemu dynamicznego (4.5)

### Wersja uproszczona

Założmy, że:

- $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  jest funkcjonałem mającym ciągłe pochodne cząstkowe w  $\mathbf{R}^n$

$$V \in C^1(\mathbf{R}^n),$$

- $Z_l$  jest zbiorem tych wszystkich  $x \in \mathbf{R}^n$ , dla których  $V(x) < l$ , przy czym  $l$  jest pewnym dodatnim parametrem (porównaj z definicją zbioru poziomicowego)

$$Z_l = \{x \in \mathbf{R}^n : V(x) < l\},$$

- zbiór  $Z_l$  jest obszarem ograniczonym i zawiera punkt  $0 \in \mathbf{R}^n$ ,
- dla wszystkich punktów  $x \in Z_l$ , z wyłączeniem  $x = 0$ , zachodzą dwie podane niżej nierówności silne

$$V(x) > 0$$

oraz

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) = \dot{V}(x) < 0.$$

Wówczas każda trajektoria fazowa systemu (4.5), posiadającego punkt równowagi w zerze, startująca z dowolnego punktu należącego do  $Z_l$ , dąży do zerowego punktu równowagi, gdy  $t \rightarrow \infty$ . Początek układu współrzędnych jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi.

Podane twierdzenie pozwala nie tylko wykazać asymptotyczną stabilność zerowego punktu równowagi (podobnie jak twierdzenie Lapunowa), ale także umożliwia wyznaczenie estymaty (oceny, szacunku) obszaru przyciągania  $D$  tego punktu. Zbiór  $Z_l$  jest podzbiorem rzeczywistego obszaru przyciągania zera  $D$  ( $Z_l \subseteq D$ ). Zazwyczaj jest to podzbiór właściwy ( $Z_l$  jest „mniejszy” od  $D$ ).

Jedno z założeń podanego twierdzenia wymaga, by w zbiorze  $Z_l \setminus \{0\}$  pochodna funkcjonału  $V$  na trajektoriach systemu (4.5) była silnie ujemna. Jeśli założenie to nie jest spełnione, lecz zamiast niego prawdziwy jest słabszy warunek z nierównością słabą, można stosować podane dalej twierdzenie LaSalle’a w pełnej wersji (patrz np. Mitkowski 1991, s. 117).

### Wersja pełna (LaSalle’ i Lefschetz 1966, s. 64; Demidowicz 1972, s. 374)

Założmy, że:

- $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  jest funkcjonałem mającym ciągłe pochodne cząstkowe w  $\mathbf{R}^n$

$$V \in C^1(\mathbf{R}^n),$$

- $Z_l$  jest zbiorem tych wszystkich  $x \in \mathbf{R}^n$ , dla których  $V(x) < l$ , przy czym  $l$  jest pewnym dodatnim parametrem

$$Z_l = \{x \in \mathbf{R}^n : V(x) < l\},$$

- zbiór  $Z_l$  jest obszarem ograniczonym i zawiera punkt  $0 \in \mathbf{R}^n$ ,
- spełnione są następujące nierówności (pierwsza z nich jest silna, druga – słaba)

$$\forall_{\substack{x \in Z_l \\ x \neq 0}} V(x) > 0 \quad (4.6)$$

oraz

$$\forall_{x \in Z_l} \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \dot{V}(x) \leq 0, \quad (4.7)$$

- $E$  jest zbiorem tych wszystkich  $x$  należących do  $Z_l$ , dla których pochodna funkcjonału  $V(x)$  na trajektoriach systemu (4.5) zeruje się

$$E = \{ x \in Z_l : \dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) = 0 \},$$

- $M$  jest niepustym i maksymalnym zbiorem inwariantnym zawartym w  $E$

$$M \subset E.$$

Wówczas każde rozwiązanie równania (4.5), startujące z dowolnego punktu należącego do  $Z_l$ , dąży do  $M$  przy  $t \rightarrow \infty$ .

Uwaga 1

Jeżeli warunek (4.7) zastąpimy nierównością

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \in Z_l \text{ i } x \neq 0$$

to  $M = \{0\}$ . Wtedy każde rozwiązanie równania (4.5), startujące z obszaru  $Z_l$ , dąży do początku układu współrzędnych w  $\mathbf{R}^n$  przy  $t \rightarrow \infty$ . Przypadek ten stanowi treść podanej nieco wcześniej uproszczonej wersji twierdzenia. Zbiór  $Z_l$  stanowi wówczas estymatę obszaru przyciągania zerowego punktu równowagi Często rzeczywisty zbiór przyciągania jest większy (w sensie inkluzji zbiorów) od zbioru  $Z_l$ .

Uwaga 2 (LaSalle i Lefschetz 1996, s. 73)

Jeżeli warunek (4.6) zastąpimy nierównością

$$V(x) > 0, \quad x \neq 0, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

oraz warunek (4.7) rozszerzymy następująco

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \neq 0, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

i jeśli ponadto  $V(x) \rightarrow \infty$  przy  $\|x\| \rightarrow \infty$ , to  $0 \in \mathbf{R}^n$  jest globalnie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi (rozwiązanie  $x \equiv 0$  jest globalnie asymptotycznie stabilne).

W pełnej wersji twierdzenia LaSalle'a, obok zbioru  $Z_l$  pojawiają się dwa dodatkowe zbiory:  $E$  i  $M$ . Relacje między nimi zostaną wyjaśnione w zamieszczonym nieco dalej komentarzu oraz w przykładzie obliczeniowym na końcu rozdziału.

## Wielkość przybliżonego obszaru przyciągania

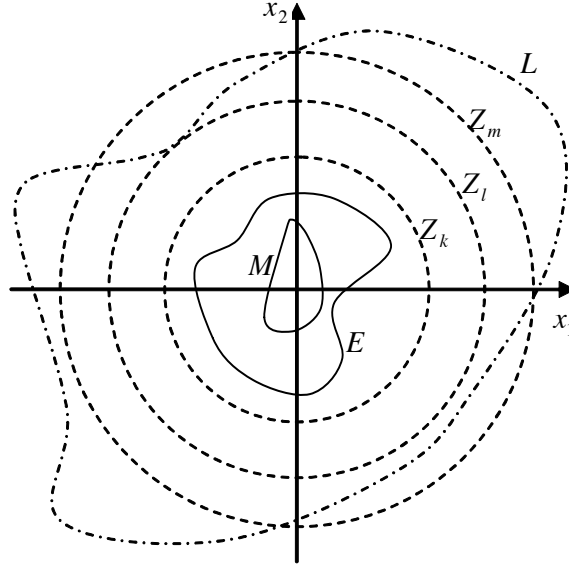
Twierdzenie LaSalle'a pozwala, w niektórych przypadkach, wyznaczyć estymatę (pewne przybliżenie) obszaru przyciągania asymptotycznie stabilnego punktu równowagi. Estymata ta jest zazwyczaj mniejsza od faktycznego obszaru przyciągania (stanowi jego podzbiór właściwy). O wielkości i kształcie estymaty obszaru przyciągania decyduje zarówno postać użytego funkcjonału, jak również wartość parametru  $l$ , występującego w twierdzeniu. Zazwyczaj zwiększanie wartości  $l$  powoduje powiększanie zbioru  $Z_l$  i tym samym zwiększanie estymaty obszaru przyciągania. Z drugiej strony, jeśli wartość  $l$  zwiększy się nadmiernie, naruszony zostanie jeden z warunków twierdzenia, mówiący o



niedodatności pochodnej funkcjonału na trajektoriach systemu. Dobierając parametr  $l$  należy nadać mu największą wartość, przy której spełnione są jeszcze założenia twierdzenia.

### Zbiory występujące w twierdzeniu LaSalle'a

W twierdzeniu LaSalle'a zdefiniowano zbiory  $Z_l$ ,  $E$ ,  $M$  oraz podano ich własności i relacje, jakie między nimi zachodzą. Schematyczny przykład tych zbiorów dla systemu drugiego rzędu przedstawiono na rysunku 4.3.



Rys. 4.3. Ilustracja do twierdzenia LaSalle'a

Zbiór  $Z_l$  jest określony przez warunek:  $V(x) < l$  (porównaj z definicją zbioru poziomowego). Kształt  $Z_l$  zależy więc od przyjętego funkcjonału  $V(x)$ , nie zależy natomiast od postaci badanego systemu dynamicznego, opisanego równaniem stanu (4.1). Ponieważ nierówność  $V(x) < l$  jest silna, zbiór  $Z_l$  jest otwarty. Przedstawiony na powyższym rysunku przykładowy zbiór  $Z_l$  odpowiada następującemu funkcjonałowi:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Poziomice tego funkcjonału są okręgami.

Zbiór  $E$  jest podzbiorem zbioru  $Z_l$ . Można go wyznaczyć, rozwiązując równanie

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = 0 \text{ dla } x \in Z_l$$

Zbiór  $L$  umieszczony na rysunku to przykładowy zbiór, w którym pochodna po czasie funkcjonału  $V(x)$ , wyznaczana na trajektoriach systemu, jest niedodatnia

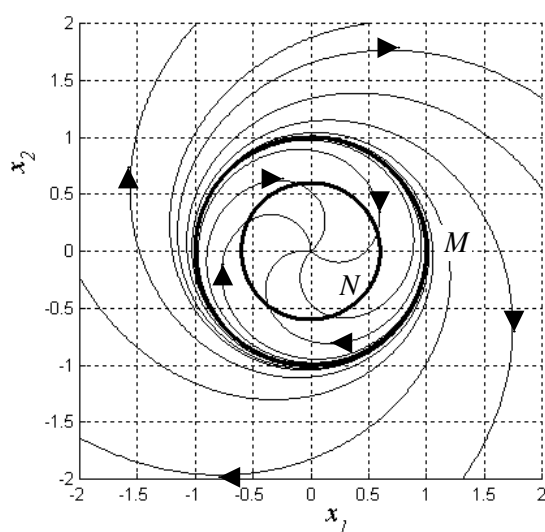
$$L = \{x \in \mathbf{R}^2 : \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \dot{V}(x) \leq 0\}$$

Zbiór  $L$  zaznaczono pomocniczo, by wyjaśnić sposób doboru wartości parametru  $l$ . Gdyby zamiast  $l$  przyjąć większą od niego wartość  $m > l$ , odpowiadający jej zbiór  $Z_m$  nie zawierałby się w  $L$  i wobec tego nie byłoby spełnione jedno z założeń twierdzenia LaSalle'a, a mianowicie

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in Z_m$$

Gdyby zamiast  $l$  przyjąć mniejszą od niego wartość  $k < l$ , zbiór  $Z_k$  spełniałby wprawdzie założenia twierdzenia, lecz byłby mniejszy od  $Z_l$ , a zazwyczaj poszukujemy największego zbioru  $Z_l$ , jaki możemy uzyskać przy pomocy danego funkcjonału. Dlatego parametr  $l$  najlepiej jest dobrać tak, by brzeg zbioru  $Z_l$  „dotknął” brzegu zbioru  $L$ .

Na rysunku 4.4 przedstawiono rodzinę trajektorii fazowych pewnego przykładowego systemu dynamicznego i zaznaczono dwa zbiory  $M$  i  $N$ , będące kołami. Zbiór  $M$  jest zbiorem inwariantnym dla tego systemu (niestabilny cykl graniczny). Zbiór  $\{0\}$  jest również zbiorem inwariantnym. Natomiast okrąg  $N$  wraz ze swoim wnętrzem stanowi pewną estymatę zbioru przyciągania asymptotycznego (zerowego punktu równowagi).



Rys. 4.4. Zbiory inwariantne  $M$  i  $\{0\}$ .  $N$  nie jest zbiorem inwariantnym

## Komentarze

O stabilności punktu równowagi  $x^*$  decyduje zachowanie się systemu w jego bezpośrednim otoczeniu, a nie w samym tym punkcie. W punkcie równowagi – zgodnie z jego definicją – pochodne zmiennych stanu zerują się. System pozostaje w tym punkcie dowolnie długo.

Należy pamiętać o istotnej różnicy pomiędzy zagadnieniem stabilności systemów liniowych i nieliniowych. W przypadku systemów liniowych stabilność, niestabilność lub asymptotyczna stabilność mają charakter globalny, to znaczy wszystkie trajektorie systemu (w tym trajektorie stałe) posiadają taką samą własność stabilności. System asymptotycznie stabilny jest zarazem systemem globalnie asymptotycznie stabilnym. W przypadku systemów nieliniowych poszczególne jego punkty równowagi mogą posiadać odmienne własności stabilności. Np. w układzie nieliniowym mogą istnieć obok siebie punkty równowagi stabilne i niestabilne. Dla asymptotycznie stabilnych punktów równowagi interesującym zagadnieniem jest określenie obszarów przyciągania. Jeśli system posiada więcej niż jeden punkt równowagi, to żaden z nich nie może być globalnie asymptotycznie stabilny. Wynika to z prostego faktu, że drugi punkt nie może należeć do obszaru przyciągania pierwszego, bo jest rozwiązaniem stałym.

Ciekawymi trajektoriami fazowymi, które mogą występować w systemach nieliniowych, są cykle graniczne, które mogą być (asymptotycznie) stabilne lub niestabilne. Cyklem jest izolowana,

zamknięta trajektoria w przestrzeni fazowej stanów. Cykl, do którego zbiegają asymptotycznie trajektorie startujące z punktów pewnego otoczenia cyklu jest cyklem stabilnym. Jeżeli przy wzroście czasu trajektorie oddalają się od cyklu, to cykl jest niestabilny. Istnienie cyklu granicznego w układach nieliniowych rzędu drugiego w przestrzeni  $\mathbf{R}^2$  można wykazać stosując kryterium Poincare-Bendixsona (np. Mitkowski 2000, s. 70).

### Niezerowe punkty równowagi

W twierdzeniach Lapunowa i LaSalle'a mowa jest o zerowym punkcie równowagi. Niech  $f(x^*) = 0$ . By przy pomocy tych twierdzeń badać stabilność niezerowego punktu równowagi  $x^*$  systemu (4.1), konieczne jest zastosowanie transformacji zmiennych stanu

$$x(t) = \xi(t) + x^* \quad (4.8)$$

Po wstawieniu wyrażenia (4.8) do (4.1) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\xi(t) + x^*) &= f(x^* + \xi(t)) = g(\xi(t)) \\ \dot{\xi}(t) &= g(\xi(t)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Przekształcając wzór skorzystano z faktu zerowania się pochodnej ze stałej wartości  $x^*$ . Badanie stabilności zerowego punktu równowagi  $\xi^* = 0$  systemu (4.9) jest równoważne badaniu stabilności niezerowego punktu równowagi  $x^* \neq 0$  systemu (4.1).

## 4.4. Przebieg ćwiczenia

W trakcie zajęć należy zbadać dwa podane niżej nieliniowe systemy dynamiczne.

### Zadanie 1

Wyznaczyć punkty równowagi systemu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 2x_1^2(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) \end{aligned}$$

Przy pomocy poznanych twierdzeń zbadać stabilność punktu równowagi, stosując kolejno dwa różne funkcjonale

$$V_1(x) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2$$

i

$$V_2(x) = \frac{x_1^2}{1 - x_1x_2} + x_2^2.$$

Dla każdego z nich należy:

- znaleźć analitycznie estymatę obszaru atrakcji asymptotycznie stabilnego punktu równowagi,
- wyznaczyć symulacyjnie rodzinę trajektorii badanego systemu. Na tej podstawie oszacować rzeczywisty kształt obszaru przyciągania. Na otrzymanym portrecie fazowym nanieść brzegi dwóch uzyskanych estymat obszaru przyciągania.

Funkcjonał  $V_2$  nie spełnia założeń twierdzenia LaSalle'a, ponieważ nie jest określony na całej przestrzeni  $\mathbf{R}^2$ . Twierdzenie w podanym wcześniej brzmieniu nie ma więc zastosowania do tego przypadku. Można tu natomiast skorzystać ze zmodyfikowanej wersji twierdzenia, w której wystarczy,

by funkcjonal  $V$  był określony w pewnym niepustym otoczeniu zera  $\Omega$ , a niekoniecznie w całej przestrzeni  $\mathbf{R}^n$

$$V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

Zbiór  $Z_l$  określa się wówczas następująco

$$Z_l = \{ x \in \Omega : V(x) < l \}$$

Dodatkowe założenie, nie występujące w poprzedniej wersji, wymaga rozłączności brzegów zbioru  $Z_l$  i otoczenia  $\Omega$  (brzegi zbiorów  $Z_l$  i  $\Omega$  nie mogą mieć punktów wspólnych)

$$\partial Z_l \cap \partial \Omega = \emptyset$$

By skorzystać ze zmienionej wersji twierdzenia, należy pomocniczo określić naturalną dziedzinę funkcjonału  $V_2$ , by na tej podstawie móc wyznaczyć otoczenie  $\Omega$ .

## Zadanie 2

Wyznaczyć punkt równowagi systemu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

Zbadać jego stabilność przy pomocy drugiej metody Lapunowa. Wyznaczyć estymatę obszaru przyciągania na dwa sposoby:

- z twierdzenia LaSalle'a,
- na podstawie eksperymentów numerycznych.

Do badania stabilności wykorzystać funkcjonal o następującej postaci

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

W twierdzeniu LaSalle'a należy przyjąć  $l = 1/2$ . Przeprowadzić symulacje systemu dla różnych warunków początkowych. Można do tego celu wykorzystać model zbudowany w Simulinku. Wykreślić uzyskaną rodzinę trajektorii. Na portret fazowy nanieść brzeg zbioru  $Z_l$  otrzymanego na podstawie twierdzenia LaSalle'a. Jedną z trajektorii systemu jest zamknięta krzywa, która zarazem stanowi brzeg obszaru atrakcji punktu równowagi. Spróbować numerycznie uzyskać tę trajektorię. Zaznaczyć ją na portrecie fazowym. Dla porównania zbadać rodzaj stabilności zerowego punktu równowagi metodą linearyzacji.

## 4.5. Zadania do rozwiązania

W ramach przygotowania do ćwiczeń należy zbadać stabilność dwóch następujących nieliniowych systemów dynamicznych:

$$\dot{x}(t) = -x^3$$

oraz

$$\dot{x}(t) = -x + x^3$$

Pierwszy z systemów posiada tylko zerowy punkt równowagi. Do zbadania jego stabilności należy zastosować kolejno pierwszą i drugą metodę Lapunowa z prostym funkcjonalem postaci

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

W tym przypadku metoda linearyzacji nie daje odpowiedzi na pytanie o stabilność, natomiast metoda funkcjonałów – owszem. Czy zerowy punkt równowagi jest globalnie asymptotycznie stabilny?

Drugi system posiada trzy punkty równowagi. Należy zbadać stabilność ich wszystkich, a następnie przy pomocy twierdzenia LaSalle'a określić estymatę obszaru przyciągania zerowego punktu równowagi. Można wykorzystać funkcjonał  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  oraz przyjąć  $l = 1/2$ . Czy jest uzasadnione przyjęcie  $l > 1/2$ ? Jak zmieni się estymata obszaru przyciągania, jeśli wziąć mniejszą wartość  $l$ ?

## 4.6. Przykład obliczeniowy

Obecnie za pomocą drugiej metody Lapunowa zbadamy stabilność punktów równowagi podanego niżej systemu dynamicznego

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = x_2(t) - \sin x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = -x_1^3(t)\end{aligned}\quad (4.10)$$

Rozpoczynamy od poszukiwania punktów równowagi systemu, przyrównując do zera prawe strony równości (4.10)

$$\begin{aligned}x_2 - \sin x_1 &= 0 \\ -x_1^3 &= 0\end{aligned}$$

Z drugiego równania wynika, że  $x_1 = 0$ . Następnie z pierwszego równania otrzymuje się  $x_2 = 0$ . System (4.10) posiada dokładnie jeden, zerowy punkt równowagi  $x^* = [0 \ 0]^T$ .

Spróbujmy zbadać stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10), korzystając z „energetycznego” kandydata na funkcjonał Lapunowa

$$V_1(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (4.11)$$

Pochodna funkcji (4.11) na trajektoriach systemu (4.10) wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1(x)}{\partial x} f(x) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - \sin x_1 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} = x_1(x_2 - \sin x_1) + x_2(-x_1^3) = \\ &= x_1 x_2 - x_1 \sin x_1 - x_1^3 x_2\end{aligned}\quad (4.12)$$

Można wykazać, że nie istnieje otoczenie zera, w którym wyrażenie (4.12) byłoby wszędzie niedodatnie.

Dla  $x_1 \in (0, \sqrt{2/3})$  zachodzą są nierówności

$$\sin x_1 < x_1 \quad (4.13)$$

$$2 - 3x_1^2 > 0 \quad (4.14)$$

Dla  $x_2 = 3x_1$  prawa strona równości (4.12) przyjmuje postać

$$3x_1^2 - x_1 \sin x_1 - 3x_1^4 \quad (4.15)$$

Korzystając z (4.13) i (4.14), wartość (4.15) można oszacować z dołu

$$3x_1^2 - x_1 \sin x_1 - 3x_1^4 > 3x_1^2 - x_1^2 - 3x_1^4 = x_1^2(2 - 3x_1^2) > 0$$

W dowolnym otoczeniu zera znajdzie się przynajmniej jeden punkt, dla którego  $x_1 \in (0, \sqrt{2/3})$  i  $x_2 = 2x_1$ . W punkcie tym wyrażenie (4.12) przyjmie wartość dodatnią, nie będą więc spełnione założenia twierdzenia. Tak więc (4.11) nie jest funkcjonałem Lapunowa dla systemu (4.10).

Spróbujmy ponownie zbadać stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10), wykorzystując inną kandydaturę na funkcjonał Lapunowa. System (4.10) jest postaci (4.2)

$$\dot{x}_1(t) = x_2 - h(x_1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -g(x_1)$$

z następującymi funkcjami  $h$  i  $g$

$$h(x_1) = \sin x_1$$

$$g(x_1) = x_1^3$$

Dla systemów dynamicznych o takiej strukturze zaleca się użycie następującego „kandydata” na funkcjonał Lapunowa

$$V_2(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi, \quad x = [x_1, x_2]^T \quad (4.16)$$

Uzyskana wówczas pochodna funkcjonału, wyznaczona wzdłuż trajektorii systemu, wyraża się wzorem

$$\frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) = -g(x_1) \cdot h(x_1) \quad (4.17)$$

Stosując wzór (4.16) dla systemu (4.10) otrzymujemy

$$V_2(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \xi^3 d\xi = \frac{1}{2}x_2^2 + \left[ \frac{1}{4}\xi^4 \right]_0^{x_1}$$

$$V_2(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (4.18)$$

Jego pochodna, wyznaczona wzdłuż trajektorii systemu (4.10), wynosi

$$\frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - \sin x_1 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} = x_1^3 x_2 - x_1^3 \sin x_1 - x_1^3 x_2 = -x_1^3 \sin x_1 \quad (4.19)$$

Wynik ten zgadza się ze wzorem (4.17).

Wartość funkcjonału (4.18) w dowolnie dużym otoczeniu zera (z wyłączeniem 0) jest dodatnia

$$\forall_{x \neq 0} V_2(x) > 0$$

Ponadto istnieje otoczenie  $\Omega$  zera, w którym wartość pochodnej (4.19) funkcjonału jest niedodatnia

$$\forall_{x \in \Omega} \frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) \leq 0 \quad (4.20)$$

Otoczeniem takim może być choćby wnętrze koła o środku w punkcie 0 i promieniu mniejszym od  $\pi$  (patrz wzór (4.19)). Stąd, na mocy drugiej metody Lapunowa, wynika stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10).

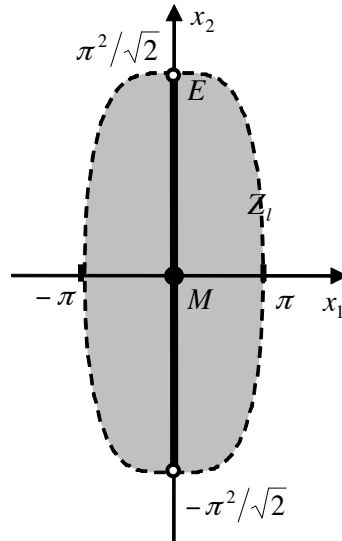
Przy pomocy funkcjonału (4.18) i twierdzenia Lapunowa nie można wykazać asymptotycznej stabilności zerowego punktu równowagi, ponieważ w dowolnie małym otoczeniu zera istnieją takie różne od zera punkty, dla których wyrażenie (4.19) zeruje się (wszystkie punkty postaci  $[0 \ x_2]^T$ ,  $x_2 \in \mathbf{R}$ ). Wobec tego jest spełniona jedynie nierówność słaba (4.20); nie jest natomiast spełniona nierówność silna

$$\forall_{\substack{x \in Q \\ x \neq 0}} \frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) < 0$$

Spróbujmy wykorzystać funkcjonał (4.18) i twierdzenie LaSalle'a. Przyjmijmy  $l = \pi^4/4$ . Wówczas opisany w twierdzeniu zbiór  $Z_l$  ma postać ograniczonego obszaru

$$Z_l = \{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^4/4 + x_2^2/2 < \pi^4/4 \} \quad (4.21)$$

Osie symetrii zbioru  $Z_l$  pokrywają się z osiami układu współrzędnych  $0x_1 \ x_2$  (rysunek 4.5). Zbiór  $Z_l$  nie zawiera swojego brzegu ze względu na nierówność silną w (4.21). Brzeg zbioru  $Z_l$  przecina oś  $0x_1$  w punktach  $-\pi$  i  $\pi$ , natomiast oś  $0x_2$  – w punktach  $-\pi^2/\sqrt{2}$  i  $\pi^2/\sqrt{2}$ .



Rys. 4.5. Ilustracja do przykładu obliczeniowego

Łatwo sprawdzić, że dla wszystkich  $x \in Z_l$  spełniona jest nierówność  $\frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$ . Gdybyśmy przyjęli większą wartość  $l$ , wówczas do zbioru  $Z_l$  należałby przynajmniej jeden punkt, dla którego  $\pi < x_1 < 2\pi$ . Nierówność  $\frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$  nie byłaby w tym punkcie spełniona. Maksymalna wartość  $l$ , którą można przyjąć, nie naruszając założeń twierdzenia, wynosi  $\pi^4/4$ .

Następnie poszukujemy zbioru  $E$ , zdefiniowanego w twierdzeniu LaSalle'a, rozwiązując równanie

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) &= 0, \quad x \in Z_l \\ -x_1^3 \sin x_1 &= 0, \quad x \in Z_l \end{aligned}$$

Otrzymany zbiór  $E$  jest odcinkiem leżącym na osi  $0x_2$ , rozciągającym się między punktami  $[0 \ -\pi^2/\sqrt{2}]^T$  i  $[0 \ \pi^2/\sqrt{2}]^T$ , lecz nie zawierającym tych punktów (gdyż brzeg zbioru  $Z_l$  nie należy do  $Z_l$ ).

$$E = \{[x_1 \ x_2]^T \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 0, x_2 \in (-\pi^2/\sqrt{2}, \pi^2/\sqrt{2})\} = \{0\} \times (-\pi^2/\sqrt{2}, \pi^2/\sqrt{2})$$

Następnie szukamy największego zbioru inwariantnego  $M$ , zawartego w  $E$ . Zbiór ten będzie zawierał tylko element zerowy

$$M = \{0\}$$

Żaden inny punkt odcinka  $E$  (poza zerem) nie należy do zbioru inwariantnego  $M$ . By uzasadnić to stwierdzenie, założmy chwilowo, że do zbioru  $M$  należy pewien niezerowy punkt z  $E$ . Na podstawie równania (4.10) wyznaczmy dla niego wartość pochodnej  $\dot{x}_1(t)$ . Jest ona niezerowa. Skoro  $\dot{x}_1(t) \neq 0$ , to  $x_1(t)$  zmienia się w miarę upływu czasu; nie może zatem pozostać równe 0, a punkt o niezerowej pierwszej współrzędnej nie należy do zbioru  $E$ . Oznacza to, że trajektoria startująca z niezerowego punktu należącego do  $E$  opuści zbiór  $E$ . Wobec inkluzji  $M \subset E$  oznacza to również, że trajektoria ta nie może pozostać w  $M$ . W związku z tym  $M$  może zawierać wyłącznie punkt  $[0 \ 0]^T$ .

Na mocy twierdzenia LaSalle'a zerowy punkt równowagi systemu (4.10) jest asymptotycznie stabilny.

Funkcjonał (4.18), użyty w twierdzeniu Lapunowa, pozwolił wykazać jedynie stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10). Przy pomocy tego samego funkcyjonału i twierdzenia LaSalle'a pokazaliśmy własność silniejszą – asymptotyczną stabilność.

Na zakończenie zbadajmy stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10) przy pomocy pierwszej metody Lapunowa. Liniowe przybliżenie nieliniowego systemu (4.10) w zerze ma postać

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Macierz  $A$  jest wartością macierzy Jacobiego funkcji  $f$  w punkcie równowagi  $x = 0$

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} -\cos x & 1 \\ -3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$f(x) = [f_1(x) \ f_2(x)]^T, \quad x = [x_1 \ x_2]^T$$

Ponieważ  $A$  jest macierzą trójkątną górną, jej wartości własne można odczytać wprost z przekątnej głównej

$$\lambda(A) = \{0, -1\}$$

Jedna z wartości własnych macierzy  $A$  jest równa zeru. Wobec tego pierwsza metoda Lapunowa nie rozstrzyga kwestii stabilności.

## 4.7. Literatura

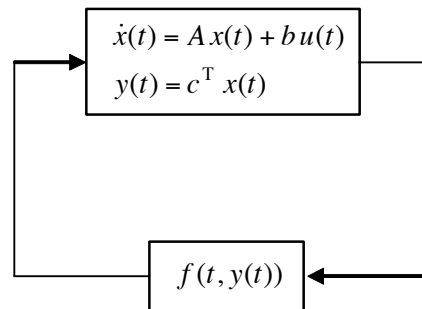
- Demidowicz B. P. (1972): *Matematyczna teoria stabilności*. WNT, Warszawa.
- Guckenheimer J., Holmes P. (1993): *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, New York.
- Kaczorek T. (1977): *Teoria układów regulacji automatycznej*. WNT, Warszawa.
- LaSalle J., Lefschetz S. (1966): *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej*. PWN, Warszawa.
- Leja F. (1956): *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*. PWN, Warszawa.
- Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa AGH, Kraków.
- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.



- Mitkowski W. (2000): *Systemy dynamiczne. Materiały uzupełniające do wykładów*. Wydawnictwa Wydziału EAIiE AGH, Kraków.
- Ombach J. (1999): *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo - Maple*. Wydawnictwo UJ, Kraków.
- Żakowski W., Kołodziej W. (1992): *Matematyka. Podręczniki akademickie. Część II*, WNT, Warszawa

## 5. Kryterium koła i twierdzenie Popova

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie się z dwoma twierdzeniami. Pierwsze z nich jest znane pod nazwą „kryterium koła”, zaś drugie to twierdzenie Popova (porównaj np. Mitkowski 1991, s. 104 i 112). Oba służą do badania stabilności nieliniowych systemów dynamicznych, których struktura może zostać przedstawiona jak na rysunku 5.1. W skład pokazanego tu układu wchodzi stacjonarny, liniowy system dynamiczny o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO – ang. *Single Input, Single Output*), objęty sprzężeniem zwrotnym  $u(t) = f(t, y(t))$ .



Rys. 5.1. Układ regulacji

### 5.1. Kryterium koła

Dany jest liniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy system dynamiczny (5.1) o jednym wejściu i jednym wyjściu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$t \geq 0$$

$$x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad u(t) \in \mathbf{R}, \quad y(t) \in \mathbf{R}, \quad b \in \mathbf{R}^n, \quad c \in \mathbf{R}^n, \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

Systemowi temu odpowiada transmitancja

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b \quad (5.2)$$

Założmy, że macierz stanu  $A$  systemu nie posiada wartości własnych na osi urojonej

$$\forall_{\omega \in \mathbf{R}} \det(j\omega I - A) \neq 0$$

System (5.1) objęty jest nieliniowym, statycznym, niestacjonarnym sprzężeniem zwrotnym

$$u(t) = f(t, y(t)), \quad f : [0, \infty) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad (5.3)$$

System zamknięty (porównaj z rysunkiem 5.1) opisany jest równaniem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b f(t, c^T x(t)) \quad (5.4)$$

Zakładamy taką postać funkcji  $f$ , że istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (5.4) dla każdego  $t \geq 0$  i dla każdego warunku początkowego. Niech funkcja  $f$  spełnia następujące warunki

$$\forall_{t \geq 0} \forall_{y \in \mathbf{R}} \quad m_1 y^2 \leq y f(t, y) \leq m_2 y^2 \quad (5.5a)$$

$$\forall_{t \geq 0} \quad f(t, 0) = 0 \quad (5.5b)$$

gdzie  $m_1$  i  $m_2$  są ustalonymi liczbami rzeczywistymi ( $m_1 \leq m_2$ ). Niech ponadto istnieje  $m_0 \in [m_1, m_2]$ , takie że  $A + b m_0 c^T$  jest macierzą wykładniczo stabilną, czyli  $\operatorname{Re} \lambda(A + b m_0 c^T) < 0$ . Niech dla każdego  $\omega \in \mathbf{R}$  zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re} ([1 - m_1 G(j\omega)][1 - m_2 G(j\omega)]^*) > 0 \quad (5.6)$$

Gwiazdka występująca we wzorze (5.6) oznacza operację sprzężenia zespolonego. Dla przypadku, gdy  $m_1$  i  $m_2$  są niezerowe i jednakowego znaku, wymaga się dodatkowo, by charakterystyka amplitudowo-fazowa, odpowiadająca transmitancji (5.2), nie obejmowała okręgu przedstawionego w tabeli 5.1 w komórce 3D lub 4D.

Jeśli spełnione są wszystkie podane wyżej założenia, to zerowe rozwiązanie układu zamkniętego (5.4) jest globalnie jednostajnie wykładniczo stabilne, czyli istnieją dodatnie stałe  $C$  i  $\alpha$ , takie że dowolne rozwiązanie równania (5.4) spełnia nierówność

$$\forall_{t_0 \geq 0} \forall_{t \geq t_0} \quad \|x(t)\| \leq C e^{-(t-t_0)\alpha} \|x(t_0)\|$$

## Komentarze

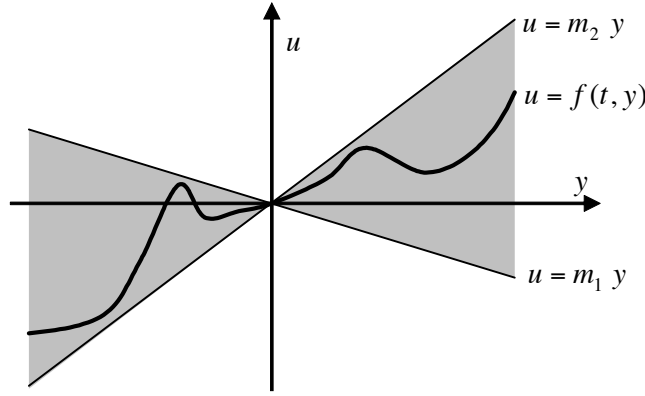
Założenia twierdzenia wymagają, by istniał regulator proporcjonalny o wzmacnieniu  $m_0 \in [m_1, m_2]$ , dla którego system zamknięty

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b m_0 c^T x(t)$$

jest wykładniczo stabilny. W przypadku liniowego, stacjonarnego i skończonego wymiarowego systemu dynamicznego, wykładnicza stabilność jest równoważna asymptotycznej stabilności ( $\operatorname{Re} \lambda(A + b m_0 c^T) < 0$ ). W twierdzeniu nie stawia się natomiast warunków co do stabilności macierzy  $A$ . W szczególności system otwarty (5.1) może być niestabilny.

## Graficzna interpretacja nierówności (5.5a)

Funkcja  $f(t, \cdot)$  spełnia nierówność (5.5a) i równość (5.5b), jeśli jej wykres zawiera się w sektorze pokazanym na rysunku 5.2. W dalszej części rozdziału sektor ten będziemy nazywać *sektorem dopuszczalnym dla nieliniowości  $f$  w kryterium koła* lub krótko *sektorem dopuszczalnym*, jeśli spełnione będą wszystkie założenia zacytowanego powyżej twierdzenia.



Rys. 5.2. Sektor dopuszczalny dla nieliniowości  $f$  w kryterium koła

Warunek zawierania się wykresu funkcji w sektorze dla  $y > 0$  można zapisać następująco

$$\forall_{t \geq 0} \quad m_1 y \leq f(t, y) \leq m_2 y$$

natomiast dla  $y < 0$

$$\forall_{t \geq 0} \quad m_1 y \geq f(t, y) \geq m_2 y$$

Mnożąc dwie podane wyżej nierówności podwójne przez  $y$  (należy pamiętać o zmianie znaku drugiej nierówności ze względu na mnożenie przez liczbę ujemną) otrzymujemy warunek (5.5a). Ponieważ (5.5a) jest nierównością słabą, otrzymany sektor jest zbiorem domkniętym, to znaczy zawiera swój brzeg, który w tym przypadku stanowią proste o równaniach  $u = m_1 y$  i  $u = m_2 y$ . Wykres funkcji  $f$  spełniającej warunki (5.5a) i (5.5b) może leżeć zarówno we wnętrzu sektora, jak i na ograniczających go prostych. Funkcja  $f$  (5.3) jest niestacjonarna (zależy w sposób jawny od czasu; jednym z jej argumentów jest wprost czas). Oznacza to, że położenie jej wykresu na płaszczyźnie w szarym sektorze może ulegać zmianie w czasie. Aby nierówność (5.5a) była spełniona, w każdej chwili czasu  $t \geq 0$  wykres funkcji  $f$  musi w całości leżeć w sektorze dopuszczalnym. Oczywiście kryterium koła może być użyte również do badania przypadku ze stacjonarną funkcją  $f$ .

### Graficzna interpretacja nierówności częstotliwościowej (5.6)

Jeśli oznaczyć część rzeczywistą transmitancji widmowej  $G(j\omega)$  przez  $P$ , zaś część urojoną przez  $Q$  (pomijając dla wygody zapisu argument  $\omega$ ), to nierówność częstotliwościowa przybiera postać

$$\operatorname{Re}([1 - m_1 P - j m_1 Q][1 - m_2 P - j m_2 Q]^*) > 0$$

W wyniku kolejnych przekształceń otrzymujemy

$$(1 - m_1 P)(1 - m_2 P) + m_1 m_2 Q^2 > 0$$

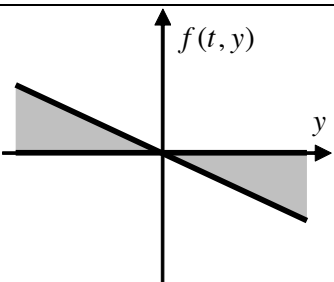
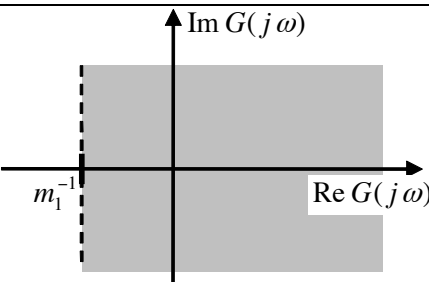
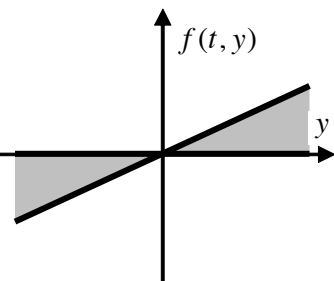
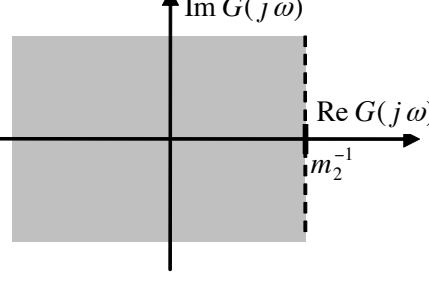
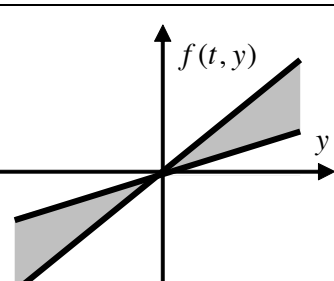
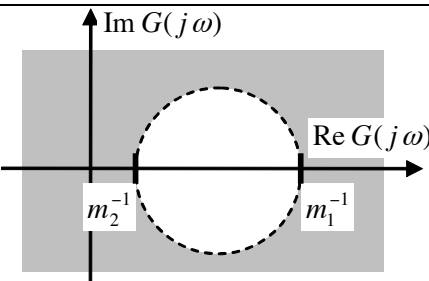
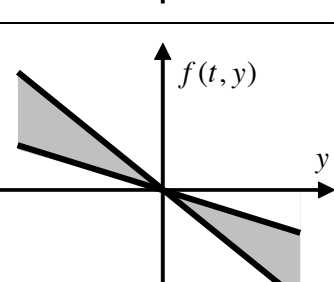
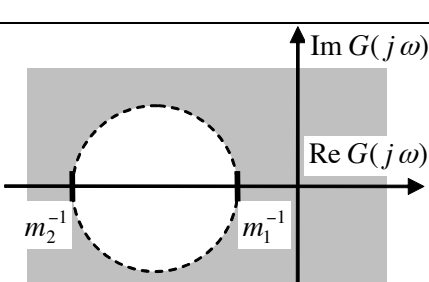
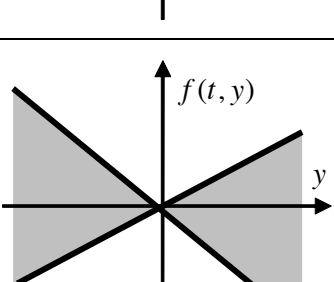
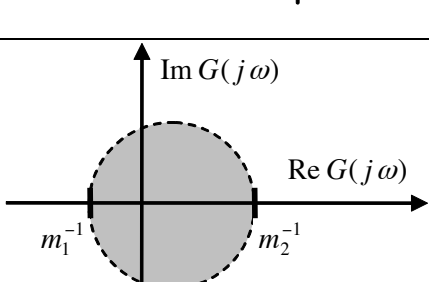
$$1 - (m_1 + m_2)P + m_1 m_2 (P^2 + Q^2) > 0$$

Jeśli w ostatniej nierówności zastąpić znak większości znakiem równości, otrzymuje się równanie okręgu lub prostej pionowej (w układzie współrzędnych  $OPQ$ ), w zależności od wartości parametrów  $m_1$  i  $m_2$ . Możliwe przypadki zebrane są w tabeli 5.1.

Nierówność częstotliwościowa (5.6) jest spełniona wówczas, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa odpowiadająca transmitancji (5.2) w całości leży w „szarym obszarze” na rysunkach z kolumny D tabeli. Dla przypadków z wierszy 1 i 2 charakterystyka musi leżeć w całości odpowiednio na prawo lub na lewo od prostej  $\operatorname{Re} G(j\omega) = m_1^{-1}$  lub  $\operatorname{Re} G(j\omega) = m_2^{-1}$ . W przypadkach z wierszy 4 i 5 charakterystyka musi leżeć na zewnątrz okręgu. W przypadku z wiersza 5 charakterystyka powinna

znajdować się w całości we wnętrzu okręgu. Założenia kryterium koła wymagają dodatkowo, by charakterystyka amplitudowo-fazowa nie obejmowała okręgów z wierszy 4 i 5.

Tab. 5.1. Graficzne interpretacje nierówności (5.5) i (5.6)

A	B	C	D
1	$m_1 < 0$ $m_2 = 0$		
2	$m_1 = 0$ $m_2 > 0$		
3	$m_2 > m_1$ $m_1 > 0$		
4	$m_2 > m_1$ $m_2 < 0$		
5	$m_1 < 0$ $m_2 > 0$		

Ponieważ (5.6) jest nierównością silną, obszary z kolumny D w tabeli są zbiorami otwartymi – nie zawierają swoich brzegów. Żaden punkt charakterystyki amplitudowo-fazowej  $G(j\omega)$  nie może leżeć na narysowanej linii przerywaną prostej (wiersze 1 i 2 tabeli) bądź okręgu (wiersze 3, 4 i 5).

### Warunki dostateczne

Twierdzenie formułuje warunki dostateczne, ale nie konieczne. Jeśli założenia twierdzenia są spełnione, zachodzi podana w tezie własność wykładniczej stabilności. Jeśli natomiast założenia spełnione nie są, żadnych wniosków co do stabilności wyciągać nie można.

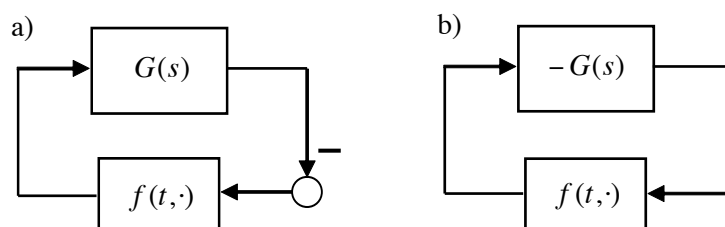
Typowy sposób korzystania z twierdzenia pozwala znaleźć sektor dopuszczalny, gdy znany jest system dynamiczny (5.1). Kolejność czynności jest następująca:

1. Znajdź transmitancję liniowej części układu.
2. Narysuj charakterystykę amplitudowo-fazową systemu (5.1).  
Wystarczy wykreślić część charakterystyki dla  $\omega \geq 0$ , gdyż część dla  $\omega \leq 0$  jest jej symetrycznym odbiciem względem osi  $OP$ . W związku z tym obie części charakterystyki jednocześnie spełniają nierówność (5.6) lub jednocześnie jej nie spełniają.
3. Znajdź parametry  $m_1$  lub  $m_2$ , które spełniają nierówność częstotliwościową (5.6). Skorzystaj przy tym z interpretacji geometrycznej.
4. Sprawdź, czy istnieje  $m_0 \in [m_1, m_2]$  gwarantujące asymptotyczną stabilność macierzy  $A + b m_0 c^T$ .
5. Znalezione parametry wyznaczają sektor dopuszczalny w kryterium koła.

Naturalne jest dążenie do osiągnięcia jak największego sektora. Najbardziej pożądanym jest więc przypadek z 5-go wiersza tabeli powyżej. Zachodzi on tylko wówczas, gdy całą charakterystykę częstotliwościową da się zamknąć wewnątrz odpowiedniego okręgu. Należy wybierać okrąg jak najmniejszy; wówczas wartości bezwzględne  $m_1$  i  $m_2$  są duże, a sektor dopuszczalny – wielki.

### Dodatnie sprzężenie zwrotne

Wzór (5.3) występujący w kryterium koła opisuje dodatnie sprzężenie zwrotne. Natomiast w praktycznych zastosowaniach spotyka się częściej układy z ujemnym sprzężeniem zwrotnym (rysunek 5.3a). By móc w takich przypadkach stosować kryterium koła, należy włączyć znak „minus”, odpowiadający ujemnemu sprzężeniu zwrotnemu, do transmitancji (rysunek 5.3b). Układ po transformacji złożony jest z nowej transmitancji  $-G(s)$  i niezmienionej funkcji  $f$ . Ponieważ występuje w nim dodatnie sprzężenie zwrotne, więc można stosować do niego kryterium koła, pamiętając o zamianie  $G(s)$  na  $-G(s)$ .



Rys. 5.3. Schematy blokowe układów regulacji z ujemnym (a) i dodatnim (b) sprzężeniem zwrotnym

## 5.2. Twierdzenie Popova

Dany jest liniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy system dynamiczny (5.7) o jednym wejściu i jednym wyjściu

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t)\end{aligned}\tag{5.7}$$

$$x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad u(t) \in \mathbf{R}, \quad y(t) \in \mathbf{R}$$

Systemowi temu odpowiada transmitancja

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

Niech macierz  $A$  systemu będzie wykładniczo (asymptotycznie) stabilna. System (5.1) objęty jest nieliniowym, statycznym, stacjonarnym sprzężeniem zwrotnym

$$u(t) = f(y(t))$$

ze skalarną funkcją  $f$  klasy  $C^1$  spełniającą następujący warunek

$$\forall_{y \in \mathbf{R}} \quad 0 \leq y f(y) \leq m y^2 \tag{5.8a}$$

gdzie  $m$  jest pewną liczbą rzeczywistą nieujemną. Jeżeli istnieje liczba  $q \in \mathbf{R}$ , taka że dla każdego  $\omega \in \mathbf{R}$  zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re} G(j\omega) - q\omega \operatorname{Im} G(j\omega) < \frac{1}{m} \tag{5.9a}$$

to zamknięty układ regulacji opisany równością

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b f(c^T x(t))$$

jest globalnie asymptotycznie stabilny (np. Mitkowski 1996, s. 181).

Jeśli w powyższym twierdzeniu założyć dodatkowo, że  $q \geq 0$ , to nierówności (5.8a) i (5.9a) można zastąpić odpowiednio przez

$$\forall_{y \in \mathbf{R}} \quad 0 \leq y f(y) \tag{5.8b}$$

$$\operatorname{Re} G(j\omega) - q\omega \operatorname{Im} G(j\omega) < 0 \tag{5.9b}$$

Odpowiada to przypadkowi, gdy dopuszczamy  $m = \infty$ .

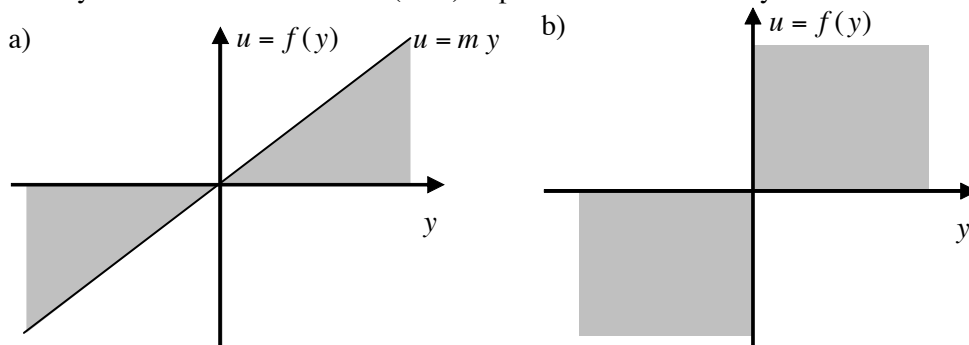
Uogólnioną postać twierdzenia Popova, uwzględniającą funkcje  $f$  lokalnie spełniające założenia twierdzenia oraz umożliwiającą wyznaczenie estymat obszaru przyciągania, można znaleźć w pracy (Grabowski 1996, s. 74 – wersja internetowa).

### Komentarz

Założenia twierdzenia wymagają, by system (5.7) (bez sprzężenia zwrotnego) był wykładniczo stabilny, co dla systemu liniowego, stacjonarnego i skończenie wymiarowego jest równoważne wymaganiu asymptotycznej stabilności. Wprowadzenie odpowiedniego sprzężenia zwrotnego może polepszyć współczynnik tłumienia układu otwartego.

## Graficzna interpretacja nierówności (5.8)

Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^1$  spełnia nierówność (5.8a), jeśli jej wykres zawiera się w sektorze pokazanym na rysunku 5.4a. Nierówności (5.8b) odpowiada zaś sektor z rysunku 5.4b.



Rys. 5.4. Sektor Popova: a)  $m < \infty$ , b)  $m = \infty$

Sektor z rysunku 5.4a ograniczony jest dwiema prostymi: osią  $0y$  oraz prostą o równaniu  $u = m \cdot y$ . Obie proste należą do sektora, gdyż nierówność (5.8a) jest słaba. Sektor jest zatem zbiorem domkniętym. Każda funkcja klasy  $C^1$ , której wykres zawiera się w tym sektorze, spełnia założenia twierdzenia. Założenie o klasie  $C^1$  i ograniczonej pochodnej funkcji  $f$  gwarantuje istnienie jednoznacznego rozwiązania równania systemu zamkniętego.

Część sektora, która mieści się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, może być opisana następującą nierównością podwójną

$$0 \leq f(y) \leq m \cdot y$$

Część w trzeciej ćwiartce opisuje podobna nierówność, ale z odwróconymi znakami „mniejszy bądź równy”

$$0 \geq f(y) \geq m \cdot y$$

Mnożąc powyższe nierówności stronami przez  $y$ , otrzymujemy nierówność (5.8a), występującą w sformułowaniu twierdzenia.

Sektor z rysunku 5.4b stanowią I i III ćwiartka układu współrzędnych.

## Sektor Popova

Sektor, na który składają się obszary wyróżnione na rysunku 5.4 szarym kolorem, wraz z ograniczającymi je prostymi, nosi nazwę *sektora Popova*, o ile spełnione są założenia twierdzenia Popova.

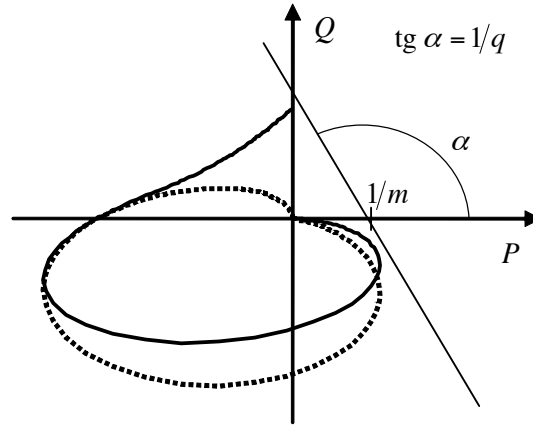
## Graficzna interpretacja nierówności częstotliwościowej (5.9)

W nierównościach (5.9a) i (5.9b) występują części: rzeczywista i urojona transmitancji widmowej. Oznaczmy je odpowiednio przez  $P(\omega)$  oraz przez  $Q(\omega)$

$$P(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega), \quad Q(\omega) = \operatorname{Im} G(j\omega), \quad G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Wykres przedstawiający wzajemną zależność  $P$  i  $Q$  na płaszczyźnie zespolonej (w układzie współrzędnych  $OPQ$ ) to znana charakterystyka amplitudowo-fazowa (wykres Nyquista). Jej przykład przedstawiono linią przerywaną na rysunku 5.5.





Rys. 5.5. Pierwotna (linia przerywana) i zmodyfikowana (linia ciągła) charakterystyka amplitudowo-fazowa

W nierównościach częstotliwościowych (5.9a) i (5.9b) część urojona transmitancji  $Q(\omega)$  jest pomnożona przez pulsację  $\omega$ . Wprowadzamy w związku z tym tak zwaną *transmitancję zmodyfikowaną*

$$\tilde{G}(j\omega) = \tilde{P}(\omega) + j \cdot \tilde{Q}(\omega), \quad \tilde{P}(\omega) = P(\omega), \quad \tilde{Q}(\omega) = \omega \cdot Q(\omega)$$

Wykres przedstawiający wzajemną zależność  $\tilde{P}$  i  $\tilde{Q}$  zwany jest *charakterystyką zmodyfikowaną* (linia ciągła na rysunku 5.5). Jest on dogodny dla graficznego zbadania, czy zachodzi nierówność częstotliwościowa (5.9a). Nierówność ta przyjmuje w nowych oznaczeniach postać

$$\tilde{P}(\omega) - q \tilde{Q}(\omega) < \frac{1}{m}$$

Po zamianie znaku nierówności na „równa się” dostaje się równanie linii prostej, przecinającej oś  $\tilde{P}$  w punkcie  $1/m$  i nachylonej do niej pod kątem, którego tangens jest równy  $1/q$  (tak zwana *prosta Popova*). Nierówność częstotliwościowa jest spełniona, gdy zmodyfikowana charakterystyka częstotliwościowa leży w całości na lewo od tej prostej. Pokazano to na rysunku 5.5. Charakterystyka zmodyfikowana i prosta nie mogą mieć punktów wspólnych, ponieważ (5.9a) jest nierównością silną.

Interpretacja graficzna nierówności (5.9b) jest podobna, ale wówczas odpowiednia prosta musi przechodzić przez początek układu współrzędnych  $OPQ$ , a współczynnik  $q$  nie może być ujemny.

Typowy sposób korzystania z twierdzenia Popova jest następujący:

1. Znajdź transmitancję liniowej części układu, sprawdźwszy uprzednio założenie o wykładniczej stabilności macierzy  $A$ .
2. Wyznacz transmitancję zmodyfikowaną i narysuj jej wykres dla  $\omega \in \mathbf{R}$ .  
Ponieważ  $\tilde{G}(j\omega) = \tilde{G}(-j\omega)$ , wystarczy wykreślić zmodyfikowaną charakterystykę tylko dla nieujemnych wartości pulsacji  $\omega$ .
3. Znajdź prostą Popova przecinającą dodatnią półoś  $OP$  jak najbliżej punktu 0 i taką, by zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo-fazowa leżała w całości na lewo od niej. Współrzędna punktu przecięcia prostej Popova z półosią  $OP$  jest równa  $1/m$ .
4. Otrzymana wartość parametru  $m$  określa sektor Popova.

Naturalnym celem jest znalezienie jak najszerszego sektora Popova. Sektor jest tym większy, im większa jest liczba  $m$ . Ponieważ punkt przecięcia osi  $P$  przez prostą ma współrzędną  $1/m$ , więc

poszukiwać należy prostej przecinającej oś jak najbliżej punktu  $[0 \ 0]^T$ , po jej dodatniej stronie. W praktyce prostą „przesuwa” się jak najbardziej w lewo, „obracając” ją zarazem tak, by zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo-fazowa leżała w całości na lewo od niej. Prosta może również przechodzić przez początek układu współrzędnych, co odpowiada przypadkowi  $m = \infty$ , ale wówczas musi być spełniony warunek  $q \geq 0$ .

Istnieje pewne podobieństwo pomiędzy prostą Popowa a prostą o równaniu  $\operatorname{Re} G(j\omega) = 1/m_2$ , występującą w kryterium koła (przypadek z drugiego wiersza tabeli 1). Różnica polega między innymi na możliwości „pochylenia” prostej Popowa, co pozwala w pewnych wypadkach na przesunięcie punktu jej przecięcia z osią  $OP$  w kierunku zera. W efekcie wartość  $m$  może być większa od  $m_2$ , a tym samym uzyskany sektor Popowa – „szerszy” od sektora dopuszczalnego w kryterium koła. W przypadku pokazanym na rysunku 5.5 w kryterium koła charakterystyka  $G(j\omega)$ , a zatem i  $\tilde{G}(j\omega)$ , musi leżeć na lewo od prostej pionowej (prostopadłej do osi  $OP$ ).

### Warunki dostateczne

Twierdzenie formułuje warunki dostateczne, ale nie konieczne. Jeśli założenia twierdzenia są spełnione, układ zamknięty jest globalnie asymptotycznie stabilny. Jeśli natomiast założenia nie są spełnione, **nie** można wyciągać żadnych wniosków co do stabilności.

### Sektor Hurwitza

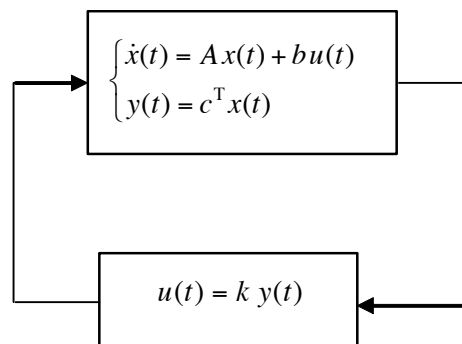
System (5.1) lub (5.7) można objąć sprzężeniem zwrotnym

$$u(t) = k y(t), \quad k \in \mathbf{R}$$

realizowanym przez regulator proporcjonalny o wzmacnieniu  $k$ . Otrzymuje się wówczas system zamknięty, opisany równaniem

$$\dot{x}(t) = (A + b k c^T) x(t) \quad (5.10)$$

Przypadek ten pokazano na rysunku 5.6.



Rys. 5.6. Zamknięty układ regulacji z regulatorem proporcjonalnym

Oznaczmy przez  $K \subset \mathbf{R}$  zbiór tych wszystkich współczynników wzmacnienia  $k$ , dla których system zamknięty jest asymptotycznie stabilny (wszystkie wartości własne macierzy  $A + b k c^T$  leżą w lewej, otwartej półpłaszczyźnie zespolonej  $\mathbf{C}^-$ )

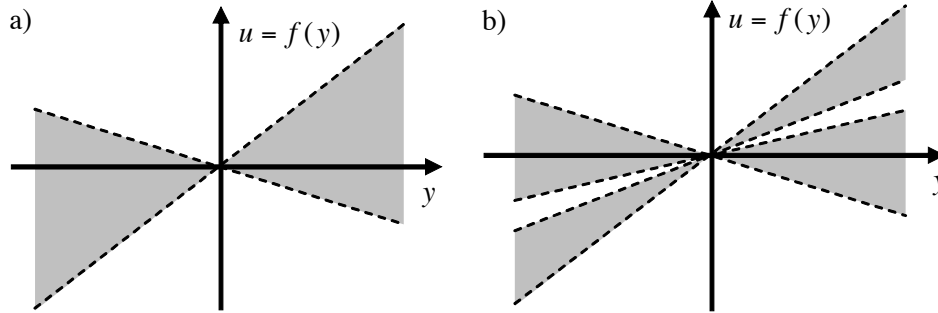
$$K = \{ k \in \mathbf{R} : \operatorname{Re} \lambda_k(A + b k c^T) < 0, k = 1, \dots, n \}$$

*Sektorem Hurwitza* nazywamy sektor wyznaczony przez charakterystyki tych wszystkich regulatorów proporcjonalnych, które zapewniają asymptotyczną stabilność układu zamkniętego (5.10)

$$H = \{ (y, k y) \in \mathbf{R}^2 : y \in \mathbf{R}, k \in K \}$$

Przykład sektora Hurwitza przedstawiono na rysunku 5.7a. Zbiór  $K$  wzmocnień regulatorów proporcjonalnych, stabilizujących system (5.1) lub (5.7), nie musi być jednorodny. Rysunek 5.7b pokazuje przykład sektora Hurwitza uzyskanego dla przypadku, gdy  $K$  jest sumą dwóch rozłącznych przedziałów otwartych

$$K = (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4) \quad a_1 < a_2 < a_3 < a_4$$



Rys. 5.7. Przykładowe sektory Hurwitza: a) dla  $K$  jednorodnego, b) dla  $K$  niejednorodnego

Na rysunku 5.7 proste ograniczające sektor Hurwitza zaznaczono linią przerywaną, ponieważ nie zawierają się one w tym sektorze (z wyjątkiem punktu  $[0 \ 0]^T$ ). Natomiast proste ograniczające sektor dopuszczalny w kryterium koła (rysunek 5.2) zawierają się w nim, dlatego zaznaczono je linią ciągłą. Podobnie proste ograniczające sektor Popova dla przypadku  $m < \infty$  (rysunek 5.4a) zawierają się w tym sektorze.

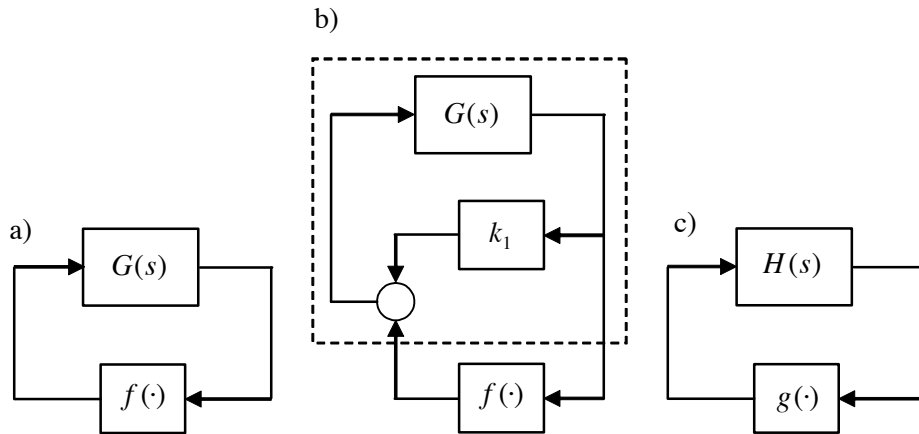
### Uwaga

Fakt zawierania się wykresu nieliniowej funkcji  $f$  w sektorze Hurwitza nie gwarantuje stabilności zamkniętego układu regulacji dla nieliniowego sprzężenia zwrotnego  $u(t) = f(y(t))$  lub  $u(t) = f(t, y(t))$ . Sektor Hurwitza jest zawsze nadzbiorem w stosunku do sektora Popova i sektora dopuszczalnego w kryterium koła. O równości sektora Hurwitza i np. sektora dopuszczalnego nie może być mowy, ponieważ proste ograniczające sektor Hurwitza nie zawierają się w nim (z wyjątkiem punktu  $[0 \ 0]^T$ ), zaś proste ograniczające sektor dopuszczalny – owszem. Istnieją jednak przypadki (zresztą dość liczne), gdy dowolnie duży sektor, zawierający się w sektorze Hurwitza, spełnia założenia któregoś z dwóch podanych twierdzeń.

Pewnym utrudnieniem w zastosowaniach twierdzenia Popova jest to, że jedną z ograniczających sektor Popova prostych jest zawsze oś  $0y$ , co zawęży klasę regulatorów opisanych funkcją  $f$ . Jeśli chce się badać sektor zawarty między prostymi  $u = k_1 y$  oraz  $u = k_2 y$ , gdzie  $k_2 > k_1$  i  $k_1 \neq 0$ , należy skorzystać z następującego podstawienia

$$f(y) = k_1 y + g(y) \tag{5.11}$$

Wzorowi (5.11) odpowiada rysunek 5.8b.



Rys. 5.8. Schematy blokowe układów regulacji

Ponieważ pierwszy składnik sumy po prawej stronie (5.11) jest liniowy, to można go włączyć do transmitancji. W ten sposób otrzymuje się nowy układ, pokazany na rysunku 5.8c, gdzie

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 - k_1 G(s)}$$

Z równości (5.11) wynika, że jeśli funkcja  $g$  należy do sektora ograniczonego prostymi

$$u = 0$$

$$u = (k_2 - k_1) y = m y$$

to funkcja  $f$  należy do sektora ograniczonego przez proste

$$u = k_1 y$$

$$u = k_2 y$$

Przynależność wykresu funkcji  $g$  do sektora opisanego parametrami  $(0, m)$  można wykazać używając twierdzenia Popova – a stąd wynika przynależność funkcji  $f$  do sektora opisanego parametrami  $(k_1, k_2)$ . Przekształcenie określone wzorem (5.11) niejako „obraca” sektor tak, by jedna z ograniczających go prostych pokryła się z osią  $0 y$  układu współrzędnych. Jednocześnie zmianie ulega liniowa część dynamiczna systemu.

Podobnie jak kryterium koła, również twierdzenie Popova sformułowane jest dla dodatniego sprzężenia zwrotnego. Jeśli w badanym układzie występuje ujemne sprzężenie zwrotne, można postąpić w sposób analogiczny do opisanego w przypadku kryterium koła (patrz rysunek 5.3 i odnoszący się do niego fragment objaśnień).

### 5.3. Wykorzystanie MATLAB-a

Do wykreślenia charakterystyki amplitudowo-fazowej służy w MATLAB-ie funkcja *nyquist*, dostępna w przyborniku *Control Toolbox*. Wywołana z lewostronnymi argumentami

$$[P, Q, w] = \text{nyquist}(L, M)$$

zwraca wartości  $P$ ,  $Q$  oraz  $w$  dla kolejnych punktów wykresu. Mnożąc przez siebie zwrócone wartości  $Q$  i  $w$  otrzymuje się część urojoną zmodyfikowanej transmitancji. Do wykreślenia zmodyfikowanej charakterystyki amplitudowo-fazowej można użyć polecenia *plot*. W twierdzeniu Popova i kryterium koła wymaga się spełnienia nierówności częstotliwościowych dla  $\omega \in \mathbf{R}$ . W praktyce jednak wystarcza badać tylko przypadki dla  $\omega \geq 0$  (uzasadnienia podano przy omawianiu twierdzeń).

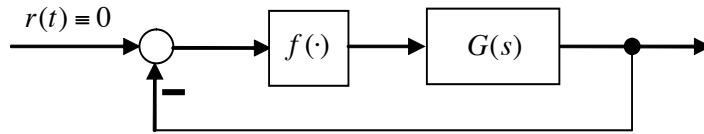
Przy pomocy MATLAB-a nietrudno sprawdzić asymptotyczną stabilność macierzy  $A$ , badając jej wartości własne poleceniem *eig*. W przypadku, gdy dana jest transmitancja, badać należy pierwiastki równania charakterystycznego poleceniem *roots*.

## 5.4. Przebieg ćwiczenia

### Zadanie 1

Wyznacz jak największy sektor dopuszczalny w kryterium koła, a następnie sektor Popova dla systemu dynamicznego (5.12) i ujemnego sprzężenia zwrotnego (rysunek 5.9)

$$G(s) = \frac{4(1-5s)}{(1+3s)(1+2s)} \quad (5.12)$$



Rys. 5.9. Układ regulacji z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

Skorzystaj kolejno z kryterium koła, a następnie z twierdzenia Popova. Sprawdź, czy spełnione są wszystkie założenia użytych twierdzeń.

### Zadanie 2 (Kudrewicz 1970, s. 177)

Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 0 \quad 0]$$

System ten objęto dodatnim sprzężeniem zwrotnym za pomocą nieliniowego, statycznego, stacjonarnego elementu o charakterystyce

$$u(t) = M \arctg y(t) \quad M > 0$$

Określ możliwie największą wartość parametru  $M$ , przy której charakterystyka elementu nieliniowego mieści się jeszcze w sektorze Popova (sektorze dopuszczalnym w kryterium koła). Sprawdź spełnienie wszystkich założeń stosowanych twierdzeń. Działanie układu regulacji przetestuj symulacyjnie w Simulinku.

## 5.5. Przykład obliczeniowy

Dany jest człon inercyjny I rzędu o transmitancji

$$G(s) = \frac{K}{1+sT}, \quad K, T > 0$$

Jest on asymptotycznie stabilny. Człon ten objęto ujemnym sprzężeniem zwrotnym, realizowanym przez nieliniowy, stacjonarny element statyczny o charakterystyce opisanej funkcją  $f$  klasy  $C^1$  (rysunek 5.9). Należy wyznaczyć jak największy sektor Popova.

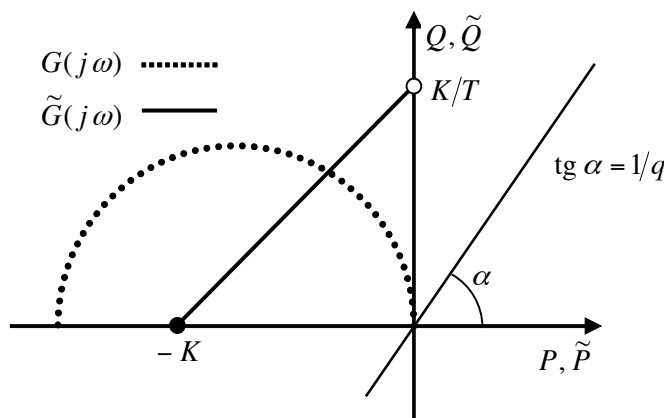
Zgodnie z rysunkiem 5.3 i uwagami do niego się odnoszącymi, w dalszym ciągu badany będzie system o transmitancji  $-G(s)$ , objęty **dodatnim** sprzężeniem zwrotnym, opisanym funkcją  $u = f(y)$ . Część rzeczywista i urojona transmitancji widmowej  $-G(s)$  wyrażają się wzorami

$$P(\omega) = \frac{-K}{1 + \omega^2 T^2} \quad Q(\omega) = \frac{\omega K T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Na ich podstawie można wyznaczyć zmodyfikowaną transmitancję widmową

$$\tilde{P}(\omega) = P(\omega) = \frac{-K}{1 + \omega^2 T^2} \quad \tilde{Q}(\omega) = \omega Q(\omega) = \frac{\omega^2 K T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Pierwotną i zmodyfikowaną charakterystykę amplitudowo-fazową pokazano na rysunku 5.10.



Rys. 5.10. Charakterystyki częstotliwościowe: pierwotna (linia przerywana) i zmodyfikowana (linia ciągła) oraz przykładowa prosta Popova

Prosta Popova może przechodzić przez punkt  $[0 \ 0]^T$ . Wynika stąd, że  $m$  może równać się nieskończoności. Sektor Popova stanowią wobec tego I i III ćwiartka układu współrzędnych. Porównać z sektorem Hurwitza.

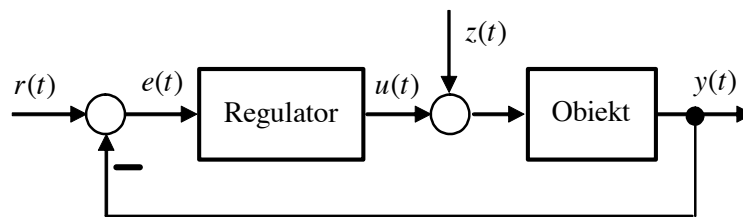
## 5.6. Literatura

- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa  
 Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa AGH, Kraków.  
 Grabowski P. (1996): *Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania*. AGH, Kraków (również wersja internetowa z roku 2004):  
[http://www.ia.agh.edu.pl/~pgrab/grabowski\\_files/newedition1453/nowyskrypt.xml](http://www.ia.agh.edu.pl/~pgrab/grabowski_files/newedition1453/nowyskrypt.xml)  
 Kudrewicz J. (1970): *Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych*. WNT, Warszawa

## 6. Optymalizacja parametryczna

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie się z pojęciem *optymalizacji parametrycznej* układów regulacji automatycznej. Optymalizacja parametryczna polega na poszukiwaniu w zbiorze dopuszczalnych nastaw regulatora (zapewniających asymptotyczną stabilność układu zamkniętego) wartości minimalizujących dany wskaźnik jakości.

Rozważany będzie typowy układ regulacji automatycznej, przedstawiony na rysunku 6.1. W układzie tym sygnał sterujący  $u(t)$  dla obiektu generowany jest przez regulator na podstawie uchybu regulacji  $e(t)$ . Uchyb jest równy różnicy między wartością zadaną  $r(t)$  a sygnałem wyjściowym  $y(t)$  obiektu. Na układ regulacji oddziałują zakłócenia  $z(t)$ , dodawane do wejścia obiektu  $u(t)$ . Sygnały  $u(t)$ ,  $y(t)$ ,  $e(t)$ ,  $z(t)$  i  $r(t)$  mogą być zarówno skalarne, jak i wektorowe. Obiekt i regulator są liniowe, stacjonarne i skończenie wymiarowe.



Rys. 6.1. Układ regulacji automatycznej

### 6.1. Podstawowe pojęcia

*Optymalizacja parametryczna* polega na doborze takich nastaw regulatora (ze zbioru dopuszczalnych nastaw  $\Omega$ ), które minimalizują wybrany wskaźnik jakości regulacji  $J$ . Zbiór  $\Omega$  definiuje się zazwyczaj jako zbiór tych wszystkich nastaw, które gwarantują asymptotyczną stabilność zamkniętego układu regulacji i dla których wartość wskaźnika jakości  $J$  jest określona (istnieje). Formułując zadanie optymalizacji parametrycznej dla układu z rysunku 6.1 należy podać:

- postać wskaźnika jakości  $J$ ,
- przebieg w czasie wartości zadanej  $r$ ,
- warunki początkowe dla regulatora i obiektu,
- charakter zakłóceń  $z$ .

Zazwyczaj zakłada się brak zakłóceń  $z(t)$ , zerowe warunki początkowe dla obiektu i regulatora, zaś w roli sygnału wartości zadanej wykorzystuje się skok jednostkowy  $r(t) = \mathbf{1}(t)$  lub inny typowy sygnał testowy. Można również przyjąć brak zakłóceń, wartość zadaną tożsamościowo równą zeru  $r(t) \equiv 0$ , a optymalizacji poddać odpowiedź układu na niezerowe warunki początkowe. Inne podejście polega na przyjęciu  $r(t) \equiv 0$ , zerowych warunków początkowych dla obiektu i regulatora i optymalizowaniu zachowania układu regulacji w obecności zakłóceń  $z(t)$ . Nie podaje się przy tym zazwyczaj przebiegu

czasowego zakłócenia, lecz jedynie określa się w pewien sposób jego charakter (na przykład podając wartość normy w przestrzeni  $\mathbf{H}^2$  lub pewne własności probabilistyczne). Przyjęte założenia powinny być bliskie realnej sytuacji, występującej w rzeczywistym układzie regulacji.

Na schemacie z rysunku 6.1 zakłócenie  $z(t)$  dodane jest do sygnału  $u(t)$  na drodze między regulatorem a obiektem regulacji. Niekiedy zakłada się inne miejsce wprowadzenia zakłócenia – dodaje się je do sygnału wyjściowego  $y(t)$  pomiędzy obiektem a węzłem sumacyjnym wyznaczającym uchyb regulacji  $e(t)$ .

Podczas optymalizacji, nastawy regulatora dobiera się ze zbioru nastaw dopuszczalnych. Jest to zazwyczaj zbiór tych wszystkich nastaw, dla których układ regulacji (układ zamknięty) zachowuje asymptotyczną stabilność, będącą warunkiem koniecznym jego poprawnej pracy, a jednocześnie wartość wskaźnika jakości jest określona (istnieje). W praktycznych zastosowaniach zbiór nastaw dopuszczalnych może być dodatkowo ograniczony przez warunki techniczne użytego regulatora (zakres nastaw możliwych do ustawienia). Wzmocnienie regulatora ogranicza się też często po to, by nie dopuścić do przesterowania urządzenia wykonawczego (do wykroczenia wartości sygnału wyjściowego regulatora poza dopuszczalny zakres).

W przypadku optymalizacji parametrycznej, struktura regulatora jest z góry założona (narzucona), zaś strojeniu podlegają jedynie nastawy regulatora, czyli parametry równań opisujących regulator. Wskaźnik jakości regulacji jest funkcją nastaw regulatora. Przykładowo, jeśli w układzie wykorzystywany jest regulator PI, to wskaźnik jakości jest funkcją nastaw  $K_p$  i  $T_i$ , czyli

$$J = J(K_p, T_i)$$

Zadaniem optymalizacji parametrycznej jest wówczas znalezienie optymalnych nastaw  $K_p^*$  i  $T_i^*$ , należących do zbioru dopuszczalnych nastaw  $\Omega$ , które minimalizują wskaźnik jakości

$$J(K_p^*, T_i^*) \leq J(K_p, T_i), \quad (K_p, T_i) \in \Omega$$

Zadanie optymalizacji parametrycznej nie zawsze posiada rozwiązanie. Rozwiązanie – jeśli istnieje – może być jednoznaczne (jedyne) lub niejednoznaczne.

Narzucona z góry struktura regulatora, zbiór  $\Omega$ , rodzaj sygnału wartości zadanej, dynamika obiektu oraz charakter zakłóceń określają zbiór  $U$  możliwych do osiągnięcia sterowań  $u$ . Sterowanie optymalne, wybrane z tego zbioru, może być gorsze niż sterowanie optymalne uzyskane dla regulatora o innej strukturze. Dlatego niekiedy można uzyskać lepszą wartość wskaźnika jakości, poddając doborowi nie tylko nastawy, ale także strukturę regulatora. Nie jest to już jednak optymalizacja parametryczna w klasycznym sensie.

## Wskaźnik jakości

Wskaźnik jakości, zwany również *funkcją celu* lub *funkcją kosztu*, przyporządkowuje nastawom regulatora liczbę rzeczywistą, będącą oceną jakości regulacji dla tych nastaw. Innymi słowy, w języku matematyki, wskaźnik jakości jest funkcjonałem. Wskaźniki jakości mogą być wyliczane na podstawie przebiegów jednego lub kilku występujących w układzie regulacji sygnałów:  $u(t)$ ,  $y(t)$ ,  $e(t)$  lub ich pochodnych względem czasu, a niekiedy także na podstawie przebiegu stanu  $x(t)$  obiektu (jeśli obiekt jest opisany w przestrzeni stanu). Bardzo często, dla układów z obiektem o jednym wyjściu  $y(t) \in \mathbf{R}$ , jako wskaźnik jakości stosowana jest całka z kwadratu uchybu regulacji

$$J = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt > 0, \quad e(t) \in \mathbf{R} \quad (6.1)$$



Jest to całkowity, kwadratowy wskaźnik jakości z nieskończonym horyzontem czasowym. W tym przypadku funkcją kosztów chwilowych (funkcją podcałkową) jest kwadrat uchybu regulacji. Kwadratowa funkcja strat chwilowych karze bardziej za duże odchyłki, mniej zaś za małe. Wielkość kary nie zależy od znaku, a jedynie od wartości bezwzględnej uchybu oraz od czasu jego utrzymywania się. Jest oczywiste, że lepiej jest, gdy wartość wskaźnika (6.1) przyjmuje mniejsze wartości. Dla  $e(t) \equiv 0$  mamy  $J = 0$ . Stosuje się również inne całkowite wskaźniki jakości, na przykład

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} |e(t)|^p dt \\ J &= \int_0^{\infty} |e(t)|^p t^q dt \end{aligned} \quad (6.2)$$

gdzie  $p$  i  $q$  to niezerowe liczby naturalne.

Od rodzaju przyjętego wskaźnika jakości zależą optymalne nastawy, a co za tym idzie – również charakter przebiegów przejściowych w układzie regulacji. Na przykład ostatni wskaźnik jakości karze bardziej za tę samą wartość uchybu po dłuższym czasie. Tym samym faworyzuje takie przebiegi uchybu, które początkowo nawet znacznie mogą odbiegać od zera, ale stosunkowo szybko do zera się zbliżają. Sposób oceny pracy układu regulacji (przyjęcie odpowiedniego wskaźnika jakości) jest centralnym problemem w automatyce. Tu otwiera się pole do działania dla inżyniera, jego pomysłowości opartej o intuicję z obserwacji obiektów rzeczywistych.

Horyzont czasowy (czyli górna granica całkowania) może przyjmować wartości skończone

$$J = \int_0^T e(t)^2 dt, \quad T > 0$$

Postać ze skończonym horyzontem może być uzasadniona praktycznie i równocześnie jest dogodna do optymalizacji numerycznej. We wskaźniku jakości może występować nie tylko uchyb regulacji, ale też na przykład jego pochodna

$$J = \int_0^{\infty} (e(t)^2 + \dot{e}(t)^2) dt$$

Jeśli rozpatruje się model obiektu w przestrzeni stanu, często wskaźnik ma postać całki z formy kwadratowej

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T H x(t) dt, \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad H \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad H = H^T > 0$$

Powyższy wzór można rozbudować, dodając pod znakiem całki składnik uwzględniający koszt sterowania

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T H x(t) + u(t)^T F u(t)) dt, \quad u(t) \in \mathbf{R}^m, \quad F = F^T > 0$$

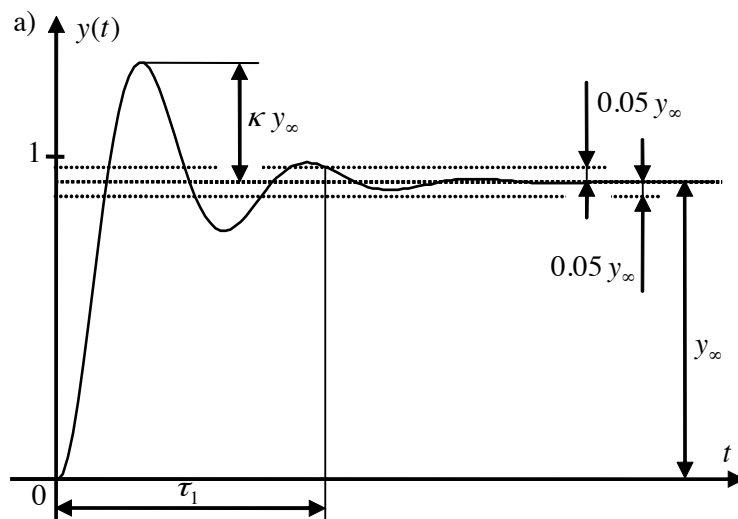
Efektem minimalizacji powyższego wskaźnika jakości jest sprowadzenie stanu systemu  $x(t)$  do zera przy nie za dużym koszcie sterowania  $u$  i jest przykładem optymalizacji dwukryterialnej (dwa przeciwstawne kryteria) rozwiązywanej metodą funkcji kary. Trajektoria  $x$  szybciej schodzi do zera, gdy sterowanie  $u$  przyjmuje większe wartości. Minimalizacja powyższego wskaźnika jakości  $J$  prowadzi do pewnego kompromisu ustalanego poprzez dobór macierzowych współczynników wagowych  $H$  i  $F$ .

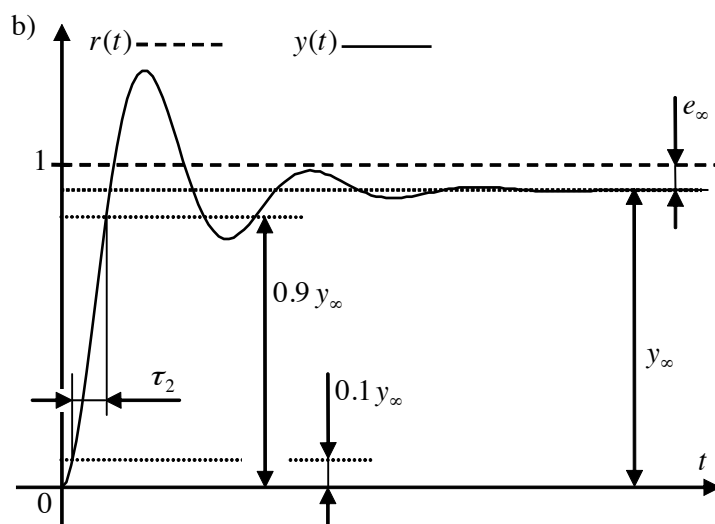
Oprócz całkowitych, istnieją także inne wskaźniki jakości, których wartość wyznaczana jest na podstawie przebiegów czasowych sygnałów w asymptotycznie stabilnym układzie regulacji. Poniżej

podano przykłady wskaźników jakości, których można użyć, gdy wartość zadana  $r(t)$  ma postać skoku jednostkowego, nie występują zakłócenia, a warunki początkowe dla obiektu i regulatora są zerowe:

- Czas regulacji  $\tau_1$   
Jest to najmniejszy czas, począwszy od którego wartość sygnału wyjściowego  $y(t)$  obiektu różni się od wartości ustalonej  $y_\infty$  nie bardziej niż o 5% (lub o inną przyjętą wartość)  
$$\tau_1 = \sup \{ t \in [0, \infty) : |y(t) - y_\infty| > 0.05 |y_\infty| \}$$
  
gdzie  $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$
- Czas narastania  $\tau_2$   
Jest to czas, w którym sygnał wyjściowy  $y(t)$  narasta od 10% do 90% wartości ustalonej  $y_\infty$   
$$\tau_2 = \min \{ t \in [0, \infty) : y(t) = 0.9 y_\infty \} - \min \{ t \in [0, \infty) : y(t) = 0.1 y_\infty \}$$
- Wartość przeregulowania  $\kappa$   
Odniesiona do  $y_\infty$  maksymalna wartość dodatniej odchyłki sygnału  $y(t)$  od  $y_\infty$ .  
$$\kappa = \frac{y_m - y_\infty}{y_\infty}$$
  
gdzie  $y_m = \max_{t \in [0, \infty)} y(t)$
- Wielkość uchybu ustalonego  $e_\infty$   
$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} |r(t) - y(t)|$$

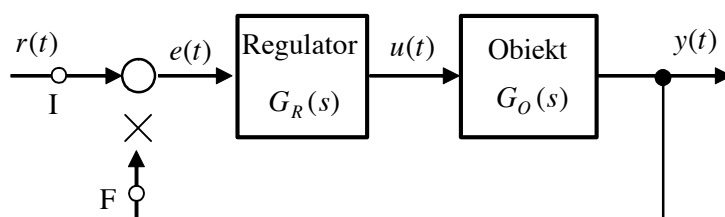
Rysunki 6.2a i 6.2b przedstawiają przykładowy przebieg sygnału wyjściowego  $y(t)$  układu regulacji z rysunku 6.1, będącego odpowiedzią na skok jednostkowy wartości zadanej  $r(t) = 1(t)$ . Zaznaczono na nich wartości  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\kappa$  i  $e_\infty$ .





Rys. 6.2. Wskaźniki jakości: a)  $\tau_1$ ,  $\kappa$ , b)  $\tau_2$ , i  $e_\infty$

Jakość regulacji w systemach liniowych określa się nie tylko w oparciu o przebiegi czasowe sygnałów, ale też na podstawie charakterystyk częstotliwościowych otwartego układu regulacji. Transmitancja  $G_F(s)$  otwartego układu regulacji, przedstawionego na rysunku 6.3, wyraża się wzorem  $G_O(s)G_R(s)$ . Wyznacza się ją od punktu I do punktu F, przy przerwanej pętli sprzężenia zwrotnego (co zaznaczono na rysunku krzyżykiem).



Rys. 6.3. Otwarty układ regulacji

Przykładami wskaźników wyznaczanych w oparciu o transmitancję otwartego układu regulacji są *zapas modułu* i *zapas fazy*. Można je wygodnie odczytać z logarytmicznych charakterystyk: amplitudowej i fazowej, zwanych inaczej *charakterystykami Bodego*.

Poziomem modułu transmitancji widmowej  $G_F(j\omega)$ , wyrażonym w decybelach [dB], nazywamy wielkość

$$L(\omega) = 20 \log_{10} |G_F(j\omega)|$$

Zdefiniujmy pomocniczo wielkość  $\varphi(\omega)$ , równą argumentowi transmitancji widmowej  $G_F(j\omega)$

$$\varphi(\omega) = \arg G_F(j\omega)$$

*Zapasem modułu* nazywamy różnicę między poziomem modułu równego jeden (0 dB), a poziomem modułu  $L(\omega_1)$  transmitancji widmowej wyznaczonym dla pulsacji  $\omega_1 \in [0, \infty)$ , dla której argument  $\varphi(\omega_1)$  transmitancji  $G_F(j\omega)$  przyjmuje wartość  $-\pi$

$$\Delta_L = -L(\omega_1)$$

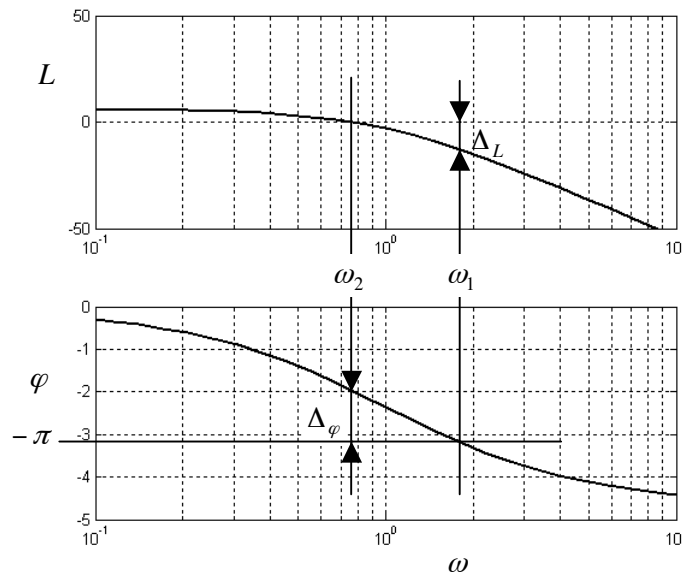
$$\varphi(j\omega_1) = -\pi$$

Zapalem fazy nazywamy różnicę między  $-\pi$  a argumentem  $\varphi(\omega_2)$  transmitancji widmowej wyznaczonym dla pulsacji  $\omega_2 \in [0, \infty)$ , dla której moduł  $|G_F(j\omega_2)|$  przyjmuje wartość 1

$$\Delta_\varphi = -\pi - \varphi(\omega_2)$$

$$|G_F(j\omega_2)| = 1$$

Pulsacja  $\omega_1$ , dla której  $\arg G_F(j\omega_1) = -\pi$ , nosi nazwę *granicznej pulsacji fazy* (Kaczorek 1977, s. 122). Pulsacja  $\omega_2$ , dla której  $|G_F(j\omega_2)| = 1$ , nosi nazwę *granicznej pulsacji modułu*. Zapasy fazy i amplitudy dla przykładowego układu regulacji przedstawiono na rysunku 6.4.



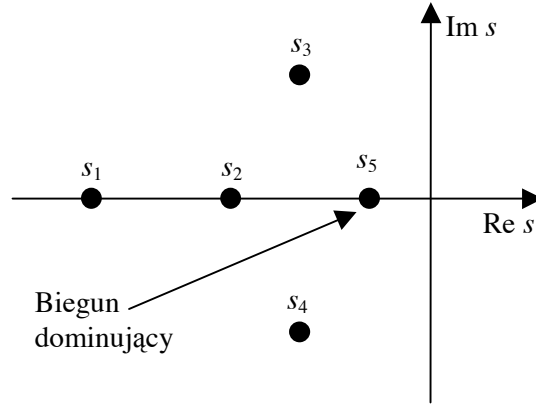
Rys. 6.4. Charakterystyki Bodego z zaznaczonymi zapasami fazy i amplitudy

Zapasy modułu i fazy decydują o zapasie stabilności. Zostanie to wyjaśnione na przykładzie z rysunku 6.4. Gdyby krzywą amplitudowej charakterystyki częstotliwościowej  $L(\omega)$  podnieść o wartość równą

zapasowi modułu, wówczas układ zamknięty o transmitancji  $\frac{G_F(s)}{1 + G_F(s)}$  znalazłby się na granicy

stabilności (porównaj z kryterium Nyquista). Gdyby krzywą tę podnieść bardziej, układ stałby się niestabilny. Podobnie, obniżenie krzywej na charakterystyce fazowej  $\varphi(\omega)$  o wartość równą zapasowi fazy doprowadza układ zamknięty na granicę stabilności, a przesunięcie o większą wartość daje układ niestabilny.

Innym miernikiem jakości regulacji w układzie zamkniętym, który jako całość opisany jest skalarną transmitancją  $G_{YR}(s)$ , jest część rzeczywista dominującego bieguna (lub dominujących biegunów). Jeśli transmitancja  $G_{YR}(s)$  ma postać ilorazu dwóch wielomianów wzajemnie pierwszych, to jej biegunami są pierwiastki (miejsca zerowe) wielomianu stanowiącego mianownik. W asymptotycznie stabilnym układzie regulacji wszystkie bieguny położone są w lewej otwartej półpłaszczyźnie zespolonej. Dominującym biegunem nazywamy ten, który ma największą część rzeczywistą. Układ może posiadać jeden lub kilka dominujących biegunów (jeśli ich części rzeczywiste są równe). Części rzeczywiste biegunów decydują o szybkości zanikania stanów przejściowych. Im część rzeczywista mniejsza (biegun dalej od osi urojonej w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej), tym szybkość zaniku przebiegów przejściowych większa. O wypadkowej szybkości zanikania przebiegów przejściowych w układzie decyduje głównie biegun dominujący, który jest „najwolniejszy”. Na rysunku 6.5 przedstawiono położenie biegunów przykładowego układu regulacji, opisanego transmitancją piątego rzędu. Wśród biegunów zaznaczono dominujący.



Rys. 6.5. Biegunki transmitancji systemu zamkniętego

Często głównym celem stawianym przy projektowaniu układu regulacji jest zapewnienie odporności na zakłócenia  $z(t)$  (zob. rysunek 6.1). Można wówczas wykorzystać następujący wskaźnik jakości (przy czym dla uproszczenia zakładamy, że  $e(t) \in \mathbf{R}$  i  $z(t) \in \mathbf{R}$ )

$$J = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} |G_{EZ}(j\omega)| \quad (6.3)$$

gdzie transmitancja  $G_{EZ}(s)$  wyraża zależność między sygnałem zakłócającym  $z$  a uchybem regulacji  $e$

$$E(s) = G_{EZ}(s)Z(s)$$

$E(s)$  i  $Z(s)$  oznaczają odpowiednio transformaty Laplace'a sygnałów  $e(t)$  i  $z(t)$ . Wyrażenie (6.3) jest formalnie wartością normy funkcji  $G_{EZ}$  w przestrzeni Hardy'ego  $\mathbf{H}^\infty$

$$\|G_{EZ}\|_{\mathbf{H}^\infty} = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} |G_{EZ}(j\omega)| \quad (6.4)$$

Założmy, że w układzie z rysunku 6.1 mamy zerowe warunki początkowe dla obiektu i regulatora oraz wartość zadaną  $r(t)$  identycznie równą zero. Założmy dalej, że zakłócenie  $z$  jest funkcją należącą do przestrzeni  $L^2(0, \infty; \mathbf{R})$ . Kwadrat normy funkcji  $z$  w tej przestrzeni dany jest wzorem

$$\|z\|_{L^2(0, \infty; \mathbf{R})}^2 = \int_0^\infty z(t)^2 dt \quad (6.5)$$

Przy spełnieniu pewnych dodatkowych założeń (patrz Grabowski 1996, str 44), funkcja  $e$  opisująca uchyb regulacji, będący odpowiedzią układu opisanego transmitancją  $G_{EZ}(s)$  na zakłócenie  $z$ , również należy do przestrzeni  $L^2(0, \infty; \mathbf{R})$ , a kwadrat jej normy dany jest wzorem

$$\|e\|_{L^2(0, \infty; \mathbf{R})}^2 = \int_0^\infty e(t)^2 dt$$

Prawa strona powyższej równości jest identyczna z prawą stroną wzoru (6.1). Prawdziwa jest nierówność

$$\|e\|_{L^2} \leq \|G_{EZ}\|_{\mathbf{H}^\infty} \cdot \|z\|_{L^2} \quad (6.6)$$

przy czym istnieje taka funkcja  $z$ , dla której nierówność (6.6) przechodzi w równość. Wyrażenie  $\|e\|_{L^2}^2$  jest równe całce z kwadratu uchybu  $e(t)$  w przedziale  $[0, \infty)$ . Tak więc iloczyn normy  $G_{EZ}$  w przestrzeni  $\mathbf{H}^\infty$  i normy  $z$  w przestrzeni  $L^2$  stanowi górne ograniczenie normy  $e$  w przestrzeni  $L^2$ .

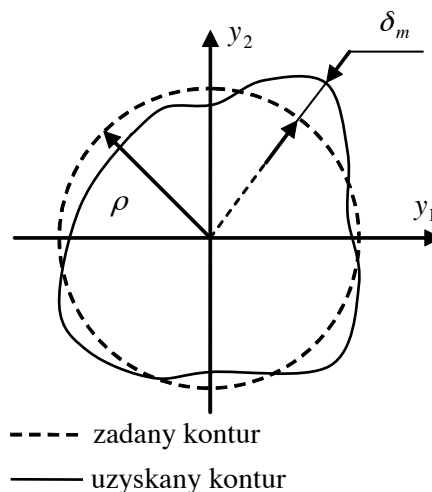
Inaczej mówiąc  $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G_{EZ}(j\omega)|$  decyduje o odporności wyjścia  $e$  układu na zakłócenia  $z$ . Wielkość określona wzorem (6.3) może być zatem użyta w roli wskaźnika jakości.

Postać wybranego wskaźnika jakości powinna odpowiadać wymaganiom, jakie stawiane są układowi regulacji. W przypadku układu pozycjonującego głowicę magnetyczną w dysku twardym komputera, odpowiednim wskaźnikiem jakości jest czas regulacji. Decyduje on o czasie dostępu – jednym z podstawowych parametrów dysków twardych. Z drugiej strony, istotny jest też uchyb ustalony – jego nadmierna wartość może doprowadzić do błędów odczytu lub zapisu, gdyż głowica nie zostanie ustawiona nad odpowiednią ścieżką. Nie ma natomiast istotnego znaczenia przeregulowanie, gdyż strefa, w której porusza się głowica, jest dość szeroka. Z inną sytuacją mamy do czynienia w przypadku układu pozycjonowania głowicy szlifierskiej, który dosuwa tarczę szlifierską do powierzchni obrabianego materiału. Tu wymagana jest zerowa wartość przeregulowania, gdyż w przeciwnym razie dojdzie do uszkodzenia materiału obrabianego, a być może także i narzędzia.

Nadmierne przeregulowanie jest także niebezpieczne w przypadku pieca służącego do odpuszczania zahartowanych przedmiotów. Zbytne przegrzanie może bowiem doprowadzić do odhartowania wsadu. W przypadku dwuwymiarowej frezarki współrzędnościowej, której zadaniem jest wykrojenie krążka z blachy, wskaźnikiem jakości może być na przykład maksymalna odchyłka promienia krążka od wartości zadanej (zob. rysunek 6.6). Jeśli brzeg otrzymanego wykroju da się opisać parametrycznie przy pomocy funkcji  $y_1 = y_1(t)$  i  $y_2 = y_2(t)$  dla  $t \in [0, T]$ , to wskaźnik jakości można wyrazić następującym wzorem

$$\delta_m = \sup_{t \in [0; T]} |\sqrt{y_1(t)^2 + y_2(t)^2} - \rho|$$

gdzie  $\rho$  jest zadany promieniem krążka.

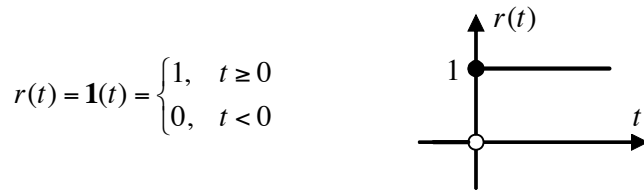


Rys. 6.6. Wskaźnik jakości  $\delta_m$  dla frezarki współrzędnościowej

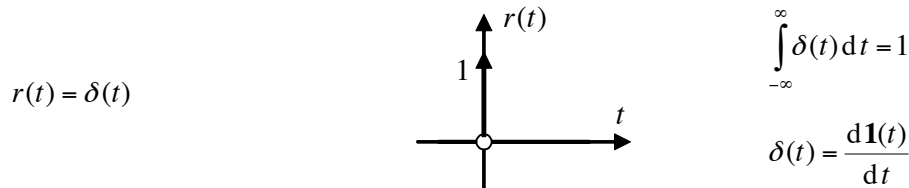
Wskaźnik jakości charakteryzuje jakość regulacji przy pomocy jednej tylko liczby. Częstokroć jest to niewystarczające do opisu wszystkich wymagań stawianych układowi regulacji. Można wówczas zdefiniować kilka wskaźników, z których każdy odpowiada jednemu spośród kilku wymagań, stawianych projektowanemu układowi regulacji. Ocena jakości regulacji jest wówczas nie pojedynczą liczbą, ale kilkuelementowym wektorem. Optymalne nastawy odpowiadające każdemu z utworzonych w ten sposób wskaźników jakości są zazwyczaj różne. Dlatego dobór ostatecznych nastaw odbywa się na zasadzie kompromisu pomiędzy poszczególnymi wymaganiami, reprezentowanymi przez odpowiednie wskaźniki jakości. Przydatne tu mogą być metody stosowane w optymalizacji wielokryterialnej.

## Typowe sygnały testowe

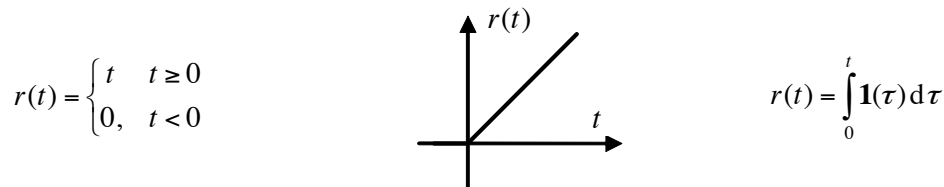
Typowym sygnałem testowym  $r(t)$ , wykorzystywanym często przy optymalizacji parametrycznej, jest skok jednostkowy



Inne popularne sygnały to impuls Diraca (dystrybucja delta)



oraz przebieg typu „rampa”



Jeszcze innym sygnałem testowym jest funkcja okresowa  $\sin \omega t$ , którą wykorzystuje się przy eksperymentalnym wyznaczaniu charakterystyki częstotliwościowej  $G(j\omega)$ . Funkcję  $\sin \omega t$  otrzymuje się z odpowiedniego generatora o zmiennej częstotliwości  $\omega$ .

## 6.2. Analityczne rozwiązanie zadania optymalizacji parametrycznej

Kroki, które należy wykonać, by analitycznie znaleźć optymalne nastawy regulatora w układzie liniowym, w przypadku wskaźników jakości typu (6.1):

1. Zapisać model matematyczny całego, zamkniętego systemu regulacji. Może on być dany w postaci równań stanu lub transmitancji. W modelu tym parametrami są nastawy regulatora.
2. Określić zbiór  $\Omega$  dopuszczalnych nastaw regulatora, w którym układ regulacji jest asymptotycznie stabilny, a wartość wskaźnika jakości jest określona. Można się w tym celu posłużyć kryteriami stabilności (na przykład twierdzeniem Hurwitza).
3. Na podstawie modelu wyliczyć wskaźnik jakości jako funkcję nastaw regulatora. Można to zrobić na dwa sposoby. Pierwszy z nich składa się z dwóch etapów:
  - wyliczenie przebiegów czasowych sygnałów w układzie regulacji na podstawie jego modelu matematycznego; interesujące są przede wszystkim te przebiegi, które występują we wzorze opisującym wskaźnik jakości,
  - wyliczenie wskaźnika jakości na podstawie otrzymanych przebiegów czasowych.
 Drugi sposób polega na wyznaczeniu wskaźnika jakości na podstawie transformat sygnałów, bez konieczności obliczania ich przebiegów czasowych. Sposób ten zostanie przedstawiony nieco dalej.
4. Znaleźć nastawy, w zbiorze dopuszczalnych nastaw  $\Omega$ , przy których jest osiągane minimum wskaźnika jakości. Niekiedy można to osiągnąć przyrównując do zera gradient (wektor

pierwszych pochodnych cząstkowych) znalezionej w postaci jawnej wskaźnika jakości, oraz sprawdzając dodatnią określoność hesjanu (macierzy drugich pochodnych cząstkowych).

Niżej opisano sposób wyliczenia wskaźnika jakości bez konieczności wyznaczania przebiegów czasowych sygnałów w układzie.

### Wykorzystanie twierdzenia Parsevala

Jeśli istnieje skończona wartość kwadratowego, całkowego wskaźnika jakości z nieskończonym horyzontem czasowym (6.1), to można ją wyrazić następującym wzorem, wynikającym z twierdzenia Parsevala

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) \cdot E(-j\omega) d\omega \quad (6.7)$$

gdzie  $E$  jest transformatą Laplace'a funkcji  $e$ . Wzór (6.7) można inaczej zapisać jako

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(s) \cdot E(-s) ds \quad (6.8)$$

przy czym całkowanie odbywa się po osi urojonej.

Jeśli dysponuje się transmitancyjnym modelem układu regulacji, to wyznaczenie transformaty błędu przy wymuszeniu skokowym jest stosunkowo łatwe. Twierdzenie Parsevala umożliwia wyliczenie wartości wskaźnika jakości bez konieczności uzyskiwania czasowej postaci  $e(t)$  (Górecki, 2006). Istnienie tego twierdzenia jest jedną z przyczyn popularności całkowego, kwadratowego wskaźnika jakości.

Jeśli całka (6.8) ma skończoną wartość, a transformata uchybu  $E(s)$  wyraża się stosunkiem dwóch wzajemnie pierwszych wielomianów

$$E(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad m < n, \quad a_n \neq 0 \quad (6.9)$$

to do wyznaczenia wartości wskaźnika jakości (6.8) można skorzystać z opisanej niżej procedury (np. Grabowski 1996, s. 59). Dla transformaty  $E(s)$ , danej wzorem (6.9), istnieje jednoznacznie określony wielomian

$$C(s) = c_{n-1} s^{n-1} + c_{n-2} s^{n-2} + \dots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$$

spełniający tożsamość

$$\frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)} = \frac{C(s)}{A(s)} + \frac{C(-s)}{A(-s)} \quad (6.10)$$

Jego znajomość umożliwia stosunkowo łatwe obliczenie wartości wskaźnika jakości, o czym za chwilę. By znaleźć wielomian  $C(s)$ , sprowadzamy sumę po prawej stronie równości (6.10) do wspólnego mianownika, a następnie porównujemy liczniki prawej i lewej strony, otrzymując tak zwane *równanie diofantyczne*

$$\begin{aligned} \frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)} &= \frac{A(-s)C(s) + A(s)C(-s)}{A(s)A(-s)} \\ B(s)B(-s) &= A(-s)C(s) + A(s)C(-s) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0)(b_m (-s)^m + \dots + b_2 s^2 - b_1 s + b_0) = \\
& = (a_n (-s)^n + \dots + a_2 s^2 - a_1 s + a_0)(c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0) + \\
& + (a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)(c_{n-1} (-s)^{n-1} + \dots + c_2 s^2 - c_1 s + c_0)
\end{aligned}$$

Dwa wielomiany są równe dla każdego  $s$  wtedy i tylko wtedy, jeśli odpowiednie współczynniki wielomianów są równe. Na podstawie powyższego równania wielomianowego można napisać  $2n$  równań algebraicznych, wiążących ze sobą współczynniki wielomianów  $A(s)$ ,  $B(s)$  i  $C(s)$ . Część spośród tych równań jest spełniona tożsamościowo. W wyniku rozwiązania układu powstałego z pozostałych  $n$  równań otrzymuje się wartości współczynników wielomianu  $C(s)$ . Jak pokażemy poniżej, do dalszych obliczeń potrzebna jest jedynie wartość współczynnika o najwyższym indeksie  $c_{n-1}$ .

Lewa strona równości (6.10) jest równa funkcji podcałkowej we wzorze (6.8). Wobec tego wskaźnik jakości  $J$  może być przedstawiony następująco

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left( \frac{C(s)}{A(s)} + \frac{C(-s)}{A(-s)} \right) ds$$

Jeśli całka niewłaściwa w powyższym wzorze istnieje (a założono, że tak jest), to można ją przedstawić jako granicę pewnej całki właściwej. W ten sposób dostajemy

$$J = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-j\rho}^{j\rho} \left( \frac{C(s)}{A(s)} + \frac{C(-s)}{A(-s)} \right) ds$$

Całkę właściwą z powyższego wzoru można rozbić na sumę dwóch całek, otrzymując

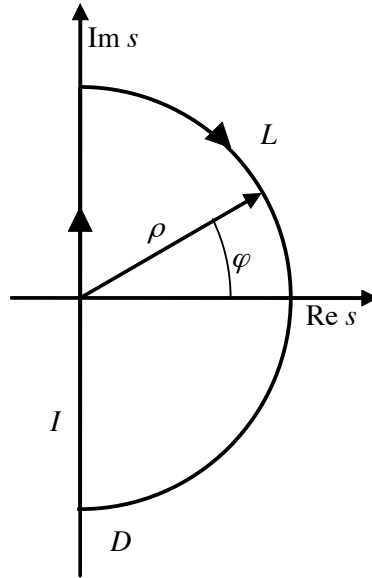
$$J = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-j\rho}^{j\rho} \frac{C(s)}{A(s)} ds + \frac{1}{2\pi j} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-j\rho}^{j\rho} \frac{C(-s)}{A(-s)} ds$$

Obie całki po prawej stronie znaku równości są równe (można to pokazać, stosując do drugiej z nich twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie i przyjmując nową zmienną całkowania  $\xi = -s$ ).

Wobec tego

$$J = \frac{1}{\pi j} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-j\rho}^{j\rho} \frac{C(s)}{A(s)} ds \quad (6.11)$$

By obliczyć wartość całki w powyższym wzorze, wykorzystamy twierdzenie Cauchy'ego (patrz Bronsztejn, Siemiendajew 1995, s. 640). Mówi ono, że jeśli funkcja  $f: C \rightarrow C$  jest analityczna w obszarze jednospójnym, którego brzegiem jest kontur  $D$ , to całka funkcji  $f$  po konturze  $D$  jest równa zeru. Zastosujmy to twierdzenie dla funkcji podcałkowej ze wzoru (6.11) i konturu  $D$  przedstawionego na rysunku 6.7. Kontur ten jest sumą łuku  $L$  o promieniu  $\rho$  i odcinka  $I$ , leżącego na osi urojonej.



Rys. 6.7. Krzywa, po której całkujemy

Całka z funkcji  $f$  po konturze  $D$  może być przedstawiona w postaci sumy całek

$$\int_D f(s) ds = \int_I f(s) ds + \int_L f(s) ds$$

Stąd i z twierdzenia Cauchy'ego wynika równość

$$\int_I f(s) ds = - \int_L f(s) ds$$

Jeśli w miejsce funkcji podcałkowej  $f(s)$  wstawić  $\frac{C(s)}{A(s)}$ , otrzymuje się

$$\int_I \frac{C(s)}{A(s)} ds = - \int_L \frac{C(s)}{A(s)} ds \quad (6.12)$$

Funkcja wymierna  $\frac{C(s)}{A(s)}$  jest analityczna w obszarze ograniczonym konturem  $D$ , ponieważ wszystkie jej bieguny (miejsca zerowe mianownika) leżą na lewo od osi urojonej (wynika to z założenia o istnieniu całki (6.8)). Lewa strona równości (6.12) jest równa całce występującej we wzorze (6.11), którym wyraża się wskaźnik jakości. W wyniku podstawienia otrzymujemy

$$J = -\frac{1}{\pi j} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_L \frac{C(s)}{A(s)} ds$$

Na łuku  $L$  zmienną  $s$  można wyrazić następująco

$$s = \rho e^{j\varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$$

Całkując przez podstawienie dostajemy

$$J = -\frac{1}{\pi j} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{C(\rho e^{j\varphi})}{A(\rho e^{j\varphi})} j \rho e^{j\varphi} d\varphi$$

Zamieniając kolejność granic, skracając  $j$  oraz włączając czynnik zza kreski ułamkowej do licznika otrzymujemy

$$J = \frac{1}{\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\rho e^{j\varphi}) \rho e^{j\varphi}}{A(\rho e^{j\varphi})} d\varphi$$

Jeśli istnieją granice całki i funkcji podcałkowej i są skończone, to można wprowadzić znak granicy pod znak całki

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{C(\rho e^{j\varphi}) \rho e^{j\varphi}}{A(\rho e^{j\varphi})} d\varphi$$

Mnożąc wielomian  $C(\rho e^{j\varphi})$  przez czynnik równy jego argumentowi  $\rho e^{j\varphi}$ , podnosimy stopień wielomianu o jeden. Granicę pod znakiem całki obliczamy następująco

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{c_{n-1}(\rho e^{j\varphi})^n + c_{n-2}(\rho e^{j\varphi})^{n-1} + \dots + c_1(\rho e^{j\varphi})^2 + c_0 \rho e^{j\varphi}}{a_n(\rho e^{j\varphi})^n + a_{n-1}(\rho e^{j\varphi})^{n-1} + \dots + a_1 \rho e^{j\varphi} + a_0} = \frac{c_{n-1}}{a_n}$$

Stąd

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{c_{n-1}}{a_n} d\varphi = \frac{1}{\pi} \frac{c_{n-1}}{a_n} \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Ostatecznie wartość wskaźnika jakości wyraża się wzorem

$$J = \frac{c_{n-1}}{a_n} \quad (6.13)$$

By ją obliczyć, należy wyznaczyć współczynnik  $c_{n-1}$  wielomianu  $C(s)$ .

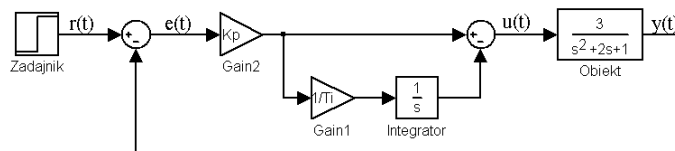
### 6.3. Numeryczne rozwiązanie zadania optymalizacji parametrycznej

Znalezienie analitycznej postaci wskaźnika jakości bywa trudne. W takich przypadkach można wykorzystać numeryczne metody minimalizacji. Na podejście numeryczne składają się następujące trzy elementy:

- Symulacje w celu uzyskania przebiegów czasowych sygnałów w układzie regulacji.
- Numeryczne wyliczanie, na podstawie uzyskanych wyników, wartości wskaźnika jakości.
- Numeryczna minimalizacja wskaźnika jakości.

#### Symulacja

Wskaźnik jakości typu (6.1) można wyliczyć znając przebieg sygnału  $e(t)$  występującego w układzie regulacji. Przebieg ten wyznacza się na drodze numerycznej symulacji. Można ją przeprowadzić wykorzystując model zestawiony w Simulinku. Rysunek 6.8 przedstawia przykładowy model dla obiektu inercyjnego drugiego rzędu i regulatora PI.

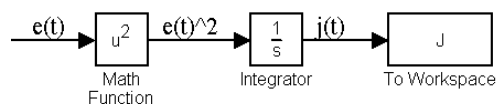


Rys. 6.8. Symulacyjny model układu regulacji

W trakcie optymalizacji konieczne jest przeprowadzenie wielu symulacji, dla różnych wartości nastaw (w przykładzie na rysunku:  $K_p$  i  $T_i$ ). Dlatego wygodnie jest wpisać w ich miejsce w blokach Simulinka nie konkretne wartości, ale symbole zmiennych. Umożliwia to szybką zmianę parametrów przez przededefiniowanie wartości odpowiednich zmiennych w przestrzeni roboczej MATLAB-a. Można to zrobić bądź ręcznie, bądź z kodu zawartego w M-pliku skryptowym.

### Wyliczenie wskaźnika jakości

Na podstawie wyników symulacji wylicza się wartość wskaźnika jakości. Można to zrobić w Simulinku, dodając do modelu z rysunku 6.8 fragment realizujący potrzebne obliczenia. Dla całkowitego, kwadratowego wskaźnika jakości użyteczny jest schemat z rysunku 6.9.



Rys. 6.9. Fragment modelu obliczający wartość wskaźnika jakości

Zadaniem układu z rys. 6.9 jest podniesienie do kwadratu wartości błędu i scałkowanie jej względem czasu. Szukana wartość wskaźnika jakości jest ostatnim elementem wektora  $J$  z bloku *To Workspace*.

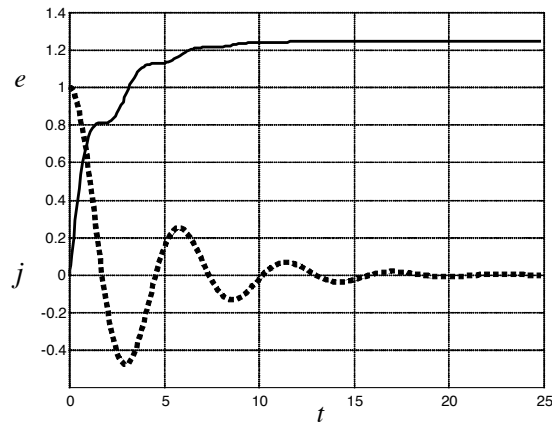
### Numeryczna minimalizacja wskaźnika jakości

Wskaźnik jakości jest funkcją  $m$  zmiennych (nastaw regulatora), określoną na zbiorze dopuszczalnych nastaw  $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ , która przyjmuje wartości w zbiorze liczb rzeczywistych  $\mathbf{R}$ . Tak więc zadanie szukania optymalnych nastaw polega na numerycznej minimalizacji z ograniczeniami funkcji jednej (dla  $m = 1$ ) lub wielu (dla  $m > 1$ ) zmiennych.

### Dobór horyzontu optymalizacji

W opisany wyżej sposób można wyznaczać wartości całkowitych wskaźników jakości wyłącznie ze skończonym horyzontem czasowym, gdyż prowadzenie symulacji na nieskończonym przedziale czasowym jest niemożliwe. Sposób doboru skończonego horyzontu czasowego optymalizacji, który da wyniki zbliżone do przypadku z nieskończonym horyzontem, przedstawiony zostanie na przykładzie z rysunku 6.9. Linia przerywaną zaznaczono na nim przebieg uchybu w pewnym układzie regulacji, natomiast ciągłą – odpowiadający mu przebieg kwadratowego wskaźnika jakości w funkcji horyzontu optymalizacji

$$j(T) = \int_0^T e(t)^2 dt \quad J = \lim_{T \rightarrow \infty} j(T)$$



Rys. 6.10. Przebieg uchybu regulacji (linia przerywana) i wskaźnika jakości (linia ciągła)

Po czasie około 20 sekund wartość wskaźnika jakości prawie się nie zmienia, bo w znacznym stopniu wygasł przebieg przejściowy błędu. Jest to więc dostateczny horyzont czasowy, który można przyjąć do dalszych obliczeń. Gdyby jednak przyjąć horyzont równy dwóm sekundom, wynik mógłby być niepoprawny.

## 6.4. Przebieg ćwiczenia

### Zadanie 1

W układzie z rysunku 6.1 wartość zadana  $r(t)$  ma postać skoku jednostkowego. Transmittancja obiektu wynosi

$$G_P(s) = \frac{2s + 3}{s^3 + 2s^2 + s}$$

a regulatora proporcjonalnego

$$G_C(s) = K_p$$

Warunki początkowe dla obiektu są zerowe. Wykreśl w jednym układzie współrzędnych zależności między współczynnikiem wzmocnienia  $K_p$  regulatora, a następującymi wskaźnikami jakości:

- kwadratowy, całkowity wskaźnik jakości podobny do (6.1), ale ze skończonym horyzontem czasowym  $T = 25$ ,
- wskaźnik jakości z czasem (podobny do (6.2)) dla  $p = 2$ ,  $q = 1$ , również ze skończonym horyzontem czasowym  $T = 25$ ,
- przeregulowanie,
- czas regulacji.

Dane do wykresów wyznacz na drodze wielokrotnych symulacji w MATLAB-ie lub Simulinku. Zastosuj skalę logarymiczną dla osi odciętych na wykresie, a wszystkie wskaźniki jakości znormalizuj przed narysowaniem (wszystkie wyznaczone wartości danego wskaźnika podziel przez największą z nich). Spróbuj wskazać optymalne nastawy dla każdego ze wskaźników. Czy dla każdego z nich są one takie same? Spróbuj znaleźć kompromisowe nastawy dla przeregulowania i czasu regulacji.

### Zadanie 2

Rozważamy układ regulacji przedstawiony na rysunku 6.1, gdzie obiekt opisany jest transmittancją

$$G_P(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}$$

Przyjmujemy, że regulator jest typu PI o transmitancji  $G_C = K_p + \frac{K_I}{s}$ . Natomiast jako sygnał referencyjny stosujemy skok jednostkowy  $r(t) = \mathbf{1}(t)$ . Zakładamy zerowe warunki początkowe dla obiektu i regulatora oraz brak zakłóceń ( $z(t) \equiv 0$ ).

Przed wykonaniem ćwiczenia należy wyliczyć analitycznie optymalne nastawy  $K_p^*$  i  $K_I^*$  minimalizujące wskaźnik jakości (6.1).

W czasie zajęć należy wyznaczyć numerycznie optymalne wartości współczynnika wzmocnienia i stałej całkowania regulatora PI dla:

- wskaźnika jakości (6.1) ze skończonym czasem regulacji,
- podanego przez prowadzącego innego wskaźnika jakości.

Do znalezienia optymalnych rozwiązań wykorzystać numeryczną metodę poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych (w MATLAB-ie zadanie to realizują funkcje *fminsearch*, *fmincon*). Porównać nastawy optymalne i odpowiadające im przebiegi przejściowe uzyskane dla różnych wskaźników jakości. Wykreślić wykresy poziomnicowe wskaźników jakości (skorzystać z funkcji *contour* oraz *meshgrid* MATLAB-a).

## 6.5. Przykłady obliczeniowe

Poniżej zamieszczono proste przykłady, pokazujące sposób analitycznego poszukiwania optymalnych nastaw regulatora.

### Przykład 1

Rozważamy układ regulacji o strukturze przedstawionej na rysunku 6.1. W roli sygnału wartości zadanej  $r(t)$  wykorzystano skok jednostkowy  $\mathbf{1}(t)$ , zaś do oceny nastaw służy całkowity, kwadratowy wskaźnik jakości z nieskończonym horyzontem czasowym (6.1). Nie występują zakłócenia. Należy wyznaczyć optymalną nastawę  $p$  regulatora całkującego o transmitancji  $C(s) = \frac{p}{s}$ , współpracującego

z obiektem o transmitancji  $P(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)}$ .

Transmitancja uchybowa zamkniętego układu regulacji wyraża się wzorem

$$G_{ER}(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} \frac{p}{s}} = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p}$$

Transformatę  $E(s)$  uchybu  $e(t)$  wyznaczamy następująco

$$E(s) = \frac{1}{s} G_{ER}(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p} \quad (6.15)$$

Określmy zbiór nastaw, dla których transmitancja  $G_{ER}(s)$  jest asymptotycznie stabilna. Wykorzystamy kryterium stabilności Hurwitza. Wielomian charakterystyczny transmitancji  $G_{ER}(s)$  jest następujący

$$w(s) = s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

gdzie

$$a_3 = 1, a_2 = 3, a_1 = 2 + p, a_0 = 3p$$

Macierz Hurwitza

$$H = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Minory główne macierzy  $H$

$$\Delta_1 = a_2 = 3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3(2+p) - 3p = 6$$

$$\Delta_3 = |H| = a_0 \Delta_2 = 18p$$

Warunkiem asymptotycznej stabilności wielomianu charakterystycznego  $w(s)$  jest, by współczynnik  $a_3$  wielomianu oraz wszystkie minory wiodące macierzy Hurwitza były dodatnie. Tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy  $p > 0$ .

By wskaźnik jakości (6.1) był określony (by całka miała skończoną wartość), nie wystarcza asymptotyczna stabilność transmitancji  $G_{ER}(s)$ . Potrzeba nadto, by uchyb regulacji  $e(t)$  zmierzał do zera, gdy czas  $t \rightarrow \infty$ . Skorzystajmy z twierdzenia granicznego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p}$$

Dla  $p$  spełniającego otrzymany wcześniej warunek ( $p > 0$ ) powyższa granica jest równa zero. Zbiór dopuszczalnych nastaw jest więc przedziałem  $(0, \infty)$ .

Do wyznaczenia wskaźnika jakości wykorzystamy procedurę opisaną przy okazji omawiania zastosowania twierdzenia Parsevala. Rozpoczynamy od wyznaczenia współczynników wielomianu  $C(s)$  stopnia 2, który spełnia tożsamość (6.10).  $A(s)$  i  $B(s)$  to odpowiednio mianownik i licznik transformaty  $E(s)$

$$\begin{aligned} & \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p} \cdot \frac{s^2 - 3s + 2}{-s^3 + 3s^2 - (2+p)s + 3p} = \\ & = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p} + \frac{c_2 s^2 - c_1 s + c_0}{-s^3 + 3s^2 - (2+p)s + 3p} \end{aligned}$$

Sprowadzamy prawą stronę równania do wspólnego mianownika i porównujemy liczniki obu stron, otrzymując równanie diofantyczne

$$\begin{aligned} & (s^2 + 3s + 2)(s^2 - 3s + 2) = \\ & = (c_2 s^2 + c_1 s + c_0)(-s^3 + 3s^2 - (2+p)s + 3p) + \\ & + (c_2 s^2 - c_1 s + c_0)(s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p) \end{aligned}$$

Mnożymy wyrażenia w nawiasach, a następnie porównujemy współczynniki prawej i lewej strony przy odpowiadających potęgach zmiennej  $s$ , otrzymując układ równań

$$\begin{aligned} 1 &= 6c_2 - 2c_1 \\ -5 &= 6pc_2 - 2(2+p)c_1 + 6c_0 \\ 4 &= 6pc_0 \end{aligned}$$

Jego rozwiązanie jest następujące

$$c_2 = \frac{1}{12} \left( 7 + p + \frac{4}{p} \right)$$

$$c_1 = \frac{1}{4} \left( 5 + p + \frac{4}{p} \right)$$

$$c_0 = \frac{2}{3p}$$

Wskaźnika jakości jest dany wzorem (6.13)

$$J = \frac{c_{n-1}}{a_n} = \frac{c_2}{a_3} = \frac{1}{12} \left( 7 + p + \frac{4}{p} \right) \quad (6.16)$$

Wyznaczamy pochodną wskaźnika jakości względem nastawy  $p$  i przyrównujemy ją do zera

$$\frac{dJ}{dp} = \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{4}{p^2} \right)$$

$$1 - \frac{4}{p^2} = 0$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania

$$p = 2 \quad \text{i} \quad p = -2$$

By upewnić się, że otrzymany punkt to minimum lokalne, wyznaczamy drugą pochodną wskaźnika jakości  $J$  względem nastawy  $p$  regulatora

$$\frac{d^2 J}{dp^2} = \frac{d}{dp} \left( \frac{dJ}{dp} \right) = \frac{2}{3p^3}$$

Dla  $p = 2$ , które należy do zbioru dopuszczalnych rozwiązań, druga pochodna wskaźnika jakości ma wartość dodatnią, co w połączeniu z zerowaniem się pierwszej pochodnej wskazuje na minimum lokalne funkcji  $J$ . Wartość  $p = -2$  nie należy do zbioru dopuszczalnych rozwiązań. Ostatecznie  $p^* = 2$  jest poszukiwanym rozwiązaniem optymalnym.

## Przykład 2

Wyznaczanie wartości wskaźnika jakości, w przypadku obiektów i regulatorów opisanych transmitancjami wyższych rzędów, jest czynnością stosunkowo żmudną. Wygodniej jest posłużyć się gotowymi wzorami, dostępnymi w literaturze (np. Nowacki 1962, s. 62). Pozwalają one wyznaczyć wartość wskaźnika jakości, gdy znana jest transformata  $E(s)$  uchybu regulacji, mająca postać właściwej funkcji wymiernej. Ze wspomnianej książki pochodzi wzór (6.18), określający wartość wskaźnika jakości (6.1) dla uchybu, którego transformata dana jest wzorem (6.17).

$$E(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (6.17)$$

$$J = \frac{-a_1 b_2^2 + a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) - \frac{a_3 a_2 b_0^2}{a_0}}{2a_3 (a_0 a_3 - a_1 a_2)} \quad (6.18)$$

Zastosujmy formułę (6.18) do obliczenia optymalnych nastaw dla układu regulacji z poprzedniego zadania. Transformata uchybu dana jest wzorem (6.15). Przyrównując ją do (6.17) otrzymujemy

$$\begin{aligned} b_2 &= 1, \quad b_1 = 3, \quad b_0 = 2 \\ a_3 &= 1, \quad a_2 = 3, \quad a_1 = 2 + p, \quad a_0 = 3p \end{aligned} \quad (6.19)$$

Łatwo sprawdzić, że wstawiając (6.19) do (6.18) dostajemy wzór równy wyrażeniu (6.16) z poprzedniego zadania. Wobec tego rozwiązanie całego zadania będzie również takie samo.



### Przykład 3

Rozważany jest obiekt całkujący, sterowany przez regulator proporcjonalny P (rysunek 6.1). Do oceny nastaw wykorzystano typowy kwadratowy, całkowy wskaźnik jakości (6.1) z nieskończonym horyzontem czasowym, zbudowany w oparciu o uchyb regulacji  $e(t)$ . Sygnał testowy wartości zadanej  $r(t)$  ma postać skoku jednostkowego  $1(t)$ . Transmitancje obiektu  $G_p(s)$  i regulatora  $G_C(s)$  są następujące

$$G_p(s) = \frac{1}{sT_i}, \quad T_i > 0$$

$$G_C(s) = K_p, \quad K_p \in R$$

Wyznaczamy transmitancję uchybową układu regulacji

$$G_{ER}(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_C(s)} = \frac{1}{1 + K_p \frac{1}{sT_i}} = \frac{sT_i}{K_p + sT_i}$$

Powyższy wzór jest podobny do wzoru na transmitancję zamkniętego układu regulacji. Różnica tkwi jedynie w liczniku i wynika stąd, że interesującym nas sygnałem jest nie  $y(t)$ , ale  $e(t)$ .

Z definicji transmitancji wynika wzór na transformatę błędu  $E(s)$

$$E(s) = G_{ER}(s)R(s)$$

Wartość zadana  $r(t)$  ma postać skoku jednostkowego, a jej transformata jest następująca

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Stąd transformata błędu

$$E(s) = \frac{sT_i}{sK_p + s^2T_i} = \frac{T_i}{K_p + sT_i}$$

Odpowiadający jej przebieg czasowy jest następujący

$$e(t) = \exp\left(-\frac{K_p}{T_i}t\right)$$

Wartość wskaźnika jakości oblicza się poprzez całkowanie

$$J(K_p) = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = -\frac{T_i}{2 \cdot K_p} e^{-2\frac{K_p}{T_i}t} \Bigg|_0^{\infty}$$

$$J(K_p) = \frac{T_i}{2K_p}$$

Bardzo ważnym etapem obliczeń, którego nie należy pomijać, jest określenie zbioru dopuszczalnych nastaw. Jest to zbiór tych wszystkich nastaw, dla których układ jest asymptotycznie stabilny, a wartość wskaźnika jakości jest określona. Wyznamy go badając uzyskaną wyżej transmitancję. Równanie charakterystyczne (mianownik transmitancji) systemu ma następującą postać

$$w(s) = K_p + sT_i$$

Jest to wielomian stopnia pierwszego, którego jedyny pierwiastek dany jest wzorem

$$s_1 = -\frac{K_p}{T_i}$$

Z warunku asymptotycznej stabilności  $\operatorname{Re} s_1 < 0$  oraz z założenia  $T_i > 0$  wynika, że

$$K_p \in (0, \infty)$$

Do istnienia skończonej wartości całki (6.1) nie wystarcza asymptotyczna stabilność transmitancji  $G_{ER}(s)$ . Wymagane jest ponadto, by uchyb regulacji  $e(t)$  zmierzał do zera gdy  $t \rightarrow \infty$ . Skorzystamy z twierdzenia granicznego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s T_i}{K_p + s T_i}$$

Dla  $K_p \in (0, \infty)$  i  $T_i > 0$  powyższa granica jest równa zero. Zbiór nastaw dopuszczalnych jest więc przedziałem  $(0, \infty)$ .

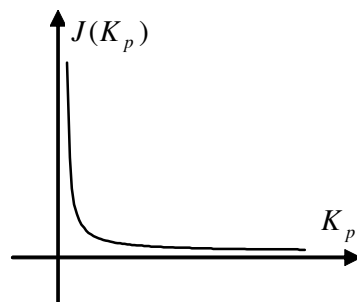
By znaleźć ekstremum wskaźnika jakości, wyznaczmy jego pochodną

$$\nabla_{K_p} J(K_p) = \frac{\partial J(K_p)}{\partial K_p} = -\frac{1}{2} \frac{T_i}{K_p^2}$$

a następnie przyrównujemy ją do zera

$$-\frac{1}{2} \frac{T_i}{K_p^2} = 0$$

Jak widać, pochodna nie zeruje się w zbiorze dopuszczalnych nastaw, natomiast jest w nim ujemny. Wynika stąd, że wskaźnik jakości jest malejący. Nie osiąga on nigdzie minimum – zadanie nie posiada więc rozwiązania. Im współczynnik wzmocnienia jest większy, tym mniejsza jest wartość wskaźnika jakości. Widać to dobrze z wykresu wskaźnika na rysunku 6.11.



Rys. 6.11. Wykres wskaźnika jakości

Wniosek jest następujący – im większe wzmocnienie regulatora, tym lepsza (w sensie przyjętego wskaźnika jakości) jakość regulacji. W rzeczywistym układzie regulacji wpływ nie uwzględnionych tu czynników spowodowałby konieczność ograniczenia wartości wzmocnienia.

#### Przykład 4

W poprzednim przykładzie wartość wskaźnika jakości wyliczono na podstawie znajomości jawnej postaci przebiegu czasowego uchybu regulacji  $e(t)$ . Obecnie obliczenia przeprowadzone będą z wykorzystaniem twierdzenia Parsewala. Transformata uchybu regulacji wyraża się wzorem

$$E(s) = \frac{s T_i}{s K_p + s^2 T_i} = \frac{T_i}{K_p + s T_i}$$

Wstawiając ją do wzoru z twierdzenia Parsevala, otrzymuje się

$$J = \int_0^\infty e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{T_i}{K_p + j\omega T_i} \cdot \frac{T_i}{K_p - j\omega T_i} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{T_i^2}{K_p^2 + \omega^2 T_i^2} d\omega$$

Obliczając wartość całki skorzystamy z metody całkowania przez podstawienie oraz następującego

wzoru:  $\frac{d}{dx} \arctg x = \frac{1}{1+x^2}$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\frac{T_i^2}{K_p^2}}{1 + \omega^2 \frac{T_i^2}{K_p^2}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{(\frac{T_i}{K_p})^2}{1 + (\omega \frac{T_i}{K_p})^2} d\omega = \frac{T_i}{2\pi K_p} \arctg \left( \frac{T_i}{K_p} \omega \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \frac{T_i}{2\pi K_p} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{T_i}{2K_p} \end{aligned}$$

Otrzymano ten sam wynik, co w poprzednim przykładzie.

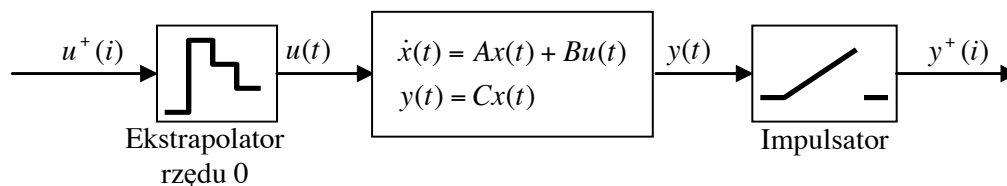
## 6.6. Literatura

- Bronsztejn I. N., Siemiendiajew K. A. (1995): *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*. PWN, Warszawa.
- Górecki H. (2006): *Optymalizacja i sterowanie systemów dynamicznych*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków.
- Grabowski P. (1996): *Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania*. Skrypt uczelniany nr 1453, Wydawnictwa AGH (również wersja internetowa z roku 2004).
- Kaczorek T. (1977): *Teoria układów regulacji automatycznej*. T. II. WNT, Warszawa.
- Nowacki P., Szklarski L., Górecki H. (1962): *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej*. PWN, Warszawa.

## 7. Systemy dyskretne

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawowymi własnościami systemów dynamicznych dyskretnych w czasie. System dyskretny w czasie zwykle opisuje się modelem matematycznym w postaci odpowiednich równań rekurencyjnych. Z modelami w postaci równań rekurencyjnych spotykamy się najczęściej w dwóch przypadkach: przy opisie komputerowych układów sterowania oraz przy numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych. Istnieją również inne przypadki, w których opis za pomocą równań rekurencyjnych wynika z natury rozważanych systemów.

### 7.1. Sterowanie komputerowe



Rys. 7.1. Układ dyskretno-ciągły

Przetwornik cyfrowo-analogowy (ekstrapolator rzędu zerowego) działa w następujący sposób: na wejście przetwornika podawany jest ciąg elementów  $u^+(i)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$ , a na wyjściu otrzymujemy funkcję  $u(t) = u^+(i)$  dla  $t \in [ih, (i+1)h)$ , ogólnie  $h>0$  jest okresem pracy przetwornika (okresem próbkowania). Na wyjściu z przetwornika analogowo-cyfrowego (impulsatora) mamy ciąg elementów  $y^+(i) = y(ih)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$ ,  $h>0$  (okres pracy impulsatora).

Połączenie szeregowo ekstrapolatora, systemu ciągłego w czasie i impulsatora pokazane na rys. 7. 1 stanowi układ dyskretno-ciągły (przy pracy synchronicznej ekstrapolatora i impulsatora z okresem  $h>0$ ).

#### Uwaga

Ekstrapolator rzędu zerowego w MATLABie występuje jako *zero-order hold*. W literaturze można również spotkać skrót od angielskiej nazwy, tj. „*zoh*”.

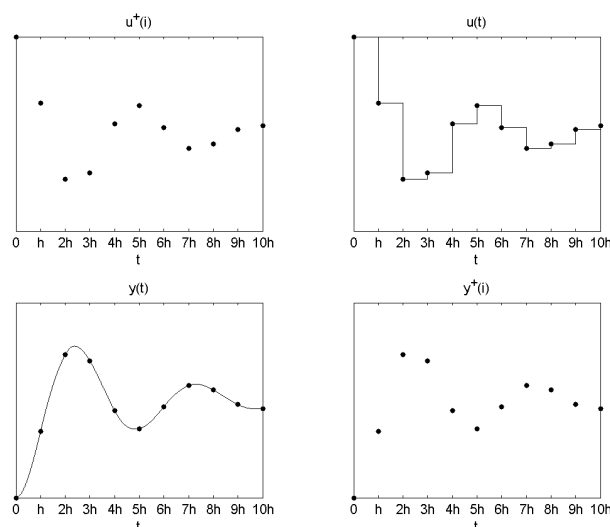
Rozważamy przypadek szczególny, a mianowicie liniowy dynamiczny układ stacjonarny z czasem ciągłym

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{7.1}$$

gdzie  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $t \geq 0$ , a  $A$ ,  $B$  i  $C$  są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach.

W tym przypadku zależność sygnału  $y^+(i)$  od  $u^+(i)$  (zob. rysunek 7.1) można opisać następującym równaniem rekurencyjnym

$$\begin{aligned}x^+(i+1) &= A^+ x^+(i) + B^+ u^+(i) \\ y^+(i) &= C^+ x^+(i)\end{aligned}\quad (7.2)$$



Rys. 7.2. Sygnały w układzie dyskretno-ciągłym

gdzie  $x^+(i) = x(ih)$ ,  $u^+(i) = u(ih)$ ,  $y^+(i) = y(ih)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  przy czym  $h > 0$  oznacza okres próbkowania,  $A^+$ ,  $B^+$  i  $C^+$  są macierzami rzeczywistymi określonymi następującymi zależnościami

$$\begin{aligned}A^+ &= e^{hA} \\ B^+ &= \int_0^h e^{tA} B dt \\ C^+ &= C\end{aligned}\quad (7.3)$$

Na rys. 7.2 pokazano przykładowe przebiegi sygnałów w układzie dyskretno-ciągłym.

### Wyprowadzenie zależności (7.3)

Macierze  $A^+$  i  $B^+$  otrzymujemy z rozwiązania równania różniczkowego (7.1) o postaci

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau.$$

Po podstawieniu  $t = (i+1)h$  i  $t_0 = ih$  oraz  $u(t) = u^+(i)$  na odcinkach  $t \in [ih, (i+1)h)$ , mamy

$$\begin{aligned}x^+(i+1) &= x((i+1)h) = \exp(((i+1)h - ih)A) x(ih) + \int_{ih}^{(i+1)h} \exp(((i+1)h - \tau)A) B d\tau u(ih) = \\ &= e^{hA} x^+(i) + \int_0^h e^{tA} B dt u^+(i) = A^+ x^+(i) + B^+ u^+(i)\end{aligned}$$

Zauważmy, że liniowy układ dyskretny (7.2) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy  $A^+$  leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze (czyli  $|\lambda(A^+)| < 1$ ).

## 7.2. Dobór okresu próbkowania

W praktyce istotny jest dobór okresu próbkowania  $h$ . Poniżej przedstawione jest jedno z najważniejszych twierdzeń dotyczących analizy sygnałów Przydatne do oszacowania maksymalnej dopuszczalnej wartości  $h$ .

## Twierdzenie o próbkowaniu

Sygnał ciągły może być ponownie odtworzony, w sposób jednoznaczny, z sygnału dyskretnego, jeśli był on próbkowany z częstotliwością co najmniej dwa razy większą od granicznej częstotliwości swego widma. Innymi słowy, jeżeli widmo sygnału jest ograniczone do  $[-f_g, f_g]$ , to częstotliwość

próbkowania  $f_p = \frac{1}{h}$  musi spełniać zależność:

$$f_p > 2f_g \quad (7.4)$$

Istotą tego twierdzenia jest to, że składowe sygnału o częstotliwościach wyższych niż połowa częstotliwości próbkowania zostają zniekształcone w procesie dyskretyzacji, zarówno w dziedzinie częstotliwościowej jak i czasowej, co doprowadza do zniekształcenia całego sygnału.

Twierdzenie to w literaturze znaleźć można pod wieloma nazwami. Związane jest to z tym, że zagadnienie badane było przez wielu uczonych. W kontekście telekomunikacji rozpatrywane było ono przez Nyquista w 1928 r. i Gabora w 1946 r., którzy sformułowali hipotezę o treści zbliżonej do twierdzenia, bazując na analizie szeregów Fouriera. Z punktu widzenia matematyki, a dokładniej interpolacji funkcji, zajmował się nim Whittaker w 1935 r. Twierdzenie o próbkowaniu zostało opublikowane i udowodnione niezależnie przez Shannona (Shannon 1949) i Kotelnikowa (Kotelnikow 1933). Częstotliwość  $f_p$ , spełniająca nierówność (7.4), w literaturze często nosi nazwę częstotliwości Nyquista (taką właśnie nazwę wprowadził Shannon).

Rozważmy sygnał ciągły  $s(t)$ ,  $t \geq 0$  oraz sygnał dyskretny  $s^+(i) = s(ih)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Jeżeli okres próbkowania  $h$  spełnia twierdzenie o próbkowaniu, to oryginalny sygnał ciągły  $s(t)$  można uzyskać z dyskretnego  $s^+(i)$  na drodze następującej operacji

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^+(n) \text{Sa}\left(\frac{t}{h} - n\right) \quad (7.5)$$

gdzie

$$\text{Sa}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę, że równość (7.5) umożliwia odtworzenie sygnału jedynie przy posiadaniu próbek od  $-\infty$  do  $+\infty$ , i zatem nie nadaje się do praktycznych zastosowań. Twierdzenie jednak ma bardzo istotne znaczenie ze względu na tak zwane zjawisko aliasingu, które zilustrujemy poniższym przykładem.

### Przykład - Aliasing

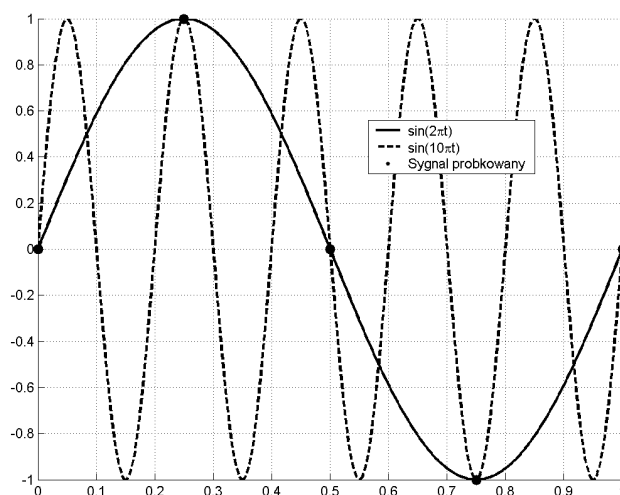
Rozważmy dwie sinusoidy, jedną o częstotliwości 1 [Hz] i drugą o częstotliwości 5 [Hz]. Przeprowadźmy próbkowanie obydwu sinusoid z częstotliwością 4 [Hz] (częstotliwość ta spełnia warunek (7.4) dla pierwszej sinusoidy, ale dla drugiej już nie). Obrazuje to rysunek 7.3.

Jak można zauważyć sinusoidy te w chwilach próbkowania przyjmują takie same wartości, czyli na podstawie znajomości sygnału próbkowanego nie można ich odróżnić od siebie. Co więcej każda sinusoida o częstotliwości

$$\omega_n = 2\pi \frac{n \pm 0.25}{h},$$

gdzie  $n$  jest liczbą naturalną, również będzie nierozróżnialna na podstawie wartości w chwilach próbkowania. Tą nierozróżnialność nazwiemy zjawiskiem aliasingu. Zjawisko to w praktyce może wystąpić, gdy w sygnale, który zamierzamy próbować występują zakłócenia wysokich częstotliwości. Rozwiązaniem występującego problemu może być filtr anty-aliasingowy. Filtr taki, zastosowany przed właściwym próbkowaniem, usuwa z sygnału częstotliwości większe niż 0.5 częstotliwości próbkowania – jest to filtracja dolnoprzepustowa. Może to być realizowane na dwa sposoby:

1. filtrem anti-aliasingowym może być analogowy filtr dolnoprzepustowy, wiąże się to jednak ze wszystkimi niedogodnościami związanymi z filtracją analogową
2. innym sposobem jest wstępne próbkowanie sygnału z częstotliwością kilkukrotnie większą od docelowej, przeprowadzenie cyfrowej filtracji dolnoprzepustowej, a następnie ponowne próbkowanie sygnału tym razem z częstotliwością docelową.



Rys. 7.3. Aliasing

### 7.3. Schematy różnicowe

Innym przypadkiem, w którym mamy do czynienia z układem dyskretnym, jest całkowanie numeryczne równań różniczkowych. Idea polega na aproksymowaniu pochodnej odpowiednim ilorazem różnicowym.

Rozważmy następujące, najprostsze aproksymacje (np. Mitkowski 1991, s. 142, 144), zakładając, że  $x^+(i) = x(ih)$  oraz  $\dot{x}^+(i) = \dot{x}(ih)$ :

3. Eulera z krokiem w przód –  $x^+(i+1) = x^+(i) + h\dot{x}^+(i)$
4. Eulera z krokiem w tył –  $x^+(i+1) = x^+(i) + h\dot{x}^+(i+1)$
5. wzór Newtona-Cotesa –  $x^+(i+1) = x^+(i) + 0.5h(\dot{x}^+(i) + \dot{x}^+(i+1))$

Z równania (7.1) dla  $t=ih$   $\dot{x}^+(i) = Ax^+(i) + Bu^+(i)$ , i dalej następujące równania różnicowe:

Dla metody Eulera z krokiem w przód

$$x^+(i+1) = (I + hA)x^+(i) + hBu^+(i) \quad (7.6)$$

Dla metody Eulera z krokiem w tył

$$x^+(i+1) = (I - hA)^{-1}x^+(i) + (I - hA)^{-1}hBu^+(i+1) \quad (7.7)$$

Dla wzoru Newtona-Cotesa

$$x^+(i+1) = (I - 0.5hA)^{-1}(I + 0.5hA)x^+(i) + 0.5h(I - 0.5hA)^{-1}B(u^+(i+1) + u^+(i)) \quad (7.8)$$

Równania różnicowe (7.6), (7.7) i (7.8) są nazywane schematami różnicowymi równania (7.1).

Warunkiem koniecznym, aby rozwiązanie numeryczne dobrze aproksymowało rozwiązanie równania różniczkowego jest asymptotyczna stabilność odpowiedniego schematu różnicowego. Warunki asymptotycznej stabilności powyższych schematów podano poniżej:

6. Schemat (7.6) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\lambda(I + hA)| < 1$ , co jest równoważne temu, by wszystkie wartości własne macierzy  $hA$  leżały wewnątrz koła o promieniu jeden i środku w punkcie  $(-1, j0)$ .
7. Schemat (7.7) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy  $hA$  leżą na zewnątrz koła o promieniu 1 i środku w  $(1, j0)$  na płaszczyźnie zespolonej. W szczególności, jeżeli  $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$  to schemat jest asymptotycznie stabilny  $\forall h > 0$ .
8. Schemat (7.8) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ .

### Uwagi na temat schematów różnicowych

Schemat (7.6) jest asymptotycznie stabilny jedynie dla małych kroków  $h$  i w przeciwieństwie do pozostałych schematów różnicowych, nie wymaga „kosztownego” numerycznie odwracania macierzy. Zmniejszanie kroku  $h$  zwiększa dokładność obliczeń przy równoczesnym wzroście czasu obliczeń. Stosując schemat (7.8) można skracać czas obliczeń dowolnie zwiększając  $h$ , ale dodatkowy czas jest potrzebny na odwrócenie macierzy. W schemacie (7.6) zbyt duży krok  $h$  prowadzi do utraty stabilności obliczeń i w konsekwencji do błędnego rozwiązania numerycznego. Zatem widać, że można poszukiwać takiego kroku  $h > 0$ , przy którym otrzymujemy rozwiązania przybliżone w minimalnym czasie przy równoczesnej, zadanej z góry dokładności obliczeń.

## 7.4. Dodatkowe uwagi na temat dynamiki systemów dyskretnych

Równania różnicowe wykorzystywane są jako modele do opisu zjawisk w biologii, ekonomii, socjologii i wielu innych dziedzinach wiedzy. Przedstawimy poniżej kilka przykładów takich systemów.

### Ciąg Fibonacciego

Rozważmy ciąg Fibonacciego

$$F = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Elementy tego ciągu są wyznaczone w sposób następujący

$$x_{i+2} = x_{i+1} + x_i, \text{ gdzie } i = 0, 1, 2, \dots, x_0 = 0, x_1 = 1. \quad (7.9)$$

Równanie rekurencyjne (drugiego rzędu) o postaci (7.9) ma następujący wielomian charakterystyczny

$$W(z) = z^2 - z - 1,$$

który posiada następujące pierwiastki

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zatem rozwiązanie równania (7.9) dla przyjętych warunków początkowych ma postać

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^i \right) \quad (7.10)$$

Warto zwrócić uwagę, że chociaż we wzorze (7.10) występują liczby niewymierne, to uzyskane przy jego pomocy wartości kolejnych wyrazów ciągu są odpowiednimi liczbami naturalnymi.

Można zauważyć, że stosunek dwóch sąsiednich wyrazów ciągu Fibonacciego, określony równością

$$y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}$$

spełnia równanie

$$y_{i+1} = F(y_i)$$



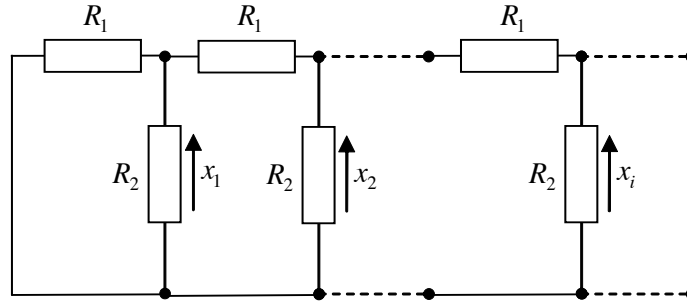
gdzie

$$F(y_i) = 1 + \frac{1}{y_i}. \quad (7.11)$$

Odwzorowanie (7.11)  $F:(0,\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  generuje układ dynamiczny i ma dokładnie jeden punkt stały  $y^* = F(y^*)$  oraz  $y_i \rightarrow (1+\sqrt{5})/2$  gdy  $i \rightarrow \infty$ , dla dowolnego  $y_0 \in (0,\infty)$ . Punkt  $y^*$  jest atraktorem ze zbiorem przyciągania  $(0,\infty)$ .

### Układ łańcuchowy typu R

Rozważmy elektryczny układ łańcuchowy pokazany na rysunku 7.4. Oporności  $R_1$  i  $R_2$  są dane.



Rys. 7.4. Układ łańcuchowy

Interesować nas będą wartości napięć  $x_i$  na opornościach  $R_2$ . Z praw Kirchoffa możemy uzyskać równanie różnicowe

$$x_{i+1} - 2\left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right)x_i + x_{i-1} = 0 \quad (7.12)$$

$i=1, 2, 3, \dots$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = u$ ,  $u$  jest dane. Równanie charakterystyczne powyższego równania rekurencyjnego rzędu drugiego ma postać

$$z^2 - 2\left(1 + \frac{R_1}{2R_2}\right)z + 1 = 0. \quad (7.13)$$

Równanie (7.13) ma następujące pierwiastki

$$z_{1,2} = 1 + \frac{R_1}{2R_2} \pm \sqrt{\frac{R_1}{R_2} \left(1 + \frac{R_1}{4R_2}\right)}$$

Ogólne rozwiązanie równania (7.12) ma postać

$$x_i = c_1 z_1^i + c_2 z_2^i$$

Stałe  $c_1$  i  $c_2$  można wyznaczyć z warunków początkowych równania (7.12) czyli  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = u$ .

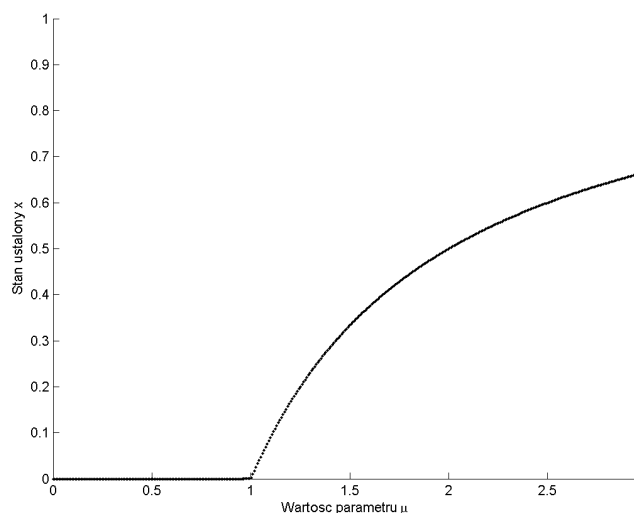
### Odwzorowanie logistyczne

Dynamika układów dyskretnych (jednowymiarowych) może być skomplikowana. Przykładem może być odwzorowanie logistyczne (np. Kudrewicz 1993, s. 65) generujące układ dyskretny

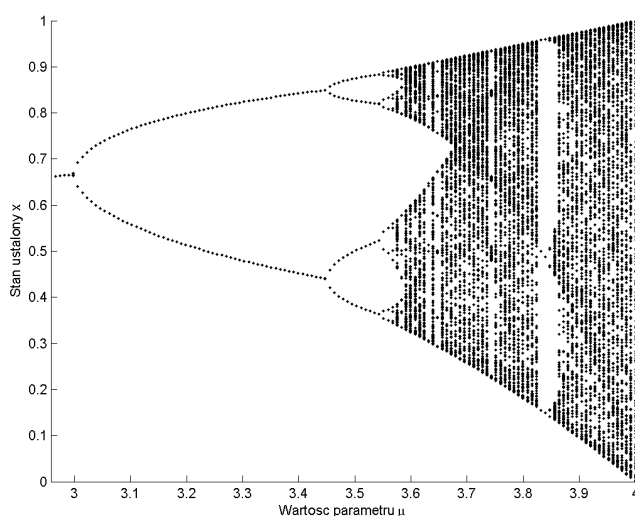
$$\begin{aligned} x(i+1) &= F(x(i), \mu) \\ F(x(i), \mu) &= \mu x(i)(1-x(i)) \end{aligned} \quad (7.14)$$

gdzie  $\mu \in [0,4]$ ,  $x \in [0,1]$ . Jest to dyskretne równanie nieliniowe pierwszego rzędu. funkcja  $F$  określona równością (7.14) przy dowolnym  $\mu \in [0,4]$  odwzorowuje odcinek  $[0,1]$  w siebie. Rodzina funkcji  $F$  (dla różnych  $\mu$ ) stanowi tak zwaną rodzinę odwzorowań logistycznych.

Interesujące jest zachowanie ciągu  $x(i)$ , opisanego równaniem rekurencyjnym (7.14), gdy  $i \rightarrow \infty$  (stany ustalone) w zależności od parametru  $\mu$ . Na rysunkach 7.5 i 7.6 przedstawiono wyniki eksperymentu numerycznego przeprowadzonego w następujący sposób: ustalamy parametr  $\mu$  i wybieramy  $x(0) \in (0,1)$ ; następnie wykonujemy np. 1000 iteracji (by uzyskać stan ustalony) i pomijamy 750 pierwszych wyrazów ciągu  $x(i)$ , na rysunku zaś zaznaczamy tylko 250 ostatnich iteracji  $x(i)$ .



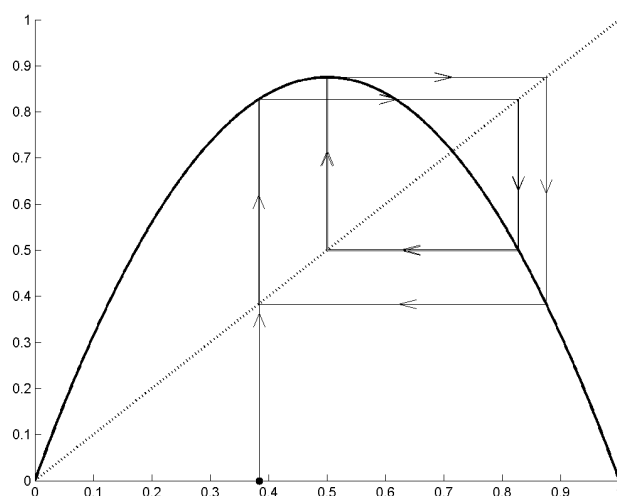
Rys. 7.5. Stany ustalone odwzorowania logistycznego dla  $\mu \in [0,3]$



Rys. 7.6. Stany ustalone odwzorowania logistycznego dla  $\mu \in [3,4]$

Naprawdę ciekawe zjawiska występują jednak przy wartościach  $\mu \in [3,4]$ . Jak można zauważyć na rysunku 7.6 zamiast jednego punktu ustalonego pojawiają się trajektorie okresowe, na początku o okresie 2 (pomiędzy dwoma punktami), 4 itd., następuje sukcesywne podwajanie się okresu. Co ciekawe dla wartości około  $\mu = 3.8$  można zauważyć, że odwzorowanie ma okres równy 3 (wartości odwzorowania od pewnej iteracji przyjmują tylko 3 wartości). Jest to o tyle interesujące, że odwzorowanie, które ma trajektorię o okresie równym 3 ma również nieskończenie wiele trajektorii okresowych o wszystkich okresach naturalnych (co jest konsekwencją twierdzenia Szarkowskiego (np. Kudrewicz 1993, s.72, Mitkowski 2000, s. 67)). Dla

$\mu = 4$  odwzorowanie (7.14) generuje dynamikę „chaotyczną”. Tu warto wspomnieć, że w układach ciągłych takie zjawiska jak „chaos” występują, dopiero począwszy od trzeciego rzędu.



Rys. 7.7. Konstrukcyjne wyznaczanie rozwiązania równania (7.14)

Rozwiązanie równania różnicowego (7.14) można również uzyskać w sposób geometryczny. Przykład takiej konstrukcji (dla  $\mu = 3.5$  i  $x(0) = 0.384$ ) pokazano na rys. 7.7. Algorytm postępowania jest następujący:

1. Narysować wykres prawej strony równości (7.14) (będzie to wykres paraboli) dla wartości  $x \in [0,1]$  i wybranego parametru  $\mu$  oraz prostą o równaniu  $y = x$ .
2. Wybrać punkt początkowy na osi poziomej.
3. Połączyć punkt pionową linią z wykresem paraboli.
4. Połączyć punkt przecięcia pionowej linii z parabolą z prostą  $y = x$  za pomocą linii poziomej.
5. Wybrać punkt przecięcia linii poziomej z prostą  $y = x$  i powrócić do punktu 3.

Na rysunku 7.7 strzałki na liniach ilustrują kolejność postępowania, punkt początkowy oznaczony jest kropką.

### Odwzorowania iterowane (np. Kudrewicz 1993, s. 37)

Odwzorowania iterowane (inaczej IFS, od *Iterated Function Systems*) można wykorzystać do zapamiętywania obrazów geometrycznych. dla przykładu rozważmy odwzorowanie afiniczne  $y = Ax + b$  ( $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ), które generuje układ rekurencyjny (równanie różnicowe)

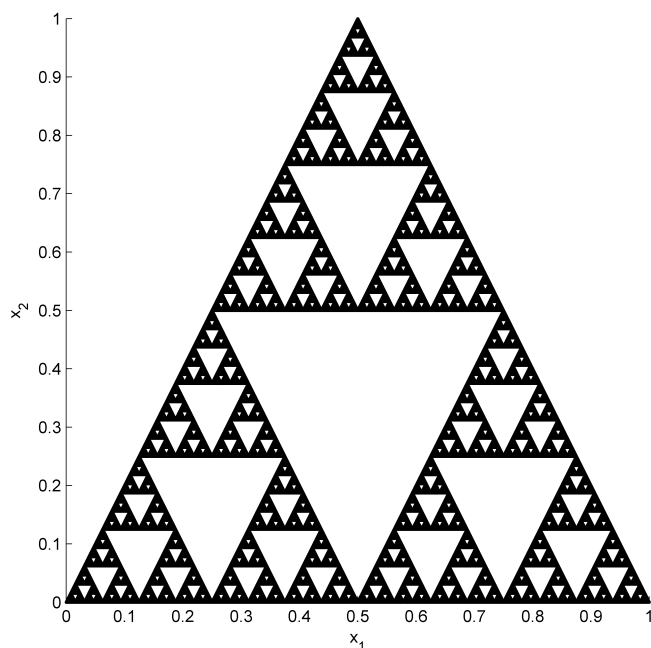
$$x(i+1) = Ax(i) + b \quad (7.15)$$

przy czym w każdej iteracji macierz  $A$  i wektor  $b$  wybierane są losowo z pewnego przygotowanego wcześniej zestawu macierzy  $A_u$  i  $b_u$ ,  $u=1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, & b_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, & b_2 &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, & b_3 &= \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Punkty w kolejnych iteracjach będziemy rysować na płaszczyźnie  $x_1 \times x_2$ . Wynikiem takiego postępowania będzie fraktal (a dokładniej atraktor  $\tilde{x}$ ,  $x(i) \rightarrow \tilde{x} \in \mathbf{R}^2$ ) znany pod nazwą trójkąta

Sierpińskiego. Ilustrują to rysunki 7.8 i 7.9. Zwłaszcza zbliżenie na rysunku 7.9 jest ciekawe ponieważ widać na nim, typową dla fraktali, własność samopodobieństwa.



Rys. 7.8. Trójkąt Sierpińskiego (wykonano 10000 iteracji)

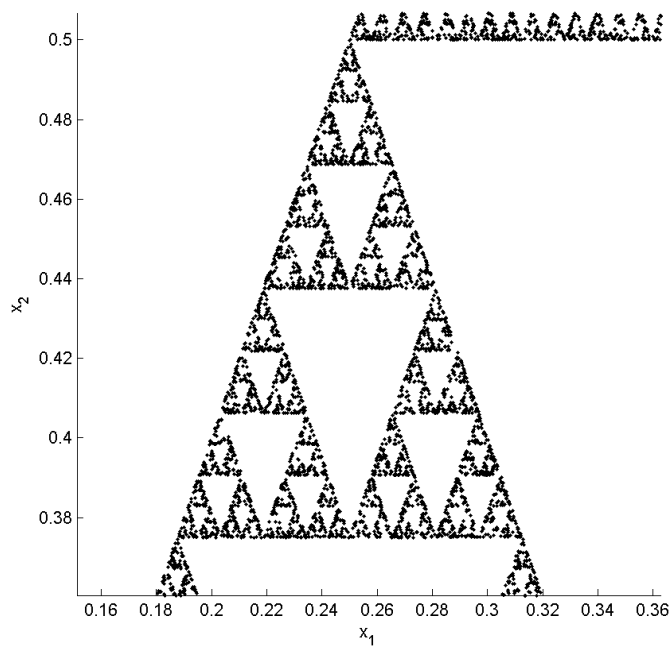
Odwzorowania iterowane można również uzyskiwać za pomocą metod deterministycznych (bez losowania). Są to jednak metody mało wydajne numerycznie ze względu na konieczność wykonania większej liczby iteracji. Ideę takiego deterministycznego algorytmu można znaleźć w pozycjach (Kudrewicz 1993, s. 21, Mitkowski 2000, s.65). Szerokie ujęcie tematu odwzorowań iterowanych i fraktali przytacza również pozycja (Scheinerman 2000, s.189).

Interesujący jest problem poszukiwania odwzorowania iterowanego w taki sposób, by uzyskać z góry zadany obraz geometryczny. W ten sposób możliwe byłoby przekazywanie skomplikowanych obrazów za pomocą przesłania stosunkowo małej liczby parametrów (macierzy odwzorowania iterowanego).

## 7.5. Zadania do rozwiązania

### Zadanie 1

Zamodelować w Simulinku system (7.1) z macierzami  $A, B, C$  podanymi przez prowadzącego. Na wejście systemu podłączyć ekstrapolator rzędu zerowego. Obliczyć macierze  $A^+$ ,  $B^+$ ,  $C^+$  odpowiadającego mu systemu (7.2) przy podanym  $h$ . Przeanalizować zachowanie układu dyskretno-ciągłego w zależności od  $h$ .



Rys. 7.9. Trójkąt Sierpińskiego (zbliżenie)

## Zadanie 2

Przeanalizować zachowanie się schematów różnicowych dla macierzy systemu ciągłego

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

w zależności od wielkości  $h$  i porównać rozwiązanie numeryczne z rozwiązaniem analitycznym układu ciągłego w czasie.

## Zadanie 3

Przeanalizować zachowanie się następującego systemu dyskretnego

$$x(k+1) = \lambda x(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

w zależności od wartości parametru  $\lambda$  należy rozpatrzyć:

$$\lambda < -1, \lambda = -1, \lambda \in (-1, 0), \lambda = 0, \lambda \in (0, 1), \lambda = 1, \lambda > 1$$

## Zadanie 4

Napisać dwa programy w MATLABie, obliczające wartość  $i$ -tego wyrazu ciągu Fibonacciego (gdzie  $i$  jest dowolną liczbą naturalną większą od 2). Jeden stosujący sposób rekurencyjny opisany przez (7.9), drugi zaś korzystający ze wzoru (7.10). Porównać szybkość działania obydwu programów (przy pomocy funkcji `tic` i `toc`) dla różnych wartości  $i$ . Sprawdzić numerycznie punkt stały odwzorowania (7.11).

## Zadanie 5

Napisać program „rysujący” obraz (atraktor) wybranego odwzorowania iterowanego (zob. np. Kudrewicz 1993, s. 21, Scheinerman 2000, s.189).

## Zadanie 6

Dokonać analizy równania (7.14) interpretowanego jako układ liniowy z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym

$$x(i+1) = \mu x(i) + \mu u(i), \quad u(i) = -x(i)^2 \quad (7.16)$$

Przeprowadzić analizę dla  $\mu \in [0,3]$  badając rodzaj stabilności punktów równowagi układu zamkniętego (7.16).

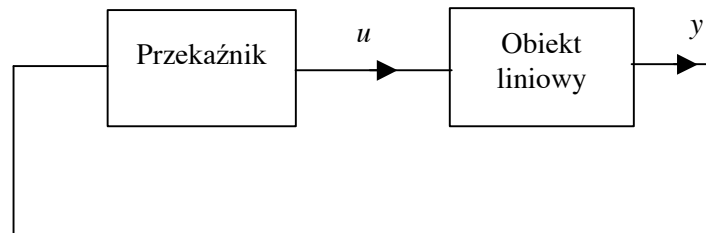
## 7.6. Literatura

- Kotelnikow V.A. (1933): *On the transmission capacity of the 'ether' and of cables in electrical communications*, (angielskie tłumaczenie autorstwa C.C. Bissella i V.A. Katsnelsona)  
<http://ict.open.ac.uk/classics/1.pdf>
- Kudrewicz J. (1993): *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa
- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*, WNT, Warszawa.
- Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*, Wydawnictwa AGH, Kraków.
- Mitkowski W. (2000): *Systemy dynamiczne - Materiały uzupełniające do wykładu*, Wydawnictwa Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH, Kraków.
- Scheinerman. E.R. (2000): *Invitation to Dynamical Systems*, <http://www.mts.jhu.edu/~ers/invite.html>
- Shannon C.E.(1949): *Communication in the Presence of Noise*, (przedruk w Proceedings of the IEEE, vol. 86, no. 2, February 1998), dostępne w internecie  
<http://www.stanford.edu/class/ee104/shannonpaper.pdf>

## 8. Układy liniowe z regulatorami przekaźnikowymi

### 8.1. Wstęp

Rozważamy zamknięty układ regulacji, składający się z liniowego obiektu sterowania i regulatora przekaźnikowego (rysunek 8.1).



Rys. 8.1. Zamknięty układ regulacji z przekaźnikiem

Obiekt jest drugiego rzędu, stacjonarny i jednowymiarowy. Opisany jest za pomocą równania stanu i równania wyjścia

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{8.1}$$

gdzie  $x(t) \in \mathbf{R}^2$  oznacza wektor stanu,  $u(t) \in \mathbf{R}$  jest wartością sterowania, a  $y(t) \in \mathbf{R}$  – wartością wyjścia obiektu. Zakładamy, że macierz  $C$  jest niezerowa.

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z dwoma zjawiskami, występującymi w układach nieliniowych: reżimem ślizgowym i cyklem granicznym. Reżimy ślizgowe są charakterystyczne dla układów przełączanych i o zmiennej strukturze. Ich analiza wymaga pewnego rozszerzenia definicji rozwiązania równania różniczkowego. Cykle graniczne spotykane są w różnych systemach nieliniowych, a stabilny cykl graniczny jest typowym ustalonym reżimem pracy przekaźnikowych układów regulacji automatycznej. Dla zobrazowania i analizy wymienionych zjawisk posłużymy się portretami fazowymi. Przypomnijmy, że konstrukcję portretu fazowego układu jednorodnego  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  poznaliśmy w ćwiczeniu 1.

### 8.2. Typy przekaźników i konstrukcja portretu fazowego

Rozpatrujemy przekaźniki symetryczne trzech typów: przekaźnik dwustanowy, przekaźnik dwustanowy z histerezą oraz przekaźnik trójstanowy ze strefą martwą.

*Symetryczny przekaźnik dwustanowy* opisany jest za pomocą charakterystyki statycznej  $u(t) = m \operatorname{sgn} y(t)$  z  $m > 0$  (rysunek 8.2). *Symetryczny przekaźnik dwustanowy z histerezą* ma charakterystykę przedstawioną na rysunku 8.3. Parametr  $h > 0$  jest szerokością pętli histerezy. Aby

opisać działanie przekaźnika, założmy, że jego wejściem jest funkcja ciągła  $y:[t_0, t_1[ \rightarrow \mathbf{R}$ . Odpowiednie wyjście przekaźnika  $u:[t_0, t_1[ \rightarrow \mathbf{R}$  spełnia równość  $|u(t)| = m$  dla każdego  $t$ . Ponadto dla każdego  $t$  zachodzą relacje:  $u(t) = m$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$u(t_0) = m \text{ i } y(\theta) > -\frac{1}{2}h \quad \forall \theta \leq t$$

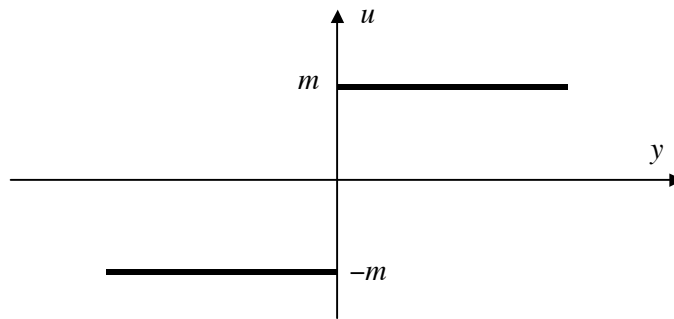
lub

$$\exists \tau \leq t \quad \forall \theta \in [\tau, t], \quad y(\tau) \geq \frac{1}{2}h, \quad y(\theta) > -\frac{1}{2}h.$$

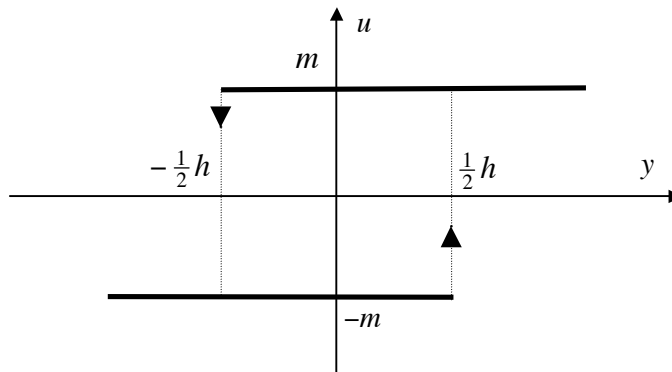
W każdym innym przypadku  $u(t) = -m$ . Rysunek 8.4 pokazuje charakterystykę *symetrycznego przekaźnika trójstanowego ze strefą martwą* o szerokości  $a > 0$

$$u(t) = \begin{cases} m \operatorname{sgn} y(t), & |y(t)| > \frac{1}{2}a \\ 0, & |y(t)| \leq \frac{1}{2}a. \end{cases}$$

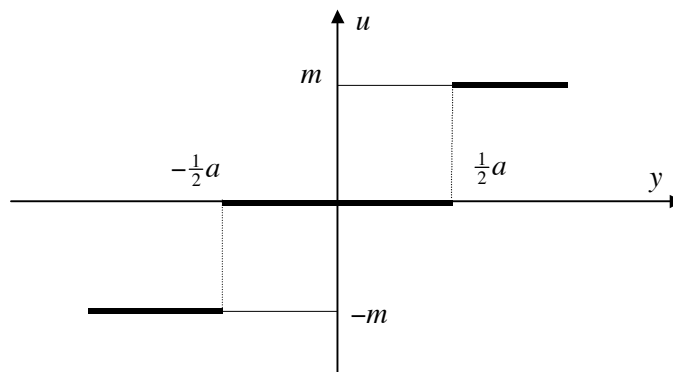
Będziemy dalej przyjmować  $m = 1$ .



Rys. 8.2. Charakterystyka przekaźnika dwustanowego bez histerezy



Rys. 8.3. Charakterystyka przekaźnika dwustanowego z histerezą



Rys. 8.4. Charakterystyka przekaźnika trójstanowego bez histerezy



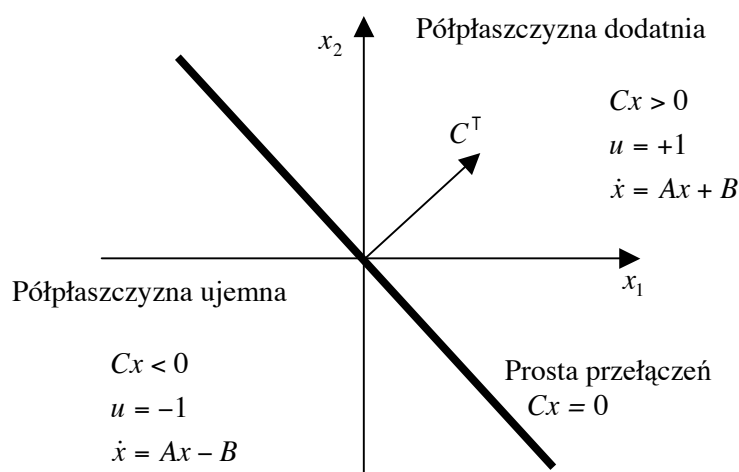
Rodziny trajektorii fazowych startujących z różnych warunków początkowych tworzą tak zwane *portrety fazowe*. W przypadku układu drugiego rzędu portrety fazowe leżą na płaszczyźnie fazowej. Aby umożliwić obserwację zachowania trajektorii fazowych, trzeba dobierać warunki początkowe w taki sposób, by trajektorie były rozróżnialne między sobą. Zbyt gęste usytuowanie warunków początkowych spowoduje całkowite wypełnienie płaszczyzny fazowej wykresami („zaczernienie”).

Konstrukcję portretów zaczniemy od przypadku przekaźnika dwustanowego bez histerezy (rysunek 8.5). Przełączenie sterowania  $u$  następuje, gdy wartość funkcji  $y$  przechodzi przez zero. Zgodnie z równaniem wyjścia, zachodzi wtedy równość  $Cx = 0$ . Zbiór wszystkich stanów, które spełniają to równanie, jest na płaszczyźnie stanu prostą przechodzącą przez środek układu współrzędnych i prostopadłą do wektora  $C^T \in \mathbb{R}^2$ . Prosta ta, zwana *prostą przełączeń*, dzieli płaszczyznę stanu na dwie półpłaszczyzny. W każdym punkcie półpłaszczyzny *dodatniej*, wskazywanej przez wektor  $C^T$ , wyjście obiektu jest dodatnie, a więc odpowiednie sterowanie  $u(t) = +1$ . Po drugiej stronie prostej przełączeń, czyli na półpłaszczyźnie *ujemnej*, wyjście obiektu jest ujemne, zatem  $u(t) = -1$ . Na półpłaszczyźnie dodatniej trajektorie systemu spełniają równanie

$$\dot{x} = Ax + B, \quad B \in \mathbb{R}^2 \quad (8.2)$$

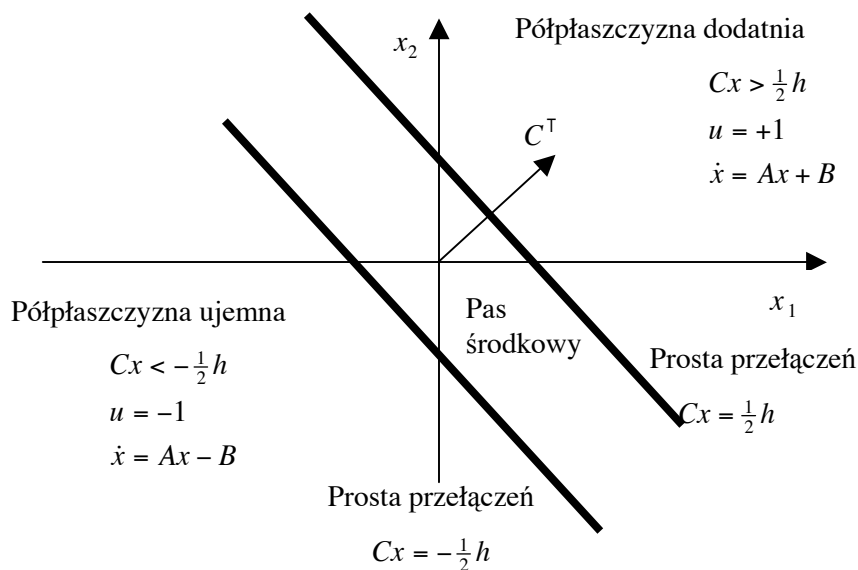
a na półpłaszczyźnie ujemnej – równanie

$$\dot{x} = Ax - B. \quad (8.3)$$



Rys. 8.5. Płaszczyzna stanu dla układu z przekaźnikiem bez histerezy

Przejdźmy teraz do portretu fazowego układu z przekaźnikiem z histerezą (rysunek 8.6). Przełączenia zachodzą na dwóch prostych:  $Cx = \pm \frac{1}{2}h$ . W półpłaszczyźnie  $Cx > \frac{1}{2}h$  (*dodatniej*) portret fazowy składa się z łuków rozwiązań równania (8.2), a w półpłaszczyźnie  $Cx < -\frac{1}{2}h$  (*ujemnej*) – z łuków rozwiązań równania (8.3). W *pasie środkowym*  $-\frac{1}{2}h \leq Cx \leq +\frac{1}{2}h$  konieczna jest bardziej szczegółowa analiza. Wyjście przekaźnika  $u$  zmienia skokowo wartość w chwili  $t$  z  $-1$  na  $+1$ , gdy  $u(t-) = -1$ ,  $Cx(t) = \frac{1}{2}h$  oraz  $C\dot{x}(t-) = CAx(t) - CB > 0$ . Jeśli przy tym  $C\dot{x}(t+) = CAx(t) + CB > 0$ , to trajektoria wchodzi następnie na półpłaszczyznę dodatnią, a jeśli  $CAx(t) + CB < 0$  – zawraca do pasa środkowego. Natomiast  $u$  zmienia skokowo wartość z  $+1$  na  $-1$ , gdy  $u(t-) = +1$ ,  $Cx(t) = -\frac{1}{2}h$  i  $C\dot{x}(t-) = CAx(t) + CB < 0$ . Jeśli  $C\dot{x}(t+) = CAx(t) - CB < 0$ , to trajektoria wchodzi na półpłaszczyznę ujemną, a gdy  $CAx(t) - CB > 0$  – zawraca do pasa środkowego.



Rys. 8.6. Płaszczyzna stanu dla układu z przekaźnikiem z histerezą

Na portrecie fazowym układu z przekaźnikiem trójstanowym występują dwie proste przełączeń:  $Cx = \pm \frac{1}{2}a$ . W półpłaszczyźnie  $Cx < -\frac{1}{2}a$  portret fazowy składa się z łuków trajektorii równania (8.3), w półpłaszczyźnie  $Cx > \frac{1}{2}a$  – z łuków trajektorii równania (8.2), a w pasie  $-\frac{1}{2}a < Cx < \frac{1}{2}a$  (czyli tzw. *strefie martwej*) portret jest złożony z łuków rozwiązań równania stanu ze sterowaniem zerowym,  $\dot{x} = Ax$ .

Konstrukcję mogą ułatwić dwa spostrzeżenia. Po pierwsze, portrety fazowe są symetryczne, co wynika z symetrii rozważanych przekaźników. Jeśli  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , jest łukiem trajektorii stanu układu zamkniętego, to  $-x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  – też. Po drugie, w przypadku, gdy macierz  $A$  jest nieosobliwa, trajektorie układów (8.2) i (8.3) można uzyskać przez równoległe przesunięcie trajektorii swobodnych, w taki sposób, aby nowy punkt równowagi znalazł się odpowiednio w punkcie  $\mp A^{-1}B$ .

### 8.3. Reżim ślizgowy

Równanie stanu układu zamkniętego z przekaźnikiem dwustanowym bez histerezy ma postać

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \operatorname{sgn}(Cx(t)). \quad (8.4)$$

Prawa strona tego równania jest nieciągłą funkcją stanu  $x(t)$ . Przypomnijmy, że klasyczna teoria równań różniczkowych wymaga przynajmniej ciągłości prawej strony dla zagwarantowania, że rozwiązanie równania istnieje. Dla udowodnienia większości ważnych własności rozwiązań (jednoznaczność, ciągłość i gładka zależność od parametrów, przedłużalność itd.) wymagana jest jeszcze większa regularność prawej strony (np. spełnianie warunku Lipschitza względem zmiennej  $x$ ). Można więc oczekiwać, że w układzie opisanym równaniem (8.4) pojawią się ciekawe osobliwości. Jednym z takich osobliwych zjawisk jest *reżim ślizgowy*. Aby objaśnić to zjawisko, rozważmy sytuację, w której na pewnym odcinku prostej przełączeń zachodzą jednocześnie nierówności

$$CAx - CB > 0 \text{ i } CAx + CB < 0. \quad (8.5)$$

Oznacza to, że zarówno na półpłaszczyźnie dodatniej jak ujemnej trajektorie stanu w pobliżu prostej przełączeń kierują się w jej stronę i „zderzają się” na niej. Łatwo zauważyć, że po dotarciu stanu do prostej przełączeń, rozwiązania równania (8.4) w sensie klasycznym kontynuować się nie da. W takiej sytuacji klasycznie rozumiane równanie różniczkowe nie może służyć jako model układu

rzeczywistego z przekąźnikiem. Okazuje się jednak, że wystarczy pewne rozszerzenie definicji rozwiązania równania różniczkowego, żeby przywrócić równaniu funkcję modelu. Aby do tego rozszerzenia dojść, zastanówmy się najpierw, jak działałby układ rzeczywisty. Wskutek nieuniknionej bezwładności, rzeczywista „prosta przełączeń” wykazuje pewne rozmycie. Przekąźnik zawsze reaguje z pewnym opóźnieniem, a obiekt z kolei z pewnym opóźnieniem „zauważa” zmianę stanu przekąźnika. Z dobrym przybliżeniem można zamodelować te opóźnienia, zastępując idealny przekąźnik dwustanowy przekąźnikiem z histerezą, o małej, ale niezerowej szerokości pętli  $h$ . W symulacjach komputerowych podobne efekty opóźnieniowe są spowodowane niezerową długością kroku dyskretyzacji. Powtarzając podane wyżej rozumowanie dochodzimy do wniosku, że po wejściu do pasa środkowego trajektoria przybierze postać łamanej, której kolejne wierzchołki leżą na zmianę na prostych  $Cx = \pm \frac{1}{2}h$ , a łuki między tymi wierzchołkami są rozwiązaniami równania stanu (8.1) z wartościami sterowania kolejno  $\mp 1$ . Sterowanie będzie zatem funkcją bang-bangową z dużą częstotliwością przełączeń. Kiedy szerokość pętli histerezy zdąży do zera, to częstotliwość przełączeń zdąży do nieskończoności, a trajektoria stanu zdąży do pewnej funkcji czasu leżącej na prostej przełączeń. Ciąg trajektorii stanu przy  $h \rightarrow 0_+$  ma zatem porządną granicę. Tą granicę nazywamy właśnie reżimem ślizgowym. Odpowiedni ciąg sterowań granicy punktowej nie posiada – nie jest zbieżny w prawie żadnej chwili czasu.

Z nierówności (8.5) wynika od razu prosty warunek konieczny i wystarczający zaistnienia reżimu ślizgowego

$$CB < 0. \quad (8.6)$$

Łatwo jest wyznaczyć odcinek prostej przełączeń, na którym występuje reżim ślizgowy. Każdy punkt na tej prostej można przedstawić w postaci  $x = s\gamma$ , gdzie  $s$  jest parametrem liczbowym, a  $\gamma = \text{col}(C_2, -C_1)$  jest niezerowym wektorem prostopadłym do  $C^\top$ . Na mocy (8.5), reżim ślizgowy występuje dla tych  $s$ , które spełniają nierówności  $CB < sCA\gamma < -CB$ .

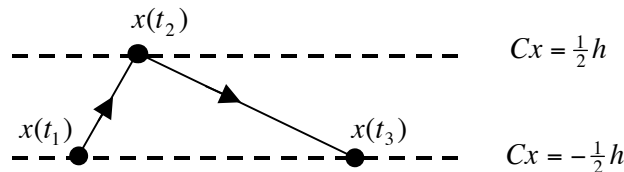
## 8.4. Dynamika reżimu ślizgowego

Aby wyprowadzić równanie ruchu obowiązujące w reżimie ślizgowym, rozważmy fragment trajektorii układu z niezerową histerezą, który leży w pasie środkowym. Dla małych  $h$  możemy posłużyć się przybliżeniem liniowym (rysunek 8.7). Z równości

$$x(t_3) = x(t_2) + \dot{x}(t_2+)(t_3 - t_2) = x(t_1) + \dot{x}(t_1+)(t_2 - t_1) + \dot{x}(t_2+)(t_3 - t_2) \quad (8.7)$$

wynika formuła na „średnią prędkość”

$$\frac{x(t_3) - x(t_1)}{t_3 - t_1} = (\dot{x}(t_1+) - \dot{x}(t_2+)) \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} + \dot{x}(t_2+). \quad (8.8)$$



Rys. 8.7. Fragment trajektorii w pasie środkowym

Z równań prostych przełączeń  $Cx(t_1) = Cx(t_3) = -\frac{1}{2}h$ . Po lewostronnym pomnożeniu równości (8.8) przez  $C$  wyliczamy z niej

$$\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} = \frac{-C\dot{x}(t_2+)}{C\dot{x}(t_1+) - C\dot{x}(t_2+)}.$$

Podstawiamy ten wynik do (8.8)

$$\frac{x(t_3) - x(t_1)}{t_3 - t_1} = \frac{\dot{x}(t_1+)C\dot{x}(t_2+) - \dot{x}(t_2+)C\dot{x}(t_1+)}{C\dot{x}(t_2+) - C\dot{x}(t_1+)} . \quad (8.9)$$

Pochodne prawostronne wynoszą  $\dot{x}(t_1+) = Ax(t_1) - B$  i  $\dot{x}(t_2+) = Ax(t_2) + B$ . Gdy  $h \rightarrow 0_+$ , to  $x(t_2) - x(t_1) \rightarrow 0$ . Zatem

$$C\dot{x}(t_2+) - C\dot{x}(t_1+) \rightarrow 2CB$$

$$\dot{x}(t_1+)C\dot{x}(t_2+) - \dot{x}(t_2+)C\dot{x}(t_1+) \rightarrow 2(CBI - BC)Ax(t_1).$$

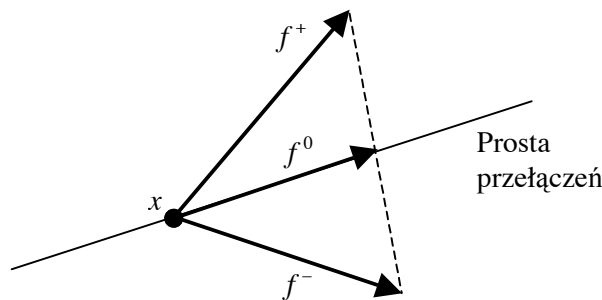
Przechodząc do granicy, z równania (8.9) otrzymujemy równanie ruchu w reżimie ślizgowym

$$\dot{x}(t) = \left( I - \frac{BC}{CB} \right) Ax(t) \quad (8.10)$$

Ponieważ w reżimie ślizgowym trajektoria stanu leży na prostej przełączeń, można ją zapisać parametrycznie w postaci  $x(t) = s(t)\gamma$ , gdzie  $\gamma = \text{col}(C_2, -C_1)$ . Podstawiamy to wyrażenie do równania (8.10) i mnożymy obie strony równania z lewej strony przez  $\gamma^\top$ . Stąd ostatecznie

$$\dot{s}(t) = \alpha s(t), \quad \alpha = \frac{1}{\gamma^\top \gamma} \gamma^\top \left( I - \frac{BC}{CB} \right) A \gamma. \quad (8.11)$$

Ślizgową trajektorię stanu, leżącą na prostej przełączeń i spełniającą równania (8.10) i (8.11), traktuje się jako uogólnione rozwiązanie równania (8.4). Nazywa się je najczęściej *rozwiązaniem w sensie Filippowa*. Warto zauważyć, że równanie (8.10) ma prostą interpretację geometryczną. Oznaczmy prawą stronę (8.10) przez  $f^0$ ,  $f^0 = (I - BC/(CB))Ax$ , a prawe strony równania (8.1) z wartościami sterowania  $\pm 1$  odpowiednio przez  $f^+$  i  $f^-$ ,  $f^\pm = Ax \pm B$ . Łatwo wykazać, że  $f^0 = \alpha f^+ + (1-\alpha)f^-$ , gdzie  $\alpha \in [0,1]$  jest dobrane w taki sposób, aby wektor  $f^0$  był równoległy do prostej przełączeń (rysunek 8.8)



Rys. 8.8. Interpretacja geometryczna równania ruchu w reżimie ślizgowym

## 8.5. Cykl graniczny

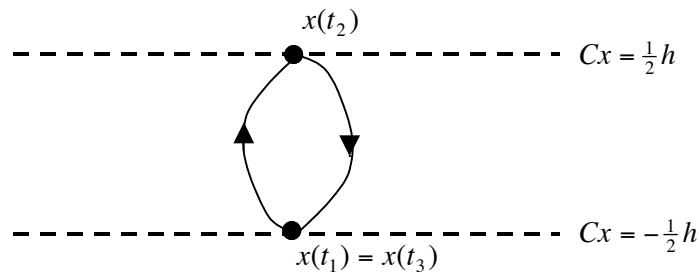
W systemach nieliniowych, opisanych autonomicznymi różniczkowymi równaniami stanu, możemy spotkać trajektorie zamknięte nazywane cyklami granicznymi. *Cykl graniczny* jest to trajektoria okresowa systemu w przestrzeni stanu (różna od stałej), która ma taką własność, że w jej dowolnie małym otoczeniu zaczynają się trajektorie nieokresowe. Przypomnijmy, że cykl graniczny  $\bar{x}$  jest

asymptotycznie stabilny (w sensie Lapunowa), jeśli dla każdego  $t_0 \geq 0$  i każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$ , takie że

$$\|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{oraz} \quad \|x(t) - \bar{x}(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

gdzie  $x$  oznacza dowolne rozwiązanie rozważanego równania stanu. Asymptotycznie stabilne cykle graniczne są typowym trybem pracy układów regulacji przekąźnikowej w warunkach ustalonych.

W rozważanym układzie cykl graniczny można łatwo wygenerować, jeśli przekąźnik ma histerezę, macierz  $A$  jest asymptotycznie stabilna i  $CB < 0$ . Cyklem granicznym może być wtedy okresowa trajektoria stanu zawarta w pasie środkowym, która „odbija się” na przemian od prostych przełączeń  $Cx = \frac{1}{2}h$  i  $Cx = -\frac{1}{2}h$ . Trajektorię taką naszkicowano na rysunku 8.9. W chwili  $t_1$  stan znajduje się na prostej przełączeń  $Cx = -\frac{1}{2}h$ , w chwili  $t_2 > t_1$  osiąga prostą  $Cx = \frac{1}{2}h$ , tam sterowanie zmienia wartość z  $-1$  na  $+1$ , trajektoria zawraca i w chwili  $t_3$  dochodzi znowu do punktu  $x(t_1)$ ; tu sterowanie zmienia wartość na przeciwną i cykl zaczyna się od nowa.



Rys. 8.9. Cykl graniczny

Oznaczając dla uproszczenia zapisu  $y_1 = x(t_1)$ ,  $y_2 = x(t_2)$ ,  $d_1 = t_2 - t_1$ ,  $d_2 = t_3 - t_2$ , mamy

$$\begin{aligned} Cy_1 &= -\frac{1}{2}h, & Cy_2 &= \frac{1}{2}h \\ y_2 &= \exp(Ad_1)y_1 - \int_0^{d_1} \exp(At)B dt \\ y_1 &= \exp(Ad_2)y_2 + \int_0^{d_2} \exp(At)B dt. \end{aligned}$$

Jest to układ sześciu równań skalnychych z sześcioma niewiadomymi. Poszukajmy rozwiązania symetrycznego, spełniającego związku  $d_2 = d_1$  i  $y_2 = -y_1$ . Po tych podstawieniach dostajemy układ trzech równań skalnychych z trzema niewiadomymi

$$\begin{aligned} Cy_1 &= -\frac{1}{2}h \\ y_1 &= (I + \exp(Ad_1))^{-1} \int_0^{d_1} \exp(At)B dt. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Rugując  $y_1$  otrzymujemy równanie na niewiadomą  $d_1$

$$C(I + \exp(Ad_1))^{-1} \int_0^{d_1} \exp(At)B dt = -\frac{1}{2}h. \tag{8.13}$$

Rozwiązania równania (8.13) trzeba na ogół szukać na drodze numerycznej. Oczywiście interesują nas tylko rozwiązania dodatnie,  $d_1 > 0$ .

## 8.6. Przykład

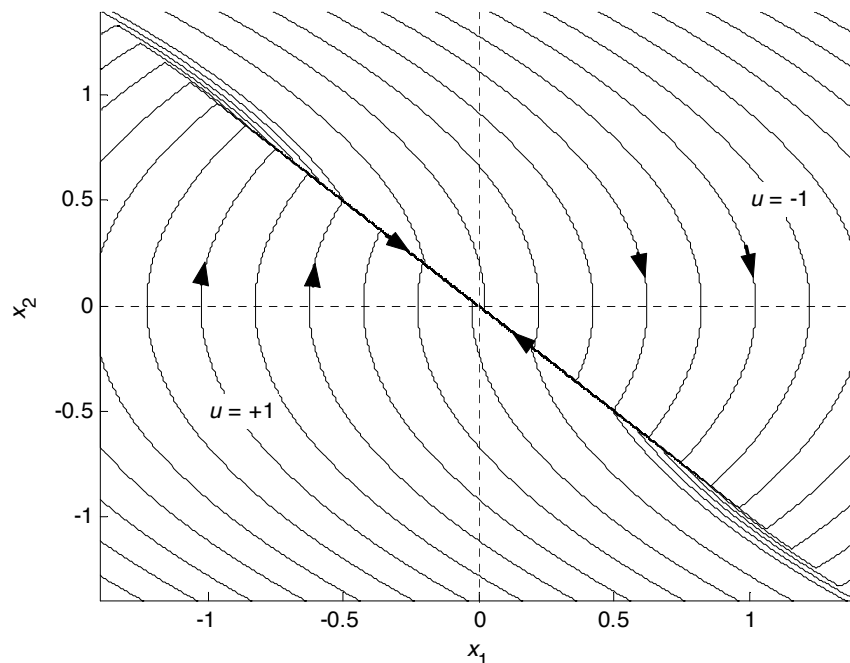
Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

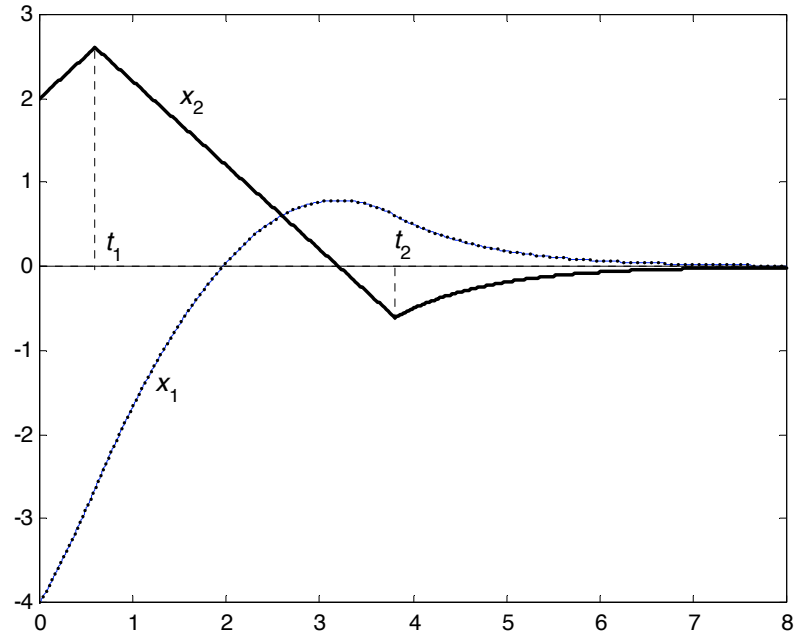
Zaczniemy od portretu fazowego układu z przekaźnikiem dwustanowym bez histerezy. Prosta przełączeń ma równanie  $Cx = -x_1 - x_2 = 0$ . Warunki reżimu ślizgowego (8.5)

$$CAx - CB = 1 - x_2 > 0, \quad CAx + CB = -1 - x_2 < 0$$

są spełnione na prostej przełączeń dla  $-1 < x_2 < 1$ . Dla stałego sterowania  $u = \pm 1$ , trajektorie stanu spełniają równości  $x_1 = \pm \frac{1}{2}x_2^2 + c$ , gdzie  $c$  jest dowolną stałą. Portret fazowy przedstawiony jest na rysunku 8.10. Rysunek 8.11 pokazuje trajektorię stanu jako funkcję czasu, z zaznaczeniem przełączeń i reżimu ślizgowego. Równanie ruchu ślizgowego (8.11) przyjmuje postać  $\dot{s}(t) = -s(t)$ .



Rys. 8.10. Portret fazowy układu z przekaźnikiem dwustanowym bez histerezy



Rys. 8.11. Wybrana trajektoria stanu;  $t_1$  - czas przełączenia,  $t_2$  - początek reżimu ślizgowego

Rozważmy teraz ten sam układ, zakładając jednak, że przełącznik ma histerezę o szerokości  $h > 0$ . Na rysunku 8.12 widzimy portret fazowy dla małej wartości  $h$  ( $h = 0.1$ ), a na rysunku 8.13 – dla dużej,  $h = 1$ . Zwróćmy uwagę na stabilny cykl graniczny, który powstaje wokół środka układu współrzędnych. Korzystając z zależności (8.12) i (8.13), wyznaczmy parametry tego cyklu. Wyliczamy kolejno

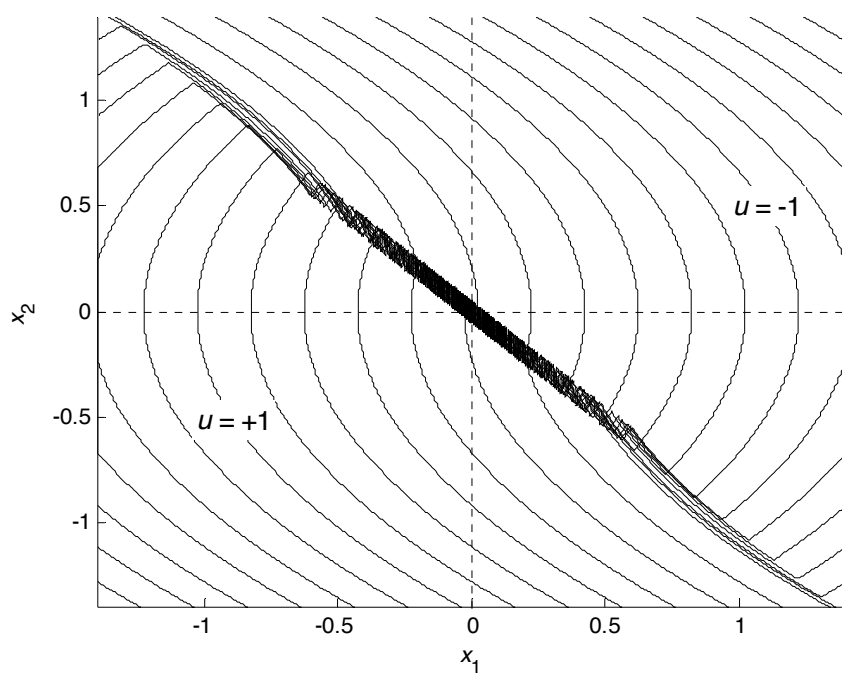
$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{d_1} \exp(At) B dt = \int_0^{d_1} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} d_1^2 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

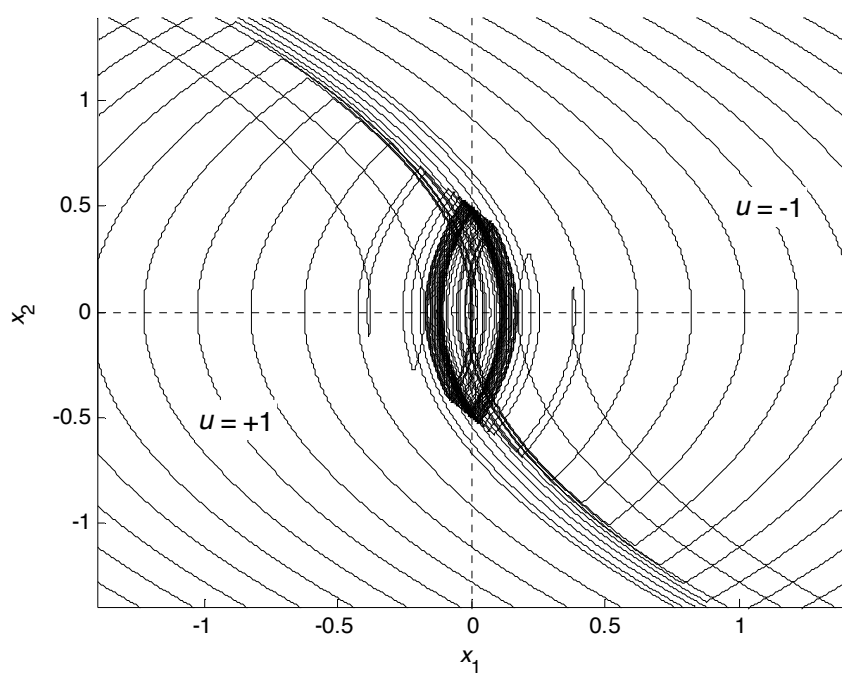
$$(I + \exp(Ad_1))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & d_1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} d_1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Podstawiamy te wyniki do równania (8.13), skąd  $d_1 = h$ . Z (8.12) otrzymujemy  $y_1 = \text{col}(0, \frac{1}{2} h)$ .

Na zakończenie zwróćmy uwagę na stabilizującą rolę regulatora przełącznikowego. Dzięki ujemnym elementom macierzy wyjścia, w układzie zamkniętym występuje ujemne sprzężenie zwrotne od sumy obu zmiennych stanu. Układ otwarty jest niestabilny (macierz  $A$  ma dwie wartości własne zerowe i tylko jeden liniowo niezależny wektor własny), natomiast układ zamknięty z przełącznikiem bez histerezy jest globalnie asymptotycznie stabilny. Jeśli przełącznik ma histerezę, to wszystkie trajektorie stanu zdyżają do asymptotycznie stabilnego cyklu granicznego.

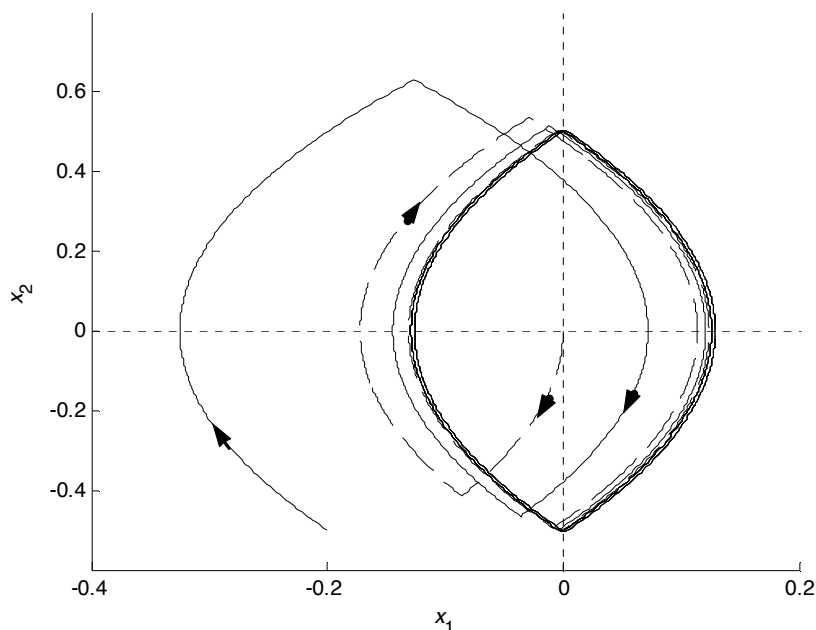


Rys. 8.12. Portret fazowy z małą histerezą



Rys. 8.13. Portret fazowy z dużą histerezą





Rys. 8.14. Dwie trajektorie stanu zbieżące do cyklu granicznego

## 8.7. Przebieg ćwiczenia i opracowanie wyników

W ćwiczeniu wykorzystuje się środowisko programowe MATLAB/Simulink.

Przebieg ćwiczenia.

- Dla zadanych macierzy  $A$ ,  $B$  i  $C$  oraz wszystkich trzech typów przekładników narysować portrety fazowe. Zaznaczyć na nich proste przełączeń.
- Zamodelować układ z przekładnikiem dwustanowym bez histerezy. Przyjąć dwie macierze  $A$ : asymptotycznie stabilną i niestabilną. Dobrać  $B$  i  $C$  tak, aby w układzie powstał reżim ślizgowy. Narysować portrety fazowe, zaznaczyć proste przełączeń i zakresy reżimu ślizgowego. Zrobić wykresy współrzędnych stanu w funkcji czasu, z zaznaczeniem przedziałów, w których sterowanie jest równe  $+1$ ,  $-1$ , oraz początku reżimu ślizgowego. Objasnić wykres sterowania w funkcji czasu.
- Zamodelować układ z przekładnikiem dwustanowym z histerezą. Dobrać dwie macierze  $A$  jak wyżej, macierze  $B$  i  $C$  powinny spełniać (8.6). Zaobserwować wpływ szerokości pętli histerezy na portret fazowy i częstość przełączeń sterowania. Zbadać warunki istnienia cyklu granicznego i jego własności.

Sprawozdanie powinno zawierać sformułowanie celu ćwiczenia oraz opis jego przebiegu i wyników. Należy podać przyjęte wartości parametrów układu, objaśnić metodykę posługiwania się środowiskiem programowym, zamieścić wyniki symulacji w postaci rysunków i wykresów. Rezultaty eksperymentów symulacyjnych, tam gdzie to możliwe, powinny być porównane z wynikami uzyskanymi analitycznie. Koniecznie trzeba wyjaśnić ewentualne rozbieżności. Sprawozdanie powinno kończyć się wnioskami. Warto spróbować odpowiedzieć na pytanie, czy na podstawie przeprowadzonych badań można określić warunki stabilności badanych układów zamkniętych z regulatorami przekładnikowymi.

## 8.8. Literatura

Gessing R., Latarnik M., Skrzywan-Kosek A. (1981): *Zbiór zadań z teorii nieliniowych układów regulacji i sterowania*. WNT, Warszawa.

## 9. Zbiory stanów osiągalnych

Ważnym pytaniem dotyczącym układu sterowania jest, jakie cele można w tym układzie osiągnąć w zadanym czasie. Posługując się opisem w przestrzeni stanu, można je wyrazić jako pytanie o zbiór stanów osiągalnych. Jeśli sformułowanie problemu sterowania jest realistyczne, to zbiór stanów osiągalnych w skończonym czasie jest ograniczony. Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodą wyznaczania takich zbiorów opartą na zasadzie maksimum Pontriagina, jednym z podstawowych twierdzeń optymalizacji dynamicznej, i obserwacja zbiorów osiągalności w układach drugiego rzędu.

### 9.1. Zbiory stanów osiągalnych w systemie liniowym II rzędu

Rozważamy system liniowy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \quad (9.1)$$

$$x(0) = 0$$

$$\dim x(t) = 2, \quad \dim u(t) = 1$$

ze sterowaniami ograniczonymi

$$|u(t)| \leq 1. \quad (9.2)$$

Stan  $\xi \in \mathbb{R}^2$  nazywamy *osiągalnym w chwili  $T$* , jeśli istnieje sterowanie  $u$ , spełniające (9.2), takie że odpowiednia trajektoria  $x(\cdot; u)$  systemu (9.1) spełnia warunek:  $x(T; u) = \xi$ . Zbiorem *osiągalności w chwili  $T$*  (oznaczanym  $X(T)$ ) nazywamy zbiór wszystkich stanów osiągalnych w chwili  $T$ . Zbiory  $X(T)$  są wypukłe i zwarte, ponadto

$$X(T_1) \subset X(T_2), \quad \text{jeśli } T_1 \leq T_2. \quad (9.3)$$

Zatem zbiór osiągalności jest jednoznacznie określony przez swój brzeg  $\partial X(T)$ .

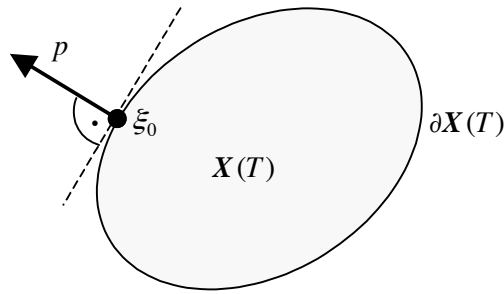
#### Wyznaczanie brzegu zbioru osiągalności

Niech  $p = [\sin \varphi \quad \cos \varphi]^\top$ . Wektor  $p$  podpira zbiór osiągalności  $X(T)$  w punkcie  $\xi_0 \in \partial X(T)$ , jeśli

$$p^\top \xi_0 = \max\{p^\top \xi : \xi \in X(T)\}. \quad (9.4)$$

Zachodzi równość

$$\max\{p^\top \xi : \xi \in X(T)\} = \max\{p^\top x(T; u) : u \text{ spełnia (9.2)}\}. \quad (9.5)$$



Rys. 9.1. Wektor  $p$  podiera zbiór  $X(T)$  w punkcie  $\xi_0$

Ponieważ

$$p^\top x(T; u) = \int_0^T p^\top e^{A(T-t)} B u(t) dt, \quad (9.6)$$

lewa strona osiąga maksimum na sterowaniu  $u^*$ , określonym przez

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \psi(t)^\top B \geq 0 \\ -1, & \text{gdy } \psi(t)^\top B < 0, \end{cases} \quad (9.7)$$

gdzie *funkcja sprzężona*

$$\psi(t) = \exp(A^\top (T - t)) p \quad (9.8)$$

spełnia tzw. *równanie sprzężone*

$$\dot{\psi}(t) = -A^\top \psi(t), \quad \psi(T) = p. \quad (9.9)$$

Zmieniając w wektorze  $p$  kąt  $\varphi$  w granicach  $[0, 2\pi[$ , otrzymujemy w ten sposób wszystkie punkty brzegowe zbioru  $X(T)$ . Uwaga: wystarczy zmieniać kąt w granicach  $[0, \pi]$  (dlaczego?).

Zauważmy, że rozwiązanie równania sprzężonego (9.9) wzajemnie jednoznacznie przyporządkowuje wartości  $\psi(T)$  wartościom  $\psi(0)$ . Wynika to natychmiast ze wzoru (9.8). Wobec tego, aby wyznaczyć brzeg zbioru osiągalności, wystarczy w równaniu (9.9) zmieniać warunek początkowy według wzoru  $\psi(0) = [\sin\varphi \quad \cos\varphi]^\top$ , dla  $\varphi$  w granicach  $[0, 2\pi[$ .

### Zadanie 1

Przeprowadzić obserwację zachowania się zbiorów  $X(T)$  przy rosnącym  $T$ , dla różnych macierzy  $A$  i wektorów  $B$ .

## 9.2. Zbiory osiągalności w systemie nieliniowym II rzędu

Rozważmy silnik prądu stałego ze stałym strumieniem wzbudzenia, sterowany napięciem twornika  $u$ , spełniającym ograniczenie (9.2). Silnik obraca wahadło matematyczne (punkt materialny o masie  $m$  na nieważkim pręcie o długości  $l$ , w ziemskim polu grawitacyjnym). Oś obrotu jest pozioma, wahadło zamocowane prostopadłe do osi. W chwili początkowej wahadło zwisa swobodnie w dół i układ jest w spoczynku. Naszym celem jest badanie zbiorów osiągalności w tym systemie.

Najpierw układamy równania stanu. Równanie elektryczne silnika:

$$u(t) = Ri(t) + k_e x_2(t), \quad (9.10)$$

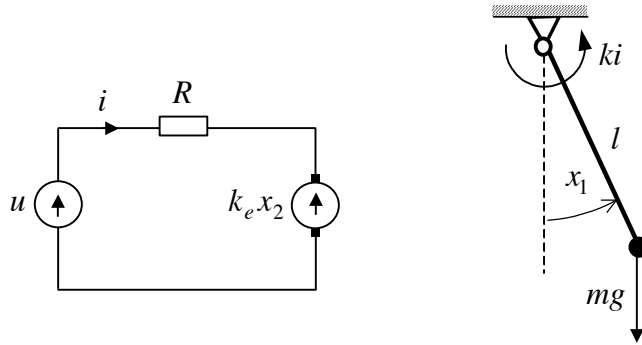
gdzie  $i(t)$  jest natężeniem prądu twornika, a  $x_2(t)$  jest prędkością kątową wału. Równanie mechaniczne silnika:

$$J\ddot{x}_2(t) = M_s(t) - M_0(t), \quad (9.11)$$

gdzie  $M_s(t) = k i(t)$  jest momentem obrotowym silnika, a moment obciążenia wytwarzany przez wahadło wyraża się przez

$$M_0(t) = mlg \sin x_1(t). \quad (9.12)$$

$x_1(t)$  jest mierzonym w kierunku dodatnim kątem, jaki tworzy wahadło z kierunkiem „pionowo w dół”.



Rys. 9.2. Schemat elektryczny silnika i wahadło na osi

Równania stanu powstają przez wyrugowanie  $i(t)$  z równań (9.10) - (9.12). Oznaczając

$$a_1 = -\frac{mlg}{J}, \quad a_2 = -\frac{kk_e}{RJ}, \quad b = \frac{k}{RJ},$$

otrzymujemy równania stanu w postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_1 \sin x_1(t) + a_2 x_2(t) + bu(t). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Na sterowanie  $u(t)$  nakładamy ograniczenie (9.2). Przyjmujemy warunki początkowe zerowe:  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ .

Zbiór osiągalności w chwili  $T$  definiuje się jak w układzie liniowym. Jest on nadal zwarty, ale w układzie nieliniowym może nie być wypukły. Jak poprzednio, punkty brzegowe zbioru  $X(T)$  wyznaczamy przez maksymalizację iloczynu  $p^\top x(T; u)$  w zbiorze sterowań dopuszczalnych. Symbol  $p$  oznacza tutaj dowolny niezerowy wektor w  $\mathbf{R}^2$ . Dla układu nieliniowego nie możemy się posłużyć wzorem analogicznym do (9.6), niemniej z teorii sterowania optymalnego (*zasada maksimum Pontriagina*) wynika, że jeżeli sterowanie  $u^*$  maksymalizuje iloczyn  $p^\top x(T; u)$ , to spełnia (9.7) z  $B = \text{col}(0, b)$  i funkcją sprzężoną  $\psi = \text{col}(\psi_1, \psi_2)$ , będącą rozwiązaniem układu sprzężonego

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= -a_1 \psi_2(t) \cos x_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t) - a_2 \psi_2(t) \end{aligned} \quad (9.14)$$

z warunkiem końcowym  $\psi(T) = p$ .

Przyjmijmy, że zbiór osiągalności  $X(T)$  jest ściśle wypukły (tak jest dla  $T$  dostatecznie małych). Przy tym założeniu punkt  $\xi$  leży na brzegu zbioru osiągalności (czyli  $\xi \in \partial X(T)$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego  $p \in \mathbf{R}^2$  postaci

$$p = [\sin\varphi \quad \cos\varphi]^\top, \quad \varphi \in [0, 2\pi[ , \quad (9.15)$$

zachodzi równość  $\xi = x(T; u)$ , gdzie sterowanie  $u$  spełnia (9.7) z funkcją  $\psi$  będącą rozwiązaniem (9.14) z warunkiem końcowym  $\psi(T) = p$ .

Podobnie jak w przypadku liniowym, odwzorowanie zbioru wartości początkowych funkcji sprzężonej w zbiór wartości końcowych jest wzajemnie jednoznaczne. Wynika stąd, że  $\xi \in \partial X(T)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\xi = x(T; u)$  i  $u$  spełnia (9.7) z funkcją  $\psi$  będącą rozwiązaniem (9.14) z warunkiem początkowym  $\psi(0) = [\sin\varphi \quad \cos\varphi]^\top$ , dla pewnego  $\varphi \in [0, 2\pi[$ .

Aby wyznaczyć cały brzeg zbioru osiągalności, trzeba dla każdego  $\varphi$  z przedziału  $[0, 2\pi[$ :

- wyznaczyć początkową wartość funkcji sprzężonej  $\psi(0) = [\sin\varphi \quad \cos\varphi]^\top$ ,
- w przedziale czasu  $[0, T]$  rozwiązać układ równań stanu (9.13) i równań sprzężonych (9.14) z zadanymi warunkami początkowymi, wyliczając jednocześnie sterowanie ze wzoru

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \psi_2(t)b \geq 0 \\ -1, & \text{gdy } \psi_2(t)b < 0. \end{cases}$$

Otrzymany w ten sposób zbiór punktów  $x(T; u)$  jest brzegiem zbioru  $X(T)$ .

## Zadanie 2

Należy przeprowadzić obserwację zbiorów  $X(T)$  przy rosnącym  $T$ , dla różnych wartości parametrów  $a_1$ ,  $a_2$  i  $b$ .

## 9.3. Literatura

Bołtianski W.G. (1971): *Matematyczne metody sterowania optymalnego*. Warszawa, WNT.

## 10. Obserwatory asymptotyczne

### 10.1. Obserwator Luenbergera pełnego rzędu

Rozważamy obserwowalny system liniowy  $n$ -tego rzędu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \quad (10.1)$$

z  $m$ -wymiarowym równaniem wyjścia

$$y(t) = Cx(t). \quad (10.2)$$

Naszym celem jest skonstruowanie systemu, nazywanego obserwatorem pełnego rzędu, który na podstawie znanej trajektorii wyjścia  $y$  i sterowania  $u$  systemu (10.1), (10.2) generuje trajektorię  $w$ , z upływem czasu zmierzającą do nieznanej trajektorii stanu  $x$  systemu (10.1), (10.2). Żądamy, żeby obserwator działał tak dla każdej trajektorii  $x$ . Poszukiwany obserwator umożliwi więc asymptotyczną (przy  $t \rightarrow \infty$ ) rekonstrukcję stanu  $x(t)$ .

*Obserwatorem Luenbergera pełnego rzędu* dla systemu (10.1), (10.2) nazywamy system liniowy  $n$ -tego rzędu

$$\dot{w}(t) = Fw(t) + Gy(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (10.3)$$

taki że błąd obserwacji stanu  $e(t) = w(t) - x(t)$  zanika z czasem

$$e(t) = w(t) - x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (10.4)$$

dla dowolnych warunków początkowych  $x(0)$  i  $w(0)$ , i dla dowolnego sterowania  $u$ . Wektor  $w(t)$  jest estymatą stanu  $x(t)$ .

Aby skonstruować obserwator, trzeba określić  $n \times n$  - wymiarową macierz  $F$  i  $n \times m$  - wymiarową macierz  $G$  w taki sposób, żeby spełniony był warunek (10.4). Odejmując stronami (10.1) od (10.3) i korzystając z (10.2), dostajemy

$$\dot{w}(t) - \dot{x}(t) = Fw(t) + GCx(t) - Ax(t), \quad (10.5)$$

czyli

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + (F - A + GC)x(t). \quad (10.6)$$

Niech

$$F = A - GC. \quad (10.7)$$

Z obserwowalności systemu (10.1), (10.2) wynika, że dla zadanych macierzy  $A$  i  $C$ , przez odpowiedni wybór macierzy  $G$  można otrzymać  $F$  (10.7) o dowolnym, z góry ustalonym widmie (to znaczy dla każdego ciągu  $n$  liczb zespolonych  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , które mogą stanowić widmo macierzy rzeczywistej, istnieje stała macierz  $G$  o wymiarach  $n \times m$ , taka że macierz  $F$  (10.7) ma wartości własne  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ). Zażądajmy, żeby macierz  $F$  była asymptotycznie stabilna. Z (10.6) i (10.7)

$$\dot{e}(t) = Fe(t). \quad (10.8)$$

Zatem  $e(t) \rightarrow 0$  dla każdego  $e(0)$ , skąd wynika (10.4).

Konstrukcja obserwatora polega więc na dobraniu  $n \times m$  - wymiarowej macierzy  $G$  w taki sposób, żeby wszystkie wartości własne macierzy  $F = A - GC$ , które oznaczamy przez  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , miały części rzeczywiste ujemne. Wybierzmy liczby  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  leżące w lewej otwartej półpłaszczyźnie zespolonej i takie, by mogły stanowić widmo macierzy rzeczywistej. Wielomian charakterystyczny macierzy  $F$ , z definicji równy  $\det(\lambda I - F)$ , można oczywiście zapisać także jako iloczyn  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$ . Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej  $\lambda$  w tożsamości

$$\det(\lambda I - F) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (10.9)$$

dostajemy układ równań, z którego wyznacza się wszystkie elementy macierzy  $G$ .

Warto przypomnieć, że warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia jakiegokolwiek obserwatora Luenbergera pełnego rzędu w systemie (10.1), (10.2) jest wykrywalność tego systemu. Wykrywalność pary macierzy  $(C, A)$  jest bowiem równoważna istnieniu macierzy  $G$  o wymiarach  $n \times m$ , takiej że macierz  $A - GC$  jest asymptotycznie stabilna. Zwróćmy jednak uwagę, że dopiero obserwowalność systemu umożliwia dowolne kształtowanie widma macierzy  $F$ , a więc dynamiki obserwatora.

## Zadanie 1

Skonstruować obserwator Luenbergera pełnego rzędu dla systemu

$$\ddot{y}(t) = u(t), \quad t \geq 0. \quad (10.10)$$

Zapisujemy równania systemu w postaci (10.1), (10.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Zatem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.12)$$

Macierzy  $G$  szukamy w postaci

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix}^T. \quad (10.13)$$

Zgodnie z (10.7)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1 & 1 \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.14)$$

Oznaczmy wartości własne macierzy  $F$  przez  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Z porównania współczynników przy tych samych potęgach  $\lambda$  w równości

$$\det(\lambda I - F) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \quad (10.15)$$

otrzymujemy

$$G_1 = -\lambda_1 - \lambda_2, \quad G_2 = \lambda_1 \lambda_2. \quad (10.16)$$

Ostatecznie



$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Zadanie 2

Skonstruować obserwator Luenbergera pełnego rzędu dla systemu oscylacyjnego postaci (10.1), (10.2), z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.17)$$

Stała  $k$  jest dodatnia. Wielkością wyjściową jest prędkość ruchu drgającego.

Zakładając macierz  $G$  w postaci (10.13), zgodnie z (10.7) otrzymujemy

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - G_1 \\ -k & -G_2 \end{bmatrix}. \quad (10.18)$$

Ponieważ

$$\det(\lambda I - F) = \lambda^2 + G_2 \lambda + k(1 - G_1),$$

z tożsamości (10.15) dostajemy

$$G_1 = 1 - \frac{1}{k} \lambda_1 \lambda_2, \quad G_2 = -\lambda_1 - \lambda_2.$$

Z (10.18)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k} \lambda_1 \lambda_2 \\ -k & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

## 10.2. Przebieg ćwiczenia

W zadaniach 1 i 2 należy zamodelować system z obserwatorem i zbadać, jak zmienia się działanie obserwatora w zależności od wartości własnych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Wprowadzić zakłócenia (do systemu z obserwatorem) i zbadać działanie obserwatora w ich obecności. Wyciągnąć wnioski dotyczące rozsądnego wyboru parametrów obserwatora.

## 10.3. Zredukowany obserwator Luenbergera

Naszym celem jest teraz skonstruowanie obserwatora o rzędzie niższym niż  $n$ , czyli obserwatora zredukowanego. Podobnie jak wyżej, na podstawie znanej trajektorii wyjścia  $y$  i sterowania  $u$  systemu (10.1), (10.2), obserwator ma umożliwić asymptotyczną (przy  $t \rightarrow \infty$ ) rekonstrukcję stanu  $x(t)$  dla dowolnych (nieznanych) warunków początkowych  $x(0)$  i  $w(0)$ , i dla dowolnego sterowania  $u$ . Tym razem jednak wymiar trajektorii obserwatora  $w(t)$  jest mniejszy od wymiaru  $x(t)$ , a więc nie możemy żądać, aby  $w(t)$  było estymatą stanu systemu (10.1), (10.2). Stawiamy natomiast wymaganie, żeby estymatą stanu  $x(t)$  można było utworzyć z wektorów  $w(t)$  i  $y(t)$ .

Zredukowanym obserwatorem Luenbergera dla systemu (10.1), (10.2) nazywamy system liniowy rzędu  $r$ ,  $r < n$ ,

$$\dot{w}(t) = Fw(t) + Gy(t) + Hu(t), \quad t \geq 0 \quad (10.19)$$

z  $n$ -wymiarowym równaniem wyjścia

$$z(t) = Nw(t) + My(t), \quad (10.20)$$

taki że błąd obserwacji stanu  $z(t) - x(t)$  zanika z czasem

$$z(t) - x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (10.21)$$

dla dowolnych warunków początkowych  $x(0)$  i  $w(0)$ , i dla dowolnego sterowania  $u$ . Estymatą stanu jest wyjście obserwatora  $z(t)$ .

Aby skonstruować obserwator zredukowany, przepiszmy relację (10.21) w postaci

$$Nw(t) + MCx(t) \rightarrow x(t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (10.22)$$

Dobierzmy macierz  $P$  o wymiarach  $r \times m$  w taki sposób, żeby

$$MC + NP = I_{n \times n}. \quad (10.23)$$

Niech ponadto

$$e(t) = w(t) - Px(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (10.24)$$

dla dowolnych warunków początkowych  $x(0)$  i  $w(0)$ , i dla dowolnego sterowania  $u$ . Z (10.23) i (10.24) wynika (10.22), a więc i (10.21).

Konstrukcja wymaga więc określenia macierzy  $F, G, H, P, M$  i  $N$  w taki sposób, żeby spełnione były warunki (10.23) i (10.24). Różniczkując obustronnie równość definicyjną na  $e$  w (10.24), podstawiając za pochodne odpowiednie wyrażenia z (10.19) i (10.1), i korzystając z (10.2), dostajemy

$$\dot{e}(t) = \dot{w}(t) - P\dot{x}(t) = Fw(t) + GCx(t) + Hu(t) - PAx(t) - PBu(t). \quad (10.25)$$

Przyjmijmy

$$H = PB. \quad (10.26)$$

Rugując  $w(t)$  z prawej strony (10.25) za pomocą (10.24), otrzymujemy

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + (FP + GC - PA)x(t). \quad (10.27)$$

Niech

$$FP = PA - GC. \quad (10.28)$$

Z założenia obserwowalności systemu (10.1), (10.2) wynika, że dla zadanych macierzy  $A$  i  $C$ , przez odpowiedni wybór rzędu  $r$  ( $r < n$ ) i macierzy  $P, G, M, N$  można otrzymać obserwator z macierzą  $F$  spełniającą (10.28), o dowolnym, z góry ustalonym widmie. Podobnie jak dla obserwatora pełnego rzędu żądamy, żeby macierz  $F$  była asymptotycznie stabilna. Z (10.27) i (10.28)

$$\dot{e}(t) = Fe(t). \quad (10.29)$$

Zatem  $e(t) \rightarrow 0$  dla każdego  $e(0)$ , skąd wynika (10.21).

Konstrukcja obserwatora zredukowanego o rzędzie  $r$  polega na dobraniu asymptotycznie stabilnej macierzy  $F$  oraz macierzy  $G, H, P, M$  i  $N$ , spełniających związki (10.23), (10.26) i (10.28). Jak widzimy, określenie parametrów obserwatora zredukowanego wymaga więcej pracy niż dla obserwatora o pełnym rzędzie. Obniżając rząd obserwatora można jednak poprawić jego dokładność i własności dynamiczne.

### Zadanie 3

Skonstruować zredukowany obserwator Luenbergera dla systemu z zadania 1.

Przyjmujemy rząd obserwatora  $r = 1$ . Macierz  $P = [P_1 \quad P_2]$  ma wymiary  $1 \times 2$ ,  $F - 1 \times 1$ ,  $G - 1 \times 1$ .  $F, P$  i  $G$  spełniają (10.28)

$$F \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - G \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

skąd

$$FP_1 = -G, \quad FP_2 = P_1.$$

Macierzy  $M$  i  $N$  poszukujemy w postaci

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}.$$

Z (10.23)

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

czyli

$$N_1 P_2 = 0, \quad N_2 P_2 = 1$$

$$M_1 + N_1 P_1 = 1, \quad M_2 + N_2 P_1 = 0.$$

Stąd

$$N_1 = 0, \quad M_1 = 1.$$

Wielkości  $F$  i  $P$  potraktujemy jako parametry. Zatem

$$N_2 = 1/P_2, \quad M_2 = -F$$

$$P_1 = P_2 F, \quad G = -P_2 F^2$$

$$H = P_2.$$

#### Zadanie 4

Skonstruować zredukowany obserwator Luenbergera ( $r = 1$ ) dla systemu z zadania 2.

Przyjmując oznaczenia jak w poprzednim zadaniu, mamy z (10.23) i (10.28)

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} - G \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przyjmując  $P_2$  i  $F$  za parametry, otrzymujemy

$$N_2 = 0, \quad M_2 = 1$$

$$N_1 = -\frac{F}{kP_2}, \quad M_1 = \frac{F}{k}$$

$$P_1 = -\frac{kP_2}{F}, \quad G = -\left(F + \frac{k}{F}\right)P_2$$

$$H = P_2.$$

## 10.4. Przebieg ćwiczenia

W zadaniach 3 i 4 należy zamodelować system z obserwatorem i zbadać, jak zmienia się działanie obserwatora w zależności od parametrów  $F$  i  $P_2$ . Wprowadzić zakłócenia (do systemu i obserwatora) i zbadać działanie obserwatora w ich obecności. Wyciągnąć wnioski dotyczące rozsądnego wyboru parametrów obserwatora. Przeprowadzić porównanie z obserwatorem pełnego rzędu. Czy przez obniżenie rzędu udało się poprawić dokładność i własności dynamiczne?

## 10.5. Obserwator Luenbergera dla systemu nieliniowego

Obserwatory asymptotyczne Luenbergera znajdują również zastosowanie do odtwarzania stanu w systemach nieliniowych. Tutaj ograniczymy się do obserwatorów pełnego rzędu. Rozważmy system obserwowalny

$$\dot{x} = Ax + g(x, u) \quad (10.30)$$

$$y = Cx, \quad (10.31)$$

gdzie  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}^q$ . Zakładamy, że para  $(C, A)$  jest obserwowalna, a funkcja  $g$ , w ogólnym przypadku nieliniowa, spełnia warunek Lipschitza względem pierwszego argumentu, z tą samą stałą  $k_0$  dla wszystkich jego wartości

$$\|g(w, u) - g(x, u)\| \leq k_0 \|w - x\|.$$

Obserwator Luenbergera pełnego rzędu ma postać

$$\dot{w} = Fw + Gy + g(w, u). \quad (10.32)$$

Macierz obserwatora  $F = A - GC$  tworzy się według zasad podobnych jak w przypadku liniowym. Przez dobór macierzy  $G$  można dowolnie ukształtować widmo macierzy  $F$ ; także tutaj żądamy, aby macierz ta była asymptotycznie stabilna. Na macierz  $G$  trzeba jednak teraz nałożyć dodatkowe warunki, których nie będziemy szczegółowo omawiać: błąd estymacji stanu  $e = w - x$ , który spełnia równanie

$$\dot{e} = Fw + Gy + g(w, u) - Ax - g(x, u) = Fe + g(e + x, u) - g(x, u),$$

powinien zmierzać do zera przy  $t \rightarrow \infty$ , dla wszystkich trajektorii  $x$ , sterowań  $u$  i warunków początkowych  $e(0)$  z odpowiednich zbiorów. Zwykle udaje się to osiągnąć przez umieszczenie widma  $F$  w ujemnej półpłaszczyźnie Gaussa dostatecznie daleko od osi urojonej.

Macierz  $A$  w równaniu (10.30) można w pewnych wypadkach otrzymać jako pochodną prawej strony nieliniowego równania stanu, wyliczoną w zerze. Niech ogólny system nieliniowy będzie opisany równaniem stanu  $\dot{x} = f(x, u)$  z funkcją  $f$  klasy  $C^1$  względem obu argumentów. Możemy oczywiście zapisać to równanie w postaci (10.30) z podstawieniem

$$A = \nabla_x f(x, u) \Big|_{x=0, u=0}, \quad g(x, u) = f(x, u) - Ax. \quad (10.33)$$

Aby przeprowadzić linearyzację systemu w zerze, założmy, że zero jest jego punktem równowagi, to znaczy  $f(0, 0) = 0$ . Wyodrębniamy jawnie wyraz liniowy względem sterowania, pisząc

$$f(x, u) = Ax + Bu + r(x, u), \quad (10.34)$$

gdzie  $B = \nabla_u f(x, u) \Big|_{x=0, u=0}$ , a  $r$  jest odpowiednią resztą rzędu wyższego niż pierwszy. Jeśli w (10.34) pominiemy resztę  $r$ , to dostaniemy system zlinearyzowany

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx. \quad (10.35)$$

Przy założeniu, że para  $(C, A)$  jest obserwowalna, możemy dla systemu (10.35) utworzyć obserwator Luenbergera opisany w p.10.1 (równanie (10.3)). Obserwator ten jednak stosujemy do oryginalnego systemu nieliniowego z równaniem stanu  $\dot{x} = f(x, u)$ . Interesujące jest porównanie działania takiego obserwatora z obserwatorem (10.32), w którym macierz  $A$  i funkcja  $g$  są określone przez (10.33).

### Zadanie 5

Niech w systemie (10.30)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \sin x_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

System jest obserwowalny, ponieważ  $x_1(0) = y(0)$ ,  $x_2(0) = \dot{y}(0)$ . Para  $(C, A)$  jest obserwowalna. Należy najpierw zbudować obserwator (10.32) i przeprowadzić obserwację jego działania. Z kolei skonstruujemy obserwator dla układu zlinearyzowanego. Równania systemu zlinearyzowane w zerze mają postać

$$\dot{x} = A_0 x, \quad y = Cx, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}.$$

Para  $(C, A_0)$  jest obserwowalna. Konstruujemy obserwator (10.3) z p.10.1, oznaczając przez  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  wartości własne macierzy  $F_0$

$$\dot{w} = F_0 w + G_0 y$$

$$G_{01} = -\lambda_1 - \lambda_2, \quad G_{02} = a + \lambda_1 \lambda_2$$

$$F_0 = A_0 - G_0 C = \begin{bmatrix} -G_{01} & 1 \\ a - G_{02} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbudujemy jeszcze jeden obserwator postaci (10.32) dla rozważanego układu. Zapiszmy równania systemu następująco

$$\dot{x} = A_0 x + \begin{bmatrix} 0 \\ a(\sin x_1 - x_1) \end{bmatrix}, \quad y = Cx.$$

Równanie obserwatora (10.32)

$$\dot{w} = F_0 w + G_0 y + \begin{bmatrix} 0 \\ a(\sin w_1 - w_1) \end{bmatrix}.$$

## 10.6. Przebieg ćwiczenia

Należy przeprowadzić porównanie działania wszystkich trzech obserwatorów i wyciągnąć wnioski. Jak wyjaśnić małą skuteczność obserwatora drugiego? Jak wyjaśnić poprawę jego działania ze wzrostem części urojonych wartości własnych macierzy  $F_0$ ? Jaka jest odporność obserwatora Luenbergera na błędy modelowania nieliniowości? Czy zasady kompromisowego doboru parametrów obserwatora działającego w obecności zakłóceń, które sformułowaliśmy dla zadań liniowych, potwierdzają się w badanym systemie nieliniowym?

## **10.7. Literatura**

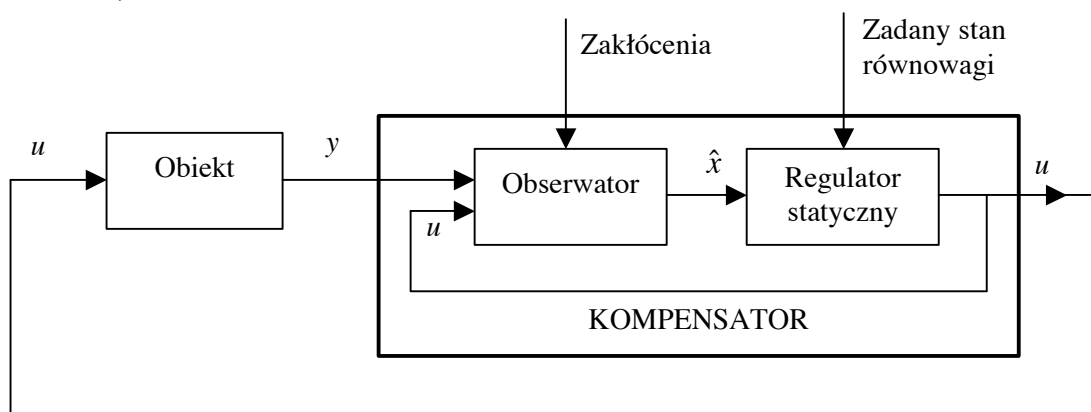
Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*, WNT, Warszawa.

## 11. Kompensator dynamiczny

W ćwiczeniu o obserwatorach zapoznaliśmy się z typami obserwatorów i ze sposobami ich konstrukcji. Zadaniem obserwatora było asymptotyczne odtwarzanie stanu obiektu  $x(t)$ , czyli generowanie jego estymaty  $\hat{x}(t)$ , takiej że  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . W układzie liniowym  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  ze statycznym sprzężeniem zwrotnym od stanu  $u(t) = Kx(t)$ , dowolny, z góry ustalony wielomian charakterystyczny układu zamkniętego  $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$  można uzyskać wtedy i tylko wtedy, gdy para  $(A, B)$  jest sterowalna. W przypadku, gdy dostępne jest tylko wyjście  $y(t) = Cx(t)$ , proponuje się zastosować regulator statyczny o postaci  $u(t) = K\hat{x}(t)$ , gdzie  $\hat{x}(t)$  jest estymatą stanu otrzymywaną z obserwatora. Niniejsze ćwiczenie ma za zadanie pokazać, jak obserwator, połączony odpowiednio z regulatorem  $u(t) = K\hat{x}(t)$ , może być wykorzystany do zaprojektowania zamkniętego układu regulacji.

### 11.1. Kompensator dynamiczny oparty na zlinearyzowanym modelu obiektu

Kompensator dynamiczny jest to układ, zawierający człon dynamiczny służący do odtwarzania aktualnego stanu obiektu (czyli obserwator) oraz regulator statyczny – w naszym przypadku regulator proporcjonalny o macierzowym współczynniku wzmocnienia. Celem kompensatora jest generacja sterowania, które w obecności zakłóceń utrzymuje obiekt jak najbliżej zadanego stanu równowagi, a więc kompensacja zakłóceń i niedokładności modelowania. Schemat ideowy układu sterowania z kompensatorem jest pokazany na rysunku 11.1 ( $u$  – sterowanie,  $y$  – wyjście obiektu,  $\hat{x}$  – estymata stanu obiektu).



Rys. 11.1. Schemat ideowy kompensatora dynamicznego

Będziemy się zajmować kompensatorami zbudowanymi całkowicie, bądź częściowo, w oparciu o liniowy, przyrostowy model obiektu sterowania. Taki przybliżony model tworzy się korzystając z

pochodnych prawych stron równań obiektu, obliczonych w zadanym punkcie równowagi. Przyjmijmy, że obiekt sterowania jest opisany równaniami stanu i wyjścia

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (11.1)$$

$$y(t) = g(x(t)), \quad (11.2)$$

gdzie stan  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ , sterowanie  $u(t) \in \mathbf{R}^m$ , wyjście  $y(t) \in \mathbf{R}^p$ , a funkcje  $f$  i  $g$  są różniczkowalne w sposób ciągły. Oznaczmy zadany stan równowagi przez  $x_0$ , a odpowiednie (stałe) wartości sterowania i wyjścia przez  $u_0$  i  $y_0$ ,  $f(x_0, u_0) = 0$ ,  $y_0 = g(x_0)$ . Liniowy model przyrostowy ma postać

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \quad (11.3)$$

$$\Delta y = C \Delta x, \quad (11.4)$$

przy czym

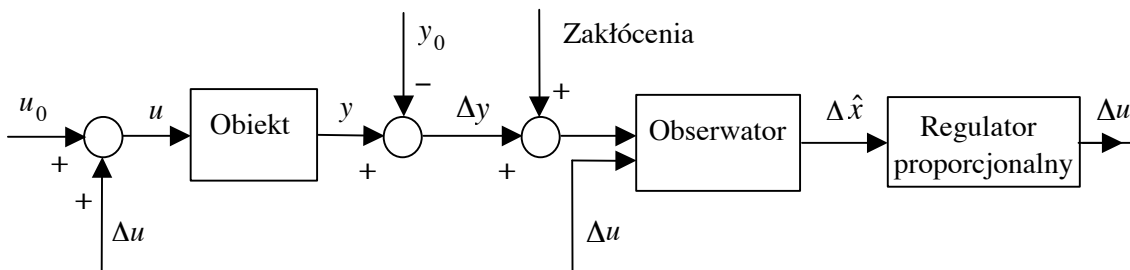
$$\Delta x = x - x_0, \Delta u = u - u_0, \Delta y = y - y_0 \quad (11.5)$$

$$A = \nabla_x f(x_0, u_0), B = \nabla_u f(x_0, u_0), C = \nabla_x g(x_0). \quad (11.6)$$

Korzystanie z przybliżenia liniowego ma w wielu wypadkach mocne uzasadnienie. Dobrze działający kompensator utrzymuje małe wartości odchyłek (11.5); z drugiej strony, przybliżenie liniowe (11.3), (11.4) jest poprawne, jeśli odchyłki (11.5) są dostatecznie małe. Dlatego dobry kompensator może na ogół pracować w oparciu o przybliżenie liniowe. Trzeba przy tym wziąć pod uwagę, że dla układów liniowych teoria sterowania dostarcza metod stabilizacji, które są stosunkowo proste, szybkie obliczeniowo i odporne na niedokładności modelowania obiektu oraz charakterystyki zakłóceń. Zgodnie z nimi, regulator statyczny z rysunku 11.1 realizuje funkcję afiniczną (jego wyjście jest afiniczną funkcją wejścia), może więc być zastąpiony przez regulator proporcjonalny z odpowiednimi węzłami sumacyjnymi na wyjściu i wejściu. Jedną z takich metod poznamy niżej.

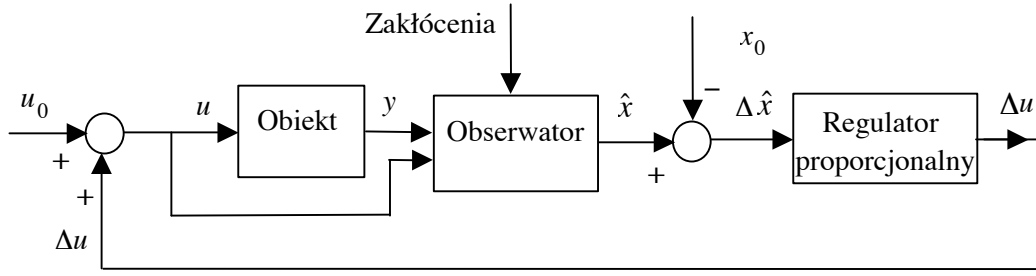
Inaczej rzecz się ma z układami nieliniowymi: wykorzystanie modelu nieliniowego jest trudniejsze z punktu widzenia teorii i może pociągać za sobą znaczny i nieprzewidywalny wzrost nakładów obliczeniowych, co jest szczególnie niebezpieczne dla kompensatora pracującego w czasie rzeczywistym. Przypomnijmy też, że identyfikacja modelu nieliniowego jest z reguły zadaniem znacznie trudniejszym niż identyfikacja modelu liniowego, a jej wynik mniej pewny. Wszystkie te czynniki sprawiają, że korzyść ze stosowania teoretycznie dokładniejszych równań nieliniowych może być w praktyce iluzoryczna.

Na rysunkach 11.2 i 11.3 są pokazane schematy kompensatorów korzystających z modelu przyrostowego. Na rysunku 11.2 zarówno obserwator jak regulator statyczny są zbudowane w oparciu o modele liniowe. Obserwator odtwarza odchyłkę stanu  $\Delta x$  na podstawie mierzonej odchyłki wyjścia  $\Delta y$  i odchyłki sterowania  $\Delta u$ , a regulator proporcjonalny (stacyjny) generuje odchyłkę (poprawkę) sterowania  $\Delta u$  na podstawie estymowanej odchyłki stanu  $\Delta \hat{x}$ . Na rysunku 11.3 regulator proporcjonalny działa podobnie, natomiast obserwator wykorzystuje dokładny, nieliniowy model obiektu i estymuje pełny stan.



Rys. 11.2. Kompensator oparty w pełni na liniowym modelu przyrostowym





Rys. 11.3. Kompensator oparty częściowo na liniowym modelu przyrostowym

## 11.2. Regulator optymalny w problemie liniowo-kwadratowym z nieskończonym horyzontem

Poznaliśmy już zasady konstrukcji obserwatorów wchodzących w skład schematów z rysunków 11.2 i 11.3. Budowę regulatora proporcjonalnego oprzemy na rozwiązaniu tak zwanego *problemu liniowo-kwadratowego z nieskończonym horyzontem*, znanego z teorii sterowania optymalnego. Zauważmy przede wszystkim, że podstawowym wymaganiem przy projektowaniu kompensatora jest, aby odchyłki stanu  $\Delta x$  i sterowania  $\Delta u$  były jak najmniejsze, a układ zamknięty miał asymptotycznie stabilny punkt równowagi, w którym stanem obiektu jest  $x_0$ , a wejściem obiektu  $u_0$ . Wygodną z matematycznego punktu widzenia miarą wielkości odchyłek jest całkowity wskaźnik jakości (nazywany *kwadratowym*) z nieskończonym horyzontem sterowania

$$S(\Delta u) = \int_0^{\infty} (\Delta x(t)^T W \Delta x(t) + \Delta u(t)^T R \Delta u(t)) dt. \quad (11.7)$$

Na macierze wagowe nakładamy warunki

$$W = W^T \geq 0, \quad R = R^T > 0. \quad (11.8)$$

Przypomnimy teraz główne twierdzenie teorii problemu liniowo-kwadratowego.

**Twierdzenie.** Załóżmy, że para macierzy  $(A, B)$  jest stabilizowalna, a para  $(W, A)$  – wykrywalna. Wówczas dla każdego warunku początkowego  $\Delta x(0)$  istnieje dokładnie jedno sterowanie optymalne  $\Delta u^*$ , minimalizujące wskaźnik jakości  $S$  (11.7) na trajektoriach systemu (11.3). Sterowanie  $\Delta u^*$  i wygenerowana przez nie trajektoria optymalna  $\Delta x^*$  spełniają związek

$$\Delta u^*(t) = -R^{-1} B^T K \Delta x^*(t), \quad t \geq 0, \quad (11.9)$$

gdzie  $n \times n$ -wymiarowa macierz  $K$  jest jedynym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego

$$KBR^{-1}B^TK - A^TK - KA - W = 0, \quad (11.10)$$

takim że

$$K = K^T \geq 0. \quad (11.11)$$

Przy tym

$$S(\Delta u^*) = \Delta x(0)^T K \Delta x(0), \quad (11.12)$$

a optymalny system zamknięty

$$\dot{\Delta x}^*(t) = (A - BR^{-1}B^TK) \Delta x^*(t), \quad t \geq 0, \quad (11.13)$$

jest asymptotycznie stabilny.

Regulator proporcjonalny w kompensatorze tworzy się według formuły (11.9), podstawiając za aktualną odchyłkę stanu jej estymatę otrzymaną z obserwatora

$$\Delta u = -R^{-1}B^T K \Delta \hat{x}. \quad (11.14)$$

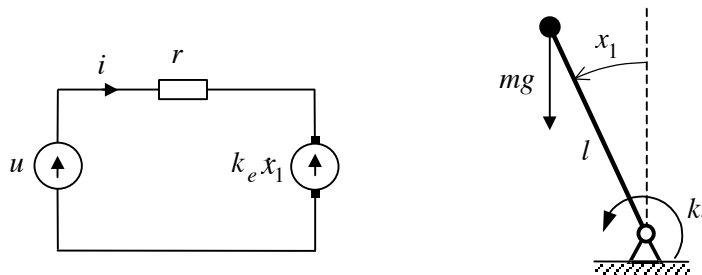
Układ zamknięty przedstawiony na rysunku 11.2 jest w równowadze, jeśli stan obiektu jest równy  $x_0$ , a stan obserwatora jest  $n$ -wymiarowym wektorem zerowym. Ten stan równowagi jest asymptotycznie stabilny, co wynika ze znanego twierdzenia, stanowiącego podstawę I metody Lapunowa badania stabilności układów nieliniowych. Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla układu z rysunku 11.3, z tym, że w tym wypadku stanem obserwatora w punkcie równowagi jest  $x_0$ .

Wybór macierzy  $W$  i  $R$  we wskaźniku jakości (11.7) ma zasadniczy wpływ na działanie kompensatora. Ogólna zasada jest taka, że względnie duże współczynniki wagowe przyporządkowuje się tym wyrazom, których minimalizacja ma priorytet. Jeżeli wagi sterowania (czyli elementy macierzy  $R$ ) są małe w stosunku do wag trajektorii stanu (czyli elementów macierzy  $W$ ), to regulator proporcjonalny (11.14) ma duże wzmocnienie (generuje silny sygnał) i można się spodziewać dobrej kompensacji odchyłek stanu obiektu. Trzeba jednak pamiętać o tym, że nadmierne zwiększanie normy macierzy  $R^{-1}$  prowadzi zwykle do niebezpiecznego zmniejszenia zapasu stabilności. Oczywiście pomnożenie całego wyrażenia pod całką w (11.7) przez liczbę dodatnią nie zmienia rozwiązania optymalnego.

### 11.3. Przykłady

#### Stabilizacja wahadła za pomocą silnika elektrycznego

**Zadanie.** Silnik prądu stałego ze stałym strumieniem wzbudzenia, sterowany napięciem twornika  $u$ , obraca wahadło matematyczne (punkt materialny o masie  $m$  na nieważkim pręcie o długości  $l$ ) w ziemskim polu grawitacyjnym. Oś obrotu jest pozioma, wahadło zamocowane prostopadłe do osi. Wielkością wyjściową jest kąt  $x_1$  pomiędzy kierunkiem „pionowo do góry” a wahadłem (rysunek 11.4).



Rys. 11.4. Schemat elektryczny silnika i wahadło na osi

Należy skonstruować kompensator dynamiczny, działający w oparciu o zlinearyzowany model obiektu, złożony z obserwatora Luenbergera i regulatora proporcjonalnego, optymalnego ze względu na odpowiednio sformułowany kwadratowy wskaźnik jakości. Wejściem regulatora jest estymata stanu, otrzymana z obserwatora. Kompensator ma stabilizować położenie wahadła w punkcie równowagi  $x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0$ . Zbadać wpływ typu i parametrów obserwatora oraz wag we wskaźniku jakości służącym do określenia regulatora na zakres stabilizacji w przestrzeni stanu. Jak zależy od nich szybkość zdyktowania stanu do położenia równowagi? Jaka jest wrażliwość układu zamkniętego na zakłócenia i niedokładności modelowania? Zbadać wpływ typu i parametrów obserwatora oraz wag we wskaźniku jakości na działanie kompensatora w obecności zakłóceń – zaproponować odpowiedni wskaźnik jakości. Jako wnioski, sformułować zalecenia dotyczące projektowania kompensatora dynamicznego.

### Rozwiązanie

*Modele obiektu.* Oznaczając przez  $i$  natężenie prądu twornika, zapisujemy równanie elektryczne i równanie mechaniczne silnika:  $u = ri + k_e \dot{x}_1$ ,  $J \ddot{x}_1 = ki + mgl \sin x_1$ . Stąd równania stanu i wyjścia obiektu

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = Cx, \quad (11.15)$$

gdzie

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_1 \sin x_1 + a_2 x_2 + bu \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0] \quad (11.16)$$

$$a_1 = \frac{mgl}{J} > 0, \quad a_2 = -\frac{kk_e}{rJ} < 0, \quad b = \frac{k}{rJ} > 0.$$

Model zlinearyzowany w punkcie równowagi  $x_{01} = 0$ ,  $x_{02} = 0$ ,  $u_0 = 0$  ma postać

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (11.17)$$

$$y = Cx, \quad (11.18)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że system (11.17), (11.18) jest niestabilny, sterowalny i obserwowalny.

Rozważmy trzy obserwatory Luenbergera, z których dwa pierwsze będą odpowiednie dla schematu kompensatora z rysunku 11.2, a trzeci – dla schematu z rysunku 11.3.

*Obserwator liniowy pełnego rzędu.* Dla zlinearyzowanego modelu obiektu konstruujemy liniowy obserwator Luenbergera pełnego rzędu

$$\dot{w} = Fw + Gy + Bu. \quad (11.19)$$

Zmienna  $w(t)$  jest dwuwymiarową estymatą stanu  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t) = w(t)$ . Macierze współczynników spełniają relacje

$$F = A - GC \quad (11.20)$$

$$G_1 = a_2 - \lambda_1 - \lambda_2, \quad G_2 = a_1 + a_2 G_1 + \lambda_1 \lambda_2, \quad (11.21)$$

gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi macierzy  $F$ .

*Zredukowany obserwator liniowy.* Zredukowany liniowy obserwator Luenbergera ma postać

$$\dot{w} = Fw + Gy + Hu \quad (11.22)$$

$$\hat{x} = Nw + My. \quad (11.23)$$

Zmienna  $w(t)$  ma wymiar jeden,  $\hat{x}(t)$  jest dwuwymiarową estymatą stanu  $x(t)$ . Macierze współczynników spełniają relacje

$$MC + NP = I, \quad FP = PA - GC, \quad H = PB, \quad F < 0. \quad (11.24)$$

Przyjmując

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \quad P = [P_1 \ P_2] \quad (11.25)$$

otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} N_1 &= 0, \quad N_2 = 1/P_2, \quad M_1 = 1, \quad M_2 = a_2 - F, \quad P_1 = (F - a_2)P_2 \\ G &= (a_1 + a_2 F - F^2)P_2, \quad H = bP_2. \end{aligned} \quad (11.26)$$

*Obserwator nieliniowy pełnego rzędu.* Zapiśmy równania wyjściowego systemu nieliniowego w postaci

$$\dot{x} = Ax + h(x, u), \quad y = Cx, \quad (11.27)$$

gdzie

$$h(x, u) = f(x, u) - Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1(\sin x_1 - x_1) + bu \end{bmatrix}. \quad (11.28)$$

Obserwator jest opisany równaniem

$$\dot{w} = Fw + Gy + h(w, u), \quad \hat{x} = w, \quad (11.29)$$

z macierzami  $F$  i  $G$  określonymi przez (11.20) i (11.21).

*Regulator proporcjonalny.* Aby wyznaczyć regulator, dla systemu zlinearyzowanego (11.17) definiujemy kwadratowy wskaźnik jakości (11.7). Żądamy, żeby para macierzy  $(W, A)$  była wykrywalna. Regulator (11.14) w rozważanym zadaniu przybiera postać

$$u(t) = -R^{-1}B^T K \hat{x}(t), \quad (11.30)$$

gdzie  $\hat{x}$  jest wyjściem obserwatora, a  $K$  jest rozwiązaniem układu (11.10), (11.11). Przyjmując

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix}, \quad (11.31)$$

przepisujemy (11.30) jako

$$u(t) = -R^{-1}b[K_2 \ K_3]\hat{x}(t). \quad (11.32)$$

Oznaczając

$$\beta = R^{-1}b^2, \quad W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2 & W_3 \end{bmatrix},$$

otrzymujemy z (11.10) i (11.11)

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{\beta} \left( a_1 + \sqrt{a_1^2 + \beta W_1} \right), \quad K_3 = \frac{1}{\beta} \left( a_2 + \sqrt{a_2^2 + \beta (W_3 + 2K_2)} \right) \\ K_1 &= \beta K_2 K_3 - a_2 K_2 - a_1 K_3 - W_2. \end{aligned} \quad (11.33)$$

**Uwaga.** Obiekt nieliniowy (11.15) można również ustabilizować za pomocą regulatora proporcjonalnego, działającego na wyjście:  $u(t) = Ly(t)$ . Wartości własne macierzy stanu zlinearyzowanego systemu zamkniętego

$$A + BLC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 + bL & a_2 \end{bmatrix}$$

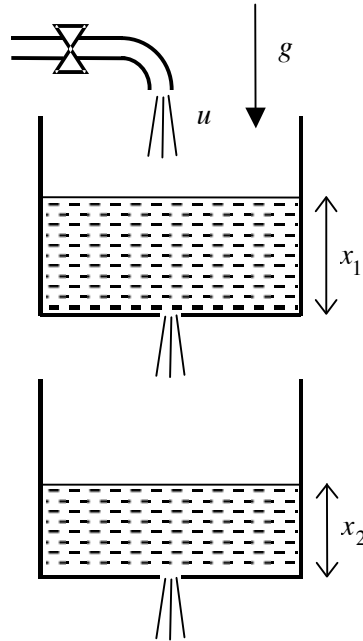
mają części rzeczywiste ujemne, gdy  $a_1 + bL < 0$ . Porównać działanie takiego regulatora z opisany wyżej kompensatorem dynamicznym.

## Stabilizacja poziomu w systemie zbiorników wodnych

**Zadanie.** System przedstawiony na rysunku 11.5 składa się z dwóch identycznych zbiorników o stałym (niezależnym od wysokości) przekroju poziomym, umieszczonych jeden nad drugim w

ziemskim polu grawitacyjnym. Do górnego zbiornika woda wpływa przez sterowany zawór z natężeniem  $u$ . Przez otwór w dnie woda swobodnie wypływa pod działaniem siły ciężkości i wpada do dolnego zbiornika. Przez otwór w dnie dolnego zbiornika woda swobodnie wypływa na zewnątrz systemu. Przyjąć, że szybkość wypływu jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z wysokości słupa cieczy (*prawo Torricellego*).

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, należy skonstruować kompensator dynamiczny, złożony z obserwatora Luenbergera i regulatora proporcjonalnego. Kompensator ma stabilizować poziom wody w obu zbiornikach. Zagadnienia do zbadania są takie same jak poprzednio.



Rys. 11.5. System zbiorników wodnych

### Rozwiązanie.

*Modele obiektu.* Oznaczamy przez  $x_1$  i  $x_2$  poziom wody w zbiornikach. Zapisujemy równania stanu i wyjścia

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = Cx, \quad (11.34)$$

gdzie

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} -k\sqrt{x_1} + u \\ k\sqrt{x_1} - k\sqrt{x_2} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1], \quad k > 0. \quad (11.35)$$

Obiekt jest w stanie równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy poziom wody w obu zbiornikach są stałe i równe sobie,  $x_1(t) \equiv x_2(t) \equiv \bar{x}$ , a natężenie dopływu jest również stałe i ma wartość

$$u(t) \equiv u_0 = k\sqrt{\bar{x}}. \quad (11.36)$$

Oczywiście,  $\bar{x}$  może być dowolną liczbą nieujemną.

Równania obiektu linearyzujemy wokół punktu równowagi, podstawiając  $u = u_0 + \Delta u$ ,  $x_1 = \bar{x} + \Delta x_1$ ,  $x_2 = \bar{x} + \Delta x_2$ . Otrzymujemy

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \quad (11.37)$$

$$\Delta y = C \Delta x, \quad (11.38)$$

gdzie

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}, \quad A = a \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{k^2}{2u_0}. \quad (11.39)$$

System (11.37), (11.38) jest asymptotycznie stabilny, sterowalny i obserwowalny.

Podobnie jak wyżej, konstruujemy trzy obserwatory Luenbergera. Dwa pierwsze będą odpowiednie dla schematu kompensatora z rysunku 11.2, a trzeci – zależnie od wersji – dla schematu z rysunku 11.3 lub 11.2.

*Obserwator liniowy pełnego rzędu.* Obserwator ten jest opisany równaniami

$$\dot{w} = Fw + G\Delta y + B\Delta u, \quad \Delta \hat{x} = w. \quad (11.40)$$

Macierze współczynników spełniają relacje

$$F = A - GC, \quad G_1 = \frac{1}{a}(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a), \quad G_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 - 2a, \quad (11.41)$$

gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi macierzy  $F$ .

*Zredukowany obserwator liniowy.* Zredukowany liniowy obserwator Luenbergera ma postać

$$\dot{w} = Fw + G\Delta y + H\Delta u \quad (11.42)$$

$$\Delta \hat{x} = Nw + M\Delta y. \quad (11.43)$$

Macierze współczynników spełniają relacje (11.24), (11.25), skąd

$$N_1 = \frac{F+a}{aP_2}, \quad N_2 = 0, \quad M_1 = -\frac{F+a}{a}, \quad M_2 = 1$$

$$P_1 = \frac{a}{F+a}P_2, \quad G = -(F+a)P_2, \quad H = P_1.$$

*Obserwator nieliniowy pełnego rzędu.* Zapiszmy równania obiektu nieliniowego (11.34) w postaci

$$\dot{x} = Ax + h(x, u), \quad y = Cx, \quad (11.44)$$

gdzie

$$h(x, u) = f(x, u) - Ax = \begin{bmatrix} -k\sqrt{x_1} + u \\ k\sqrt{x_1} - k\sqrt{x_2} \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x. \quad (11.45)$$

Obserwator jest opisany równaniem (macierze  $F$  i  $G$  są określone przez (11.41))

$$\dot{w} = Fw + Gy + h(w, u), \quad (11.46)$$

czyli

$$\dot{w} = -GCw + Gy + f(w, u). \quad (11.47)$$

Zwróćmy uwagę, że ten obserwator odtwarza pełny stan ( $\hat{x} = w$ ), a jego wejście stanowią pełne sygnały  $y$  i  $u$ . Można go więc zastosować w schemacie z rysunku 11.3.

Zapiszmy z kolei równania systemu w postaci przyrostowej, oznaczając  $x_0 = \text{col}(\bar{x}, \bar{x})$

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + h(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u), \quad \Delta y = C\Delta x \quad (11.48)$$

$$h(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) = f(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) - A\Delta x. \quad (11.49)$$

Odpowiada im równanie obserwatora

$$\dot{w} = Fw + G\Delta y + h(x_0 + w, u_0 + \Delta u) = -GCw + G\Delta y + f(x_0 + w, u_0 + \Delta u). \quad (11.50)$$

Tutaj  $w$  jest estymatą odchyłki stanu  $\Delta x$ ,  $\Delta \hat{x} = w$ . Obserwator (11.50) można zastosować w schemacie z rysunku 11.2, pod warunkiem, że do obserwatora wprowadzi się informację o wartościach  $x_0$  i  $u_0$ .

*Regulator proporcjonalny.* Przyjmujemy kwadratowy wskaźnik jakości (11.7) z macierzami  $W = \text{diag}(W_1, W_2)$ ,  $W_1 \geq 0$ ,  $W_2 > 0$ ,  $R = 1$ . Regulator proporcjonalny jest określony przez formułę (11.14)

$$\Delta u(t) = -[K_1 \ K_2] \Delta \hat{x}(t). \quad (11.51)$$

Macierz  $K$  ma postać (11.31) i jest jedynym rozwiązaniem układu (11.10), (11.11), skąd

$$K_1 = -2a + \sqrt{2aT + W_1}, \quad K_2 = T - \sqrt{2aT + W_1}, \quad K_3 = \frac{1}{2a}(W_2 - K_2^2), \quad (11.52)$$

gdzie  $T = a + \sqrt{a^2 + W_1 + W_2}$ .

## 11.4. Literatura

Mitkowski, W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.

## 12. Filtr Kalmana - Bucy

### 12.1. Model systemu

Rozważamy system

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Lv(t), \quad t \geq t_0 \\ y(t) &= Cx(t) + w(t) \\ x(t) &\in \mathbf{R}^n, v(t) \in \mathbf{R}^q, y(t), w(t) \in \mathbf{R}^p.\end{aligned}\tag{12.1}$$

Procesy stochastyczne  $v$  i  $w$  są białymi szumami gaussowskimi o zerowej wartości średniej i macierzach kowariancji

$$\begin{aligned}E(v(t)v(\tau)^\top) &= Q\delta(t-\tau), \quad Q = Q^\top \geq 0 \\ E(w(t)w(\tau)^\top) &= R\delta(t-\tau), \quad R = R^\top > 0\end{aligned}\tag{12.2}$$

gdzie symbol  $\delta(t-\tau)$  oznacza deltę Diraca.

Procesy  $v$  i  $w$  są wzajemnie niezależne, zatem

$$E(w(t)v(\tau)^\top) = 0 \quad \forall t, \tau \geq t_0.\tag{12.3}$$

Stan początkowy  $x(t_0)$  jest wektorem losowym o rozkładzie gaussowskim z zerową wartością średnią. Jest on niezależny od  $v$  i  $w$ , a jego macierz kowariancji

$$E(x(t_0)x(t_0)^\top) = P(t_0)\tag{12.4}$$

jest półokreślona dodatnio.

### 12.2. Postawienie zadania

Poszukujemy estymaty stanu  $x(t)$ , określonej na podstawie pomiaru wielkości wyjściowej  $y(\tau)$  w przedziale  $t_0 \leq \tau \leq t$ . Estymatę tą oznaczamy przez  $\hat{x}(t)$ . Błąd estymacji jest określony jako

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t).\tag{12.5}$$

Macierz kowariancji błędu (przy estymacji nieobciążonej) wynosi

$$\tilde{P}(t) = E(\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^\top).\tag{12.6}$$

Żądamy, żeby estymata była optymalna, to znaczy wariancja błędu estymacji ma być minimalna. Jest to równoważne żądaniu, aby ślad macierzy  $\tilde{P}(t)$ , oznaczany przez  $\text{tr } \tilde{P}(t)$ , był minimalny.



### 12.3. Filtr Kalmana - Bucy

Rozwiązaniem postawionego zadania jest filtr Kalmana-Bucy, określony w następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie 1.** W rozważanym problemie liniowy nieobciążony estymator stanu, optymalny w podanym sensie, spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = 0. \quad (12.7)$$

Macierz filtru  $K(t)$  ma wymiary  $n \times p$  i jest określona wzorem

$$K(t) = \tilde{P}(t)C^T R^{-1}. \quad (12.8)$$

Błąd estymacji  $\tilde{x}(\cdot)$  jest procesem stochastycznym Gaussa - Markowa o zerowej wartości średniej. Jego macierz kowariancji spełnia macierzowe równanie różniczkowe typu Riccatiego

$$\dot{\tilde{P}}(t) = A\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)A^T - \tilde{P}(t)C^T R^{-1}C\tilde{P}(t) + LQL^T, \quad t \geq t_0 \quad (12.9)$$

z warunkiem początkowym

$$\tilde{P}(t_0) = P(t_0). \quad (12.10)$$

Uogólnimy opisany rezultat na przypadek systemu sterowanego, ze stanem początkowym o niekoniecznie zerowej wartości średniej

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Lv(t), \quad t \geq t_0, \quad E(x(t_0)) = \xi \\ y(t) &= Cx(t) + w(t) \\ x(t) &\in \mathbf{R}^n, \quad u(t) \in \mathbf{R}^m, \quad v(t) \in \mathbf{R}^q, \quad y(t), w(t) \in \mathbf{R}^p. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Sterowanie  $u$  traktuje się jako zadaną deterministyczną funkcję czasu, poza tym założenia są jak w twierdzeniu 1.

**Twierdzenie 2.** W problemie określonym przez (12.11), liniowy nieobciążony estymator stanu, minimalizujący wariancję błędu estymacji, spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = \xi. \quad (12.12)$$

Macierz filtru  $K(t)$  spełnia (12.8). Błąd estymacji  $\hat{x}(\cdot)$  jest procesem stochastycznym Gaussa - Markowa o zerowej wartości średniej. Macierz kowariancji błędu estymacji spełnia macierzowe równanie różniczkowe typu Riccatiego (12.9) z warunkiem początkowym

$$\tilde{P}(t_0) = E((x(t_0) - \xi)(x(t_0) - \xi)^T) = P(t_0). \quad (12.13)$$

#### Obserwacja w nieskończonym przedziale czasu

Przy założeniu wykrywalności systemu (1) lub (11) (tzn. wykrywalności pary macierzy  $(C, A)$ ), przejdziemy do  $-\infty$  z początkową chwilą obserwacji  $t_0$ . Macierz kowariancji błędu  $\tilde{P}(t)$  zdąży wtedy do wartości stałej, którą oznaczamy przez  $\tilde{P}$ . Macierz  $\tilde{P}$  jest jedynym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego

$$A\tilde{P} + \tilde{P}A^T - \tilde{P}C^T R^{-1}C\tilde{P} + LQL^T = 0, \quad (12.14)$$

spełniającym warunki

$$\tilde{P} = \tilde{P}^T \geq 0. \quad (12.15)$$

Stała macierz filtru jest określona przez (12.8)

$$K = \tilde{P}C^T R^{-1}. \quad (12.16)$$

Filtr (12.12) z taką macierzą  $K$  (podstawioną za  $K(t)$ ) jest asymptotycznie stabilny (to znaczy macierz  $A-KC$  ma wszystkie wartości własne w lewej półpłaszczyźnie zespolonej). Filtr ten jest szczególnym przypadkiem obserwatora Luenbergera pełnego rzędu.

## 12.4. Przykłady

*Przykład 1.* Rozważmy najpierw prosty system pierwszego rzędu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ y &= x + w\end{aligned}$$

z  $Q=R=1$ . Mamy  $A=B=0, C=L=1$ . Graniczny filtr Kalmana-Bucy jest określony przez (12.14) – (12.16). Stąd  $\tilde{P} = K = 1$ , a optymalny estymator spełnia równanie

$$\dot{\hat{x}} = y - \hat{x}.$$

*Przykład 2.* Niech w systemie (12.11)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}, B = L = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, R = 1.$$

Oznaczając

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}, \quad \beta = b^2 Q,$$

dostajemy z rozpisania równania macierzowego Riccatiego (12.14)

$$\begin{aligned}2p_2 - p_1^2 &= 0 \\ ap_1 + p_3 - p_1p_2 &= 0 \\ 2ap_2 - p_2^2 + \beta &= 0.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}p_2 &= a + \sqrt{\beta + a^2} \\ p_1 &= \sqrt{2p_2}, \quad p_3 = p_1(p_2 - a).\end{aligned}$$

Macierz filtru

$$K = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}.$$

Warto porównać tak otrzymany filtr Kalmana - Bucy z innymi obserwatorami Luenbergera pełnego rzędu. Przypomnijmy, że obserwatorem Luenbergera pełnego rzędu dla systemu (12.11) jest każdy układ postaci

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G(y(t) - C\hat{x}(t))$$

z  $(n \times p)$ -wymiarową macierzą  $G$  tak dobraną, że macierz  $A - GC$  jest asymptotycznie stabilna. Oznaczając  $G = \text{col}(G_1, G_2)$ , w rozważanym przykładzie mamy

$$A - GC = \begin{bmatrix} -G_1 & 1 \\ a - G_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz ta jest asymptotycznie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy  $G_1 > 0$  i  $G_2 - a > 0$ .

## 12.5. Literatura

Meditch J.S. (1975) *Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych*. Warszawa, WNT

Bobrowski D. (1980) *Probabilistyka w zastosowaniach technicznych*. Warszawa, WNT

Mitkowski W. (1991) *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Warszawa, WNT

## 13. Stabilizacja systemów dyskretnych

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami stabilizacji systemów dyskretnych, w szczególności z układami sterowania komputerowego. Rozważamy system ciągły w czasie

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{13.1}$$

gdzie  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}^r$ ,  $t \geq 0$ , a  $A$ ,  $B$  i  $C$  są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach. Dalej rozważamy system dyskretny (zob. (7.2)) stowarzyszony z systemem ciągłym w czasie (13.1):

$$\begin{aligned}x^+(i+1) &= A^+x^+(i) + B^+u^+(i) \\ y^+(i) &= C^+x^+(i)\end{aligned}\tag{13.2}$$

gdzie  $x^+(i) = x(ih)$ ,  $u^+(i) = u(ih)$ ,  $y^+(i) = y(ih)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  przy czym  $h > 0$  oznacza okres próbkowania,  $A^+$ ,  $B^+$  i  $C^+$  są macierzami rzeczywistymi określonymi następującymi zależnościami

$$\begin{aligned}A^+ &= e^{hA} \\ B^+ &= \int_0^h e^{tA} B dt \\ C^+ &= C\end{aligned}\tag{13.3}$$

System dyskretny (13.2) opisuje zależność  $y^+(i)$  od  $u^+(i)$  układu dyskretno ciągłego powstałego z szeregowego połączenia ekstrapolatora rzędu zerowego, systemu (13.1) i impulsatora idealnego (zob. rys. 7.1).

### 13.1. Sterowalność w systemach dyskretnych

Przed przedstawieniem metod stabilizacji systemów dyskretnych omówimy pojęcie sterowalności systemu dyskretnego.

#### Definicja

System dyskretny (13.2), nie koniecznie stowarzyszony z (13.1), jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , dla każdego  $x_1 \in \mathbf{R}^n$ , istnieje  $k_1 > 0$ ,  $k_1 < \infty$ ,  $k_1 \in \mathbf{N}$  oraz sterowanie  $u^+$  takie, że  $x^+(0) = x_0$  i  $x^+(k_1) = x_1$  przy czym  $x^+$  jest rozwiązaniem równania różnicowego (13.2) przy ciągu sterowań  $u^+$  (zob. np. Mitkowski 1996, s. 118).

Do weryfikacji czy system (13.2) jest sterowalny posłuży następujące (analogiczne jak dla systemów ciągłych) twierdzenie.

## Twierdzenie

System dyskretny (13.2) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy para  $(A^+; B^+)$  jest sterowalna. Czyli gdy rząd macierzy  $Q = [B^+ \ A^+ B^+ \ (A^+)^2 B^+ \ \dots \ (A^+)^{n-1} B^+]$  jest równy  $n$ .

Jeżeli rozpatrywany system ciągły (13.1) jest sterowalny, to w zależności od wartości okresu próbkowania  $h$ , system dyskretny może być sterowalny lub nie.

**Twierdzenie** (zob. Mitkowski 1991 s. 141).

Niech  $\lambda_s$  i  $\lambda_i$  są odpowiednio  $s$ -tą i  $i$ -tą wartością własną macierzy  $A$  systemu (13.1) oraz niech dla każdego  $i \neq s$  takiego, że  $\text{Re}(\lambda_s - \lambda_i) = 0$  zachodzi warunek

$$h \cdot \text{Im}(\lambda_s - \lambda_i) \neq 2\pi k, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą, } h > 0 \text{ jest okresem próbkowania} \quad (13.4)$$

Jeżeli  $h > 0$  spełnia warunek (13.4) i para  $(A; B)$  jest sterowalna, to para  $(A^+; B^+)$  jest również sterowalna,

Jeżeli  $h > 0$  spełnia warunek (13.4) i para  $(C; A)$  jest obserwowalna, to para  $(C^+; A^+)$  jest również obserwowalna.

Zbiór wszystkich takich okresów próbkowania  $h$ , dla których warunek (13.4) nie jest spełniony, jest przeliczalny i złożony z pojedynczych punktów leżących na osi liczb rzeczywistych.

Powyższe twierdzenie ilustruje przykład obliczeniowy.

## Przykład 1

Rozważmy system (13.1) z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \pi \\ -\pi & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para  $(A; B)$  jest sterowalna oraz para  $(C; A)$  jest obserwowalna. System dyskretny (13.2) ma, zgodnie z zależnościami (13.3), następujące macierze

$$\begin{aligned} A^+ &= e^{-h} \begin{bmatrix} \cos \pi h & \sin \pi h \\ -\sin \pi h & \cos \pi h \end{bmatrix}, \\ B^+ &= \frac{1}{1 + \pi^2} \begin{bmatrix} 1 + \pi - (1 + \pi)e^{-h} \cos \pi h + (\pi - 1)e^{-h} \sin \pi h \\ 1 - \pi - (1 - \pi)e^{-h} \cos \pi h + (1 + \pi)e^{-h} \sin \pi h \end{bmatrix}, \\ C^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sprawdzimy spełnienie warunku (13.4) dla  $h > 0$ . Macierz  $A$  ma wartości własne  $\lambda_{1,2} = -1 \pm j\pi$ . Warunek (13.4) nie jest spełniony, gdy  $2h\pi = 2k\pi$  dla  $k$  całkowitego. Zatem warunek (13.6) nie jest spełniony dla  $h = 1, 2, 3, 4, \dots$

Zwróćmy uwagę, że dla  $h = 1, 2, 3, 4, \dots$  mamy  $\cos \pi h = (-1)^h$  i  $\sin \pi h = 0$  i zatem macierze  $A^+$  i  $B^+$  przyjmują postać:

$$A^+ = (-1)^h e^{-h} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^+ = \frac{1}{1 + \pi^2} \begin{bmatrix} 1 + \pi - (1 + \pi)e^{-h}(-1)^h \\ 1 - \pi - (1 - \pi)e^{-h}(-1)^h \end{bmatrix}$$

Sprawdźmy teraz, sterowalność pary  $(A^+; B^+)$ , budując macierz Kalmana sterowalności

$$Q = \begin{bmatrix} B^+ & A^+ B^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^+ & (-1)^h e^{-h} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^+ & (-1)^h e^{-h} B^+ \end{bmatrix}$$

Łatwo można zauważyć, że kolumny macierzy  $Q$  są liniowo zależne, czyli  $\det Q = 0$ . Oznacza to, że rząd  $Q$  jest mniejszy od  $n=2$ , czyli że para  $(A^+; B^+)$  nie jest sterowalna (system (13.2) jest niesterowalny). Analogicznie dla  $h$  naturalnych rozpatrywany system (13.2) będzie nieobserwowalny.

## 13.2. Regulator dead-beat

Rozważmy system (13.2) ze sprzężeniem zwrotnym  $u^+(i) = Kx^+(i)$ . System zamknięty ma postać

$$x^+(i+1) = (A^+ + B^+K)x^+(i),$$

zaś wartość  $x^+(i)$  dla dowolnego  $i=0, 1, 2, \dots$  określa równość

$$x^+(i) = (A^+ + B^+K)^i x^+(0).$$

Jeżeli para  $(A^+; B^+)$  jest sterowalna, to możemy tak dobrać macierz  $K$ , aby wielomian charakterystyczny macierzy  $(A^+ + B^+K)$  miał z góry zadane współczynniki (a zatem i zadane wartości własne). W szczególności możemy dobrać taką macierz  $K$ , aby wielomian charakterystyczny miał postać

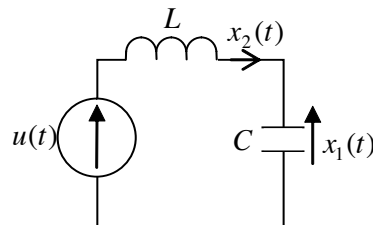
$$\det(\lambda I - A^+ - B^+K) = \lambda^n.$$

W tym przypadku wartości własne macierzy  $(A^+ + B^+K)$  są równe zeru.

Wtedy z twierdzenia Hamiltona-Cayleya (Turowicz 2005 s. 131) mamy  $(A^+ + B^+K)^n = 0$ , i zatem  $x^+(n) = (A^+ + B^+K)^n x^+(0) = 0$  dla dowolnego  $x^+(0) \in \mathbf{R}^n$  ( $n$  jest wymiarem macierzy stanu  $A$ , podobnie będzie dla każdego  $v > n$ ).

Zerowe (wszystkie) wartości własne macierzy stanu systemu dyskretnego zapewniają asymptotyczną stabilność. Dodatkowo okazuje się, że  $\forall x^+(0) \in \mathbf{R}^n$  w  $n$ -tym kroku  $x^+(n)=0$  (układ dochodzi do zera).

### Przykład 2



Rys. 13.1. Oscylator LC

Rozważmy oscylator LC (zob. rys. 13.1), który przy  $LC=1$ , opisują równości (13.1) z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = I.$$

Przy synchronicznej pracy przetwornika (ekstrapolatora) i impulsatora ze stałym okresem próbkowania  $h>0$  otrzymujemy układ dyskretny (13.2) z macierzami

$$A^+ = \begin{bmatrix} \cosh & \sinh \\ -\sinh & \cosh \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} 1 - \cosh \\ \sinh \end{bmatrix}, \quad C^+ = I$$

Dobierając okres próbkowania  $h \neq \pi k$  poszukujemy regulatora  $u^+(i) = Ku^+(i)$ ,  $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$  tak, by macierz  $A^+ + B^+K$  posiadała wyłącznie zerowe wartości własne.

Dla macierzy  $A$  o wymiarze  $n = 2$  wielomian charakterystyczny ma postać

$$W(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + a\lambda + b,$$

gdzie  $a = -\text{tr}(A)$ ,  $b = \det(A)$ , gdzie  $\text{tr}$  oznacza ślad macierzy (suma elementów leżących na głównej przekątnej). Wielomian charakterystyczny macierzy  $A^+ + B^+K$  w tym przypadku, ma postać

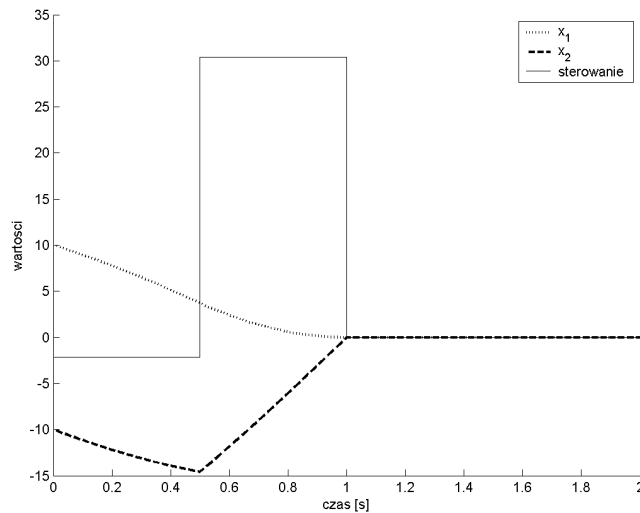
$$W(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A^+ + B^+K)\lambda + \det(A^+ + B^+K).$$

Jeżeli  $\text{tr}(A^+ + B^+K) = 0$  i  $\det(A^+ + B^+K) = 0$ , to  $W(\lambda) = \lambda^2$  i zatem macierz  $A^+ + B^+K$  ma wyłącznie zerowe wartości własne. Z równań  $\text{tr}(A^+ + B^+K) = 0$  i  $\det(A^+ + B^+K) = 0$  wyznaczamy  $K = [K_1, K_2]$

$$K_1 = \frac{1 - 2 \cosh h}{2 - 2 \cosh h}$$

$$K_2 = \frac{-\cosh h - 1/2}{\sinh h}$$

Taki regulator zapewnia sprowadzenie układu ciągłego w czasie (13.1) (dla oscylatora LC) do zera w skończonym czasie  $T \leq 2h$ . Działanie regulatora ilustruje rys. 13.2.



Rys. 13.2. Działanie regulatora dead-beat dla oscylatora LC przy  $h=0.5s$

Dla dowolnego  $n$  mamy

$$W(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Dla  $a_i=0$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$  mamy  $W(\lambda) = \lambda^n$ . Z równań  $a_i=0$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$  można wyznaczyć  $K$  takie, które zapewni zerowanie stanu w układzie (13.1) w skończonym czasie sterowanie  $T \leq nh$ .

### 13.3. Obserwator Luenbergera dla systemu dyskretnego

Rozważmy system (13.2) i obserwator o postaci

$$\begin{aligned} w(i+1) &= Fw(i) + Gy^+(i) + Hu^+(i) \\ \hat{x}^+(i) &= My^+(i) + Nw(i) \end{aligned} \quad (13.5)$$

gdzie  $w(i) \in \mathbf{R}^s$ ,  $s \leq n$ ,  $\hat{x}^+ \in \mathbf{R}^n$ ,  $F, G, H, M, N$  są stałymi macierzami rzeczywistymi. Niech błąd estymacji wyraża się wzorem

$$e(i) = w(i) - Px^+(i)$$

gdzie  $P$  jest stałą macierzą rzeczywistą o wymiarach  $s \times n$ . Jeżeli (porównaj z rozdziałem 10.3)

$$GC^+ + FP = PA^+, \quad MC^+ + NP = I, \quad H = PB^+ \quad (13.6)$$

to

$$e(i+1) = Fe(i), \quad \hat{x}^+(i) - x^+(i) = Ne(i)$$

Jeżeli para  $(C^+; A^+)$  jest obserwowalna możemy uzyskać dowolny rozkład wartości własnych macierzy  $F$ . W szczególności  $|\lambda(F)| < 1$  i zatem  $\hat{x}^+(i) \rightarrow x^+(i)$  przy  $i \rightarrow \infty$ .

Równania (13.5) i (13.6) opisują ogólną postać obserwatora. Jeżeli przyjąć  $P=I$  oraz  $M=0$  i  $s=n$  to wtedy uzyskamy równania tzw. obserwatora pełnego rzędu (inaczej identycznościowego), o postaci:

$$\hat{x}^+(i+1) = F\hat{x}^+(i) + Gy^+(i) + Hu^+(i)$$

gdzie  $H = B^+$ ,  $F = A^+ - GC^+$ ,  $N=I$ . W tym przypadku  $\hat{x}^+ = w(i)$

### 13.4. Dyskretny problem liniowo-kwadratowy

Rozważmy system (13.2) i wskaźnik jakości

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T W x(k) + u(k)^T R u(k)) \quad (13.7)$$

gdzie  $R = R^T > 0$  i  $W = W^T \geq 0$ . Jeżeli para  $(A^+; B^+)$  jest stabilizowalna a  $(W; A^+)$  wykrywalna (stabilizowalność i wykrywalność w sensie układu dyskretnego), to sterowanie (dokładnie jedno) minimalizujące wskaźnik jakości (13.7) ma postać

$$u_o^+(i) = K_o x^+(i) \quad (13.8)$$

gdzie

$$K_o = -R^{-1} B^{+T} D (I + B^+ R^{-1} B^{+T} D)^{-1} A^+$$

przy czym  $D$  jest jedynym półdodatnio określonym, symetrycznym rozwiązaniem dyskretnego równania Riccatiego

$$D = A^{+T} D (I + B^+ R^{-1} B^{+T} D)^{-1} A^+ + W \quad (13.9)$$

zaś wartość optymalna wskaźnika jakości wynosi:

$$J(u_o) = x(0)^T D x(0) \quad (13.10)$$

oraz

$$|\lambda(A^+ + B^+ K)| < 1 \quad (13.11)$$

Istnieją równoważne wersje wzorów (13.8) i (13.9), z których poniższa jest zaimplementowana w Matlabie w postaci funkcji dla przybornika Control. W tym przypadku

$$u_o^+(t) = -(R + B^{+T} S B^+)^{-1} B^{+T} S A^+ x^+(i) \quad (13.12)$$

$S$  jest zaś jedynym półdodatnio określonym, symetrycznym rozwiązaniem równania

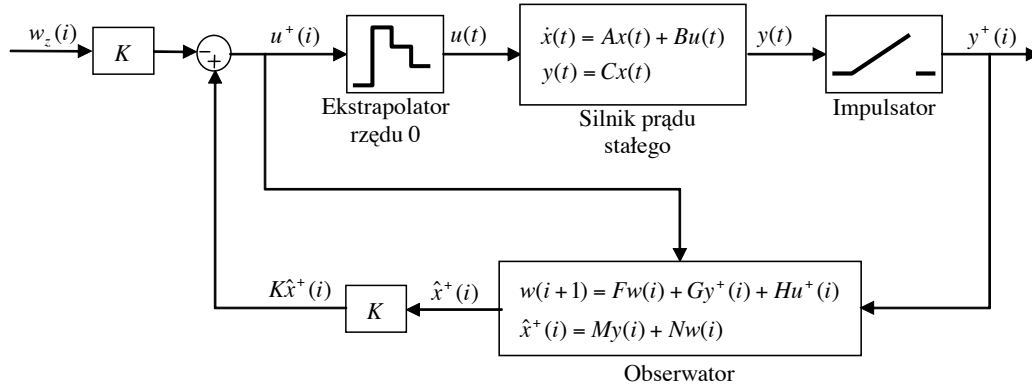
$$S = W + A^{+T} S A^+ - A^{+T} S (R + B^{+T} S B^+)^{-1} S A \quad (13.13)$$

Warto zaznaczyć, że  $D=S$ . Regulator (13.8) lub (13.12) stabilizują system (13.2) (zachodzi warunek (13.11)).



### 13.5. Dyskretne dynamiczne sprzężenie zwrotne

W sposób analogiczny jak w rozdziale 11 można zbudować dyskretną wersję kompensatora. W szczególności można zbudować taki kompensator, by wartości własne systemu zamkniętego były równe zero. Zaprojektujemy taki układ dla silnika elektrycznego prądu stałego sterowanego za pomocą przetwornika cyfrowo-analogowego (Mitkowski 1991, s. 158, 165).



Rys. 13.3. Schemat sterowania silnikiem prądu stałego za pomocą dyskretnego dynamicznego sprzężenia zwrotnego

#### Przykład 3

Rozpatrywany jest silnik prądu stałego. Przyjmijmy  $x_1$  jako położenie kątowe wału silnika, i  $x_2$  jako prędkość kątową. Dodatkowo zakładamy, że dostępny jest jedynie pomiar położenia kątowego. Silnik teraz można zamodelować za pomocą równania różniczkowego (13.1) z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Celem sterowania jest stabilizacja położenia kątowego wału w zadanym położeniu. Podawane ono będzie zgodnie z rys. 13.2 za pomocą ciągu  $w_z(i)$ , którego elementami są wartości zadanego położenia w chwilach  $t=ih$  gdzie  $i=1,2,3,\dots$

Przy sterowaniu komputerowym (jak na rys. 13.2) jako model silnika może posłużyć równanie różnicowe (13.2) z macierzami

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C^+ = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie  $a_{12} = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha h})$ ,  $a_{22} = e^{-\alpha h}$ ,  $b_1 = \frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha h - 1 + e^{-\alpha h})$ ,  $b_2 = \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha h})$ . Macierze te zostały

obliczone z równości (13.3).

Do realizacji zadania sterowania posłuży dynamiczne sprzężenie zwrotne zbudowane z dyskretnego obserwatora Luenbergera (13.5) z macierzami

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} -g & 1 \end{bmatrix}, \\
F &= a_{22} - ga_{12}, \\
G &= \frac{1}{c}(-g + a_{22}g - a_{12}g^2), \\
H &= b_2 - b_1g, \\
M &= c^{-1} \begin{bmatrix} 1, g \end{bmatrix}, \\
N &= \begin{bmatrix} 0, 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

oraz regulatora proporcjonalnego postaci  $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ . Wartość sterowania w  $i$ -tym kroku określa równość

$$u(i) = K\hat{x}^+(i) - Kw_z(i)$$

Parametry  $g$ ,  $k_1$  i  $k_2$  należy dobrać tak, aby  $\lambda(F)$  i  $\lambda(A^+ + B^+K)$  leżały wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej, o środku w zerze. Wtedy błąd estymacji stanu obserwatora będzie zanikał asymptotycznie do zera, zaś system zamknięty dynamicznym sprzężeniem zwrotnym będzie asymptotycznie stabilny. W szczególności parametry te można dobrać tak, aby wszystkie wartości własne układu zamkniętego były równe 0, co w naszym przypadku otrzymujemy dla następujących parametrów

$$\begin{aligned}
g &= a_{22} / a_{12} \\
k_1 &= -b_2 / q \\
k_2 &= (a_{22}^2 b_1 - a_{22} a_{12} b_2 - a_{12} b_2) / q
\end{aligned}$$

gdzie  $q = b_1 b_2 (1 - a_{22}) + b_2^2 a_{12}$ . W takiej sytuacji będziemy mieć do czynienia z regulatorem dead-beat, obserwator zaś będzie sprowadzał błąd estymacji do zera w jednym kroku.

## 13.6. Zadania do rozwiązania

### Zadanie 1

Zamodelować układ złożony z regulatora dead-beat i oscylatora LC (przykład 2). Przeanalizować działanie regulatora dla różnych warunków początkowych. Sprawdzić, w jakiej sytuacji układ zostanie sprowadzony do zera w czasie krótszym niż  $2h$ . Zaobserwować działanie regulatora w przypadku występowania ograniczeń sterowania (blok “saturation” w Simulinku).

### Zadanie 2

Dla zamodelowanego oscylatora LC zaprojektować (za pomocą funkcji `dlqr`) dyskretny regulator LQ. Przeprowadzić analizę zachowania się systemu dla różnych macierzy  $W$  i  $R$  wskaźnika jakości (13.7). Obliczyć z danych symulacyjnych wartość wskaźnika i porównać ją ze wzorem analitycznym (13.10). Porównanie przeprowadzić także w obecności ograniczeń sterowania.

### Zadanie 3

Zamodelować system z przykładu 3 z parametrami podanymi przez prowadzącego. Przeanalizować działanie dyskretnego dynamicznego sprzężenia zwrotnego dla  $w_z(i)=0$ . Zaobserwować występowanie błędów ustalonych dla  $w_z(i) = \text{const} \neq 0$  i zaproponować sposób ich uniknięcia. Zastąpić regulator dead-beat dyskretnym regulatorem liniowo-kwadratowym i porównać ich działanie. Wprowadzić zakłócenia pomiaru wyjścia z obiektu i przeanalizować ich wpływ na zachowanie się systemu. Zastąpić obserwator zredukowany obserwatorem pełnego rzędu i porównać zachowanie systemów (należy obliczyć odpowiednie wartości elementów macierzy  $G$ ).

### **13.7. Literatura**

- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*, WNT, Warszawa
- Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*, Wydawnictwa AGH, Kraków.
- Turowicz A. (2005): *Teoria macierzy*, Wydawnictwa AGH, Kraków, wydanie 6.

## 14. Systemy o „dziwnej” dynamice

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z układami dynamicznymi o „dziwnych” zachowaniach, zaliczanych do zachowań „chaotycznych”. Rozpatrywane będą klasyczne przykłady takie jak system Lorenza, obwód elektryczny Chuy oraz odwzorowanie logistyczne. W przedstawionych przykładach należy zwrócić uwagę na zmianę dynamiki przy zaburzeniu układu liniowego członem nieliniowym.

### 14.1. Układy o dynamice chaotycznej

Układy o dynamice chaotycznej charakteryzują się następującymi własnościami:

- występują w nim potoki jednoznacznych trajektorii niestabilnych i ograniczonych (podobnie, jak potok górski),
- dynamika jest bardzo wrażliwa na małe zmiany parametrów układu.

W układach o dynamice chaotycznej przewidywanie jest możliwe jedynie w niedużym horyzoncie czasowym, mimo że układ jest w pełni deterministyczny. Trajektorie startujące blisko siebie po krótkim czasie stają się praktycznie dowolnie odległe. Pomiar jest zawsze obciążony pewnym błędem. Dokładna znajomość warunku początkowego nie jest możliwa praktycznie, czyli nasze przewidywania, co do zachowania się układu mogą znacząco różnić się od rzeczywistości (w systemach stabilnych, trajektorie o mało różniących się od siebie warunkach początkowych również niewiele się od siebie różnią w chwilach późniejszych).

Dynamika chaotyczna może pojawiać się w układach opisywanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi lub nieliniowymi równaniami rekurencyjnymi. W nieliniowym układzie z czasem ciągłym chaos może wystąpić tylko wtedy, gdy rząd układu wynosi 3 lub więcej. W nieliniowych układach dyskretnych chaos może wystąpić już w układzie rzędu pierwszego.

### 14.2. System Lorenza

Układ nieliniowy Lorenza ma postać

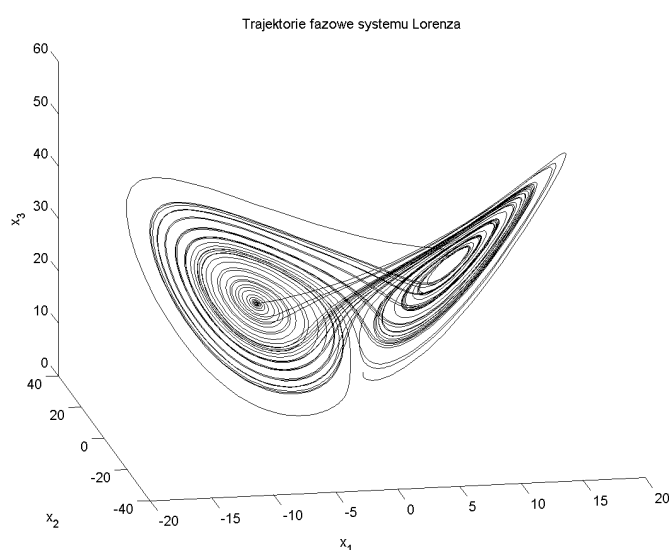
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix} \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2\end{aligned}\tag{14.1}$$

Interesujące zachowanie system otrzymujemy dla następujących parametrów:  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  i  $r = 28$ .

Dla takiego zestawu parametrów wykonano rys. 14.1 i 14.2.

## Rys historyczny

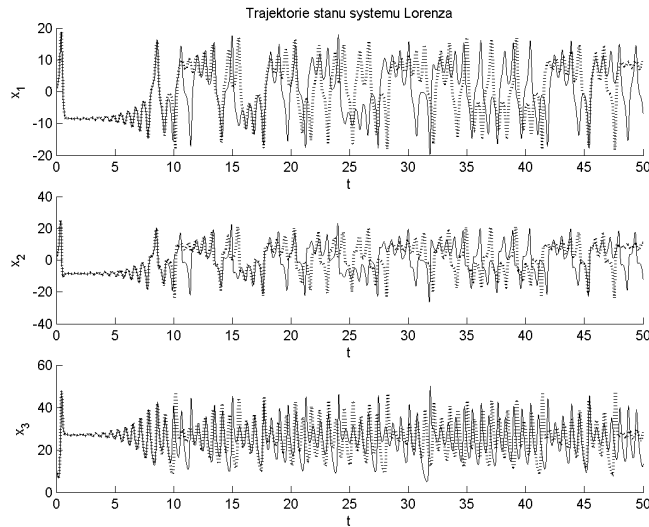
Edward Lorenz z Massachusetts Institute of Technology z zamiłowania był matematykiem, natomiast z wykształcenia meteorologiem. W swojej pracy naukowej zajmował się prognozowaniem pogody przy użyciu komputerów. Zjawiska meteorologiczne bardzo silnie zależą od tak zwanego zjawiska konwekcji – czyli unoszenia ciepłego powietrza. Między innymi chmury burzowe powstają w wyniku konwekcji i dlatego mamy burze w gorące parne dni. Rozróżnia się konwekcję stacjonarną i niestacjonarną. W konwekcji stacjonarnej ogrzane powietrze porusza się łagodnie do góry, natomiast w konwekcji niestacjonarnej ruch ten jest dużo bardziej złożony; taka konwekcja jest bardziej istotna dla pogody. Badania nad tym zjawiskiem były prowadzone od dawna. W 1900 roku Henri Benard odkrył, że komórki konwekcyjne mają budowę podobną do plastra miodu. W 1962 Lord Rayleigh wyprowadził podstawową teorię rozpoczęcia konwekcji. W 1962 roku B. Saltzman podał równania dla prostego rodzaju konwekcji. Lorenza zaciekały te równania i postanowił dalej je badać oraz upraszczać. Zauważył, że tak naprawdę to tylko 3 zmienne odgrywają znaczącą rolę. W wyniku uproszczeń, z zachowaniem istotnych własności modelu wyjściowego, otrzymał układ równań (14.1), dzisiaj nazywany systemem Lorenza.



Rys. 14. 1. Przykładowa trajektoria fazowa równań Lorenza

## Efekt motyla

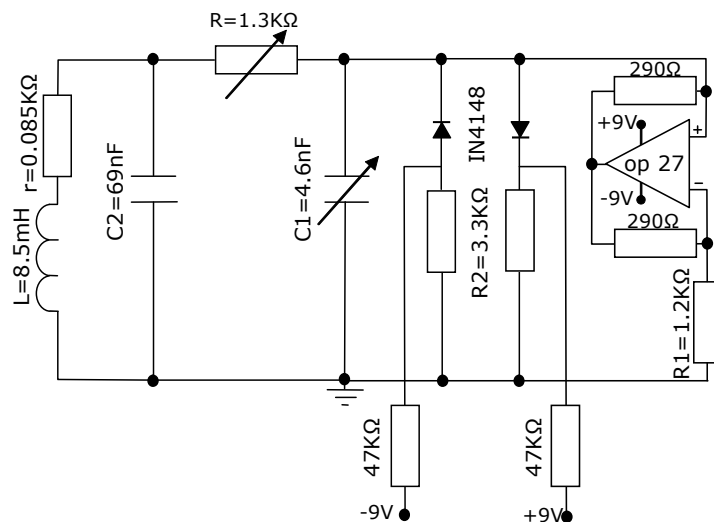
Równania, które podał Lorenz były przez niego także rozwiązywane numerycznie za pomocą komputera: Royal McBee (“Królewska Pszczółka”) LGP-300 (komputer zbudowany jeszcze przy użyciu lamp elektronowych, jedna iteracja na sekundę). Podczas rozwiązywania układów równań Lorenz otrzymywał wyniki w postaci cyfr. Lorenz zauważył, że wprowadzenie warunków początkowych, które różnią się od poprzednich o bardzo niewiele, np. 0,0001 powoduje, że otrzymywał zupełnie inne i różne od siebie rozwiązania. Nieprzewidywalność pogody znalazła swoje odbicie w modelu Lorenza. Okazało się bowiem, że niewielkie zaburzenie parametrów modelu – interpretowanych w rzeczywistości np. jako trzepot skrzydeł motyla – powoduje, że układ zachowuje się w sposób całkowicie odmienny. Trzepot skrzydeł motyla może zmienić pogodę w bardzo odległym miejscu na ziemi. Ten właśnie efekt Lorenz nazwał “efektem motyla” (rys. 14. 2). Informacje na temat historii równań Lorenza można znaleźć w pracy (Stewart, 2001).



Rys. 14. 2. “Efekt motyla” - różnica pomiędzy warunkami początkowymi rzędu 0.1%

Jak można zaobserwować, “efekt motyla” to właśnie wspomniana wcześniej wrażliwość na warunki początkowe. Obserwując dokładnie rys. 14. 2 możemy zauważyć, że trajektorie stanu są do siebie podobne przez pewien krótki okres czasu, a następnie rozbieżności powiększają się. Można, więc wnioskować, że przewidywanie zachowania się układu chaotycznego jest możliwe tylko dla najbliższej przyszłości. Ważne jest, aby podkreślić, że to numeryczne rozwiązanie równań Lorenza prezentowane jest na rys. 14. 1 i 14. 2. Rozwiązanie dokładne mogłoby wyglądać nieco inaczej, jednak własności byłyby zachowane.

### 14.3. Obwód elektryczny Chuy



Rys. 14. 3. Obwód elektryczny Chuy

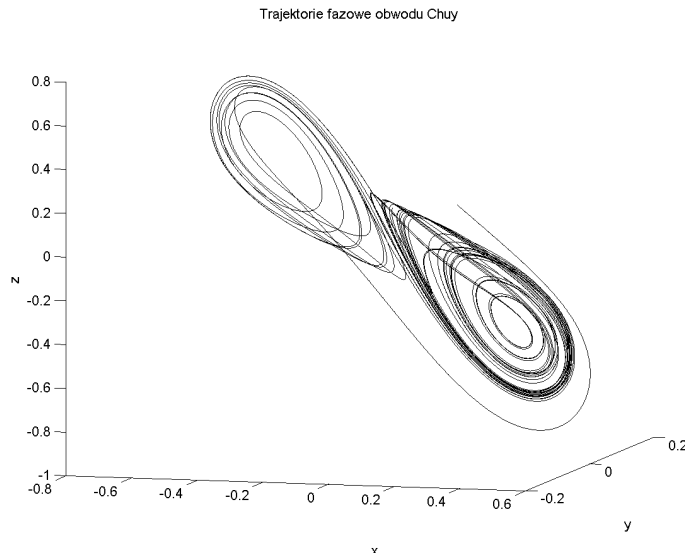
Obwód elektryczny Chuy był pierwszym rzeczywistym systemem dynamicznym zbudowanym w 1983 roku w skali laboratoryjnej, w którym występowały zjawiska podobne do dynamiki systemu Lorenza. Nieco uproszczony obwód elektryczny Leona Chuy można opisać następującymi równaniami

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(v_2 - v_1) - f(v_1)] \\
\frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G(v_1 - v_2) + i_3] \\
\frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L} v_2
\end{aligned}
\Leftrightarrow
\begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \end{bmatrix} = 
\begin{bmatrix} -\frac{G}{C_1} & \frac{G}{C_1} & 0 \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -b \end{bmatrix} 
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - 
\begin{bmatrix} f(v_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\quad (14.2)$$

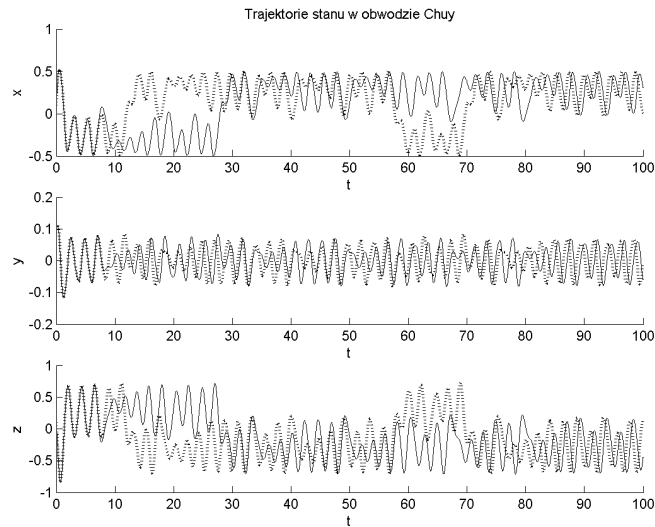
gdzie  $f(v_1)$  odpowiada za nieliniową oporność realizowaną fizycznie na wiele sposobów. Zazwyczaj za pomocą odpowiedniego wzmacniacza operacyjnego (przykładowa realizacja obwodu Chuy jest pokazana na rys. 14. 3). Bardzo podobne efekty „chaotyczne” można uzyskać w układzie równań różniczkowych z nieliniowością  $f(v_1)$  będącą wielomianem 3 stopnia oraz ze współczynnikami odpowiednio przeskalowanymi. Otrzymano w ten sposób następujący układ

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha(y - x^3 - cx) \\
\dot{y} &= x - y + z \\
\dot{z} &= -\beta y
\end{aligned}
\Leftrightarrow
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = 
\begin{bmatrix} -\alpha c & \alpha y & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} 
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 
\begin{bmatrix} -\alpha x^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\quad (14.3)$$

Dla takiego systemu przy parametrach  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 16$  i  $c = -0.143$  uzyskano trajektorie pokazane na rys. 14. 4 i 14. 5.



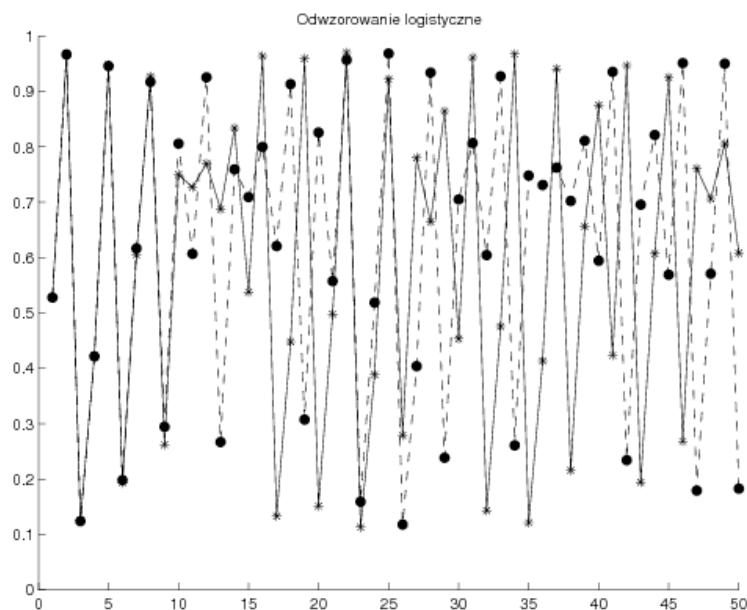
Rys. 14. 4. Przykładowa trajektoria fazowa obwodu Chuy z nieliniowością wielomianową



Rys. 14. 5. Wrażliwość na warunki początkowe obwodu Chuy - wykres ciągły:  $x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1$ , wykres kropkowany:  $x_0 = 0.101, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1$

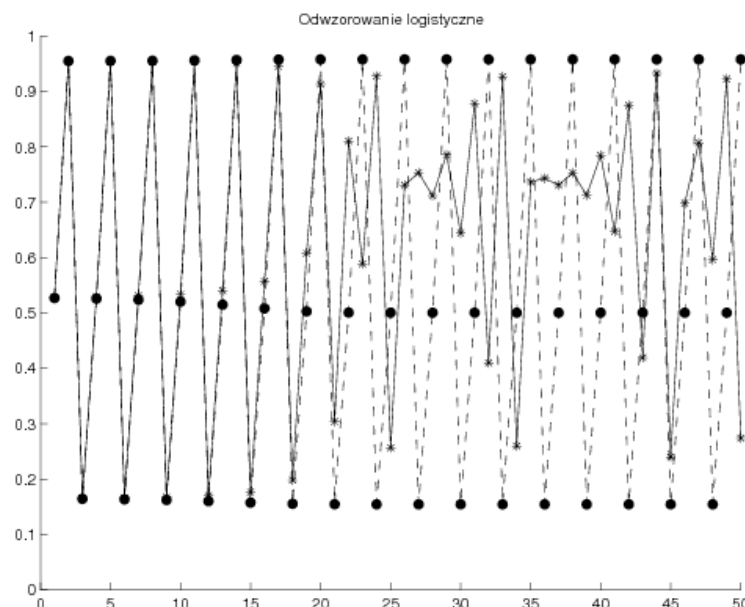
Więcej informacji na temat obwodu Chuy można znaleźć np. w pracach (Ogorzałek 1991, Galias 2003, Huang et al, 1996). Ponownie należy podkreślić, że wykresy uzyskane są numerycznie, jednakże pokrywają się one względnie dokładnie z przebiegami uzyskiwanymi na oscyloskopie.

## 14.4. Odwzorowanie logistyczne



Rys. 14. 6. Wrażliwość na warunki początkowe w odwzorowaniu logistycznym, różnica między warunkami początkowymi 0.001.





Rys. 14. 7. Mała różnica warunków początkowych pokazuje, że system z trajektorią o okresie 3 (•) posiada także trajektorie o innych okresach (\*)

Odwzorowanie logistyczne  $f(x; K) = Kx(1 - x)$  jest jednym z klasycznych przykładów odwzorowania, które pozwala utworzyć dyskretny układ o charakterze chaotycznym (np. Kudrewicz 1993). Nieliniowe równanie różnicowe 1-go rzędu tworzy się np. w następujący sposób:

$$x(i + 1) = f(x(i); K), \quad f(x; K) = Kx(1 - x) = Kx - Kx^2, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Jeżeli  $K \in [0, 4], x \in [0, 1]$ , to  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Dobierając odpowiednie  $K$  i  $x(0)$  możemy uzyskać różne zachowania trajektorii naszego układu dyskretnego. Wrażliwość na warunek początkowy ilustruje rys. 14. 6.

Ważnym rezultatem związanym z chaotycznymi układami dyskretnymi jest następujące (będące wnioskiem z twierdzenia Szarkowskiego) twierdzenie:

**Twierdzenie** (zob. np. Mitkowski 2000, s. 67)

Jeżeli przy pewnym  $K$  odwzorowanie  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  posiada trajektorię o okresie równym 3 to posiada również trajektorię o okresie równym dowolnej liczbie naturalnej.

Przykład jest pokazany na rys. 14. 7.

## 14.5. Zadania do rozwiązania

### Zadanie 1

Zamodelować w Matlabie system Lorenza dla podanych parametrów. Zaobserwować wrażliwość na warunki początkowe. Zmieniając wartości parametru  $r$  oszacować zmiany dynamiki układu.

### Zadanie 2

Zamodelować obwód Chuy z nieliniowością wielomianową (równanie (14.3)) i zbadać wpływ parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $c$  na dynamikę układu. Zaobserwować przykłady wrażliwości na warunki początkowe.

### Zadanie 3

Zamodelować odwzorowanie logistyczne, dobrać takie  $K$  oraz warunki początkowe, aby zaobserwować zachowania „chaotyczne”. Dobrać takie  $K$ , aby uzyskać trajektorię o okresie 3 (czyli  $x(i+3) = x(i)$ ) a następnie zilustrować tw. Szarkowskiego pokazując trajektorie o innych naturalnych okresach.

## 14.6. Literatura

Galias Z. (2003): *Metody arytmetyki przedziałowej w badaniu układów nieliniowych*, Wydawnictwa AGH, Kraków (dostępna w Internecie <http://chopin.zet.agh.edu.pl/~galias/publ.html>)

Huang A., Wu CW, Franz M., Pivka L. (1996): Chua's equation with cubic nonlinearity, *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol.6, no.12:2175–2222.

Kudrewicz J. (1993): *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa

Mitkowski W. (2000): *Systemy dynamiczne - Materiały uzupełniające do wykładu*, Wydawnictwa Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH, Kraków

Ogorzałek M. (1991): *Drgania chaotyczne w autonomicznych obwodach elektrycznych*, Elektrotechnika, vol. 20, Wydawnictwa AGH, Kraków.

Stewart I. (2001): *Czy Bóg gra w kości? – nowa matematyka chaosu*, PWN, Warszawa

## SKOROWIDZ

aliasing 86, 87

całkowe wskaźniki jakości 65

charakterystyka amplitudowo fazowa 51, 52, 56, 57, 58

- zmodyfikowana 57

ciąg Fibonacciego 88

cykl graniczny 100, 101

czas narastania 66

- regulacji 66

częstotliwość Nyquista 86

druga metoda Lapunowa 35

efekt motyla 141, 142

ekstrapolator rzędu zerowego 84, 92

filtr Kalmana – Bucy 128, 129

funkcjonał Lapunowa 36

impuls Diraca 71

kompensator dynamiczny 119

kryterium koła 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 61

- Michajłowa (asymptotycznej stabilności) 16

- Nyquista 17

kwadratowy wskaźnik jakości 65, 78

Lapunow 24, 29

liniowe przybliżenie 24, 28, 31

liniowy układ autonomiczny 7

macierz Kalmana sterowalności 133

obserwator 111, 112, 113, 114, 115, 117, 119, 120, 123, 126, 135, 138

- liniowy pełnego rzędu 123, 126

- Luenbergera 111, 116, 135

- nieliniowy 124, 126

obszar przyciągania 27

odwzorowanie logistyczne 89, 144, 145

okresu próbkowania 85

optymalizacja parametryczna 63

oscylator LC 134

pierwsza metoda Lapunowa 24, 29, 35

portrety fazowe 7, 8, 33, 34, 97, 98, 105

prosta Popova 57, 62

- przełączeń 97

przekaznik dwustanowy z histerezą 95

- dwustanowy 95, 99

- trójstanowy 95

przybliżenie liniowe 28, 34

- punkty równowagi 27
- regulator dead-beat 134
  - optymalny 121
- reżim ślizgowy 98
- równanie sprzężone 108
- schematy różnicowe, 87
- sektor dopuszczalny, 52
  - Hurwitza, 58, 59
  - Popova 56, 57, 58, 59, 61, 62
- Shannon 86, 94
- stabilność asymptotyczna 27
  - jednostajna 26
  - rozwiązań stałych 27
- system dyskretny 84
  - Lorenza 140
- trajektoria fazowa 25, 26
- trajektorie stanu 25
- trójkąt Sierpińskiego 92, 93
- twierdzenia Parsevala 72, 79, 82, 83
  - Nyquista 18
  - Cauchy'ego 73
  - LaSalle'a 35, 39, 47
  - Lapunowa 37
  - Michajłowa 16
  - o próbkowaniu 86
  - Popova 50, 55, 60
- układ regulacji z przekaźnikiem 95
- układy o dynamice chaotycznej 140
- warunki asymptotycznej stabilności 7
- wskaźnik jakości 64, 70, 75, 76
- wykres Nyquista 56
- wykrywalność 112, 136
- zapas fazy 67
  - modułu 67
- zbiór inwariantny 38
  - stanów osiągalnych 107
- zredukowany obserwator Luenbergera 113