Egzamin 2014, t1 + rozwiązania

ZAD 1

Dla zadania:

$$\min F(x_1, x_2) = \min\{ 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 2)\}$$
$$(x_1, x_2) \in R^2$$

a) znaleźć punkty spełniające warunki konieczne optymalności,	2 pkt
b) na podstawie warunków wystarczających, określić charakter tych punktów, tzn. że jest to minimum, maksimum lub punkt siodłowy.	1 pkt

ZAD 1.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 6x_1^2 - 6x_1 - 12x_1x_2 + 6x_2^2 + 12x_2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x_1^2 - x_1 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \qquad (*)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -6x_1 + 12x_1x_2 + 12x_1 = -6x_1[x_1 - 2x_2 - 2] = 0 \qquad (**)$$

$$z\ (**) \Rightarrow x_1 = 0 \xrightarrow{(*)} 6x_2(x_2+2) = 0 \rightarrow \boxed{\begin{matrix} P_1 = (0,0) \\ P_2 = (0,-2 \end{matrix}}$$

$$x_1 - 2x_2 - 2 = 0$$

$$x_1 = 2x_2 + 2$$

$$\downarrow (*)$$

$$(2x_2+2)^2 - (2x_2+2) - 2(2x_2+2)\cdot x_2 + x_2 + 2x_2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x_2^2 + 4x_2 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} P_3 = (-2+2\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}) \\ P_4 = (-2-2\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}) \end{matrix}}$$

$$\nabla^2 F_{P_1} = \begin{bmatrix} -6 & +12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$ p. siodło-

$$\nabla^2 F_{P_2} = \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$$ p. siodłowy

$$\nabla^2 F_{P_3} = \begin{bmatrix} \overset{>0}{10.9} & -4.9 \\ -4.9 & 9.9 \end{bmatrix} > 0$$ minimum (lokalne)

$$\nabla^2 F_{P_4} = \begin{bmatrix} \overset{<0}{-22.9} & 28.9 \\ 28.9 & -57.9 \end{bmatrix} < 0$$ max (lokalne)

<u>ZAD 2</u>

Dla zadania

$$\min(-x_1 - x_2)$$

$$x_1 + x_2^2 - 5 \leq 0$$

$$x_1 - 2 \leq 0$$

$$(x_1, x_2) \in R^2$$

a) Podać warunki konieczne optymalności i znaleźć punkty, które je spełniają. Który z tych punktów jest rozwiązaniem?	2 pkt
a) Pokazać, że w tym punkcie są spełnione warunki regularności.	1 pkt

ZAD2

$$L = (-x_1 - x_2) + \lambda_1 (x_1 + x_2^2 - 5) + \lambda_2 (x_1 - 2)$$

W.K.T

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (*)$$

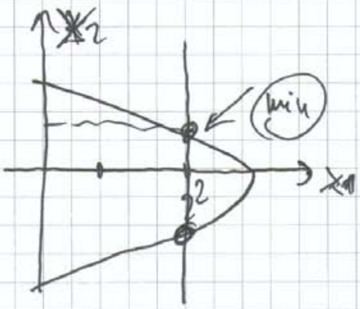
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \qquad (**)$$

$$x_1 - 2 \leq 0 \qquad (***)$$

$$x_1 + x_2^2 - 5 \leq 0 \qquad (****)$$

$$\lambda_1 (x_1 + x_2^2 - 5) = 0 \qquad (5)$$

$$\lambda_2 (x_1 - 2) = 0 \qquad (6)$$



$(5),(6) \Rightarrow$

$\lambda_1 \neq 0 \quad (x_1 + x_2^2 - 5) = 0 \qquad (7)$

$\lambda_1 = 0 \quad (x_1 + x_2^2 - 5) \neq 0 \qquad (8)$

$\lambda_2 \neq 0 \quad x_1 = 2 \qquad (9)$

$\lambda_2 = 0 \quad x_1 \neq 2 \qquad (10)$

$\lambda_1 = 0 \quad x_1 + x_2^2 - 5 = 0 \qquad (11)$

$\lambda_2 = 0 \quad x_1 = 2 \qquad (12)$

$(7) \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{5 - x_1}$

$(9) \Rightarrow x_1 = 2$

$(*) \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1$

$(**) \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2x_2}$

$P_1 = \left(2, \sqrt{3}, \frac{1}{2\sqrt{3}}; 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

$P_2 = \left(2, -\sqrt{3}; \frac{1}{-2\sqrt{3}}; 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

(8) (10), (11), (12) $\rightarrow$ sprzeczności

b) $\frac{\partial h_1}{\partial x} = [1 \quad 2x_2]^T$; $\frac{\partial h_2}{\partial x} = [1 \quad 0]^T$, $x \in R^2$, w obu pkt. stacjonarnych są liniowo niezależne

<u>ZAD 3</u>

Metoda kierunków sprzężonych zastosowana dla znalezienia minimum funkcji:

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^T Ax + b^T x + c$$

$$A > 0,\ x \in R^3$$

zakończy poszukiwania w co najwyżej *n* krokach. Podać *n* i uzasadnić.

1 pkt.

Co najwyżej 3 krokach.

<u>Tw. 5.2:</u>

Jeżeli $u^1, u^2, ..., u^n$ są kierunkami wzajemnie sprzężonymi względem ściśle dodatnio określonej macierzy A, to minimum formy kwadratowej :

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^T Ax + b^T x + c$$

może być wyznaczone w skończonej liczbie kroków, w wyniku jednokrotnej minimalizacji wzdłuż każdego z kierunków sprzężonych.

ZAD 4

$$\min F(x)$$
$$x \in X_0$$
$$X_0 = \{x : h_i(x) \leq 0,\ i = 1..m\}\ ,\ x \in R^n$$

a) Co to jest odstęp dualności?	1 pkt
b) Kiedy odstęp dualności jest równy zero? Zacytuj odpowiednie twierdzenie.	2 pkt

..

<u>Tw 8. 3</u>: Funkcja dualna spełnia warunek

$$L_D(\lambda) \leq F(x) \quad dla\ \forall x \in X\ \ i\ \ \lambda \in D$$

tzn. funkcja dualna jest dolnym oszacowaniem funkcji celu we wszystkich punktach dopuszczalnych zadania pierwotnego i dualnego.

Jeśli **w punkcie rozwiązania optymalnego** jest $L_D(\hat{\lambda}) < F(\hat{x})$ to mamy do czynienia z tzw. **odstępem dualności (** $F(\hat{x}) - L_D(\hat{\lambda})$).

<u>Tw.8. 4</u>: (silne twierdzenie o dualności)

Para $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ jest punktem siodłowym funkcji Lagrange'a związanej z zadaniem (8.1) wtedy i tylko wtedy gdy:

1^0. $\hat{x}$ rozwiązuje problem pierwotny,

2^0. $\hat{\lambda}$ rozwiązuje problem dualny,

3^0. $F(\hat{x}) = L_D(\hat{\lambda})$.