# Egzamin *Metody Optymalizacji* 2016, termin 2

# **Zadanie 1 (**2 pkt)

$$\min F(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^3 + cx_2$$
$$x \in R^2, c - parametr$$

Dla *c=-3* znaleźć wszystkie wektory d, które w punkcie $x^{(0)} = (0,1)^T$ n są ani kierunkami wzrostu, ani kierunkami spadku.

*Odp : wszystkie wektory :* *d=(t,t)*$^T$, *t* - stała

# Zadanie 2



## Co to jest odstęp dualności? Kiedy odstęp dualności jest równy zero?

.............................................

**Tw 8. 3**: Funkcja dualna spełnia warunek

$$L_D(\lambda) \le F(x) \quad dla\ \forall x \in X \ \ i \ \ \lambda \in D$$

tzn. funkcja dualna jest dolnym oszacowaniem funkcji celu we wszystkich punktach dopuszczalnych zadania pierwotnego i dualnego.

Jeśli **w punkcie rozwiązania optymalnego** jest $L_D(\hat{\lambda}) < F(\hat{x})$ to mamy do czynienia z tzw.

**odstępem dualności (** $F(\hat{x}) \ \ - L_D(\hat{\lambda})$ ).

**Tw.8. 4**: (silne twierdzenie o dualności)

Para $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ jest punktem siodłowym funkcji Lagrange'a związanej z zadaniem (8.1)

wtedy i tylko wtedy gdy:

$1^0$. $\hat{x}$ rozwiązuje problem pierwotny,

$2^0$. $\hat{\lambda}$ rozwiązuje problem dualny,

$3^0$. $F(\hat{x}) = L_D(\hat{\lambda})$ .

**Zad.3**

$$\min\,[e^{-x_1} - x_2^2]$$

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1$$

$$x_1^2 - 1 \le x_2$$

$$x \in R^2$$

,

A. (1 pkt) Czy jest to wypukły problem optymalizacji ? Uzasadnić.
B. (1 pkt) Czy punkt (1,0) spełnia warunki konieczne Kuhna-Tuckera?
C. (1 pkt) Jeśli tak, czy jest to minimum, czy maksimum (uzasadnić) ?

A. Nie, f. celu jest wklęsła:

$$\nabla^2 (e^{-x_1} - x_2^2) = \begin{bmatrix} e^{-x_1} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

B. tak,

C. $-\nabla\ (e^{-x_1} - x_2^2) = \begin{bmatrix} e^{-x_1} \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$,

**Zadanie 4** (1 pkt)

Dla zadania:

$$F(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + (x_1 - x_2)^4$$

wykonać dokładne poszukiwanie minimum na kierunku $d = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

z punktu $x_0 = (0,0)^T$

# Zadanie 5 (2 pkt)

**Zaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych i spełniający:**

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

**Zadanie rozwiązać metodą dekompozycji dualnej.**

$$\min\{x_1^2 + x_2^2\}$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$L = x_1^2 + x_2^2 - \lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda$$

$$L_D = \min_{x_1 \geq 0}\{x_1^2 - \lambda x_1\} + \min_{x_2 \geq 0}\{x_2^2 - \lambda x_2\} + \lambda$$

$$rozw: x_1 = x_2 = \lambda / 2$$

$$L_D = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} + 1 = \lambda - \frac{\lambda^2}{2}$$

$$\max L_D = \max\left\{\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right\} = 1/2 \quad dla \quad \lambda = 1$$

$$x_1 = x_2 = 1/2$$