

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**



# **Baryon acoustic oscillations in the dark matter halos in the SDSS**

**Nataly Mateus Londoño**

FACom, Grupo de física y astrofísica computacional

Instituto de física

Facultad de ciencias exactas y naturales

**Advisor: Juan Carlos Muñoz Cuartas**



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
INSTITUTO DE FÍSICA



# Baryon acoustic oscillations in the dark matter halos in the SDSS

AUTHOR:

---

(Nataly Mateus Londoño)

ADVISOR:

---

( Professor Juan Carlos Muñoz Cuartas )



<b>1. Introduction</b>	<b>1</b>
1.1. Baryonic acoustic oscillations . . . . .	1
<b>2. Fundamentos en Cosmología</b>	<b>3</b>
2.1. Métrica Robertson Walker . . . . .	4
2.2. Ecuación de Campo de Hilbert-Einstein . . . . .	6
2.3. Ecuaciones de Friedmann . . . . .	8
2.4. Ecuaciones de Estado . . . . .	11
2.5. Evolución de las Perturbaciones de Densidad en Régimen Newtoniano . . . .	12
2.5.1. Descripción Newtoniana . . . . .	12
2.5.2. Inestabilidad de Jeans . . . . .	14
2.5.3. Espectro de Potencias . . . . .	16
2.6. Colapso No-lineal de las Perturbaciones de Densidad . . . . .	18
2.6.1. Aproximación de Zeldovich . . . . .	19
2.7. Cosmic density field . . . . .	20
2.7.1. Correlation functions . . . . .	20
2.7.2. Mass moments . . . . .	20
2.7.3. Clustering in the real and redshift space . . . . .	20
2.8. Baryonic acoustic oscillations . . . . .	20
<b>3. Cosmological simulations</b>	<b>21</b>
3.1. Numerical methods . . . . .	21

3.2.	Halo selection . . . . .	21
3.2.1.	Friends of friends . . . . .	21
3.2.2.	Bound density maximum . . . . .	21
3.3.	Correlation functions in cosmological simulations . . . . .	21
3.4.	Power spectrum in cosmological simulations . . . . .	21

# CAPÍTULO 1

---

## Introduction

---

In the standard model of cosmology the universe was born in a big bang, an explosion that produced an expanding, isotropic and homogeneous Universe. From observations it has been found that this expansion is currently accelerating with time (Hamuy et al.,1996).

There are several components of the matter-energy content of the universe, dark and baryonic matter, radiation and dark energy. According to recent estimations DEF, the last one accounts for around 70 % of this content and is responsible for the accelerated expansion of the universe. The baryonic acoustic oscillations allows to study the nature of this expansion as it will be explained.

In the early universe the dark matter (DM) formed density fluctuations, causing baryonic matter to be unstable against gravitational perturbations. At this stage in the evolution of the universe the temperature was very high, allowing a coupling between baryonic matter and radiation through Thomson scattering. So the increase of baryonic matter in the DM density fluctuations not only caused an increase in density, but also radiation pressure against collapse. Therefore, an expanding wave centered in the fluctuation is caused because of the radiation pressure. This wave is the baryonic acoustic oscillation (BAO) (Hu and Sugiyama, 1996; Eisenstein and Hu, 1998).

Nevertheless, it is necessary to consider that the universe is expanding and this results in a temperature decrease. Therefore, when temperature is low enough the baryonic matter and

radiation decoupled, making BAO to stop expanding and leaving an imprint in the matter distribution. The distance that a BAO could have travelled by the time of decoupling is called sound horizon. This scale has been measured in the Cosmic Microwave Background as  $146,8 \pm 1,8 \text{Mpc}$ , ([?]).

Since BAO do not change in size after decoupling they can be used as a standard ruler. They allow to measure the Hubble parameter and angular diameter distance as a function of  $z$ , and this way to measure the rate of expansion at different times during the evolution of the universe. Hence, BAO is key to constraint dark energy parameters.

A way to observe the imprint let by BAO is through the 2D point correlation function or the power spectrum that is its fourier pair, ([?], [?]). A peak due to the BAO appears in the correlation function (see figure ??) but there are several issues to take into consideration. There is a bias between baryonic and dark matter distribution ([?]) and hence in their correlation functions. This bias plays an important role when observational data is being studied. A method proposed in such cases is suggested in ([?]). Moreover, the non-linear clustering smear out the BAO imprint causing a broadening of the peak (Crocce and Scoccimarro, 2008). These, among other problems, have to be taken into account when BAO are studied.

Observational studies of baryonic acoustic oscillations have been done in several previous works such as [?], [?], [?], [?] . Measurements of baryonic acoustic oscillations on simulations have also been done in these works by [?], [?], [?], [?]. And theoretical studies of baryonic acoustic oscillation using non linear theory have been realized in [?], [?], [?], [?] .

In the present work, we plan to do a comparison between the power spectrum estimated from numerical cosmological simulations and the one obtained from observations of the Sloan Digital Sky Survey (SDSS). The method to construct the power spectrum is shown in section ??2. The method to obtain the dark matter density field for observations is explained in section ??3. In both cases, observations and numerical cosmological simulations, the BAO peak will be studied, but what are the changes of the BAO's properties with changing the scale of the tracer halo population? is there any change in the position peak? is there any change in the width peak? or, is there a damping in the oscillations caused by BAO in the power spectrum? In general, the question we want to answer is: Is there any dependence in



the width and amplitude of the BAO signal with the tracer halo population? Answering this questions will lead not only to profound understanding of the physics of BAO but a better understanding of the accelerated expansion of the universe that still has so many questions to be answered.

## 1.1. Baryonic acoustic oscillations

afasdfas



---

### Fundamentos en Cosmología

---

La cosmología es una rama de la física que busca explicar todo lo concerniente a la estructura a gran escala en el universo. En este marco nos encontramos con problemas muy interesantes como una posible explicación del porqué de la estructura filamentaria observada a gran escala, la expansión del Universo, la radiación cósmica de fondo, la época de reionización, la abundancia de elementos, en especial aquellos formados en la nucleosíntesis primordial, entre muchos otros tópicos.

Para lograr dicho cometido es esencial adquirir conocimientos básicos de relatividad general, ésta es la teoría hoy en día aceptada para estudiar la interacción gravitacional en escalas astronómicas. Para su desarrollo fue necesaria la geometría riemanniana, el cálculo tensorial y la relatividad especial. Valiendonos de ésta es posible proponer modelos cosmológicos que estén acordes con las observaciones astronómicas, por lo que en el presente capítulo se expone de forma rudimentaria las bases que nos llevan a las ecuaciones de Friedmann, las últimas describen la expansión del Universo.

Debido a que el Universo contiene radiación, materia y una contribución a la energía por parte del vacío es necesario mirar su evolución con el redshift, en particular el comportamiento de la materia en los primeros estadios, tanto la materia bariónica como la oscura. A partir de esto se puede estudiar la evolución de las perturbaciones iniciales, esto es, fluctuaciones de densidad iniciales que dependen del espectro de potencias. Pero las fluctuaciones evolucionan de forma diferente de acuerdo a la edad del Universo entonces se estudia para un regimen lineal dentro del que es válido y otro donde es necesario un colapso no lineal de las fluctuaciones.

## 2.1. Métrica Robertson Walker

Lo que podemos observar en la actualidad es un universo altamente homogéneo e isotrópico a grandes escalas. Además de la radiación cósmica de fondo conocemos que en una época más temprana al desacople de la radiación y materia las inhomogeneidades encontradas sólo se presentan en escalas muy pequeñas, fluctuaciones que contrastan con la densidad de fondo. Como consecuencia se han enunciado dos postulados que permiten una mayor simplicidad en el estudio del cosmos, el principio cosmológico y el postulado de Weyl.

- Principio cosmológico: *El universo es isotrópico y homogéneo en grandes escalas.*

No sobra hacer un poco de claridad sobre los términos usados, homogéneo se refiere a que independientemente de donde ubiquemos el sistema de referencia se observará la misma estructura o propiedades del Universo. Por su parte, la isotropía establece que independiente de la dirección en que se realice una observación se deben nuevamente observar las mismas propiedades del Universo. En otras palabras, se tiene simetría rotacional y traslacional para el sistema de referencia escogido.

En la actualidad dichas características son observables en escalas de mega parsecs pero ya que el Universo se encuentra en expansión, dicha escala claramente va a depender de la época cósmica en particular.

- Postulado de Weyl: *Establece que las líneas mundo de las galaxias forman un conjunto de geodésicas que no se interceptan, excepto en un punto singular en un pasado finito o infinito.*

Este postulado nos permite definir un conjunto de observadores que se mueven con las líneas mundo de las galaxias, en el punto de intersección se pueden sincronizar los relojes entre los observadores y así se logra definir un tiempo cósmico.

A su vez, se puede determinar la distancia hasta una galaxia en un mismo tiempo cósmico permitiendo el uso de una métrica para este tiempo.

Además existe otra premisa importante a tener en cuenta en un modelo cosmológico, está es la expansión del Universo, la cuál deja fuertes consecuencias en la predicción de la evolución de éste, que dependerán del contenido de masa y energía total en el Universo. Anteriormente se tenía una idea arraigada, que el universo era estático, muestra de ello es el modelo cosmológico propuesto por Einstein donde se incluía una constante tal que se satisficiera dicha condición. Pero fue gracias a observaciones de galaxias cercanas realizadas

por Edwin Hubble, que se concluyó que las galaxias en su mayoría tienen un corrimiento al rojo, en otras palabras, se están alejando de nosotros. El considerar dicho alejamiento puede llevarnos a una conclusión errónea, pensar que nos encontramos en el centro del Universo. Consideremos entonces tres galaxias tal como se muestra en la figura 2.1, si ubicamos el sistema de referencia en la galaxia 1 se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\vec{v}_2 = H_o \vec{r}_2$$

$$\vec{v}_3 = H_o \vec{r}_3$$

que corresponden a la ley encontrada por Hubble, establece que la velocidad con la que se alejan las galaxias es proporcional a la distancia que las separa. De lo anterior, la velocidad relativa entre las partículas 2 y 3 se puede obtener,  $\vec{v}_{23} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = H_o(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)$ . Pero a partir de la suma vectorial  $\vec{r}_3 + \vec{r}_{23} = \vec{r}_2$  se obtiene nuevamente la ley de Hubble  $\vec{v}_{23} = H_o \vec{r}_{23}$ .

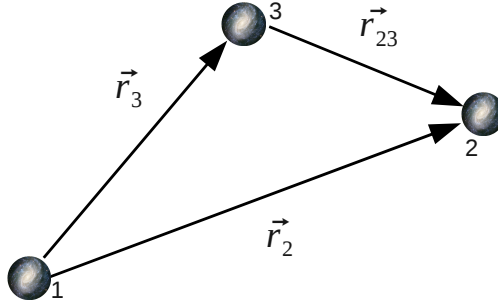


Figura 2.1: Galaxias que interactúan gravitacionalmente en un Universo homogéneo en expansión.

Esto es, independiente de donde fijemos el sistema de referencia, por ejemplo en la galaxia 3, se observaría nuevamente que las galaxias restantes se alejan, lo que nos muestra que no nos encontramos en una posición privilegiada.

Con lo expuesto previamente se procede a definir la métrica,  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico y  $dx^\alpha$  denota un desplazamiento infinitesimal de las coordenadas  $x^\alpha = \{ct, x, y, z\}$ . Para que la métrica satisfaga las condiciones de isotropía, homogeneidad y expansión, el tensor métrico debe tomar la forma  $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -\frac{a^2}{1-Kr^2} - a^2 r^2, -a^2 r^2 \sin^2 \theta\}$ , de donde la métrica toma la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

esta es conocida como la métrica Robertson Walker. El término  $a(t)$  es el factor de escala, describe como la distancia relativa entre dos observadores fundamentales cambia con el tiempo

y  $K$  es la constante de curvatura en el tiempo actual, define la geometría del Universo. Lo último se puede ver en más detalle tomando tres valores para la constante de curvatura,  $K = 0, \pm 1$ . Haciendo  $K = 0$  la expresión 2.1 se reduce a

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

que corresponde a la métrica euclídeana, en este caso el Universo es plano y sufre una expansión constante durante un tiempo indefinido. Tomando  $K = 1$  se obtiene de 2.1

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

que corresponde a una geometría esférica, el Universo se expandiría hasta colapsar nuevamente debido al contenido de masa y energía de éste. Cuando se toma  $K = -1$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

se obtiene una geometría hiperbólica, el Universo en este caso sufre una expansión acelerada. Esto se ilustra en la figura 2.2. Se debe tener presente que en realidad la geometría del Universo depende del contenido de materia y energía total en el Universo  $\Omega_o$ , puesto que la constante de curvatura está dada por  $K = H_o^2(\Omega_o - 1)/c^2$ .

## 2.2. Ecuación de Campo de Hilbert-Einstein

A grandes escalas la interacción fundamental de mayor importancia es la gravitacional, por lo que la teoría general de la relatividad es una herramienta esencial en el estudio del cosmos. Anteriormente se consideraba válida la teoría newtoniana de la gravitación pero difiere considerablemente al compararla con la relatividad, puesto que el tiempo y el espacio dejan de ser entes absolutos además de ser afectados por el contenido de energía y materia presente en el universo.

En el marco de la teoría newtoniana, la ecuación de Poisson ofrece una relación entre la segunda derivada del campo y la densidad de materia que es la fuente de dicho campo

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

a ésta se reduce la ecuación de campo bajo las condiciones de bajas velocidades y campo gravitacional débil ( $\Phi/c^2 \ll 1$ ). Pero la ecuación de campo no solo incluye la de Poisson sino además todo lo relacionado con la dinámica newtoniana. La ecuación de campo Hilbert-Einstein es entonces

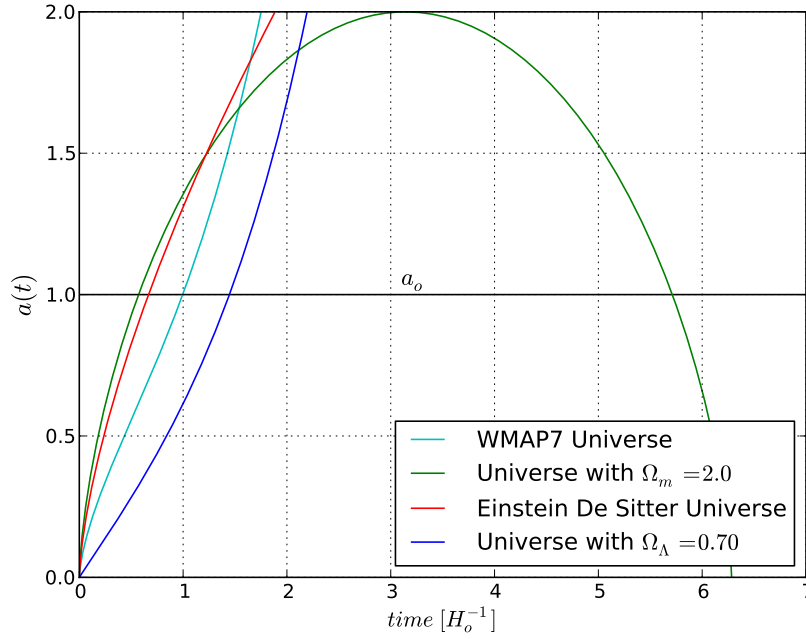


Figura 2.2: Factor de Escala en función del tiempo. La expansión del Universo para diferentes contribuciones a la densidad, se obtiene un Universo cerrado para  $\Omega_m = \Omega_o > 1$ , los parámetros WMAP7 muestran que el Universo sufre una expansión acelerada.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

ésta es una ecuación tensorial de 6 componentes independientes. El primer término de la izquierda corresponde al tensor de Ricci o a segundas derivadas del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . En el segundo término se encuentra el escalar de curvatura que define la geometría. En el tercer término  $\Lambda$  es la constante cosmológica, es asociada a la la densidad con la que contribuye el vacío a la densidad total y sería responsable por la expansión acelerada del Universo. Al lado derecho de la ecuación se encuentra el tensor momentum-energía en la que se incluyen todas las contribuciones de energía y momentum como su nombre lo indica.

Es decir que al lado izquierdo se encuentran los términos que dan cuenta por la geometría del universo mientras que en la derecha los relacionados con la distribución de materia y energía. Por consiguiente se podría afirmar que la geometría es determinada por el contenido de materia-energía del universo, aunque estrictamente hablando el tensor de energía momentum también depende del tensor métrico.

Existe un caso interesante del tensor energía momentum, cuando estamos tratando un fluido perfecto (sin viscosidad), homogéneo e isotrópico, éste toma la forma

$$T^\mu_\sigma = \text{diag}\{c^2\rho, -P, -P, -P\}$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $P$  es la presión del fluido. Esto muestra que no solo la densidad ocasiona curvatura del espacio-tiempo sino también la presión. Ya que el Universo se comporta según el tensor energía momentum mostrado ésta es la forma indicada para su estudio.

Existen diversas soluciones a la ecuación de Einstein pero no muchas en forma analítica, por ejemplo Schwarzschild encontró la métrica de un astro estático y con simetría esférica. Otra solución es la métrica de Kerr que corresponde a un astro en rotación con un campo estacionario. Claramente la métrica de Robertson-Walker también satisface dichas ecuaciones.

### 2.3. Ecuaciones de Friedmann

A partir de las ecuación de campo de Einstein y la métrica Robertson-Walker es posible proponer modelos cosmológicos que den cuenta por la dinámica observada en el Universo. Para alcanzar éste cometido se toman las componentes de la ecuación de campo  $\beta = \nu = 0$  (componente tiempo-tiempo) y  $ii = 1, 2, 3$  (componentes espacio-espacio), a partir de las cuales se hallan

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + 3\frac{P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{c^2 K}{a^2} = 4\pi G \left( \rho - \frac{P}{c^2} \right) + \Lambda c^2$$

donde se ha tenido en cuenta la forma del tensor energía momentum para un fluido ideal. Las anteriores son las ecuaciones de Friedmann, dan información sobre la dinámica de la expansión del Universo, los términos involucrados son,  $a(t)$  el factor de escala y esta normalizado para la época actual  $a(t_o) = 1$ ,  $\rho$  es la densidad de radiación y materia,  $P$  es la presión total. La ecuación 2.4 tiene la forma de una ecuación de fuerzas, puede ser deducida parcialmente a partir de mecánica newtoniana sin los términos de presión y constante cosmológica. Una forma más usada de las anteriores ecuaciones se obtiene al manipularlas algebraicamente

$$H(t) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \right) - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (2.4)$$



la cual se puede interpretar como una ecuación de energía, donde el primer término de la derecha es la energía potencial. En ésta ecuación se define el parámetro de Hubble, cuando se evalúa para la época actual éste coincide con la constante de Hubble  $H(t_o) = H_o = 100h \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

Adicionalmente 2.5 puede expresarse en términos de la densidad crítica, ésta es la cantidad de materia y energía necesarias para que el Universo sea plano, por lo tanto si el Universo tiene una densidad mayor colapsaría sobre sí mismo, en cambio si es menor el Universo seguiría expandiéndose indefinidamente. Ésta se define como  $\rho_{crit}(t) = 3H(t)^2/8\pi G$ .

Dividiendo 2.5 por la constante de Hubble  $H_o$  y definiendo el parámetro de densidad  $\Omega_{i,o} = \rho_{i,o}/\rho_{crit}(t_o)$  con  $i = m, r, \Lambda$  se obtiene

$$\frac{H^2(z)}{H_o^2} = \Omega_{m,o} (1+z)^3 + \Omega_{r,o} (1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,o} + (1 - \Omega_o) (1+z) \quad (2.5)$$

donde  $\Omega_o = \Omega_{m,o} + \Omega_{r,o} + \Omega_{\Lambda,o}$ , se ha introducido la relación entre el redshift y el factor de escala  $1+z = 1/a$ . Se observan las diferentes contribuciones de la densidad al parámetro de Hubble, esto es, la densidad de materia, radiación y vacío. Cada una contribuye dependiendo de la expansión del Universo, aunque la energía del vacío no varía con el redshift.

Inicialmente el Universo estaba dominado por radiación, durante esta época la radiación estaba acoplada con la materia, es decir, la longitud de onda de De Broglie de los electrones es comparable a la longitud de onda de la radiación. Por lo anterior el camino libre medio de los fotones era despreciable, ocasionando que el universo fuera opaco. Durante éste acople, la temperatura de la radiación es igual a la de la materia y corresponde a la de un cuerpo negro.

Tal como se ve en la grafica 2.3, a partir de  $z = 3230$  la materia se vuelve la mayor contribución a la densidad del universo y cuando  $z = 1100$  la temperatura ha descendido lo suficiente para que la tasa de recombinación sea mayor que la de ionización. En este caso recombinación se refiere a la formación de átomos neutros, lo que permitió el desacople materia radiación. Pero la última dispersión de la radiación debido a la materia aún puede observarse, corresponde a la radiación cósmica de fondo, la cual como consecuencia de la expansión del universo ha ido enfriándose hasta alcanzar  $T = 2,7K$ .

En la actualidad el Universo está dominado por la densidad de vacío, aunque ésta es constante puesto que no depende del factor de escala  $\rho_\Lambda = -c^4\Lambda/8\pi G$ , en contraposición con la materia que depende como  $a^{-3}$  y la radiación como  $a^{-4}$  haciendo que dichas contribuciones

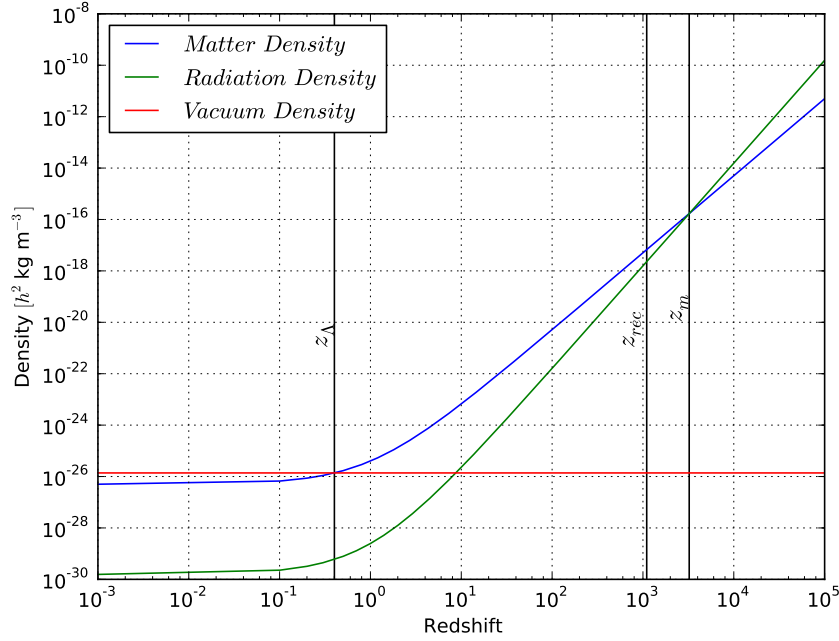


Figura 2.3: Dependencia en el redshift para  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$  y  $\Omega_r$ . A partir de  $z_m$  la densidad de materia domina hasta  $z_\Lambda$  donde el término de radiación empieza a dominar. El desacople radiación materia se da para  $z_{rec}$ .

disminuyan con el tiempo. La constante cosmológica que se observa en esta definición puede ser asociada a una fuerza repulsiva que se opone a la gravedad lo que podría dar cuenta de la expansión acelerada del universo.

Existen diversas soluciones a 2.5, por ejemplo en el Universo Einstein de Sitter no existen contribuciones de la radiación o vacío y la densidad total es  $\Omega_o = 1,0$ , en este caso la solución toma la forma

$$t = \frac{2}{3H_o}(1+z)^{-3/2}$$

y se muestra en 2.5, donde dependiendo de los parámetros escogidos cambia la evolución del Universo. En el caso de WMAP7 los parámetros usados son  $\Omega_\Lambda = 0,734$ ,  $\Omega_m = 0,266$  (se suman las contribuciones de materia oscura y bariónica),  $\Omega_r = 8,24 \times 10^{-5}$  y  $h = 0,71$ . Éstos últimos son los datos de mayor precisión obtenidos mediante observaciones de donde se calcula la edad actual del Universo  $t \sim 1,2 Gyr$ . Se pueden ver diferentes posibilidades para la evolución del Universo, por ejemplo, cuando la densidad de materia es la única contribución y esta es mayor a 1 se obtiene un Universo cerrado. Otro caso es tomar un Universo dominado por vacío la densidad necesariamente debe ser  $\leq 1$  y es siempre abierto. Cuando se tienen las tres contribuciones, el Universo puede ser cerrado o abierto dependiendo de cada contribución

de los parámetro de densidad y no de la suma total aunque  $\Omega_o > 1$ .

## 2.4. Ecuaciones de Estado

Como se ha visto el factor de escala determina la evolución del Universo, por consiguiente es importante encontrar las relaciones existentes entre dicha cantidad y demás propiedades, se ilustran a continuación algunas que se destacan como las más importantes aunque es necesario hacer una distinción entre los términos provenientes de la materia, radiación y vacío.

Al asumir que la materia esta en un sistema aislado se conoce por la primera ley de la termodinámica que satisface  $dU = -pdV$ , en U se incluyen términos relativistas. Haciendo uso del teorema de equipartición y derivando la energía interna con respecto al factor de escala se llega a

$$T \propto a^{-2}$$

de la ecuación de gas ideal  $P = NkT$  y teniendo presente  $N = N_o a^{-3}$  se conoce además  $P \propto a^{-5}$ . La presión debida a la materia disminuye bastante con la expansión del Universo, mientras la densidad y la temperatura lo hacen pero de forma menos marcada, otro factor para que el vacío domine la expansión del Universo en la actualidad.

La densidad de energía de radiación es

$$\xi = \sum_{\nu} N(\nu) h\nu$$

donde  $N(\nu)$  es la densidad de fotones y satisface  $N \propto (1+z)^3$ , así que  $\xi \propto \sum_{\nu} C_{\nu} a^{-4}$ . Comparando con la ley de Stefan Boltzmann se concluye  $T \propto a^{-1}$ . La dependencia de la presión de radiación en el factor de escala se halla al recordar que se satisface  $P = \frac{1}{3}\epsilon_{total}$  encontrado que  $P \propto a^{-4}$ .

El vacío satisface  $\epsilon_{total} = \rho c^2$  donde  $\rho$  es una densidad efectiva, reemplazando en la primera ley de la termodinámica y derivando con respecto al factor de escala se obtiene

$$P = -\rho c^2 = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

para su deducción se tuvo en cuenta la constancia de la densidad.

## 2.5. Evolución de las Perturbaciones de Densidad en Régimen Newtoniano

Tal como se mencionó previamente no podemos detectar radiación proveniente de una época previa a la de reionización, a causa de la dispersión Compton que mantenía acopladas la radiación y materia. Aunque si se puede observar la distribución altamente homogénea de la materia a este redshift en la radiación cósmica de fondo (Figura 2.4<sup>1</sup>). Dicha radiación cae en el microondas y da cuenta de variaciones en la densidad de fondo, éstas últimas resultan ser las causantes de la estructura del Universo observada a más pequeñas escalas. Las variaciones en la densidad son fluctuaciones,  $\delta$ , que fueron incrementando en el transcurso del tiempo, al menos las de nuestro interés. Fue hasta que  $\delta \sim 1$  que las fluctuaciones fueron lo suficientemente grandes para ser consideradas objetos individuales, es decir, su movimiento no solo se debía al flujo de Hubble. Lo anterior permite dar una cota superior en redshift a la formación de galaxias, que se encuentra alrededor de  $z \sim 100$ , cuando la densidad promedio de éstas comparada con las de fondo es aproximadamente  $1 \times 10^6$ .

Las fluctuaciones iniciales pueden ser tratadas en un régimen lineal mientras los contrastes en densidad sean  $\delta \ll 1$ , por lo que para  $z < 100$  es una suposición razonable.

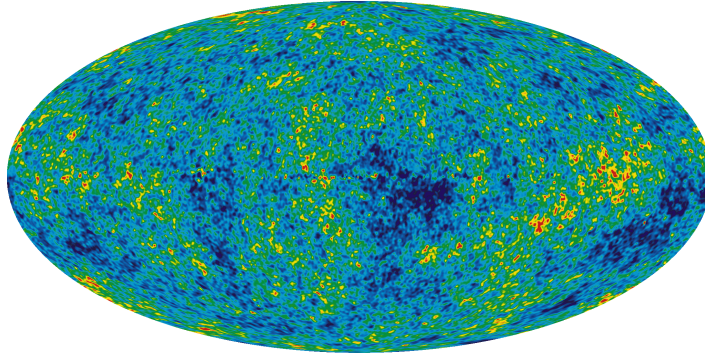


Figura 2.4: Imagen de la radiación cósmica de fondo obtenida por el WMAP, que resulta de una combinación de los 5 mapas obtenidos por dicha sonda.

### 2.5.1. Descripción Newtoniana

Las fluctuaciones de densidad iniciales tienen una longitud característica mucho menor que la distancia de Hubble, la última se define como  $d_H \approx ct$ . En otras palabras, el tamaño de las fluctuaciones es muy pequeño comparada con la escala en la que la curvatura del Universo es significativa, permitiendo que la aproximación newtoniana sea válida.

<sup>1</sup> Imagen WMAP obtenida en [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/m\\_images.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/m_images.cfm)

Por lo tanto, para partículas en movimiento sometidas a un campo gravitacional y cambios de presión se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\rho \nabla_r \cdot \mathbf{u} \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\frac{\nabla_r P}{\rho} - \nabla_r \phi \\ \nabla_r^2 \phi &= 4\pi G \rho\end{aligned}\tag{2.6}$$

Como se busca estudiar las fluctuaciones de densidad es útil expresar la densidad como  $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$ , donde  $\bar{\rho}$  es la densidad de fondo. Adicionalmente es necesario aclarar que la velocidad con la que las partículas se desplazan corresponde a dos contribuciones diferentes, la primera es causada por la expansión del Universo y la otra es la velocidad propia de la partícula. Partiendo de esto, se podría pensar en cambiar el sistema de referencia de las ecuaciones 2.6 tal que se satisfaga una descripción lagrangiana, esto es, moverse con la expansión del Universo. Veamos esto en más detalle, la velocidad en la descripción euleriana está dada por  $\mathbf{u} = a\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}\dot{a} = \mathbf{v} + \mathbf{x}\dot{a}$ , donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad peculiar de la partícula y  $\mathbf{x}\dot{a}$  es la velocidad de expansión del Universo. Luego, haciendo un cambio a coordenadas comóviles (coordenadas que se mueven con la expansión del Universo) y teniendo en cuenta la forma de la densidad se llega al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta}{\partial t} &= -\frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{v}] \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{\nabla P}{a\bar{\rho}(1 + \delta)} \\ \nabla^2 \Phi &= 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta\end{aligned}\tag{2.7}$$

la primera corresponde a la ecuación de continuidad, la segunda es la ecuación de Euler y la última es la ecuación de campo gravitacional poissoniana. La velocidad es entonces debida a interacciones gravitacionales y cambios en la presión y  $\Phi$  es un potencial efectivo. Se puede mostrar adicionalmente que la ecuación de estado que relaciona las cantidades termodinámicas  $P$ ,  $\rho$  y  $s$  (entropía) para dicho fluido está dada por

$$P(\rho, s) = \left[ \frac{h^2}{2\pi(\mu m_p)^{5/3}} e^{-5/3} \right] \rho^{5/3} \exp\left(\frac{2}{3} \frac{\mu m_p s}{k_B}\right)\tag{2.8}$$

Por medio de la manipulación algebraica de la ecuación de continuidad, la ecuación de Poisson incluyendo además la ecuación de estado se haya una ecuación de onda para las fluctuaciones de densidad

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{C_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta + \frac{2}{3} \frac{\bar{T}}{a^2} \nabla^2 s \quad (2.9)$$

donde  $\bar{T}$  es la temperatura del fondo,  $C_s$  es la velocidad del sonido. Al lado derecho se encuentran las fuentes de las fluctuaciones de densidad, como el campo gravitacional, la curvatura dada en términos de la segunda derivada de las perturbaciones y cambios en la entropía del sistema. En el lado izquierdo se encuentra el parámetro de Hubble que responde por la disipación de la fluctuación debido a la expansión del Universo.

Se propone una solución a la ecuación de perturbaciones en términos de la serie de Fourier

$$\begin{aligned} \delta(x, t) &= \sum_k \delta_k(t) e^{ik \cdot x} \\ s(x, t) &= \sum_k s_k(t) e^{ik \cdot x} \end{aligned}$$

otro aspecto a tener presente es la independencia de las funciones  $e^{ik \cdot x}$  lo que permite expresar la ecuación 2.9 como

$$\frac{d^2 \delta_k(t)}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d \delta_k(t)}{dt} = \left[ 4\pi G \bar{\rho} - \frac{C_s^2 k^2}{a^2} \right] \delta_k(t) - \frac{2}{3} \frac{\bar{T}}{a^2} k^2 s_k(t) \quad (2.10)$$

la solución de está ecuación nos da los coeficientes de expansión de la serie de Fourier, obteniendo así el comportamiento de las fluctuaciones de densidad durante el tiempo en que el régimen newtoniano permanece válido.

### 2.5.2. Inestabilidad de Jeans

Antes de resolver la ecuación de modos 2.10 es importante tener cierta intuición sobre los fenómenos físicos que están ocurriendo, esto se puede lograr de forma más sencilla al hacer varias simplificaciones. Consideremos por ejemplo un Universo estático  $\dot{a} = 0$  e isentrópico, de donde la ecuación mencionada se reduce a

$$\frac{d^2 \delta_k(t)}{dt^2} + \omega^2 \delta_k(t) = 0$$

con  $\omega^2 = C_s^2 k^2 / a^2 - 4\pi G \bar{\rho}$ . Claramente la solución de la ecuación de modos para un Universo estático va a depender del signo que tome  $\omega$ , si  $C_s^2 k^2 / a^2 > 4\pi G \bar{\rho}$  entonces  $\omega$  es positivo haciendo que la solución sea oscilatoria, en otras palabras la solución es una onda de sonido que no es inestable gravitacionalmente y por consiguiente no es de nuestro interés. Si se satisface  $4\pi G \bar{\rho} > C_s^2 k^2 / a^2$  la solución toma la forma  $\delta_k(t) \propto e^{\Gamma_k t}$ , con  $\Gamma_k = i\omega_k$  denominada

taza de crecimiento, en este caso la perturbación se puede disipar o contraer dependiendo del signo escogido para la raíz cuadrada de la frecuencia. Físicamente lo que ocurre es que la gravedad tiende a colapsar la fluctuación, aunque el gradiente de presión causado por interacciones atómicas intenta impedir dicho colapso. Ahora, a partir de la frecuencia se puede definir una longitud mínima que deben tener las perturbaciones para que se obtenga una solución inestable, la cual recibe el nombre de longitud de Jeans  $\lambda_J = 2\pi a/k_j$  y satisface  $\lambda_J = 2\pi/k_j = C_s(\pi/G\rho)^{1/2}$ . Al escribir la tasa de crecimiento términos de  $\lambda_J$ , se concluye que si  $\lambda_{pert} \gg \lambda_J$  se satisface la perturbación si colapsa, donde  $\lambda_{pert}$  es la longitud de la perturbación.

Como se mostró la longitud de Jeans depende de la velocidad del sonido que está definida como

$$C_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

y a partir de la ecuación de estado 2.8 podemos encontrar la relación que satisface, teniendo además presente que la temperatura de la radiación es igual al de la materia para  $z \leq z_{eqv}$  debido al acople. Aunque después de la época de recombinación cada componente evoluciona de forma independiente. La longitud de Jeans y la masa de jeans definida como  $M_J = \pi \bar{\rho}_{m,o} \lambda_J^3$  estan dadas entonces por

$$\lambda_J \approx 0,01(\Omega_{b,o}h^2)^{-1/2} Mpc \quad (2.11)$$

$$M_J \approx 1,5 \times 10^5 (\Omega_{b,o}h^2)^{-1/2} M_\odot \quad (2.12)$$

Antes de la época de recombinación la velocidad del sonido era diferente puesto que la presión y densidad deben incluir también la contribución de la radiación, aún más que la de la materia ya que la densidad de radiación dominaba (figura 2.3). La ecuación de estado válida para este rango es  $P = c^2 \rho_r/3$  y se puede mostrar que el cambio en el orden de magnitud entre la longitud y la masa de jeans de antes y después de la época de recombinación evaluada para dicha época es  $2,6 \times 10^{-5}$  y  $1,8 \times 10^{-14}$  respectivamente. De lo anterior se puede concluir que el desacople potenció el colapso gravitacional al disminuir drásticamente la longitud característica mínima requerida para el colapso gravitacional de las perturbaciones.

Hasta el momento no se ha hecho alusión a la materia oscura, una componente de la densidad de materia que contrario a la bariónica no interactúa con la radiación. Pero ésta si interactúa gravitacionalmente con las demás partículas, en especial, al hacerlo con las de su

misma especie se empiezan a crear pozos de potencial gravitacional alrededor de  $z \sim 3500$ . En éstos cae materia bariónica, por lo tanto se crean perturbaciones desde antes del  $z_{rec}$ . Ahora, como la materia bariónica estaba acoplada a la radiación igual esta perturbación que comenzaba a formarse podía ser disipada, por ejemplo, por la “amortiguación” de Silk, fenómeno que consiste en la propagación de fotones en el gas de fotones-materia, por lo que perturbaciones con una longitud menor que el camino libre medio de los fotones eran disipadas. Por lo expuesto, es correcto afirmar que las fluctuaciones se pueden expresar como  $\delta = \delta_o D(z)$ , permitiendo reescribir la ecuación 2.10

$$\frac{d^2 D(z)}{dz^2} + \left[ \frac{H'(z)}{H(z)} - \frac{1}{1+z} \right] \frac{dD}{dz} = \frac{1}{H^2(z)} \left[ \frac{4\pi G \bar{\rho}(z)}{(1+z)^2} \right] D(z)$$

donde se asumió isotropía y se despreció el término que contiene la velocidad porque las perturbaciones que nos interesan satisfacen  $\lambda_J \ll \lambda$ . De la anterior ecuación se pueden encontrar soluciones analíticas como el Universo Einstein de Sitter  $\delta_k(z) = \delta_o(1+z)^{-1}$ , un Universo dominado por radiación  $\delta_k(z) = \delta_o(1+z)^{-1,22}$  y un Universo dominado por vacío  $\delta_k(z) = \delta_o(1+z)^{-0,58}$ . También se pueden encontrar soluciones para diferentes contribuciones de la densidad, en la figura 2.5 se muestra la evolución de las fluctuaciones para un modelo de Universo Masa-Vacío, como es de esperarse para densidades más elevadas de materia las fluctuaciones crecen más rápido, mientras que las que tienen mayor contribución de vacío, a causa de una expansión acelerada del Universo, necesitan una masa inicial mayor para empezar a colapsar. Igualmente se debe tener presente que aunque está gráfica va hasta  $z = 0$  la solución es válida mientras  $\delta \ll 1$ .

### 2.5.3. Espectro de Potencias

Para realizar un estudio del campo de densidad es necesario realizar un tratamiento estadístico que nos permita conocer las propiedades de éste. En esta dirección, se puede asumir que las fluctuaciones  $\delta$  siguen una distribución normal centrada en  $\langle \delta \rangle = 0$ , lo cual es soportado por escenarios inflacionarios que predicen la formación de fluctuaciones como un campo gaussiano. Entonces, la probabilidad de que se tenga un campo de densidad, o dicho en otra forma, la probabilidad de que se tenga una distribución específica de fluctuaciones de densidad en el espacio de fourier está dada por

$$\mathcal{P}(\delta_{\mathbf{\kappa}}) r_{\mathbf{\kappa}} dr_{\mathbf{\kappa}} d\phi_{\mathbf{\kappa}} = \exp \left[ -\frac{r_{\mathbf{\kappa}}^2}{2V_u^{-1}P(\kappa)} \right] \frac{r_{\mathbf{\kappa}}}{V_u^{-1}} \frac{dr_{\mathbf{\kappa}}}{P(\kappa)} \frac{d\phi_{\mathbf{\kappa}}}{2\pi} \quad (2.13)$$

donde los términos dependientes de  $r_{\mathbf{\kappa}}$  corresponden a la amplitud de las perturbaciones y los de  $\phi_{\mathbf{\kappa}}$  a la fase, la última varía aleatoriamente entre  $[0, 2\pi)$ . Esta función de densidad



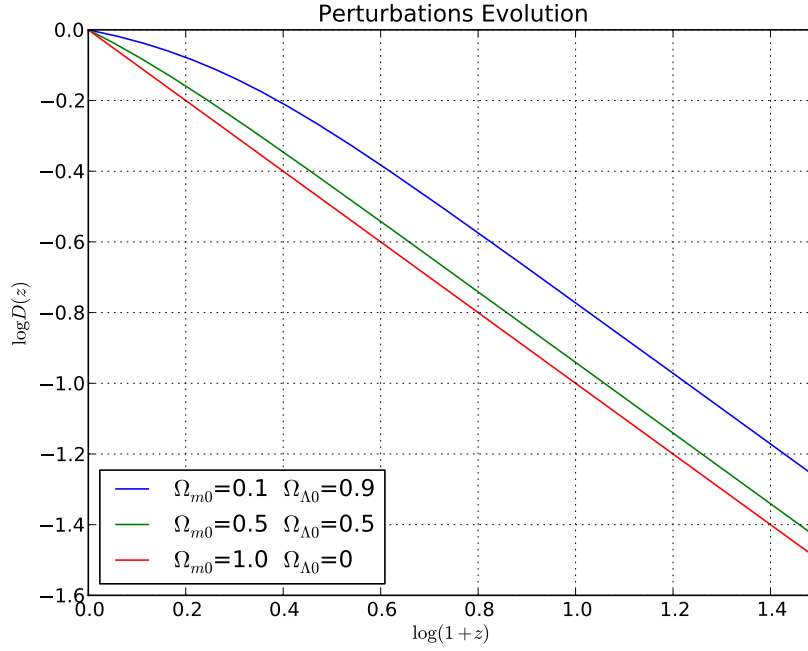


Figura 2.5: Evolución de las perturbaciones para un modelo Masa-Vacío, se muestra el comportamiento para diferentes contribuciones de cada componente.

de probabilidad conjunta es de utilidad porque permite independencia en los términos  $\delta_{\mathbf{\kappa}}$ , es decir que es el producto de cada modo

$$\mathcal{P}_{\mathbf{\kappa}}(\delta_{\mathbf{\kappa}1}, \dots, \delta_{\mathbf{\kappa}N}) = \prod_{\mathbf{\kappa}} \mathcal{P}_{\mathbf{\kappa}}(\delta_{\mathbf{\kappa}})$$

lo que no sucede al aplicar la transformada inversa de fourier ya que la función de probabilidad no es separable en el espacio de coordenadas. El término  $P(\kappa)$  en 2.13 es el espectro de potencias, éste es definido en el espacio de fourier y está relacionada con la función de correlación en el espacio real

$$P(k) = 4\pi \int_0^\infty \mathcal{E}(r) \text{sinc}(kr) r^2 dr = V_u \langle |\delta_{\mathbf{\kappa}}|^2 \rangle$$

$\mathcal{E}(r)$  proporciona la correlación entre dos puntos en el espacio. Adicionalmente se ha encontrado que el espectro de potencias esperado por la teoría inflacionaria es  $P(\kappa) = k^n$ , si  $n$  toma el valor de 1 recibe el nombre de espectro Harrison-Zeldovich, es el que mejor resultados proporciona. La isotropía del Universo es tomada en cuenta para el espectro de potencias puesto que se promedia sobre todas las posibles orientaciones del vector  $\mathbf{\kappa}$ , adicionalmente debe normalizarse con la cantidad  $\sigma_8$  que da cuenta por la amplitud de las fluctuaciones a 8Mpc/h. Cuando el campo se asume como gaussiano se puede mostrar que el espectro de

potencias contiene toda la información del campo, por lo que para calcularlo se encuentra el espectro de potencias, obteniendo la propabilidad de 2.13. Al último se le aplica la transformada inversa obteniendo así la distribución del campo en coordenadas espaciales. Dicho campo de densidad inicial es usado para simulaciones cosmológicas o también puede ser tomado de las observaciones realizadas de la radiación cósmica de fondo.

## 2.6. Colapso No-lineal de las Perturbaciones de Densidad

Tal como se mencionó, después de la época de recombinación las fluctuaciones de densidad empezaron a crecer, pero la aproximación lineal no es válida para todo contraste de densidad, por lo que se hace necesario estudiar el crecimiento de las fluctuaciones cuando  $\delta \sim 1$ . Aunque solo hasta que la densidad de la perturbación alcanza  $\sim 100\bar{\rho}$  es considerada un objeto, dicho en otras palabras, la interacción gravitacional determina su dinámica más que la expansión del flujo de Hubble. El modelo más simple para dar cuenta de dicho fenómeno es el de colapso esférico, el escenario considerado es una fluctuación de densidad que tiene una simetría esférica donde la presión ejercida entre las partículas es despreciable.

A causa de la ausencia de presión, el colapso de la perturbación terminaría formando una singularidad, lo cual no sucede como consecuencia de la presencia de materia oscura y fuerzas de marea. La materia oscura permite la formación de regiones más pequeñas que interactúan causando las fuerzas de marea, las regiones finalmente alcanzan equilibrio dinámico y están sometidas a un gradiente de potencial gravitacional. Este proceso recibe nombre de relajación violenta y cuando la esfera estudiada finalmente satisface el teorema virial, se tiene de la componente de materia oscura un halo dentro del que está embebida una galaxia. Para estudiar dicha formación mediante una simulación cosmológica es necesario hacer uso de modelos semianalíticos puesto que la cantidad de partículas involucradas para dar cuenta de la formación estelar, ratas de supernova, flujos supergalácticos, entre otros, es inviable computacionalmente, por lo que se usan reglas empíricas que respondan por dichos fenómenos. Retomando el modelo de colapso esférico, el tiempo calculado para que se una perturbación colapse está dada por

$$1 + z_c = \frac{1 + z_{max}}{2^{2/3}}$$

donde  $z_{max}$  es el tiempo en el que la perturbación se separó de la expansión del Universo. Se nota que el tiempo de colapso es inferior comparado con el necesario para que la perturbación sea un objeto ligado gravitacionalmente. Adicionalmente el estimativo en redshift para

que la esfera satisfaga el teorema virial es

$$(1 + z_{vir}) \leq 0,47 \left( \frac{v}{100 \text{ km s}^{-1}} \right)^2 \left( \frac{M}{10^{12} M_{\odot}} \right)^{-2/3} (\Omega_o h^2)^{-1/3}$$

de donde se nota que para objetos más masivos y con velocidad mayor de dispersión el tiempo para que esté virilizado es mucho mayor.

### 2.6.1. Aproximación de Zeldovich

El modelo anterior para el tratamiento no lineal de las perturbaciones tiene diversas fallas, la aproximación de Zeldovich aparece como un próximo paso en una descripción más realista, puesto que, a pesar de asumir un fluido sin presión y sin viscosidad considera que la forma de la fluctuación es un elipsoide. Se parte de que la posición las coordenadas comóviles  $a(t)\mathbf{r}$  satisfacen

$$\mathbf{x} = a(t)\mathbf{r} + b(t)\mathbf{p}(\mathbf{r})$$

donde  $\mathbf{r}$  son las coordenadas eulerianas y  $b(t)\mathbf{p}(\mathbf{r})$  responde por el desplazamiento con respecto a la posición inicial y esta relacionado con el potencial gravitacional generado por las fluctuaciones lineales iniciales. Se puede mostrar que las perturbaciones estan dadas por

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{[1 - \alpha b(t)][a(t) - \beta b(t)][a(t) - \gamma b(t)]} a^3(t)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  dan la contracción o expansión a lo largo de los 3 ejes principales del elipsoide. Cuando se satisface  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$  y  $b(t)$  es suficientemente grande aparece una singularidad. Si  $\alpha$  además alcanza su máximo valor, ocasiona que la fluctuación tome una forma de panqueque por una contracción más rápida en el eje x. A pesar de la simplicidad, el modelo es preciso y esta acorde con los resultados numéricos, por lo que usado en cosmología observacional y la construcción de condiciones iniciales en una simulación N cuerpos.

## 2.7. Cosmic density field

### 2.7.1. Correlation functions

### 2.7.2. Mass moments

### 2.7.3. Clustering in the real and redshift space

Redshift distortions

Real space correlation functions

## 2.8. Baryonic acoustic oscillations

#### 3.1. Numerical methods

#### 3.2. Halo selection

##### 3.2.1. Friends of friends

##### 3.2.2. Bound density maximum

#### 3.3. Correlation functions in cosmological simulations

#### 3.4. Power spectrum in cosmological simulations

