课程《控制工程》笔记

NH5

更新于 2025.3.9

1　线性系统的数学描述

通过数学模型描述线性系统. 常见数学模型有: 输入输出描述, 状态空间描述, 图形化描述

1.1　线性系统时域数学模型——微分方程

1.1.1　微分方程描述

线性定常系统的输入输出关系微分方程标准形式:

$$
\begin{aligned}
&c^{(n)}(t) + a_1 c^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} c^{(1)}(t) + a_n c(t) \\
=&b_0 r^{(m)}(t) + b_1 r^{(m-1)}(t) + ... + b_{m-1} r^{(1)}(t) + b_m r(t)
\end{aligned}
$$

$c(t)$ 是输出信号,$r(t)$ 是输入信号

数学模型相同的各种系统成为相似系统, 在相似系统中, 作用相同的变量称为相似变量.

一种系统的研究可以通过相似系统的概念推广到其他系统中, 同样的, 可以用一种易实现的系统代替难实现的系统.

有些方程是非线性微分方程, 可以通过在平衡点用 Talor 级数近似的方式转化成线性方程

1.1.2 单位脉冲响应描述

前述方法是通过基于物理规律等的对系统的分析得到方程的方式, 如分析电路.

有些情况下, 我们对于系统内部结构未知, 可以通过测量输入输出的得到一些数据, 通过这些数据建立方程

系统是线性定常、零初始条件 ($t = 0$ 时系统响应及各阶导数为 0). 则有

$$H : r(t) \to c(t), c(t) = H[r(t)]$$

单位脉冲函数:

$$r(t) = \begin{cases} \frac{A}{\varepsilon}, & 0 < t < \varepsilon \\ 0, & t < 0, t > \varepsilon \end{cases}$$

当 $A = 1, \varepsilon \to 0$, 称为单位脉冲函数 $\delta(t)$

单位脉冲响应:

零初始条件下,LTI 系统在 $\delta(t)$ 作用下输出:

$$g(t) = H[\delta(t)]$$

零初始条件下,LTI 系统在不同输入信号作用下的输出:

$$A_1\delta(t - \tau_1) + A_2\delta(t - \tau_2) = A_1g(t - \tau_1) + A_2g(t - \tau_2)$$

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} r(\tau)\delta(t - \tau)\varepsilon = \sum_{\tau=0}^{\infty} r(\tau)g(t - \tau)\varepsilon$$

对于一段连续输入信号有:

$$c(t) = \int_0^t g(t - \tau)r(\tau)d\tau$$

$$c(t) = \int_0^t g(\tau)r(t - \tau)d\tau$$

1.2 传递函数

1.2.1 传递函数的定义和性质

Laplace 变换:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

设 $C(s)=L[c(t)], R(s)=L[r(t)]$, 且满足如下零初始条件:

$$c(0)=c^{(1)}(0)=...=c^{(n-1)}(0)=0$$
$$r(0)=r^{(1)}(0)=...=r^{(m-1)}(0)=0$$

可得

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\sum_0^m b_k s^{m-k}}{\sum_0^n a_k s^{n-k}}=\frac{M(s)}{N(s)}$$

$M(s), N(s)$ 分别被称为传递函数 $G(s)$ 的分子多项式与分母多项式

传递函数的特征方程是 $N(s)=0$, 特征根是特征方程的解, 传递函数零点是 $M(s)=0$ 的解, 传递函数的极点是特征根

1.2.2 几种典型模型

一、比例环节/放大环节

$$c(t)=Kr(t), G(s)=K$$

K 为增益

特点: 输入输出量成比例, 无失真和时间延迟

实例: 电子放大器, 齿轮, 电阻 (电位器), 感应式变送器等

二、惯性环节

$$Tc'(t)+c(t)=Kr(t), G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

其中为 T 时间常数,K 为比例系数

特点: 含一个独立的储能元件, 对突变的输入, 其输出不能立即复现, 输出无振荡

实例: 直流伺服电动机的励磁回路、RC 电路

三、纯微分环节

$$c(t)=Tr'(t), G(s)=Ts$$

特点: 输出量正比输入量变化的速度, 能预示输入信号的变化趋势

实例: 实际中没有纯粹的微分环节, 它总是与其他环节并存的. 实际中可实现的微分环节都具有一定的惯性, 其传递函数如下

$$G(s)=\frac{Ts}{Ts+1}$$

四、积分环节

$$c(t) = K\int r(t)dt, G(s) = \frac{K}{s}$$

特点: 输出量与输入量的积分成正比例, 当输入消失, 输出具有记忆功能; 具有明显的滞后作用; 可以改善稳态性能

实例: 电动机角速度与角度间的传递函数、电容充电、模拟计算机中的积分器等

五、二阶震荡环节

$$T^2c''(t) + 2\zeta Tc'(t) + c(t) = r(t), 0 \leq \zeta < 1$$
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, 0 \leq \zeta < 1$$

其中 $\omega_n = \frac{1}{T}$,ζ 称为振荡环节的阻尼比,T 为时间常数, 为系统的自然振荡角频率 (无阻尼自振角频率)

特点: 环节中有两个独立的储能元件, 可进行能量交换, 输出有振荡

实例:RLC 电路传递函数, 机械弹簧阻尼系统的传递函数

六、纯时延环节

$$c(t) = r(t - \tau), G(s) = e^{-\tau s}$$

τ 称为该环节的延迟时间

特点: 输出量能准确复现输入量, 但要延迟一固定的时间间隔 τ

实例: 管道压力、流量等物理量的控制, 其数学模型就包含有延迟环节

1.3 结构图

根据不同功能, 可将系统划分为若干环节或子系统, 每个子系统的功能用一个单向性的函数方块来表示

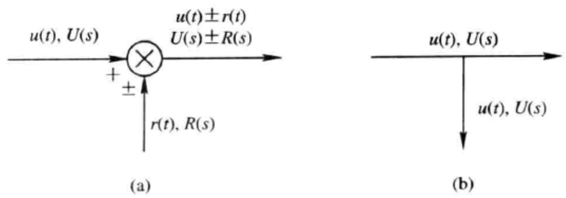
方块中填写表示这个子系统的传递函数, 输入量加到方块上, 那么输出量就是传递结果

根据系统中信息的传递方向, 将各个子系统的函数方块用信号线顺次连接起来, 就构成了系统的结构图, 又称系统的方块图

如下图所示

对于闭环系统, 需引入两个新符号, 分别称为相加点 (比较点、综合点) 和分支点 (引出点、测量点). 相加点是系统的比较元件, 表示两个以上信号的代数运算. 箭头指向的信号流线表示它的输入信号, 箭头离开它的信号流线表示它的输出信号; 附近的 +、− 号表示信号之间的运算关系是相加还是相减

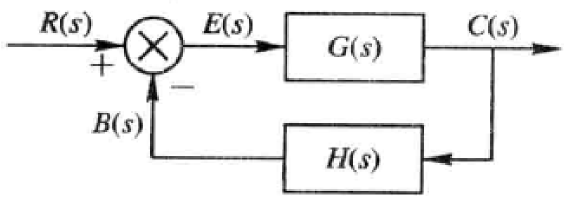
如下图, 相加点如 (a), 分支点如 (b)



1.3.1 闭环系统结构图

一、无扰动作用的闭环系统

基本结构如下图



其中 $E(s)$,$B(s)$ 分别为偏差信号和反馈信号的 Laplace 变换, $H(s)$ 为闭环系统中的反馈传递函数

系统中存在如下关系:

$$C(s) = G(s)E(s)$$
$$E(s) = R(s) - B(s)$$
$$B(s) = H(s)C(s)$$

开环传递函数为反馈信号与偏差信号之比, 前向传递函数为输出量和偏差信号之比

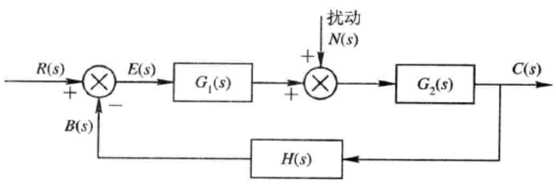
如果反馈传递函数等于 1, 那么开环传递函数和前向传递函数相同, 称这时的闭环反馈系统为单位反馈系统

闭环传递函数为系统输出量和输入量之间的关系

易得

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

二、有扰动作用的闭环系统如下基本结构



系统对扰动 $N(s)$ 的响应 $C_N(s)$ 为

$$C_N(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

系统对参考输入量 $R(s)$ 的响应 $C_R(s)$ 为

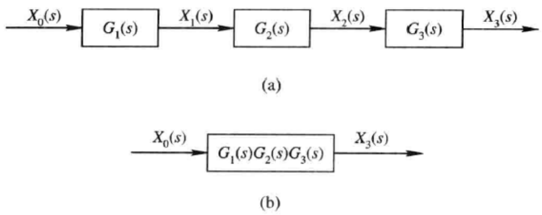
$$C_R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)$$

参考输入量 $R(s)$ 和扰动量 $N(s)$ 同时作用于系统时，系统的响应 $C(s)$ 为

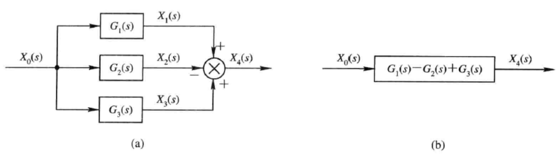
$$C(s) = C_N(s) + C_R(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\left[G_1(s)R(s) + N(s)\right]$$

1.3.2 结构图的化简

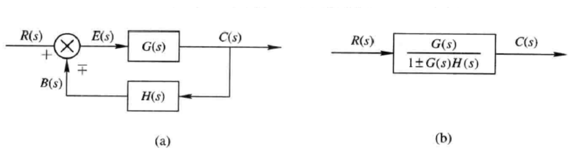
串联的简化: 传递函数相乘



并联的简化: 传递函数加减

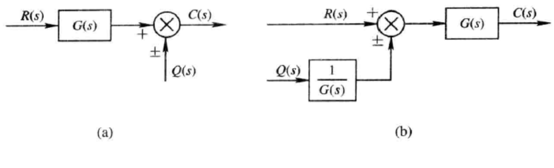


反馈回路的简化:

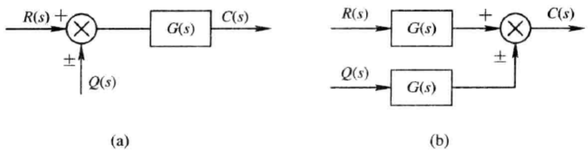


$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

相加点的前后移动: 乘法分配律



$$C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s) = [R(s) \pm \frac{Q(s)}{G(s)}]G(s)$$



$$C(s) = [R(s) \pm Q(s)]G(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)G(s)$$