数学大作业

宋和德

2022 年 8 月 15 日

第一部分　选择题

1.C 2.B 3.A 4.A 5.D

第二部分　计算题

1

将$f(x)$进行偶延拓可得：$b_n=0$，计算傅里叶系数得：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}x=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n=2k+1\end{cases}\tag{1}$$

由(1)可得：

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\cos(2k+1)x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\cos(2k+1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots+\frac{\cos(2k+1)x}{n^2}+\cdots)$$

2

对x求导得：

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \\ 2x+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{z} \end{cases}$$

在点$M(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}})$处切向量$\vec{T}=(1,-1,-1)$

切线方程：

$$\frac{x-\frac{R}{\sqrt{2}}}{2R^2}=-\frac{y-\frac{R}{\sqrt{2}}}{2R^2}=-\frac{z-\frac{R}{\sqrt{2}}}{2R^2}$$

法平面方程：

$$x-y-z=-\frac{R}{\sqrt{2}}$$

3

由一元函数泰勒展开式得：

$$\sin(x+y)=(x+y)-\frac{(x+y)^3}{3!}+o(x+y)^3;$$

4

易知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$$

取$x_n=\frac{1}{n}\in(0,1)$，则有：

$$\beta_n\geq|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{1}{2}\geq\varepsilon$$

故$f_n(x)$在$(0,1)$上不一致收敛。

5

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(\frac{\partial z}{\partial y} + x) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'x}{1-f'}$$

同理可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'x}{1-f'}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{f'x}{1-f'}) = \frac{(1-f')[f' + xf''(y+\frac{\partial z}{\partial y})] + f'f''x(y+\frac{\partial z}{\partial x})}{(1-f')^2}$$

将$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$代入并化简得：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{f'(1-f')^2 + f''xy}{(1-f')^3}$$

第三部分　证明不等式

当$x = y = 0$时，不等式显然成立。当$x > 0, y > 0$时，设$x + y = a > 0$; 问题转化为求$f(x,y) = \frac{x^n + y^n}{2}$在约束条件$x + y = a$下的最值。
构造Lagrange函数：

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) - \lambda(x + y - a)$$

求解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{n}{2}x^{n-1} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{n}{2}y^{n-1} + \lambda = 0 \\ x + y = a \end{cases}$$

得唯一极值点$P(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, 验算得$P$点Hessian矩阵$H(P)$为正定矩阵，故$P$点为极小值点。将$P$点函数值与边界点$(0,a), (a,0)$函数值比较得：

$$f(x,y) \geq f(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = f(0,a) = f(a,0) = (\frac{a}{2})^n = (\frac{x+y}{2})^n$$

即证得：

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq (\frac{x+y}{2})^n \qquad (x > 0, y > 0)$$

第四部分　证明题

记
$$u_n(x)=\frac{\ln(1+nx)}{n^3}$$
则
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

$$u_n'(x)=\frac{1}{n^2(1+nx)}$$
显然$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$x\in(0,1)$一致收敛
注意到：
$$f(x)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n^3}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
故$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$x\in(0,1)$收敛；由函数项级数的逐项可导定理，在$x\in(0,1)$　$f(x)$一致收敛到一个可导函数$f'(x)$

第五部分

(1)因为：
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$
所以$f(x,y)$在$(0,0)$点连续。

(2)
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3}=1$$
由x与y的轮换对称性可得
$$f_y(0,0)=1$$
接下来考察极限
$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

的存在性及其值。

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}-\frac{\Delta x(\Delta y)^2+\Delta y(\Delta x)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0),y=kx}\frac{k^2+k}{(k^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

故极限不存在，所以$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微。由于函数在$(0,0)$不可微，故至少有一个偏导数在$(0,0)$不连续；又由x与y的轮换对称性，$f_x(x,y),f_y(x,y)$在$(0,0)$都不连续

(3)方向$(1,1)$的单位向量$\vec{n}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$故沿其方向的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(0+\frac{\sqrt{2}}{2}t,0+\frac{\sqrt{2}}{2}t)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\sqrt{2}t^3}{2}}{t^3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

第六部分

由Cauchy-Hadamard公式，收敛半径

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n(n-1)|}}=1$$

当$x=-1$时，原级数为Leibniz级数，收敛；$x=1$时，由裂项相消求和易得级数收敛。故收敛域$x\in[-1,1]$
记和函数：

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

则：

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\qquad x\in[-1,1)$$

所以：

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=(1-x)\ln(1-x)+x\qquad x\in[-1,1)$$

所以：

$$f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$$

$x=1$时，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{(n+1)}=1$$

综上所述：

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x; & x\in[-1,1)\\ 1; & x=1\end{cases}$$

第七部分

(1)注意到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin x}{\sqrt{n+x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n-\frac{1}{2})x-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sqrt{n+x}}$$

而$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$单调一致收敛于0;

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\cos(n-\frac{1}{2})x-\cos(n+\frac{1}{2})x]=\cos\frac{1}{2}x-\cos(n+\frac{1}{2})x$$

一致有界, 由Dirichlet判别法可知级数在$x\in(0,\pi)$上收敛。
又因为

$$|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin x}{\sqrt{n+x}}|\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx|\sin x|}{\sqrt{n+x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos 2nx)|\sin x|}{2\sqrt{n+x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n+x}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx|\sin x|}{2\sqrt{n+x}}$$

第一个级数发散，第二个级数收敛，故原级数发散。
综上所述：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin x}{\sqrt{n+x}}$$

条件收敛。

(2)由(1)可得原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin x}{\sqrt{n+x}}$$

在$x \in (0,\pi)$上内闭一致收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt{n+x}}$$

在$x \in (0,\pi)$上连续。