Times New Roman Bold Italic

绝密★启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

本试卷共4页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。在试卷上作答无效。
3. 非选择题必须使用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合$M=\{x\mid \sqrt{x}<4\}, N=\{x\mid 3x\geqslant 1\}$, 则 $M\cap N=$

tsk[A]. $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$　　tsk[A]. $\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x<2\}$　　tsk[A]. $\{x\mid 3\leqslant x<16\}$　　tsk[A]. $\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x<16\}$

2. 若$\mathrm{i}(1-z)=1$, 则 $z+\bar{z}=$

tsk[A]. -2　　tsk[A]. -1　　tsk[A]. 1　　tsk[A]. 2

3. 在$\triangle ABC$中，点D在边AB上，$BD=2DA$. 记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则$\overrightarrow{CB}=$

tsk[A]. $3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　tsk[A]. $-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　　tsk[A]. $3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　tsk[A]. $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔148.5m时，相应水面的面积为140.0km^2；水位为海拔157.5m时，相应水面的面积为180.0km^2.将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔148.5m上升到157.5m时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）

tsk[A]. $1.0\times 10^9\mathrm{m}^3$　　tsk[A]. $1.2\times 10^9\mathrm{m}^3$　　tsk[A]. $1.4\times 10^9\mathrm{m}^3$　　tsk[A]. $1.6\times 10^9\mathrm{m}^3$

5. 从2至8的7个整数中随机取2个不同的数，则这两个数互质的概率为

tsk[A]. $\frac{1}{6}$　　tsk[A]. $\frac{1}{3}$　　tsk[A]. $\frac{1}{2}$　　tsk[A]. $\frac{2}{3}$

6. 记函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$的最小正周期为$T$. 若$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且$y=f(x)$的图像关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$中心对称，则$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的。全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分。

9. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则

tsk[A]. 直线BC_1与DA_1所成的角为90°　　tsk[A]. 直线BC_1与CA_1所成的角为90°

tsk[A]. 直线BC_1与平面BB_1D_1D所成的角为45°　　tsk[A]. 直线BC_1与平面$ABCD$所成的角为45°

10. 已知函数$f(x)=x^3-x+1$，则

tsk[A]. $f(x)$有两个极值点　　tsk[A]. $f(x)$有三个零点

tsk[A]. 点$(0,1)$是曲线$y=f(x)$的对称中心　　tsk[A]. 直线$y=2x$是曲线$y=f(x)$的切线

11. 已知O为坐标原点，点$(1,1)$在抛物线$C:x^2=2py(p>0)$上，过点$B(0,-1)$的直线交C于P，Q两点，则

tsk[A]. C的准线为$y=-1$　　tsk[A]. 直线AB与C相切

tsk[A]. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　　tsk[A]. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

12. 已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，记$g(x)=f'(x)$. 若$f(\frac{3}{2}-2x)$，$g(2+x)$均为偶函数，则

tsk[A]. $f(0)=0$　　tsk[A]. $g(-\frac{1}{2})=0$　　tsk[A]. $f(-1)=f(-4)$　　tsk[A]. $g(-1)=g(2)$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $(1-\frac{y}{x})(x+y)^8$的展开式中x^2y^6的系数为__▲__（用数字作答）.

14. 写出与圆$x^2+y^2=1$和$(x-3)^2+(y-4)^2=16$都相切的一条直线的方程__▲__.

15. 若曲线$y=(x+a)e^x$有两条过坐标原点的切线，则a的取值范围是__▲__.

16. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$的上顶点为$A$，两个焦点为$F_1$，$F_2$，离心率为$\frac{1}{2}$. 过点$F_1$且垂直于$AF_2$的直线与$C$交于$D$，$E$两点，$|DE|=6$，则$\triangle ADE$的周长是__▲__.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$，$\{\frac{S_n}{a_n}\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列.

（1）　求$\{a_n\}$的通项公式；

（2） 证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

18. (12分)

记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

（1） 若$C=\frac{2\pi}{3}$，求B；

（2） 求$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

19. (12分)

如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为4，△A_1BC的面积为$2\sqrt{2}$.

19titu.png

（1） 求A到平面A_1BC的距离；

（2） 设D为A_1C的中点，$AA_1=AB$，平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1，求二面角$A-BD-C$的正弦值.

20. (12分)

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了100例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

（1） 能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2） 从该地的人群中任选一人，A表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B表示事件“选到的人患有该疾病”，$\frac{P(B\mid A)}{P(\overline{B}\mid A)}$与$\frac{P(B\mid \overline{A})}{P(\overline{B}\mid \overline{A})}$的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为R.

（i） 证明：$R=\frac{P(A\mid B)}{P(\overline{A}\mid B)}\cdot\frac{P(\overline{A}\mid \overline{B})}{P(A\mid \overline{B})}$；

（ii） 利用该调查数据，给出$P(A\mid B)$，$P(A\mid \overline{B})$的估计值，并利用（i）的结果给出R的估计值.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P\left(K^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. (12分)

已知点$A(2,1)$在双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，直线$l$交$C$于$P$，$Q$两点，直线$AP$，$AQ$的斜率之和为0.

（1） 求l的斜率；

（2） 若$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求△PAQ的面积.

22. (12分)

已知函数$f(x)=e^x-ax$和$g(x)=ax-\ln x$有相同的最小值.

（1） 求a；

（2） 证明：存在直线$y=b$，其与两条曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.