同构在导数中的应用

宋和德 整理

2022 年 6 月 19 日

摘要

在导数的一些题目中，常常会遇到双变量的不等式证明或者双变量不等式恒成立求参数范围问题。同构是一种通过变形将两个变量分开并构造相同结构从而将问题简化为单变量函数单调性问题的转化思想。本文整理了常用的一些同构技巧，并在文末附有相应的习题加以巩固。

预备知识

$$xe^x = e^{\ln x}e^x = e^{x+\ln x} \qquad \frac{x}{e^x} = e^{\ln x - x} \qquad \frac{e^x}{x} = e^{x-\ln x}$$

$$x + \ln x = \ln e^x + \ln x = \ln xe^x \qquad x - \ln x = \ln \frac{e^x}{x}$$

1 抽象函数

注意到变形时的变号问题，以下都默认$x_1 > x_2$

(1)

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > k$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > k(x_1 - x_2) \Rightarrow f(x_1) - kx_1 > f(x_2) - x_2$$

令$h(x) = f(x) - kx$，问题转化为研究$h(x)$单调性。

(2)

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > \frac{k}{x_1x_2}$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > \frac{k(x_2 - x_1)}{x_1x_2} = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} \Rightarrow f(x_1) + \frac{k}{x_1} > f(x_2) + \frac{k}{x_2}$$

令$h(x)=f(x)+\frac{k}{x}$，问题转化为研究$h(x)$单调性。

2 指对结构

指对跨阶想同构，同左同右取对数。

(1)积型

$$ae^a \le b\ln b \Rightarrow \begin{cases} \text{同左：} ae^a \le (\ln b)e^{\ln b} \Rightarrow f(x)=xe^x; \\ \text{同右：} e^a \ln e^a \le b\ln b \Rightarrow f(x)=x\ln x; \\ \text{取对：} a+\ln a \le \ln b+\ln(\ln b) \Rightarrow f(x)=x+\ln x. \end{cases} \tag{1}$$

需要指出的是，取对数是最快的方法，因为其构造的函数单调性一看便知。

(2)商型

$$\frac{e^a}{a} \le \frac{b}{\ln b} \Rightarrow \begin{cases} \text{同左：} \frac{e^a}{a} \le \frac{e^{\ln b}}{\ln b} \Rightarrow f(x)=\frac{e^x}{x}; \\ \text{同右：} \frac{e^a}{\ln e^a} \le \frac{b}{\ln b} \Rightarrow f(x)=\frac{x}{\ln x}; \\ \text{取对：} a-\ln a \le \ln b-\ln(\ln b) \Rightarrow f(x)=x-\ln x. \end{cases} \tag{2}$$

(3)和差型

$$\Longrightarrow \tag{3}$$