ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

ЛЕКЦИЯ 1. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Торгаев Станислав Николаевич

ЛЕКЦИЯ 1. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Структура лекции

- Форматы чисел
- Перевод десятичного числа в другую систему счисления
- Знаковые двоичные числа
- Числа с фиксированной точкой
- Числа с плавающей точкой
- Арифметика чисел с плавающей точкой

ФОРМАТЫ ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

В позиционных системах счисления числовое значение цифры зависит от ее местоположения или позиции в последовательности символов.

Десятичная	• 525 • 65000
Двоичная	• 10 000 1011 • 1111 1101 1110 1000
Шестнадцатеричная	• 20D • FDE8

ФОРМАТЫ ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

В любой позиционной системе счисления число записывается как некоторая последовательностью цифр:

$$x = a_{n-1}a_{n-2}\ldots\ldots a_1 a_0$$

$$0 \le a_k \le b - 1$$

b – основание системы счисления

ФОРМАТЫ ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

$$x = a_{n-1}a_{n-2}.....a_1a_0$$

Если основание системы больше b>10, то вводятся специальные символы. Например, значение чисел ***a*** (больше 10) в шестнадцатеричной системе будут записываться:

$$A \to 10$$
$$B \to 11$$
$$C \to 12$$
$$D \to 13$$
$$E \to 14$$
$$F \to 15$$

ФОРМАТЫ ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Пример записи чисел в различных системах счисления:

ФОРМАТЫ ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

- Вся микропроцессорная техника оперирует с числами, представленными в двоичных кодах.
- При написании программного кода пользователь, как правило, вправе использовать числа в любой системе счисления.
- Независимо от изображения чисел и цифр в программе пользователя, микропроцессор всегда преобразует их в последовательность двоичных цифр: **0** и **1**

ФОРМАТЫ ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Типы данных в микропроцессорной технике	
	Один бит (*bit*): **0** и **1**
	n бит: 2^n чисел
	Тетрада: комбинация 4 бит
	Байт (*byte*): комбинация 8 бит
	Слово (*word*): комбинация 8, 16, 32 или 64 бит
	Килобайт: 1КБ = 2^{10} байт
	Мегабайт: 1МБ = 2^{20} байт
	Гигабайт: 1ГБ = 2^{30} байт

ФОРМАТЫ ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Структура байта:

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

- Для перевода целого десятичного числа ***x*** в систему счисления с основанием ***b*** необходимо последовательно делить исходное число ***x*** и образующиеся частные на основание ***b***.
- Деление необходимо выполнять до момента получения частного равного нулю.
- Искомое представление числа записывается как последовательность остатков от деления.
- При этом первый остаток дает младшую цифру искомого числа, т.е. запись остатков от деления осуществляется справа налево.

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Перевод числа 23 в двоичную систему

$$23 / 2 = 11 (остаток\ 1)$$

$$11 / 2 = 5 (остаток\ 1)$$

$$5 / 2 = 2 (остаток\ 1)$$

$$2 / 2 = 1 (остаток\ 0)$$

$$1 / 2 = 0 (остаток\ 1)$$

$$23_{10} = 0001\ 0111_2$$

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Перевод числа 125 в двоичную систему

$$125 / 2 = 62 (остаток\ 1)$$
$$62 / 2 = 31 (остаток\ 0)$$
$$31 / 2 = 15 (остаток\ 1)$$
$$15 / 2 = 7 (остаток\ 1)$$
$$7 / 2 = 3 (остаток\ 1)$$
$$3 / 2 = 1 (остаток\ 1)$$
$$1 / 2 = 0 (остаток\ 1)$$
$$125_{10} = 0111\ 1101_2$$

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Перевод числа 125 в шестнадцатеричную систему

$$125 / 16 = 7 (остаток\, 13)$$

$$7 / 16 = 0 (остаток\, 7)$$

$$125_{10} = 7D_{16}$$

Перевод числа 2250 в шестнадцатеричную систему

$$2250 / 16 = 140 (остаток\, 10)$$

$$140 / 16 = 8 (остаток\, 12)$$

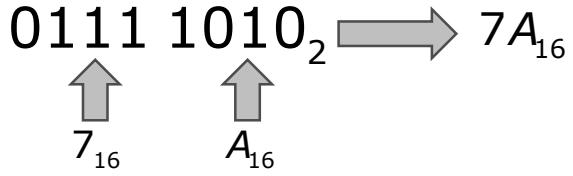
$$8 / 16 = 0 (остаток\, 8)$$

$$2250_{10} = 8CA_{16}$$

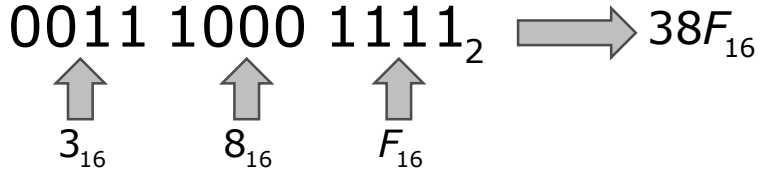
ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Перевод числа $0111\ 1010_2$ в шестнадцатеричную систему



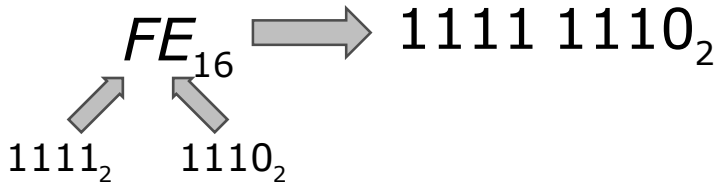
Перевод числа $0011\ 1001\ 1111_2$ в шестнадцатеричную систему



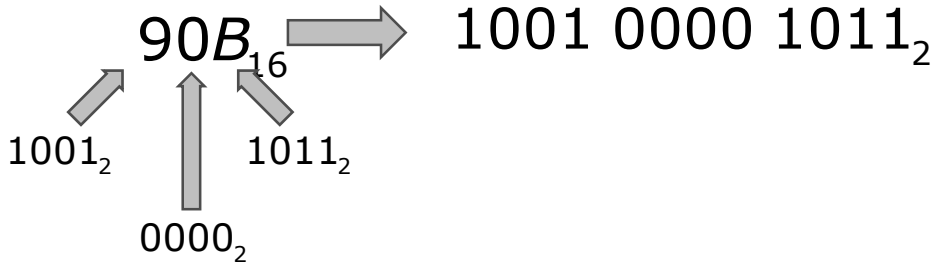
ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Перевод числа FE_{16} в двоичную систему

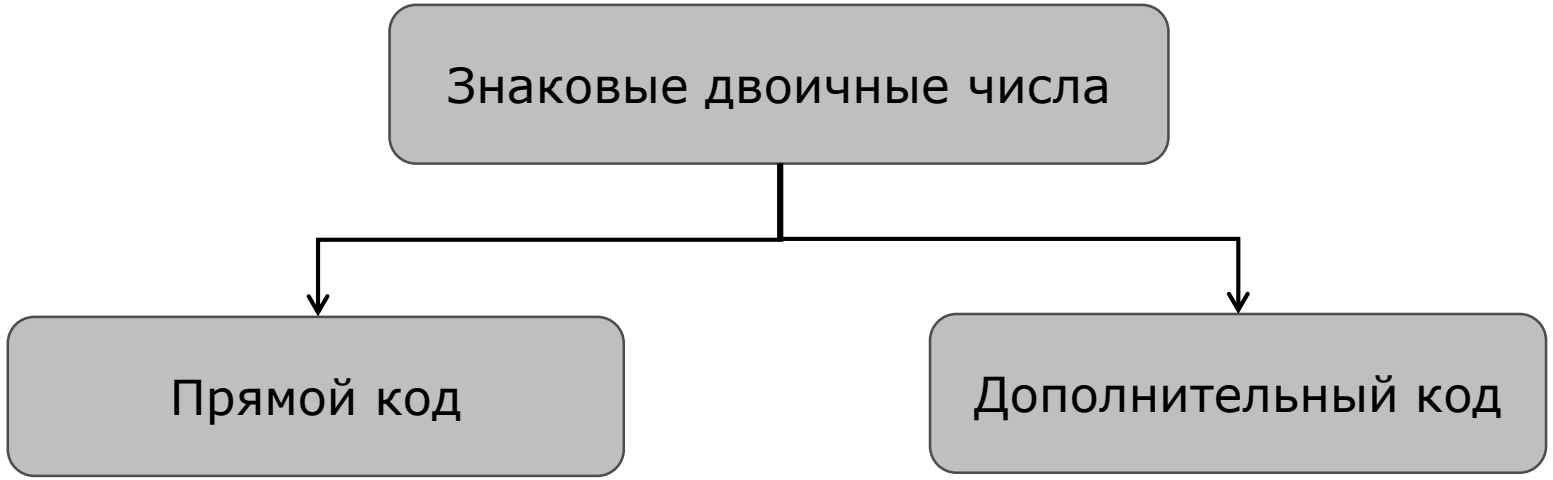


Перевод числа $90B_{16}$ в шестнадцатеричную систему



ЗНАКОВЫЕ ДВОИЧНЫЕ ЧИСЛА

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ



ЗНАКОВЫЕ ДВОИЧНЫЕ ЧИСЛА

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

ПРЯМОЙ КОД

В прямой кодировке старший разряд используется как знаковый разряд, а оставшиеся младшие разряды используются для обозначения модуля числа.

Бит знака:
0 – положительное число
1 – отрицательное число

Максимальное число - $01111111=127_{10}$
Минимальное число - $11111111=-127_{10}$

ПРИМЕРЫ :

$0001\ 0111_2 = 23_{10}$

$1001\ 0111_2 = 175_{10}$ – *беззнаковое*

$1001\ 0111_2 = -23_{10}$ – *знаковое*

ЗНАКОВЫЕ ДВОИЧНЫЕ ЧИСЛА

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОД

В дополнительном коде кодировка положительных чисел совпадает с прямой кодировкой.

Кодировка отрицательных чисел осуществляется по алгоритму:

ЗНАКОВЫЕ ДВОИЧНЫЕ ЧИСЛА

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОД

Пример записи числа -23 в дополнительном коде

$$0001\ 0111_2 = 23_{10}$$

Инверсия $-1110\ 1000_2$

Прибавление $1 - 1110\ 1001_2 = -23_{10}$

$1110\ 1001_2 = 233_{10}$ – *беззнаковое*

$1110\ 1001_2 = -23_{10}$ – *знаковое*

ЗНАКОВЫЕ ДВОИЧНЫЕ ЧИСЛА

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОД

Пример записи числа -1 в дополнительном коде

$$0000\ 0001_2 = 1_{10}$$

Инверсия $-1111\ 1110_2$

Прибавление $1 - 1111\ 1111_2 = -1_{10}$

$1111\ 1111_2 = 255_{10}$ – *беззнаковое*

$1111\ 1111_2 = -1_{10}$ – *знаковое*

ЗНАКОВЫЕ ДВОИЧНЫЕ ЧИСЛА

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОД

Пример записи числа -255 в дополнительном коде

$$1111\ 1111_2 = 255_{10}$$

Инверсия $- 0000\ 0000_2$

Прибавление $1 - 0000\ 0001_2 = -255_{10}$

$0000\ 0001_2 = 1_{10}$ – *беззнаковое*

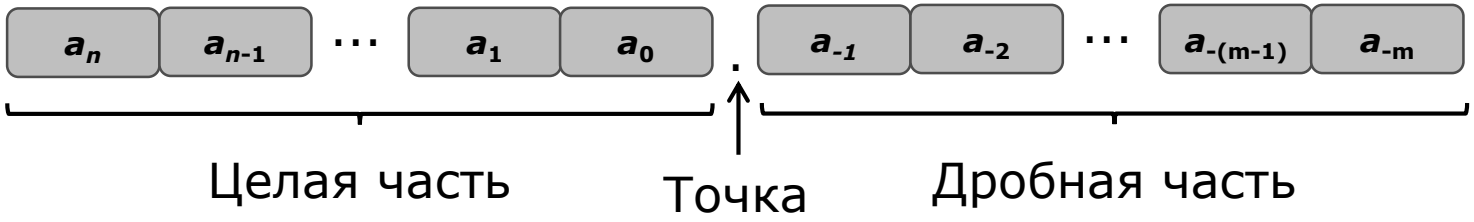
$0000\ 0001_2 = -255_{10}$ – *знаковое*

ЧИСЛА С ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Запись дробной части числа ***x*** в позиционной системе счисления с основанием ***b*** с фиксированной точкой основывается на представлении этого числа в виде:

$$a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + a_{-3}b^{-3} + \ldots + a_{-m}b^{-m}$$



При этом число в десятичной системе будет записываться как:

$$x = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + \ldots + a_{-m}b^{-m}$$

ЧИСЛА С ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Для перевода дробной части чисел из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием ***b*** необходимо использовать следующий алгоритм:

1	Дробная часть умножается на основание системы счисления ***b***, после чего отбрасывается целая часть результата умножения.
2	Полученная дробная часть снова умножается на ***b***.
3	Процедура умножения продолжается до тех пор, пока дробная часть не станет равной нулю.
4	Далее в двоичное число после запятой выписываются целые части результатов умножения в порядке их получения (слева направо). Причем, если целая часть равно 0, то выписываем “0”, а если равна 1, то выписываем “1”.
5	Результатом может быть либо конечная, либо периодическая дробь. В случае, если дробь является периодической, необходимо обрывать умножение на каком-либо шаге. В данном случае полученное число в двоичном коде будет иметь некоторую погрешность, величина которой зависит от количества сделанных процедур умножения.

ЧИСЛА С ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Пример записи в двоичном коде с фиксированной точкой числа 521.4375

Целая часть

$521 / 2 = 260\,(\textit{остаток}\ 1)$

$260 / 2 = 130\,(\textit{остаток}\ 0)$

$130 / 2 = 65\,(\textit{остаток}\ 0)$

$65 / 2 = 32\,(\textit{остаток}\ 1)$

$32 / 2 = 16\,(\textit{остаток}\ 0)$

$16 / 2 = 8\,(\textit{остаток}\ 0)$

$8 / 2 = 4\,(\textit{остаток}\ 0)$

$4 / 2 = 2\,(\textit{остаток}\ 0)$

$2 / 2 = 1\,(\textit{остаток}\ 0)$

$1 / 2 = 0\,(\textit{остаток}\ 1)$

$521_{10} = 10\ 0000\ 1001_2$

Дробная часть

$0.4375 \cdot 2 = 0.875$ *записываем* 0

$0.875 \cdot 2 = 1.75$ *записываем* 1

$0.75 \cdot 2 = 1.5$ *записываем* 1

$0.5 \cdot 2 = 1$ *записываем* 1

$.4375_{10} = .0111_2$

Полная запись числа 521.4375 в двоичном коде :

$$0010\ 0000\ 1001.0111_2 = 209.7_{16}$$

Проверка результата:

$$0010\ 0000\ 1001.0111_2 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} =$$
$$= 512 + 8 + 1 + 0.25 + 0.125 + 0.0625 = 521.4375$$

ЧИСЛА С ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Пример записи в двоичном коде с фиксированной точкой числа 1.94

Целая часть

$1 / 2 = 0\,(\textit{остаток}\ 1)$

$1_{10} = 0001_2$

Дробная часть

$0.94 \cdot 2 = 1.88$ *записываем* 1
$0.88 \cdot 2 = 1.76$ *записываем* 1
$0.76 \cdot 2 = 1.52$ *записываем* 1
$0.52 \cdot 2 = 1.04$ *записываем* 1
$0.04 \cdot 2 = 0.08$ *записываем* 0
$0.08 \cdot 2 = 0.16$ *записываем* 0
и т.д.
$.94_{10} = .111100_2$

Полная запись числа 1.94 в двоичном коде :

$$1.94_{10} = 0001.1111_2 = 1.F_{16}$$

Проверка результата:

$$0001.1111_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} =$$
$$= 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625 = 1.9375$$

ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

В десятичной арифметике для записи таких чисел используется алгебраическая форма.
При этом число записывается в виде мантиссы, умноженной на 10 в степени, отображающей порядок числа:

$$0.2 \cdot 10^{25} \text{ или } 0.16 \cdot 10^{-30}$$

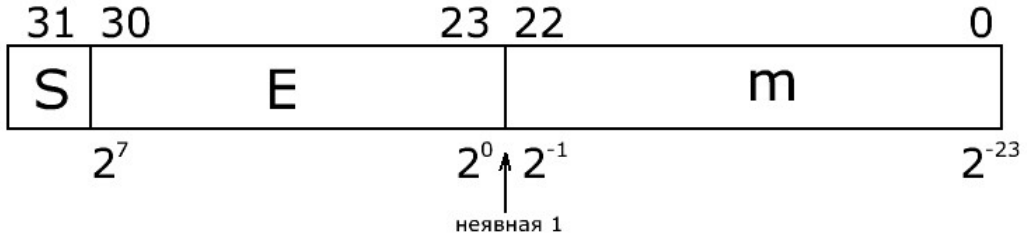
- Тип числа ***float*** – число с плавающей точкой одинарной точности.
- Тип числа ***double*** – число с плавающей точкой двойной точности.

ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

FLOAT

Для записи числа с плавающей точкой одинарной точности требуется **32**-битовое слово.



S – sign
E – exponent
m - mantissa

DOUBLE

Для записи числа с плавающей точкой двойной точности требуется **64**-битовое слово.

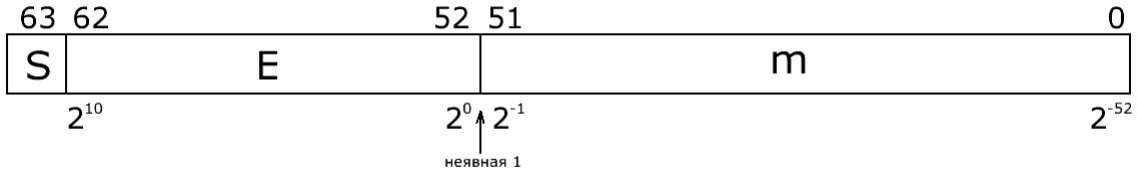
ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

FLOAT

$$x = (-1)^S \cdot (1.m) \cdot 2^{E-127}$$

DOUBLE



$$x = (-1)^S \cdot (1.m) \cdot 2^{E-1023}$$

- ***S*** – знак числа: 0 - это положительное число, 1 - отрицательное число.
- ***E*** – смещённый порядок числа. Смещённый порядок всегда положительное число. Для одинарной точности для порядка выделено восемь бит, при этом смещение принято равным 127. Для смещённого порядка двойной точности отводится 11 бит, при этом смещение принято равным 1023.
- ***m*** – мантисса. В двоичной мантиссе после запятой могут присутствовать только цифры 1 и 0. В формате чисел с плавающей точкой принято, что мантисса всегда больше 1. То есть диапазон значений мантиссы лежит в диапазоне от 1 до 2. При этом ***всегда*** подразумевается, что мантисса имеет вид: **1.*m***.

ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Пример расчета значения числа: **11000001 01001000 00000000 00000000**

Способ №1

1. Знаковый бит, равный 1 показывает, что число отрицательное.

1*1000001 01001000 00000000 00000000*

2. Экспонента в десятичном виде равна 130. Вычтя число 127 из 130, получим число 3.

*1**1000001 0**1001000 00000000 00000000*

3. Теперь запишем мантиссу: 1.100 1000 0000 0000 0000 0000

*11000001 0**1001000 00000000 00000000***

4. Смещаем точку в мантиссе на 3 знака вправо, так как (130-127) – положительное смещение и получаем десятичное число:

$$1100.1_2 = 12.5_{10}$$

ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

Пример расчета значения числа: **11000001 01001000 00000000 00000000**

Способ №2

$$x = (-1)^{1} \cdot (1.100\ 1000) \cdot 2^{130-127} = -1.5625 \cdot 2^{3} = -12.5$$

знак S

мантисса $1.m$

смещение E- 127

ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

НОЛЬ

В стандарте IEEE 754 существуют два нуля — **положительный** и **отрицательный**. Они нужны, чтобы микропроцессор мог различать значения, которые близки к нулю, но имеющие разные знаки.

0 00000000 00000000000000000000000 ⟹ положительный ноль

1 00000000 00000000000000000000000 ⟹ отрицательный ноль

ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

БЕСКОНЕЧНОСТЬ

У бесконечности есть два типа: **положительная** и **отрицательная**.

положительное число	отрицательное число
$+0$	-0

0 11111111 00000000000000000000000 ⇒ положительная бесконечность

положительное число	отрицательное число
-0	$+0$

1 11111111 00000000000000000000000 ⇒ отрицательная бесконечность

ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Примеры неопределенностей: $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{\infty}$ $\frac{\infty}{0}$ $\sqrt{\textit{отрицательное число}}$

В стандарте IEEE 754 вводят понятие **Not-a-Number** — ***NaN***.

1 11111111 10000000000000000000000 ⟹ неопределенность - ***NaN***

Неопределённость очень похожа на бесконечность, но главное её отличие в том, что в числе ***NaN*** должен быть хотя бы один ненулевой бит в мантиссе.

АРИФМЕТИКА ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

СЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ

Покажем арифметику чисел с плавающей точкой на примере сложения:

$$X = 0\ 10000001\ 11000000000000000000000 = 1.75 \cdot 2^{129-127} = 7$$

$$Y = 0\ 01111111\ 00000000000000000000000 = 1.0 \cdot 2^{127-127} = 1$$

$$X + Y = 8$$

АРИФМЕТИКА ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

СЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ

Покажем арифметику чисел с плавающей точкой на примере сложения:

$$X = 0\ 10000001\ 11000000000000000000000 = 1.75 \cdot 2^{129-127} = 7$$

$$Y = 0\ 01111111\ 00000000000000000000000 = 1.0 \cdot 2^{127-127} = 1$$

$$X + Y = 8$$

Числа X и Y в нормализованном виде:

$$X = 1.110 \cdot 2^{2}$$

двоичный код

$$Y = 1.000 \cdot 2^{0}$$

двоичный код

АРИФМЕТИКА ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ

1. Представить числа в нормированном виде: $X = 1.110 \cdot 2^2$ $Y = 1.000 \cdot 2^0$

2. Необходимо, чтобы экспоненты двух чисел были равны. Перепишем значение числа *Y* сдвинув мантиссу на два разряда влево:

$$X = 1.110 \cdot 2^2 \quad Y = 0.010 \cdot 2^2$$

При этом легко проверить, что десятичное значение числа *Y* не изменится.

3. Сложим двоичные мантиссы чисел X и скорректированного Y:

$$\begin{array}{r} \text{Мантисса } X \rightarrow 1.110 \\ \text{Мантисса } Y \rightarrow \underline{0.010} \\ 10.00 \end{array}$$

АРИФМЕТИКА ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ

4. Если сумма на предыдущем этапе смещает единицу нормализации, то необходимо сдвинуть экспоненту, и повторить суммирование. В нашем случае сумма 10,0 имеет два бита слева от точки. Чтобы нормализовать число нам нужно, переместить точку влево на 1 разряд, и увеличить экспоненту на 1.

$$1.000 \cdot 2^3 \rightarrow 8_{10}$$

Таким образом, итоговый вид результата суммирования будет следующий:

$$0\ 10000010\ 00000000000000000000000 = 1.0 \cdot 2^{130-127} = 8$$

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХ

ЛЕКЦИЯ 1. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!

Торгаев Станислав Николаевич
+7-923-403-17-94
torgaev@tpu.ru