Sobre álgebras quasitriangulares quasi-Hopf y un grupo estrechamente relacionado con Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$)

V. G. Drinfel'd

20 de julio de 2024

Resumen

Se prueba un teorema que ya había sido anunciado sobre la estructura de álgebra quasitriangular quasi-Hopf en la teoría de perturbaciones con respecto a la constante de Plank. En el proceso se usó la versión pro unipotente de un grupo definido por Grothendieck que contiene Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$).

1. Introducción

Este artículo se dedica principalmente a la prueba de un teorema anunciado en [1] sobre la estructura de álgebra quasitriangular quasi-Hopf en la teoría de perturbaciones con respecto a la constante de Plank. Como tecnicidad se usó la versión pro unipotente de un grupo definido por Grothendieck [2], un grupo muy interesante pues esta relacionado con Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$).

Recordemos las definiciones básicas de [1]. La diferencia entre un álgebra quasi-Hopf y un álgebra de Hopf es que el axioma de coasociatividad se reemplaza por una condición mas débil. En detalle, un álgebra quasi-Hopf sobre un anillo conmutativo k, de acuerdo a [1], es un conjunto $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, donde A es un k-álgebra asociativa con unidad, Δ es un homomorfismo $A \to A \otimes A$, ε es un homomorfismo $A \to k$ (asumimos que $\Delta(1) = 1, \varepsilon(1) = 1$), y Φ es un elemento invertible en $A \otimes A \otimes A$, los cuales satisfacen

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1}, a \in A, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi)\\ &= (1 \otimes \Phi) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1),\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = id = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta, \tag{1.3}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Phi) = 1, \tag{1.4}$$

además de un axioma que en el caso Hopf, $\Phi = 1$, se restringe a la existencia y biyectividad del antípoda. En nuestro caso, cuando $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ es una deformación de un álgebra de Hopf parametrizada por un parámetro "infinitamente pequeño"h, el axioma se satisface automáticamente por el Teorema 1.6 de [1]. De igual manera que el caso de Hopf, Δ es denominado la comultiplicación y ε es la counidad.

El artículo [1] generalizó al caso quasi-Hopf la noción de álgebra quasitriangular de Hopf definido en § 10 de [3] e inspirado por el método cuántico del problema inverso [4]. Específicamente, un álgebra quasitriangular quasi-Hopf es un conjunto $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ donde $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ es un álgebra quasi-Hopf y R es un elemento invertible en $A \otimes A$ tal que

$$\Delta'(a) = R\Delta(a)R^{-1}, a \in A \tag{1.5}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = \Phi^{312}R^{13}(\Phi^{132})^{-1}R^{23}\Phi, \tag{1.6a}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = (\Phi^{231})^{-1}R^{13}\Phi^{213}R^{12}\Phi^{-1}. \tag{1.6b}$$

Donde $\Delta' = \sigma \circ \Delta$, y $\sigma : A \otimes A \to A \otimes A$ intercambia las entradas. Si $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ entonces por definición $R^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$, $R^{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $R^{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$. También debemos explicar que, por ejemplo, si $\Phi = \sum_j x_j \otimes y_j \otimes z_j$, entonces $\Phi^{312} = \sum_j y_j \otimes z_j \otimes x_j$.

La razón de los axiomas (1.1) - (1.6) es que las representaciones de un álgebra A quasitriangular quasi-Hopf forma una categoría quasitensorial en el sentido de [5], ver también § 3 de [1]. Esto significa que, primero, hay un functor producto tensorial en la categoría de representaciones de A: dadas dos representaciones de A, en los k módulos V_1, y V_2, la representación de A en $V_1 \otimes V_2$ se define como la composición $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \to \mathrm{End}_k(V_1 \otimes V_2)$. Segundo, existen isomorfismos functoriales de conmutación $c : V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$ y de asociación $a : (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ donde V_i son representaciones de A. A saber, a es la operación en $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ que corresponde a Φ, y c es la composición de la operación en $V_1 \otimes V_2$ que corresponde a R y el isomorfismo usual $\sigma : V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$. Tercero, existe la representación identidad k con isomorfismos $V \otimes k \xrightarrow{\sim} V$ y $k \otimes V \xrightarrow{\sim} V$ para cada representación V. Finalmente, (1.2), (1.4) y (1.6) garantizan la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes V_4) \arrow[r, "\sim"] & V_1 \otimes (V_2 \otimes (V_3 \otimes V_4)) \arrow[d, "\sim"] \\
(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4 \arrow[rr, "\sim"] & & V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_3) \otimes V_4)
\end{tikzcd} \tag{I.7}$$

$$\begin{tikzcd}
& V_1 \otimes V_2 \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\
(V_1 \otimes k) \otimes V_2 \arrow[rr, "\sim"] & & V_1 \otimes (k \otimes V_2)
\end{tikzcd} \tag{I.8}$$

$$\begin{tikzcd}
(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "a"] & V_3 \otimes (V_1 \otimes V_2) & (V_3 \otimes V_1) \otimes V_2 \arrow[l, "a"'] \\
V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes c"] & V_1 \otimes (V_3 \otimes V_2) \arrow[r, "a^{-1}"] & (V_1 \otimes V_3) \otimes V_2 \arrow[u, "c\otimes \mathrm{id}"]
\end{tikzcd} \tag{I.9a}$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "a^{-1}"] & (V_2 \otimes V_3) \otimes V_1 \arrow[r, "a"] & V_2 \otimes (V_3 \otimes V_1) \\
(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \arrow[r, "c\otimes \mathrm{id}"] & (V_2 \otimes V_1) \otimes V_3 \arrow[r, "a"] & V_2 \otimes (V_1 \otimes V_3) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes c"]
\end{tikzcd} \tag{I.9b}$$

Es de notar que en general $R^{21} \neq R^{-1}$, en consecuencia el isomorfismo de conmutatividad no es involutorio (una de las diferencias entre categorías quasitensoriales y categorías tensoriales [6]).

Si $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ es un álgebra quasitriangular quasi-Hopf, y si F es un elemento invertible de $A \otimes A$ que satisface $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1 = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F)$, entonces, definiendo

$$\widetilde{\Delta}(a) = F \cdot \Delta(a) \cdot F^{-1}, \tag{I.10}$$

$$\widetilde{\Phi} = F^{23} \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)(F) \cdot \Phi \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(F^{-1}) \cdot (F^{12})^{-1}, \tag{I.11}$$

$$\widetilde{R} = F^{21} \cdot R \cdot F^{-1}, \tag{I.12}$$

obtenemos una nueva álgebra quasitriangular quasi-Hopf $(A, \widetilde{\Delta}, \varepsilon, \widetilde{\Phi}, \widetilde{R})$; decimos que fue obtenida de $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ torsiendola vía F. Las quasicategorías que corresponden a $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ y a $(A, \widetilde{\Delta}, \varepsilon, \widetilde{\Phi}, R)$ son equivalentes. Así que naturalmente nos referimos a la torsión como una "transformación de gauge".

Estudiaremos álgebras quasitriangulares quasi-Hopf en el sentido de la teoría de perturbaciones con respecto a h, restringiéndonos al caso de característica 0. Daremos precisión a estas palabras en la siguiente definición (EUC es un acrónimo de "Envolvente Universal Cuantizada").

Definición. *Sea k campo de característica* 0. *Decimos que A es una álgebra quasitriangular quasi-Hopf EUC sobre $K[|h|]$ si es una álgebra topológica quasitriangular quasi-Hopf $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ sobre $k[|h|]$ tal que A/hA es un álgebra universal envolvente con la comultiplicación estándar, y A como $k[|h|]$-módulo topológico, es isomorfo a $V[|h|]$ para algún espacio vectorial V sobre k.*

Nota: Como A/hA es un álgebra universal envolvente, de la ecuación (1.4) y el que Φ sea invertible, concluimos que $\Phi \equiv 1 \mod h$. Similarmente, $R \equiv 1 \mod h$, y para torsiones de álgebras quasitriangulares quasi-Hopf EUC, $F \equiv 1 \mod h$.

Inspirados en [7–9], el método siguiente fue propuesto en [1] para construir álgebras quasitriangulares quasi-Hopf EUC. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $k[[h]]$ que, viéndola como $k[[h]]$-módulo, es isomorfo a $V[[h]]$ para algún espacio V sobre k. (Esta condición en $\mathfrak{g}$ significa que $\mathfrak{g}$ es una deformación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ sobre k, donde $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}/h\mathfrak{g}$; llamamos a este tipo de álgebras $\mathfrak{g}$ *álgebra por deformación*). Supongamos la existencia de un tensor $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que es $\mathfrak{g}$-invariante, donde $\otimes$ es la completación del producto tensorial. Sea $A = U\mathfrak{g}$, donde $U\mathfrak{g}$ es la completación h-ádica del álgebra universal envolvente. Definimos en la manera usual $\varepsilon : A \to k[[h]]$ y $\Delta : A \to A \otimes A$ (donde $\otimes$ es la completación del producto tensorial), y sea $R = e^{\hbar t/2}$. Entonces se cumplen (1.3)-(1.5), y falta encontrar $\Phi \in A \otimes A \otimes A$ que satisface (1.1), (1.2), (1.4) y (1.6) (nótese que en este caso (1.1) implica la $\mathfrak{g}$-invariancia de Φ). El primer resultado principal es:

Teorema A. *El susodicho Φ existe, y es único hasta por una torsión por elementos simétricos $\mathfrak{g}$-invariantes $F \in A \otimes A$.*

Notas.

- *Sí Δ es la comultiplicación usual en $A = U\mathfrak{g}$ y $R = e^{\hbar t/2}$, y $\widetilde{\Delta}, \widetilde{R}$ se definen por las formulas* (1.10) *y* (1.12)*, entonces las igualdades $\widetilde{\Delta} = \Delta, \widetilde{R} = R$ son equivalentes a la $\mathfrak{g}$-invariancia y simetría de F (t conmuta con los elementos $\mathfrak{g}$-invariantes de $A \otimes A$, pues $t = (\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)/2$, donde $C \in U\mathfrak{g}$ es el elemento de Casimir).*
- *Además del Teorema A probaremos que si reemplazamos la condición $R = e^{\hbar t/2}$ por la, a primera impresión, condición más débil de simetría y $\mathfrak{g}$-invariancia de R, entonces $R = e^{\hbar t/2}$ para algún $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.*

La unicidad en el Teorema A se prueba de manera simple (ver Proposiciones 3.2 y 3.4). Cuando $k = \mathbb{C}$, lo que se propone en [1] es una construcción explícita pero trascendental de Φ por medio del sistema de ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov (abreviado: sistema KZ) que surge de la teoría de campos conformes [10]. Este Φ, en lo sucesivo denotado por Φ_{KZ}, es expresado en términos de $\tau = ht$ por una "fórmula $\mathbb{C}$-Universal"; es decir, si escribimos Φ_{KZ} en la forma

$$\Phi_{KZ} = \sum_{m,n,p} a_{(m,n,p)}^{i_1\cdots i_m j_1\cdots j_n l_1\cdots l_p} e_{i_1\cdots i_m} \otimes e_{j_1\cdots j_n} \otimes e_{l_1\cdots l_p},$$

donde e_i forman una base de $\mathfrak{g}$ como $\mathbb{C}[[h]]$-módulo topológico y los tensores $a_{(m,n,p)}$ son simétricos en cada grupo de índices i, j, l, entonces los $a_{(m,n,p)}$ se expresan en términos de constantes estructurales c_{rs}^t del álgebra $\mathfrak{g}$ y los componentes τ^{uv} del tensor τ de acuerdo con las reglas del cálculo tensorial acíclico con coeficientes en $\mathbb{C}$, mientras que (1.1), (1.2), (1.4), y (1.6) se siguen, de acuerdo con las reglas del cálculo tensorial acíclico, del hecho de que los c_{rs}^t son las constantes estructurales de un álgebra de Lie y τ es simétrico e invariante. (Ser acíclico significa, por ejemplo, la exclusión de la expresión $c_{ri}^j c_{sj}^l c_{tl}^i$, donde i, j, l forman un "ciclo"). Entre los coeficientes de la fórmula $\mathbb{C}$-universal aparecen (ver (2.15) y (2.18)) los números $\zeta(2m+1)/(2\pi i)^{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, que son imaginarios y probablemente trascendentales. Así, para $k \not\supseteq \mathbb{C}$ la parte de existencia en el Teorema A no se sigue de la construcción de Φ_{KZ}. Sin embargo, se prueba en [3], junto con el teorema siguiente.

Teorema A'. *Existe una fórmula $\mathbb{Q}$-universal que expresa el elemento Φ del Teorema A en términos de $\tau = ht$. Es única hasta por torsión vía un elemento $F = F(\tau)$ simétrico $\mathbb{Q}$-universal.*

El álgebra quasitriangular quasi-Hopf suministrada por el Teorema A será llamada álgebra *estándar*.

Teorema B. *Cualquier álgebra quasitriangular quasi-Hopf EUC se puede torcer en un álgebra estándar por un elemento adecuado.*

La fórmula $\mathbb{C}$-universal que expresa Φ_{KZ} en términos de $\tau = ht$ es de la forma $\Phi_{KZ} = \exp P_{KZ}(\tau^{12}, \tau^{23})$ donde P_{KZ} es una serie formal de Lie (es decir, conmutadores) con coeficientes en $\mathbb{C}$ (ver § 2). El Teorema A se puede fortalecer como sigue.

Teorema A". *Existe una series formal de Lie P con coeficientes en $\mathbb{Q}$ tales que el Φ del Teorema A se puede elegir como* $\exp P(ht^{12}, ht^{23})$.

Si Φ tiene la forma $\exp P(ht^{12}, ht^{23})$ donde P es una serie formal de Lie, entonces el $\widetilde{\Phi}$ definido por la fórmula (1.11) no es, en general, de la misma forma. Sin embargo, en el conjunto de series de Lie P sobre k tales que $\Phi = \exp P(ht^{12}, ht^{23})$ y $R = e^{\hbar t/2}$ satisface (1.2) y (1.6), podemos definir (ver § 4) una acción natural transitiva de un cierto grupo, que llamamos el grupo de Grothendieck-Teichmüller y lo denotamos por $\mathrm{GT}(k)$. Esta acción forma la base de la prueba del Teorema A". La definición de $\mathrm{GT}(k)$ es en esencia prestada de [2], donde, en particular, se muestra como construir un morfismo canónico $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GT}(\mathbb{Q}_l)$ donde $\overline{\mathbb{Q}}$ es la cerradura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$ y l es un número primo.

La estructura del artículo es la siguiente. § 2 esta dedicada a Φ_{KZ}. En § 3, los métodos de [1] se usan para probar los Teoremas A, A' y B. En § 4 definimos el grupo de Grothendieck-Teichmüller (en varias versiones) y explicamos su relación con $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. En § 5 probaremos el Teorema A", y también reduciremos el estudio de $\mathrm{GT}(k)$ al estudio de un álgebra de Lie graduada infinito dimensional $\mathfrak{grt}_1(k)$.

En § 6 recolectaremos ciertas propiedades de esta álgebra. § 4 es independiente de § 2 y § 3, mientras que § 5 y § 6 son independientes de § 3.

El autor agradece A. A. Beilinson, G. V. Belyi, Yu. I. Manin, y G. B. Shabat por recomendarme los artículos [2], [11],[12],[13],[14], y [15].

2. Construcción de Φ_{KZ}

La manera más sencilla de definir Φ_{KZ} es por la fórmula $\Phi_{KZ} = G_2 G_1^{-1}$ donde G_1 y G_2 son soluciones a la ecuación diferencial

$$G'(x) = \hbar(\frac{t^{12}}{x} + \frac{t^{23}}{x-1})G(x), \hbar = h/2\pi i, \tag{2.1}$$

definidas en $0 < x < 1$ y que tienen las asíntotas $G_1(x) \sim x^{\hbar t^{12}}$ para $x \to 0$ y $G_2(x) \sim (1-x)^{\hbar t^{23}}$ para $x \to 1$. Aquí $t^{12} = t \otimes 1 \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ y $t^{23} = 1 \otimes t \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie por deformación sobre $\mathbb{C}[[h]]$ y el tensor $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es simétrico y $\mathfrak{g}$-invariante. La función $G : (0,1) \to (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ en ecuación (2.1) debe ser analítica; es decir, para cada n la imagen de $G(x)$ en $(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}/h^n(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ debe ser de la forma $\sum_{i=1}^{N} a_i(x) \cdot u_i$, donde $u_i \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}/h^n(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, las funciones $a_i : (0,1) \to \mathbb{C}$ son analíticas, y en general N depende de n. En el caso más importante, cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0[[h]]$ (es decir, $\mathfrak{g}$ es la deformación trivial de $\mathfrak{g}_0$), esto significa que $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)h^i$, donde cada g_i es una función analítica con valores en algún subespacio de dimensión finita $V_i \subset (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3}$. Por supuesto $x^{\hbar t^{12}}$ se entiende como $\exp(\hbar \ln x \cdot t^{12}) = 1 + \hbar \ln x \cdot t^{12} + \cdots$. La notación $G_1(x) \sim x^{\hbar t^{12}}$ significa que $G_1(x)x^{-\hbar t^{12}}$ tiene una continuación analítica en una vecindad del punto $x = 0$ y toma el valor 1 en ese punto. La existencia y unicidad de G_1 y G_2 se prueban sin dificultad.

El sistema KZ tiene la forma

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot W, i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.2}$$

donde $W(z_1, \cdots, z_n) \in (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$ y t^{ij} es la imagen de t bajo el (i,j)-ésimo encaje $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \to (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$. Para nosotros es esencial que, tal como se indica en [10], el sistema (2.2) es auto-consistente; es decir, la curvatura de la conexión correspondiente es 0. Dado que $\partial W/\partial z_1 + \cdots + \partial W/\partial z_n = 0$, la función W depende solamente de las diferencias

$z_i - z_j$. Más aún, $\sum_i z_i \partial W/\partial z_i = \hbar \sum_{i<j} t^{ij} W$, así que (2.2) se reduce a un sistema de ecuaciones en funcion de $n-2$ variables. En particular, para $n = 3$ las soluciones de (2.2) son de la forma $(z_3 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{23})} \cdot G((z_2 - z_1)/(z_3 - z_1))$, donde G cumple (2.1). Por lo tanto Φ_{KZ} puede determinarse por la relación $W_1 = W_2 \cdot \Phi_{KZ}$ donde W_1 y W_2 son soluciones de (2.2) para $n = 3$ en la región

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 | z_1 < z_2 < z_3\}$$

con la asíntota $W_1 \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{23})}$ para $z_2 - z_1 << z_3 - z_1$, y $W_2 \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13})}$ para $z_3 - z_2 << z_3 - z_1$.

La definición de Φ en términos del sistema (2.2) es conveniente, en particular, para verificar (1.2) y (1.6a) (1.6b) (la igualdad (1.1) es obviamente equivalente a la $\mathfrak{g}$-invarianza de Φ_{KZ}). Para probar (1.6a) (1.6b), consideramos (2.2) para $n = 4$ en la región

$\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 | z_1 < z_2 < z_3 < z_4\}$ y distinguimos cinco zonas:
1) $z_2 - z_1 << z_3 - z_1 << z_4 - z_1$, $\quad$ $2) z_3 - z_2 << z_3 - z_1 << z_4 - z_1$,
$3) z_3 - z_2 << z_4 - z_2 << z_4 - z_1$, $\quad$ $4) z_4 - z_3 << z_4 - z_2 << z_4 - z_1$,
$5) z_2 - z_1 << z_4 - z_1, z_4 - z_3 << z_4 - z_1$.

Estas zonas corresponden a los "vértices"del pentágono (1.7) de acuerdo a la siguiente regla: si V_i y V_j están dentro del paréntesis y V_k esta afuera de los paréntesis, entonces $|z_i - z_j| << |z_i - z_k|$; por ejemplo, $(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4$ corresponde a la segunda zona.

Lema. *Existen soluciones únicas* $W_1, \cdots, W_5$ *del sistema* (2.2) *con el siguiente comportamiento asintótico en la respectiva zona:*

$$\begin{aligned}
W_1 &\sim (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{23})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})}, \\
W_2 &\sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})}, \\
W_3 &\sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_4 - z_2)^{\hbar(t^{24}+t^{34})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{14})}, \\
W_4 &\sim (z_4 - z_3)^{\hbar t^{34}} (z_4 - z_2)^{\hbar(t^{23}+t^{24})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{14})}, \\
W_5 &\sim (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_4 - z_3)^{\hbar(t^{34})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24})}.
\end{aligned}$$

Se debe entender que, por ejemplo, para W_5 *esto significa que*

$$W_5 = f(u, v)(z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_4 - z_3)^{\hbar t^{34}} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24})},$$

con $u = (z_2 - z_1)/(z_4 - z_1), v = (z_4 - z_3)/(z_4 - z_1)$, f *analítica en una vecindad de* $(0, 0)$, *y* $f(0, 0) = 1$.

Demostración. Consideremos, por decir, la quinta zona.
Con la substitución $W = g(u,v)(z_4 - z_1)^{\hbar T}$, siendo $T = t^{12} + t^{13} + t^{14} + t^{23} + t^{24} + t^{34}$, $u = (z_2 - z_1)/(z_4 - z_1)$, y $v = (z_4 - z_3)/(z_4 - z_1)$. Obtenemos para g un sistema de ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial g}{\partial u} = h(\frac{A}{u} + R(u,v)) \cdot g(u,v), \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = h(\frac{B}{v} + S(u,v)) \cdot g(u,v),$$

donde las funciones R y S, con valores en $(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, son analíticas en una vecindad de $(0,0)$, mientras que $A, B \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ no dependen de u ni v (es de notar que $[A,B] = 0$, en vista de la integrabilidad de la conexión ∇ correspondiente a (2.3)). Debemos probar existencia y unicidad de la solución al sistema (2.3) de la forma $\varphi(u,v)u^{\hbar A}v^{\hbar B}$, donde $\varphi(u,v)$ es analítica en una vecindad de $(0,0)$ y $\varphi(0,0) = 1$. En otras palabras, debemos probar existencia y unicidad de una función analítica $\varphi(u,v)$ tal que $\varphi(0,0) = 1$, $\varphi^{-1} \cdot \nabla_v \cdot \varphi = \partial/\partial u - hAu^{-1}$, y $\varphi^{-1} \cdot \nabla_v \cdot \varphi = \partial/\partial v - hBv^{-1}$, donde $\nabla_u = \partial/\partial u - h(Au^{-1} + R(u,v))$ y $\nabla_v = \partial/\partial v - h(Bv^{-1} + S(u,v))$. Esto se puede hacer por el método de aproximaciones sucesivas. $\square$

Es fácil ver que $W_1, \cdots, W_5$ tienen continuación analítica en la región $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. La fórmula (1.2) se sigue de las identidades $W_1 = W_2 \cdot (\Phi_{KZ} \otimes 1)$, $W_2 = W_3 \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi_{KZ})$, $W_3 = W_4 \cdot (1 \otimes \Phi_{KZ})$, $W_1 = W_5 \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi_{KZ})$, y $W_5 = W_4 \cdot (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi_{KZ})$. Mostraremos como probar las primeras dos.

Sea $V_1 = W_1 \cdot (z_4 - z_1)^{-\hbar(t^{14} + t^{24} + t^{34})}$ y

$$\begin{aligned} V_2 &= W_2 \cdot (\Phi_{KZ} \otimes 1) \cdot (z_4 - z_1)^{-\overline{h}(t^{14} + t^{24} + t^{34})} \\ &= W_2 \cdot (z_4 - z_1)^{-\overline{h}(t^{14} + t^{24} + t^{34})} \cdot (\Phi_{KZ} \otimes 1), \end{aligned}$$

probaremos que $V_1 = V_2$. Es fácil verificar que V_1 y V_2 son analíticas en $z_1 < z_2 < z_3$, $z_4 \in \mathbb{RP}^1 \setminus [z_1, z_3]$ (¡z_4 puede ser igual a ∞!). Más aún, ambos V_1 y V_2 satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot V, i = 2, 3, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = \hbar \sum_{j \neq 1} \frac{t^{1j}}{z_1 - z_j} \cdot V - \hbar V \cdot \frac{t^{14} + t^{24} + t^{34}}{z_1 - z_4}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_4} = \hbar \sum_{j \neq 4} \frac{[t^{14}, V]}{z_4 - z_j}. \tag{2.6}$$

De (2.4) y (2.5), y las asíntotas de V_1 y V_2 se sigue que V_1 y V_2 coinciden para $z_4 = \infty$. Esto y (2.6) implican $V_1 = V_2$.

Ahora, sea $U_1 = W_2 \cdot (z_3 - z_2)^{-\hbar t^{23}}$ y

$$\begin{aligned} U_2 &= W_3 \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi_{KZ}) \cdot (z_3 - z_2)^{-\hbar t^{23}} \\ &= W_3 \cdot (z_3 - z_2)^{-\overline{\hbar} t^{23}} \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi_{KZ}); \end{aligned}$$

mostraremos que $U_1 = U_2$. Es fácil de verificar que U_1 y U_2 son analíticas en

$$z_1 < z_2 < z_4, z_1 < z_3 < z_4,$$

(¡z_2 puede ser igual a z_3!). Más aún, ambos U_1 y U_2 satisfacen

$$\frac{\partial U}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot U, i = 1, 4, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_2} = \hbar \sum_{j \neq 2,3} \frac{t^{2j}}{z_2 - z_j} \cdot U + \hbar \frac{[t^{23}, U]}{z_2 - z_3}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_3} = \hbar \sum_{j \neq 2,3} \frac{t^{3j}}{z_3 - z_j} \cdot U - \hbar \frac{[t^{23}, U]}{z_2 - z_3}. \tag{2.9}$$

Es fácil ver que U_1 y U_2 coinciden para $z_2 = z_3$. De esto y (2.8) se sigue que $U_1 = U_2$. Esto prueba (1.2). Reemplazando x por $1 - x$ en (2.1) obtenemos que Φ_{KZ} satisface

$$\Phi^{321} = \Phi^{-1}. \tag{2.10}$$

Por lo tanto (1.6b) se sigue de (1.6a); basta con aplicar en ambos lados de (1.6a) el operador que intercambia el primer producto tensorial con el tercero, y usar $R^{21} = R$ y $\Delta' = \Delta$. La prueba de (1.6a) se encuentra en § 3 de [1]. Esta usa las seis soluciones del sistema (2.2) para $n = 3$ en el dominio complejo que tiene el comportamiento asintótico estándar en la zonas correspondientes; ellas corresponden a los "vértices" del hexágono (1.9a).

Ahora reemplacemos (2.1) por la ecuación

$$G'(z) = \frac{1}{2\pi}(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1})G(x), \tag{2.11}$$

donde A y B son símbolos no conmutativos, y G es una serie formal en A y B con coeficientes que son funciones analíticas de x. Consideremos, como arriba, soluciones G_1 y G_2 con las asíntotas estándar para $x = 0$ y $x = 1$. Sea $\varphi_{KZ}(A, B) = G_2^{-1} G_1$. El álgebra $\mathbb{C} << A, B >>$ de series formales no conmutativas es un álgebra de Hopf topológica con la comultiplicación $\Delta(A) = A\otimes 1 + 1\otimes A, \Delta(B) = B\otimes 1 + 1\otimes B$. Claramente, $\Delta(\varphi_{KZ}) = \varphi_{KZ}\otimes\varphi_{KZ}$. Por lo tanto $\ln\varphi_{KZ}(A,B)$ es una serie formal de Lie, es decir, un elemento de la completación del álgebra libre de Lie sobre $\mathbb{C}$ con generadores A, B (ver [16], Capitulo II, § 3, Corolario 2, Teorema 1). De la misma forma que por (2.10) uno prueba que φ_{KZ} satisface la igualdad

$$\varphi(B,A) = \varphi(A,B)^{-1}. \tag{2.12}$$

Para obtener análogos de (1.2) y de (1.6a) para φ_{KZ}, observe que tal como en [7], la integrabilidad de la conexión correspondiente a (2.2) se sigue de las relaciones $t^{ij} = t^{ji}$ y $[t^{ij}, t^{kl}] = 0$ para $i \neq j \neq k \neq l$, y $[t^{ij} + t^{ik}, t^{jk}] = 0$ para $i \neq j \neq k$. Ahora definimos, tal como en [17], el álgebra de Lie $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ como el cociente de la completación del álgebra libre de Lie sobre $\mathbb{C}$ con generadores $\widetilde{X}^{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j$, módulo el ideal generado topológicamente por los elementos de los tres tipos siguientes 1) $\widetilde{X}^{ij} - \widetilde{X}^{ji}; 2)[\widetilde{X}^{ij}, \widetilde{X}^{kl}], i \neq j \neq k \neq l; 3)[\widetilde{X}^{ij} + \widetilde{X}^{ik}, \widetilde{X}^{jk}], i \neq j \neq k$. La imagen de $\widetilde{X}^{ij}$ en $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ es denotada por X^{ij} . Reemplazamos ht^{ij} en (2.2) por X^{ij}, encontraremos que los mismos argumentos que prueban (1.2) y (1.6a) para $\Phi = \Phi_{KZ}$ también prueban que φ_{KZ} satisface las relaciones:

$$\begin{aligned}
&\varphi(X^{12}, X^{23} + X^{24}) \cdot \varphi(X^{13} + X^{23}, X^{34}) \\
&\qquad = \varphi(X^{23}, X^{34}) \cdot \varphi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34}) \cdot \varphi(X^{12}, X^{23}),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\exp((X^{13} + X^{23})/2) &= \varphi(X^{13}, X^{12}) \cdot \exp(X^{13}/2) \cdot \varphi(X^{13}, X^{23})^{-1} \\
&\quad \cdot \exp(X^{23}/2) \cdot \varphi(X^{12}, X^{23}), \qquad (2.14a) \\
\exp((X^{12} + X^{13})/2) &= \varphi(X^{23}, X^{13})^{-1} \cdot \exp(X^{13}/2) \cdot \varphi(X^{12}, X^{13}) \\
&\quad \cdot \exp(X^{12}/2) \cdot \varphi(X^{12}, X^{23})^{-1}, \qquad (2.14b)
\end{aligned}$$

donde ambos lados de (2.13) pertenecen a $\exp\mathfrak{a}_4^{\mathbb{C}}$ mientras que ambos lados de (2.14a) y (2.14b) pertenecen a $\exp\mathfrak{a}_3^{\mathbb{C}}$. Denotamos $\exp\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}} = \{e^x | x \in \mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}\}$, donde e^x se entiende como un elemento de la completación del álgebra universal envolvente $U\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$. En otras palabras, $\exp\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ es el grupo de Lie correspondiente a $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$.

Si asumimos por un momento que $[A, B] = 0$, entonces (2.11) tiene la solución $x^{A/2\pi i}(1-x)^{B/2\pi i}$ con ambas asíntotas estándar en $x = 0$ y $x = 1$. Por lo tanto $\ln\varphi_{KZ} \in \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p}$ es el conmutador de la completación del álgebra libre de Lie con generadores A, B. Busquemos la imagen de $\ln\varphi_{KZ} \in \mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$. Dado que $\mathfrak{p}$ es un álgebra libre topológica de Lie con generadores $U_{kl} = (\mathrm{ad}B)^l(\mathrm{ad}A)^k[A,B]$ (vea por ejemplo 2.4.2 de [18]), las imágenes de U_{kl} en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ (que denotaremos por $\overline{U}_{kl}$) forman una base topológica en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$. Observe que $\overline{U}_{kl}$ también es la imagen de $(\mathrm{ad}A)^k(\mathrm{ad}B)^l[A,B]$

en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$. Los coeficientes de la expansión de la imagen de $\ln\varphi_{KZ}$ en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$, con respecto a la base $\overline{U}_{kl}$ serán denotados por c_{kl}. Mostraremos que

$$1+\sum_{k,l} c_{kl}u^{k+1}v^{l+1} = \exp\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n(2\pi i)^n}(u^n+v^n-(u+v)^n). \tag{2.15}$$

Escribamos las soluciones estándar G_1 y G_2 de la ecuación (2.11) en la forma $G_j(x) = x^{\overline{A}}(1-x)^{\overline{B}}V_j(x)$, con $\overline{A} = A/2\pi i, \overline{B} = B/2\pi i$. Las funciones V_j tienen extensiones continuas a $[0,1]$ y satisface la ecuación

$$V'(x) = Q(x)V(x), \tag{2.16}$$

$$Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\ln(1-x)\cdot ad\overline{B}}\cdot\frac{e^{-\ln x\cdot ad\overline{A}}-1}{x-1}\overline{B}\in\mathfrak{p}.$$

Más aún, $V_1(0) = 1$ y $V_2(1) = 1$. Por lo cual $\varphi_{KZ} = V_2^{-1}V_1 = V(1)V(0)^{-1}$, donde V es cualquier solución de (2.16). Esto significa que la imagen de $\ln\varphi_{KZ}$ en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ es igual a $\int_0^1\overline{Q}(x)dx$, donde $\overline{Q}(x)$ es la imagen de $Q(x)$ en $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$. Entonces,

$$c_{kl} = \frac{1}{(2\pi i)^{k+l+2}(k+1)!l!}\int_0^1(\ln\frac{1}{1-x})^l\frac{dx}{x-1}. \tag{2.17}$$

Suponiendo que $u,v\in\mathbb{C}, im\,v<0, im\,u<2\pi$, encontramos que el lado izquierdo de (2.15) es igual a

$$\begin{aligned}1+\overline{v}\int_0^1(1-x^{-\overline{u}})(1-x)^{-\overline{v}-1}dx &= -\overline{v}\int_0^1(x^{-\overline{u}})(1-x)^{-\overline{v}-1}dx\\ &= \Gamma(1-\overline{u})\Gamma(1-\overline{v})/\Gamma(1-\overline{u}-\overline{v}),\end{aligned}$$

con $\overline{u} = u/2\pi i$ y $\overline{v} = v/2\pi i$. Usando la fórmula $\ln\Gamma(1-z) = \gamma z+\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)/n)\cdot z^n$, que se sigue de la expansión de la función Γ como un producto infinito ([19] capítulo 12), obtenemos (2.15). De (2.15) se sigue en particular que

$$c_{k,0} = c_{0,k} = -\zeta(k+2)/(2\pi i)^{k+2}. \tag{2.18}$$

Uno podría dar una prueba diferente de (2.18): $c_{k,0}$ pueden ser calculados usando (2.17), la fórmula $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots$ y la substitución $x = e^{-y}$, y $c_{0,k}$ por la fórmula $c_{ij} = c_{ji}$, que es consecuencia de (2.12).

Nota: De acuerdo a la introdución de [11], cálculos semejantes fueron hechos previamente por Z. Wojtkowiak; de hecho, ellos motivaron a Deligne.

3. Prueba de los teoremas A, A' y B.

En esta sección examinaremos las álgebras quasitriangulares quasi-Hopf EUC sobre $k[[h]]$, donde k es un campo de característica 0. Recordemos (ver proposición 3.5 de [1]) que a) cualquiera de esas álgebras puede convertirse usando una torsión apropiada en la forma simétrica (es decir, podemos hacer $R^{21} = R$); 2)torciendo con F preserva la forma simétrica si y solo si $F^{21} = F$; 3) si $R^{21} = R$, entonces $\Delta' = \Delta$ y (2.10) se satisface. Recordemos también (ver § 2) que si $R^{21} = R$, entonces (1.6b) se sigue de (1.6a) y (2.10).

Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie sobre k, y $t \in g \otimes g$ simétrico e invariante bajo $\mathfrak{g}$. Denotamos $A = (U\mathfrak{g})[[h]]$ y definimos como es usual $\Delta : A \to A \otimes A$ y $\varepsilon : A \to k[[h]]$. Buscamos elementos $\mathfrak{g}$-invariantes $R \in A \otimes A$ y $\Phi \in A \otimes A \otimes A$ tales que $R^{21} = R, R \equiv 1 + ht/2 \mod h^2, \Phi \equiv 1 \mod h$ y se satisfacen las ecuaciones (1.2), (1.4), (1.6a), y (2.10) (¡no requerimos que $R = e^{\hbar t/2}$!).

Proposición 3.1. *Tales R, Φ existen.*

Demostración. Supongamos que hemos construido elementos $\mathfrak{g}$-invariantes $R_n \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ y $\Phi_n \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ tales que $R_n^{21} = R_n, R_n \equiv 1 + ht/2 \mod h^2, \Phi_n \equiv 1 \mod h$, y $R_n.\Phi_n$ satisfacen modulo h^n las ecuaciones (1.2), (1.4), (1.6a) y (2.10) (para $n = 2$ podemos poner $R_2 = 1 + ht/2, \Phi_2 = 1$). De la prueba de [1, Proposición 3.10] se sigue que existe un $\mathfrak{g}$-invariante $\overline{\Phi}_n \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ que satisface (1.2), (1.4) y (2.10) modulo h^{n+1} tal que $\overline{\Phi}_n \equiv \Phi_n \mod h^n$. Dado que R_n y $\overline{\Phi}_n$ satisface (1.6a) modulo h^n, tenemos

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R_n) \equiv \overline{\Phi}_n^{312} R_n^{13} (\overline{\Phi}_n^{132})^{-1} R_n^{23} \overline{\Phi}_n + h^n \psi \mod h^{n+1}, \tag{3.1a}$$

donde $\psi \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{g}$-invariante. Usando en ambos lados de (3.1a) el operador que intercambia el primer y el tercer factor tensorial, obtenemos:

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R_n) \equiv (\overline{\Phi}_n^{231})^{-1} R_n^{13} \overline{\Phi}_n^{213} R_n^{12} \overline{\Phi}_n^{-1} + h^n \psi^{321} \mod h^{n+1}. \tag{3.1b}$$

Buscamos R_{n+1} y Φ_{n+1} de la forma $R_{n+1} = R_n + h^n r$ y $\overline{\Phi}_{n+1} = \Phi_n + h^n \varphi$, con $r \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ y $\varphi \in \wedge^3 \mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. Los elementos r y φ deben ser $\mathfrak{g}$-invariantes y satisfacer las ecuaciones

$$r^{21} = r, \tag{3.2}$$

$$r^{13} + r^{23} - (\Delta \otimes \mathrm{id})(r) + 3\varphi = \psi. \tag{3.3}$$

Para que tales r, φ existan,es necesario que

$$\psi^{234} - (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\psi) + (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\psi) - \psi^{124} = 0, \tag{3.4}$$
$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\psi) - \psi^{123} - \psi^{124} = (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\psi^{321}) - \psi^{431} - \psi^{432}, \tag{3.5}$$
$$\alpha^{321} = -\alpha, \tag{3.6}$$

donde $\alpha = \psi - \psi^{213}$. Aseguramos que (3.4) -(3.6) también son suficientes para la existencia de r y de φ. Pues, (3.4) dice que ψ es un 2-cociclo en el complejo $C^*(\mathfrak{g}) \otimes U\mathfrak{g}$, donde

$$\begin{aligned} C^n(\mathfrak{g}) =& (U\mathfrak{g})^{\otimes n}, \\ d(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) =& 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n} a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \Delta(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ (-1)^{n+1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Se sigue de [1, Proposición 2.2] que $\alpha \in \wedge^2\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, mientras que $\phi - \alpha/2$ es una cofrontera, es decir

$$\psi - \alpha/2 = \overline{r}^{13} + \overline{r}^{23} - (\Delta \otimes \mathrm{id})(\overline{r}). \tag{3.8}$$

Aquí $\overline{r}$ se puede elegir $\mathfrak{g}$-invariante; basta que bajo la identificación usual de $U\mathfrak{g}$ con $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}$ (ver [16, Capítulo II, §1, Proposición 9]) $\overline{r}$ sea enviado a un elemento de $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g} \otimes \mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}$ cuya imagen en $\mathfrak{g} \otimes \mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}$ sea 0. Dado que $\alpha \in \wedge^2\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, se sigue de (3.6) que $\alpha \in \wedge^3\mathfrak{g}$. Sea $\varphi = \alpha/6$. Entonces (3.2) y (3.3) equivalen a las siguientes condiciones en $s = r - \overline{r}$:

$$s - s^{21} = \overline{r}^{21} - \overline{r}, s \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}. \tag{3.9}$$

Para la existencia de s que satisfaga (3.9) es necesario y suficiente que $\overline{r}^{21} - \overline{r} \in (\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}) \oplus (U\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$, es decir, que

$$(f \otimes f)(\overline{r}^{21} - \overline{r}) = 0, \tag{3.10}$$

donde $f : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}, f(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a - \Delta(a)$. Si (3.10) se cumple, entonces s se puede elegir $\mathfrak{g}$-invariante; basta que la imagen de $s + \overline{r}$ en $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g} \otimes \mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}$ no tenga componentes en $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Observemos que (3.10) se sigue de (3.5), (3.8), y de que $\alpha \in \wedge^3\mathfrak{g}$.

Ahora probamos (3.4)-(3.6). Usando (3.1a) para transformar ambos lados de la igualdad

$$\overline{\Phi}_n^{123} \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})(R_n) = (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})(R_n) \cdot \overline{\Phi}_n^{123}$$

y usando (1.2) y (1.5), obtenemos (3.4). Ahora expresamos $(\Delta \otimes \Delta)(R_n)$ en términos de $R_n^{13}, R_n^{14}, R_n^{23}, R_n^{24}$ en dos formas posibles (podemos usar primero (3.1a) y luego (3.1b), o primero (3.1b) y luego (3.1a)) . Comparando las dos expresiones de $(\Delta \otimes \Delta)(R_n)$ y usando (1.2) y (1.5), obtenemos (3.5). De la misma forma que en la prueba de la fórmula 3.12 de [1], que generaliza la relación de Yang-Baxter, podemos derivar de (3.1a) la congruencia

$$R_n^{12}\overline{\Phi}_n^{312}R_n^{13}(\overline{\Phi}_n^{132})^{-1}R_n^{23}\overline{\Phi}_n + h^n\alpha \equiv \overline{\Phi}_n^{321}R_n^{23}(\overline{\Phi}_n^{231})^{-1}R_n^{13}\overline{\Phi}_n^{213}R^{12} \mod h^{n+1}. \tag{3.11}$$

Usando en ambos lados de (3.11) el operador que intercambia el primer tensor y el tercero, y usando las relaciones $R_n^{21} = R_n$ y $\overline{\Phi}_n^{321} \equiv \overline{\Phi}_n^{-1} \mod h^{n+1}$, obtenemos (3.6).

□

La prueba de la proposición 3.1 determina específicamente ciertos elementos Φ y R, en términos de $\tau = ht$ por medio de formulas $\mathbb{Q}$-universales $\Phi = \mathscr{M}(\tau)$ y $R = \mathscr{N}(\tau)$. Respecto a esas formulas nos basta con saber que $\mathscr{M}(\tau) = 1 + O(\tau)$ y $\mathscr{N}(\tau) = 1 + \tau/2 = o(\tau)$, donde $o(\tau)$ (respectivamente $O(\tau)$) denota términos en τ de grado mayor que 1 (respectivamente mayores o igual que 1).

Proposición 3.2. *Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie sobre k, y supongamos que $R \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ y $\Phi \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ son invertibles, $\mathfrak{g}$-invariantes, y satisfacen* (1.2), (1.4), *y* (1.6). *Entonces, torciendo vía un $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ $\mathfrak{g}$-invariante, los elementos Φ y R se convierten en $\mathscr{M}(h\theta)$ y $\mathscr{N}(h\theta)$, donde θ es un elemento $\mathfrak{g}$-invariante de $(Sym^2\mathfrak{g})[[h]]$. Más aún, θ es único, mientras que F es determinado hasta por multiplicación por un elemento de la forma $(u^{-1} \otimes u^{-1})\Delta(u)$, donde u pertenece al centro de $(U\mathfrak{g})[[h]]$ y $u \equiv 1 \mod h$, $\varepsilon(u) = 1$.*

Demostración. $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ se pueden torcer en forma simétrica por un elemento $\mathfrak{g}$-invariante de $(U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ (ver prueba de la proposición 3.5 en [1]). Por lo tanto podemos asumir $R^{21} = R$ (en cuyo caso $\Phi^{321} = \Phi^{-1}$ y F debe ser simétrico). Así que todo se reduce al siguiente lema. □

Lema. *Supongamos que (Φ_1, R_1) y (Φ_2, R_2) satisfacen las condiciones de la proposición, con $R_1^{21} = R_1, R_2^{21} = R_2, \Phi_1 \equiv \Phi_2 \mod h^n$, y $R_1 \equiv R_2 \mod h^n$. Sea φ y r los residuos $\mod h$ de los elementos $h^{-n}(\Phi_1 - \Phi_2)$ y $h^{-n}(R_1 - R_2)$, respectivamente. Entonces r es un elemento $\mathfrak{g}$-invariante de $Sym^2\mathfrak{g}$, mientras φ puede ser escrito de la forma*

$$\varphi = f^{23} - (\Delta \otimes id)(f) + (id \otimes \Delta)(f) - f^{12}, \tag{3.12}$$

donde f es un elemento $\mathfrak{g}$-invariante simétrico de $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ tal que $(\varepsilon \otimes id)(f) = 0 = (id \otimes \varepsilon)(f)$. Más aún, f esta determinado de manera única hasta por un elemento vía

$$\widetilde{f} = f + \Delta(v) - v \otimes 1 - 1 \otimes v, \tag{3.13}$$

con v en el centro de $U\mathfrak{g}$ y $\varepsilon(v) = 0$

Demostración. Dado que R_1 y R_2 satisfacen (1.6a), mientras que Φ_1 y Φ_2 satisfacen (2.10), tenemos $(\Delta \otimes \mathrm{id})(r) - r^{13} - r^{23} = \mathrm{Alt}\varphi/2$. El lado izquierdo de esta igualdad es simétrico en los primeros factores tensoriales, y el lado derecho es anti-simétrico. Así que ambos son 0; es decir $\mathrm{Alt}\varphi = 0$ y $r \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. De $r \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ y $r^{21} = r$, se sigue que $r \in \mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$. Como φ_1 y φ_2 satisfacen (1.2),(1.4), y (2.10), tenemos

$$\varphi^{234} - (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\varphi) + (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\varphi) - (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\varphi) + \varphi^{123} = 0, \tag{3.14}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})(\varphi) = 0, \tag{3.15}$$

$$\varphi^{321} = -\varphi. \tag{3.16}$$

Usando en (3.14) las funciones $\varepsilon \otimes \varepsilon \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$ y $\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon$, y usando (3.15), obtenemos:

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\varphi) = 0 = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\varphi). \tag{3.17}$$

(3.14) dice que φ es un 3-cociclo en el complejo (3.7). De la proposición 3.11 de [1], si tal ciclo es $\mathfrak{g}$-invariante y satisface (3.15)-(3.17) y la condición $\mathrm{Alt}\varphi = 0$, entonces se puede representar en la forma (3.12), y la representación es única hasta por substitución en la forma (3.13).

□

Sea $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ como arriba. De la misma manera que probamos Proposición 3.2 uno prueba lo siguiente.

Proposición 3.3. *Sea $(\overline{\mathscr{M}}(\tau), \overline{\mathscr{N}}(\tau))$ soluciones arbitrarias k-universales de las ecuaciones (1.2),(1.4), y (1.6a) tales que $\overline{\mathscr{N}}(\tau)$ es simétrico, $\overline{\mathscr{N}}(\tau) = 1 + \tau/2 + o(\tau)$. Entonces torciendo vía un $F(\tau)$ k-universal simétrico uno puede convertir $(\overline{\mathscr{M}}(\tau), \overline{\mathscr{N}}(\tau))$ en $(\mathscr{M}(\widetilde{\tau}), \mathscr{N}(\widetilde{\tau}))$, donde $\widetilde{\tau}$ se expresa en términos de τ por una fórmula del tipo $\widetilde{\tau} = \tau + O(\tau)$. Más aún, $\widetilde{\tau}$ esta determinada por $(\overline{\mathscr{M}}, \overline{\mathscr{N}})$ de manera única, y $F(\tau)$ hasta por multiplicación por $(u^{-1} \otimes u^{-1}) \cdot \Delta(u)$, donde u se expresa en términos de τ por una fórmula k-universal de la forma $u = 1 + O(\tau)$.*

Proposición 3.4. *Sea $(\overline{\mathscr{M}}(\tau), \overline{\mathscr{N}}(\tau))$ tal como en Proposición 3.3. Entonces $\overline{\mathscr{N}}(\tau) = e^{\tau/2}$, donde $\widetilde{\tau}$ se expresa en términos de τ mediante una fórmula k-universal de la forma $\widetilde{\tau} = \tau + o(\tau)$.*

Demostración. Si $R = e^{\hbar t}$, donde $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es simétrico y $\mathfrak{g}$-invariante, y $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U \otimes \mathfrak{g})[[h]]$ también es simétrico y $\mathfrak{g}$-invariante, entonces en la fórmula (1.12) $\widetilde{R} = R$, pues $[t, F] = 0$ (basta usar la fórmula $t = (\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)/2$, donde $C \in U\mathfrak{g}$ es el elemento de Casimir correspondiente a t). La versión k-universal es también cierta: $F(\tau)e^{\tau/2}F(\tau)^{-1} = e^{\tau/2}$ para todo $F(\tau)$ k-universal. Por lo tanto, usando Proposición 3.3 al caso $\overline{\mathscr{N}}(\tau) = e^{\tau/2}$ y $\overline{\mathscr{M}}(\tau)$ definido por el sistema KZ (ver § 2), encontramos que $\mathscr{N}(\widetilde{\tau}) = e^{\tau/2}$ para algún $\widetilde{\tau}$ de la forma $\tau + o(\tau)$. Queda por usar Proposición 3.3 a un par arbitrario $(\overline{\mathscr{M}}(\tau), \overline{\mathscr{N}}(\tau))$. $\square$

Prueba del Teorema A'. En el proceso de probar Proposición 3.1 construimos elementos $\mathbb{Q}$-universales $\Phi = \mathscr{M}(\tau)$ y $R = \mathscr{N}(\tau)$ que satisfacen (1.1)-(1.6) y la condición $R^{21} = R$, con $\mathscr{N}(\tau) = 1 + \tau/2 = o(\tau)$ y $\mathscr{M}(\tau) = 1 + O(\tau)$. De la proposición 3.4 se sigue que existe un $\widetilde{\tau}$ $\mathbb{Q}$-universal de la forma $\tau + o(\tau)$ tal que $\mathscr{N}(\widetilde{\tau}) = e^{\tau/2}$. Así que $\Phi = \mathscr{M}(\widetilde{\tau})$ y $R = e^{\tau/2}$ satisfacen (1.1)-(1.6). Unicidad del Teorema A' se sigue de la proposición 3.3. $\square$

Teorema A' implica la existencia en el Teorema A. Unicidad es una consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 3.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra por deformación sobre $k[[h]]$ (ver § 1), y $R \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ y $\Phi \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ elementos invertibles $\mathfrak{g}$-invariantes que satisfacen* (1.2)*,* (1.4) *y* (1.6a)*. Entonces torsiendo vía un $\mathfrak{g}$-invariante $F \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ podemos convertir Φ y R en $\mathscr{M}(h\theta)$ y $e^{\hbar\theta/2}$, donde θ es un elemento $\mathfrak{g}$-invariante de Sym$^2\mathfrak{g}$. Más aún, F esta determinado unicamente hasta por multiplicación por un elemento de la forma $(u^{-1} \otimes u^{-1}) \times \Delta(u)$, donde u pertenece al centro de $U\mathfrak{g}$ y $u \equiv 1 \mod h, \varepsilon(u) = 1$.*

Demostración. La prueba es básicamente como la prueba anterior (ver Proposición (3.2)) en el caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0[[h]]$, donde $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie sobre k. Se diferencia en el siguiente punto. Supongamos $R^{21} = R, \Phi \equiv \mathscr{M}(h\theta_n) \mod h^n$, y $R \equiv e^{\hbar\theta_n/2} \mod h^n$ para algún $\mathfrak{g}$-invariante $\theta_n \in \mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$. Sea r y φ las clases residuales $\mod h$ de los elementos $h^{-n}(R - e^{\hbar\theta_n/2})$ y $h^{-n}(\Phi - \mathscr{M}(h\theta))$, respectivamente. Tal y como en la prueba de la Proposición 3.2, uno muestra que r es un elemento invariante de $\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}_0$, donde $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}/h\mathfrak{g}$, mientras que φ puede ser representado de la forma (3.12), donde f es un elemento simétrico invariante de $U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0$ tal que $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(f) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(f) = 0$. Pero para poder construir elementos $\mathfrak{g}$-invariantes simétricos $F_n \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ y $\theta_{n+1} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ tales que $\widetilde{\Phi} \equiv \mathscr{M}(h\theta_{n+1}) \mod h^{n+1}$ y $\widetilde{R} \equiv exp(h\theta_{n+1}/2) \mod h^{n+1}$, donde $\widetilde{\Phi}$ y $\widetilde{R}$ son obtenidos bajo torción de Φ y R vía F_n, aún debemos probar que $r \in \mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}_0$ se extiende a un elemento invariante $\underline{r} \in \mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$, mientras que $f \in \mathrm{Sym}^2(U\mathfrak{g}_0)$ puede ser elegido de manera que se extiende en un elemento invariante $\underline{f} \in \mathrm{Sym}^2(U\mathfrak{g})$. Para $\underline{r}$ podemos tomar $\pi(h^{-n}(\ln R - \theta/2))$, donde $\pi : U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es la proyección definida por la identificación de $U\mathfrak{g}$ con Sym$^*\mathfrak{g}$ (estamos obligados a usar

π, pues aún no hemos probado que $\ln R \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$). Afirmamos que $\underline{f}$ existe si f fue construido tal y como en la prueba de la Proposición 3.11 de [1]. En efecto, si identificamos $U\mathfrak{g}_0$ con $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}_0$ de la manera usual, entonces $U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0$ se identifica con $\mathrm{Sym}^*(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0) = \oplus_m \mathfrak{g}_0^{\otimes m} \otimes_{S_m} (\mathbb{Q}^2)^{\otimes m}$, $(U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3}$ con $\oplus_m \mathfrak{g}_0^{\otimes m} \otimes_{S_m} (\mathbb{Q}^3)^{\otimes m}$, y el f construido en [1] es igual a $L_0(\varphi)$, donde $L_0 : (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3} \to (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 2}$ se define en términos de ciertos operadores S_m-equivariantes $\delta_m : (\mathbb{Q}^3)^{\otimes m} \to (\mathbb{Q}^2)^{\otimes m}$. Por lo tanto podemos poner $\underline{f} = L(\underline{\varphi})$, donde $\underline{\varphi} = h^{-n}(\Phi - \mathscr{M}(h\theta))$, y $L : (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3} \to (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 2}$ se define en términos del mismo δ_m.

Un problema similar surge al probar la unicidad de F hasta por multiplicación por $(u^{-1} \otimes u^{-1})\Delta(u)$, y se resuelve de la misma forma.

$\square$

Corolario 1. *Bajo las condiciones de la Proposición 3.5,* $R^{21}R = e^{\hbar\theta}$, *donde* θ *es un elemento* $\mathfrak{g}$*-invariante de* $\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$. *En particular, si* $R^{21} = R$ *entonces* $R = e^{\hbar\theta/2}$.

Nota. *1) El corolario muestra que si* A *es un álgebra envolvente universal con el* Δ *y el* ε *usual, entonces* (1.1) -(1.6b) *implican la igualdad* $(\Delta \otimes id)(\ln(R^{21}R)) = \ln(R^{31}R^{13}) + \ln(R^{32}R^{23})$. *El autor no ha sido capaz de deducir esta igualdad directamente de* (1.1) -(1.6a).

2) Una prueba similar a la Proposición 3.5 se puede hacer por una proposición análoga respecto álgebras cuasi-Hopf EUC cofronteras en el sentido de 3 *de [1].*

Prueba del Teorema B. Sea $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ un álgebra cuasi-Hopf cuasitriangular EUC sobre $k[[h]]$. Sea $\widetilde{R} = R \cdot (R^{21}R)^{-1/2}$. De la proposición 3.3 de [1], $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, \widetilde{R})$ es una álgebra cuasi-Hopf EUC co-frontera. Por lo tanto, de la proposición 3.13 de [1], una torción adecuada transforma (A, Δ, ε) en $U\mathfrak{g}$ con la comultiplicación y la counidad usuales, donde $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie por deformación. Ahora usa la proposición 3.5.

$\square$

Notas. *1) Teorema B se puede probar sin el uso de la Proposición 3.5 argumentando tal y como en la prueba de la Proposición 3.13 de [1].*

2) Se puede hacer una sencilla descripción de la categoría de álgebras cuasi-Hopf cuasitriangular EUC (Proposición 3.14 de [1] y la prueba sigue siendo valida en el caso cuasitriangular).

4. El Grupo de Grothendieck-Teichmüller

Supongamos dada una categoría quasitensorial (ver § 1), es decir, una categoría C, un functor $\otimes$, isomorfismos de conmutatividad y asociatividad, además de un objeto identidad k con isomorfismos $V \otimes k \xrightarrow{\sim} V$ y $k \otimes V \xrightarrow{\sim} V$ para todos los objetos

$V \in C$ (con diagramas conmutativos (1.7)-(1.9)). Trataremos de cambiar los isomorfismos de conmutatividad y asociatividad sin modificar el resto de la estructura que aparece en la definición de categoría quasitensorial. Modificar el isomorfismo de asociatividad $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ equivale a multiplicarlo por un automorfismos de $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Observe que en $(V \otimes V) \otimes V$, donde V es un objeto de C, existe una acción del grupo de cuerdas B_3: el generador $\sigma_1 \in B_3$ determina el isomorfismo $c \otimes \mathrm{id}$, donde c es el isomorfismo de conmutación $V \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes V$, y el generador $\sigma_2 \in B_3$ determina el isomorfismo $a^{-1}(\mathrm{id} \otimes c)a$, donde a es el isomorfismo de asociación $(V \otimes V) \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes (V \otimes V)$. De la misma manera, cada $\alpha \in B_3$ determina un isomorfismo $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} (V_{i_1} \otimes V_{i_2}) \otimes V_{i_3}$, donde (i_1, i_2, i_3) es la permutación correspondiente a a^{-1}. Tenemos por lo tanto en $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ una acción del grupo de trensas coloreadas $K_3 = Ker(B_3 \to S_3)$. Así, una elección de $\varphi \in K_3$ determina un nuevo isomorfismo de asociación. Similarmente, una elección de $\psi \in K_2$ determina un nuevo isomorfismo de conmutación. Cada $\psi \in K_2$ es de la forma $\psi = \sigma^{2m}$, donde σ es el generador de B_2 y $m \in \mathfrak{Z}$. Por lo tanto cambiar el isomorfismo de conmutación equivale a elevarlo a la potencia $\lambda = 2m + 1$. Cada $\varphi \in K_3$ es de la forma $f(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \cdot (\sigma_1\sigma_2)^{3n}$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $f(X, Y)$ es un elemento del grupo libre con generadores X, Y (notemos que $(\sigma_1\sigma_2)^3 = (\sigma_2\sigma_1)^3$ genera el centro de B_3). Para isomorfismos nuevos de conmutación y asociación los diagramas de la forma (1.8) siguen siendo conmutativos, pero el pedir que (1.7), (1.9a) y (1.9b) sigan siendo conmutativos requiere condiciones en f, λ y n. Conmutatividad de (1.9a) impone la condición $n = 0$ y la relación

$$f(X_1, X_2)X_1^m f(X_3, X_1)X_3^m f(X_3, X_2)^{-1} X_2^m = 1 \quad \text{for } X_1X_2X_3 = 1, m = (\lambda - 1)/2. \tag{4.1}$$

Conmutatividad de (1.9b) también impone la condición $n = 0$ y la relación

$$f(X_2, X_1)^{-1} X_1^m f(X_3, X_1)X_3^m f(X_3, X_2)^{-1} X_2^m = 1 \quad \text{for } X_1X_2X_3 = 1, m = (\lambda - 1)/2. \tag{4.2}$$

(4.1) y (4.2) equivalen a

$$f(Y, X) = f(X, Y)^{-1}, \tag{4.3}$$

$$f(X_3, X_1)X_3^m f(X_2, X_3)X_2^m f(X_1, X_2)X_1^m = 1 \quad \text{for } X_1X_2X_3 = 1, m = (\lambda - 1)/2. \tag{4.4}$$

Finalmente, conmutatividad de (1.7) impone la siguiente condición en $\varphi \in K_3$:

$$\partial_3(\varphi) \cdot \partial_1(\varphi) = \partial_0(\varphi) \cdot \partial_2(\varphi) \cdot \partial_4(\varphi). \tag{4.5}$$

Aquí $\partial_0(\varphi)$ (respectivamente $\partial_4(\varphi)$) se obtiene de la trenza φ al agregar una cuerda a la izquierda (resp. derecha) de las tres existentes, mientras $\partial_i(\varphi)$ para $1 \leq i \leq 3$ se obtiene de φ la reemplazar la i-ésima cuerda de trenza φ por dos cuerdas, una justo a la izquierda de la otra (note que los K_n forman un grupo cosimplicial, donde los morfismos frontera son los $\partial_i : K_n \to K_{n+1}$, mientras que los homomorfismos de degeneración $\partial_i : K_{n+1} \to K_n$ son obtenidos al borrar una de las $n+1$ cuerdas). Es sabido [20] que K_n es generado por los elementos x_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, donde

$$x_{ij} = (\sigma_{j-2} \cdots \sigma_i)^{-1} \sigma_{j-2}^2 (\sigma_{j-2} \cdots \sigma_i) = (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1}) \sigma_i^2 (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1})^{-1}, \tag{4.6}$$

donde x_{ij} están definidos por las siguientes relaciones

$$(a_{ijk}, x_{ij}) = (a_{ijk}, x_{ik}) = (a_{ijk}, x_{jk}) = 1,$$
$$\text{donde } i < j < k, a_{ijk} = x_{ij} x_{ik} x_{jk}, \tag{4.7}$$
$$(x_{ij}, x_{kl}) = (x_{il}, x_{jk}) = 1 \text{ para } i < j < k < l, \tag{4.8}$$
$$(x_{ik}, x_{ij}^{-1} x_{jl} x_{ij}) = 1 \text{ para } i < j < k < l. \tag{4.9}$$

Aquí (u, v) significa $uvu^{-1}v^{-1}$. En términos de x_{ij}, (4.5) se escribe

$$f(x_{12}, x_{23}x_{24}) f(x_{13}x_{23}, x_{34}) = f(x_{23}, x_{34}) f(x_{12}x_{13}, x_{24}x_{34}) f(x_{12}, x_{23}). \tag{4.10}$$

Así, cada par (λ, f), $\lambda \in 1 + 2\mathbb{Z}$, que satisface (4.3), (4.4), y (4.10) determina una manera "natural" de construir de cualquier categoría cuasitensorial C una nueva categoría cuasitensorial C', que difieren en el isomorfismo de conmutatividad y de asociatividad ("natural" significa que si $F : C_1 \to C_2$ es un functor tensorial en el sentido de la definición 1.8 de [6], entonces F es un functor tensorial de $C_1' \to C_2'$). Es fácil de ver que la correspondencia es biyectiva. La interpretación de los pares (λ, f) que satisfacen (4.3), (4.4) y (4.10) como maneras de cambiar los isomorfismos de conmutatividad y asociatividad nos permite definir en el conjunto de tales pares una estructura de semigrupo $(\lambda_1, f_1) \cdot (\lambda_2, f_2) = (\lambda, f)$, donde

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2,$$
$$f(X, Y) = f_1(f_2(X, Y) X^{\lambda_2} f_2(X, Y)^{-1}, Y^{\lambda_2}) \cdot f_2(X, Y). \tag{4.11}$$

Ahora supongamos que $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ satisfacen (1.1)-(1.6a). Entonces los A-módulos forman una categoría cuasitensorial (ver § 1). Sí cambiamos los isomorfismos de conmutatividad y asociatividad por medio de un par (λ, f) que satisface (4.3), (4.4), y (4.10), la categoría cuasitensorial corresponde a $(A, \Delta, \varepsilon, \bar{\Phi}, \bar{R})$ donde

$$\bar{R} = R \cdot (R^{21} \cdot R)^m = (R \cdot R^{21})^m \cdot R, m = (\lambda - 1)/2 \tag{4.12a}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \Phi \cdot f(R^{21}R^{12}, \Phi^{-1}R^{32}R^{23}\Phi) \\ &= f(\Phi R^{21}R^{12}\Phi^{-1}, R^{32}R^{23}) \cdot \Phi. \end{aligned} \tag{4.12b}$$

Las fórmulas (4.12) definen la acción de el semigrupo de todas las parejas (λ, f) que satisfacen (4.3), (4.4), y (4.10) en la colección de conjuntos $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ satisfaciendo (1.1) $-$ (1.6a). Desafortunadamente, este semigrupo consiste solamente de el elemento identidad $(\lambda = 1, f = 1)$ y la involución $(\lambda = -1, f = 1)$ mandando $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ en $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, (R^{21})^{-1})$. Esto es una consecuencia de la siguiente proposición, debido a que de (4.10) $f(X, Y)$ pertenece al *conmutador* del grupo libre en los generadores X, Y.

Proposición 4.1. *Las ecuaciones (4.3) y (4.4), donde $f(X, Y)$ pertenece al grupo libre con generadores X e Y, son satisfechas solamente por $\lambda = \pm 1, f(X, Y) = Y^r X^{-r}$.*

Demostración. Si (λ, f) satisface las ecuaciones (4.3) y (4.4), entonces esas también son satisfechas por $(\lambda, \widetilde{f})$, donde $\widetilde{f}(X, Y) = Y^{-s} f(X, Y) X^s$. De (4.3) se sigue que para cierta s o $\widetilde{f} = 1$ o la representación no simplificable de $\widetilde{f}(X, Y)$ es de la forma $X^l \cdots Y^{-l}, l \neq 0$. Como $\widetilde{f}$ cumple (4.4), el segundo caso es imposible, y en el primer caso $\lambda = \pm 1$ □

Observemos que si k es un campo de característica 0, entonces las fórmulas (4.3), (4.4), (4.10), y (4.11) tienen sentido aun si suponemos que $\lambda \in k$, mientras que $f(X, Y)$ pertenece a la completación k-pro-unipotente del grupo libre con generadores X, Y, es decir, $f(X, Y)$ es una expresión formal de la forma $\exp F(\ln X, \ln Y)$, donde F es una series formal de Lie sobre k. Así ambos lados de (4.10) pertenecen a la completación k-pro-unipotente de K_4, es decir, son de la forma e^v, donde v pertenece al álgebra cociente de series formales de Lie en las variables $\xi_{ij}, 1 \leq i < j \leq 4$ módulo el ideal correspondiente a las relaciones (4.7)-(4.9) para $x_{ij} = \exp \xi_{ij}$.

Denotamos por $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ el semigrupo de pares (λ, f) que satisfacen (4.3), (4.4), y (4.10), donde $\lambda \in k$ y f pertenece a la completación k-pro-unipotente del grupo libre. El grupo de elementos invertibles de $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ será denotado por $\mathrm{GT}(k)$; lo llamamos la *versión k-pro-unipotente del grupo de Grothendieck-Teichmüller*. Es fácil ver que $\mathrm{GT}(k) = \{(\lambda, f) \in \underline{\mathrm{GT}}(k) | \lambda \neq 0\}$. Resulta que (ver § 5, 6) el grupo $\mathrm{GT}(k)$ es bastante grande: es infinito-dimensional, y el homomorfismo $\mathrm{GT}(k) \to k^*$ que manda (λ, f) a λ es suprayectivo.

Si $(\lambda, f) \in \underline{\mathrm{GT}}(k)$ y $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ es un EUC-álgebra quasitriangular quasi-Hopf sobre $k[[h]]$, entonces las fórmulas (4.12), tienen sentido. Así, $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ actua en el conjunto de EUC-álgebras quasitriangular quasi-Hopf. Las torciones (ver (1.10)-(1.12)) conmutan con la acción de $\underline{\mathrm{GT}}(k)$. Supongamos ahora que A es $U\mathfrak{g}$ con la comultiplicación usual, $R = e^{\hbar t/2}$ y $\Phi = \exp P(ht^{12}, ht^{23})$, donde $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie por deformación sobre $k[[h]]$, $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ es simétrico y $\mathfrak{g}$-invariante, y P es una series formal de Lie sobre k. Entonces el $\bar{R}$ y Φ definidos por las fórmulas (4.12) son de la forma $\bar{R} = e^{\lambda ht/2}$ y $\bar{\Phi} = \exp \overline{P}(ht^{12}, ht^{23})$, donde $\overline{P}$ es una serie formal de Lie sobre k.

Podemos interpretar los elementos de $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ como endomorfismos de una cierta completación $B_n(k)$ del grupo B_n. Supongamos λ, f satisfacen (4.3), (4.4), y (4.10), con $\lambda \in 1 + 2\mathbb{Z}$ y $f(X, Y)$ perteneciendo al grupo libre en los generadores X, Y (olvidemos que solo hay dos pares (λ, f)). Sea V un objeto en una categoría cuasitensorial $C, V^{\otimes 2} = V \otimes V, V^{\otimes 3} = V^{\otimes 2} \otimes V$, etc. En $V^{\otimes n}$ tenemos la acción de B_n. Cambiando los isomorfismos de conmutación y asociatividad en C por medio de (λ, f) da a lugar a una nueva acción de B_n en $V^{\otimes n}$. Se obtiene de la nueva por medio de composición con el endomorfismo de B_n dado por $\sigma_1 \to \sigma_1^{\lambda}, \sigma_i \to f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^{\lambda} f(y_i, \sigma_i^2)$ para $i > 1$, donde $y_i = \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}$ (en la notación de (4.6), $y_i = x_{1i} x_{2i} \cdots x_{i-1,i}$). Ahora sea $K_n(k)$ la completación k-pro-unipotente de K_n, y $B_n(k)$ el cociente de el producto semidirecto de B_n y $K_n(k)$ (los automorfismos $\mathrm{Ad} g : K_n \to K_n, g \in B_n$, se extienden a $K_n(k)$) módulo el subgrupo de elementos de la forma $x \cdot x^{-1}, x \in K_n$, donde x se entiende como un elemento de B_n, y x^{-1} es un elemento de $K_n(k)$. Las fórmulas

$$\sigma_1 \to \sigma_1^{(\lambda)}, \sigma_i \to f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^{(\lambda)} f(y_i, \sigma_i^2), 1 < i \leq n, \tag{4.13}$$

donde $\sigma_i^{(\lambda)} = \sigma_i \cdot (\sigma_i^2)^{(\lambda-1)/2}, y_i = \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}$, define una acción por la derecha de $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ en $B_n(k)$, que es fiel para $n \geq 3$. El endomorfismo (4.13) es compatible con los encajes $B_n(k) \to B_{n+1}(k)$ que mandan σ_i en σ_i, y ellos inducen el autormofismo identidad en los grupos $S_n = B_n(k)/K_n(k)$. El autor no sabe si cualquier conjunto de autormofismos $\gamma_n \in Aut B_n(k)$ que tiene esas propiedades proviene de un elemento de $\mathrm{GT}(k)$ (quizás los métodos de [15] puedan ilustrar esto). En todo caso, el endomorfismo de $B_3(k)$ que manda σ_1 en $\sigma_1^{(\lambda)}$ eh induce el automorfismo identidad en S_3 tiene la forma (4.13) o, equivalentemente, la forma

$$\sigma_1 \to \sigma_1^{(\lambda)}, \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \to \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \cdot [(\sigma_1\sigma_2)^3]^{(\lambda-1)/2} f(\sigma_1^2, \sigma_2^2), \tag{4.14}$$

donde f satisface (4.3) y (4.4). Conversamente, (4.3) y (4.4) implican que (4.14) define un endomorfismo de $B_3(k)$.

A continuación describimos, siguiendo [2], como construir un homomorfismo canónico $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GT}(\mathbb{Q}_l)$, donde $\overline{\mathbb{Q}}$ es la cerradura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$ (aún que no usaremos esta construcción en lo que sigue). Denotemos por $\underline{\widehat{\mathrm{GT}}}$ (respectivamente $\underline{\widehat{\mathrm{GT}}}_l$) el semigrupo de todos los pares (λ, f) que satisfacen (4.3), (4.4), y (4.10), donde f

pertenece a la completación pro-finita (respectivamente completación pro-l) de el grupo libre, y $\lambda \in 1 + 2\widehat{\mathbb{Z}}$ (respectivamente $\lambda \in 1 + 2\widehat{\mathbb{Z}}_l$). Aquí $\widehat{\mathbb{Z}} = \text{lím}_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Los grupos de elementos invertibles en $\underline{\widehat{\mathrm{GT}}}$ y en $\underline{\mathrm{GT}}_l$ son denotados $\widehat{\mathrm{GT}}$ y GT_l. Existen homomorfismos naturales $\widehat{\mathrm{GT}} \to \mathrm{GT}_l$ y $\mathrm{GT}_l \hookrightarrow \mathrm{GT}(\mathbb{Q}_l)$. Lo que falta es construir un homomorfismo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{GT}}$. Recordemos primero la construcción de Belyĭ[21], de un homomorfismo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}\widehat{\Gamma}$, donde Γ es el cociente de B_3 por su centro, y $\widehat{\Gamma}$ es la completación pro-finita de Γ. Existe un isomorfismo canónico $\Gamma \to \pi_1(M, x)$, donde M es el almiar que es el cociente de $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ por el grupo S_3 de transformaciones proyectivas que permutan $0, 1, \infty$, y x es la imagen de un punto en $\mathbb{CP}^1$ en el eje real cerca del 0. Así $\widehat{\Gamma} = \mathrm{Gal}(F/E)$ donde E es el subcampo de S_3-invariantes en $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ (S_3 actúa en z de la manera indicada arriba), y F es la extensión algebraica maximal de $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ en $L = \cup_n \overline{\mathbb{Q}}((z^{1/n}))$ que no es ramificada fuera de 0,1,∞. El grupo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ actúa en L, dejando E y F invariantes. Así $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ actúa en $Gal(F/E) = \widehat{\Gamma}$. El subgrupo $H \subset \widehat{\Gamma}$ que es topológicamente generado por la imagen de $\sigma_1 \in B_3$ es invariante con respecto a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, y la acción de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en el grupo cociente S_3 de $\widehat{\Gamma}$ es la identidad. El semigrupo de endomorfismos $\varphi : \widehat{\Gamma} \to \widehat{\Gamma}$ tales que $\varphi(H) \subset H$ y la acción de φ en S_3 es la identidad es anti-homomórfico al semigrupo de parejas (λ, f) que satisfacen (4.3) y (4.4), donde $\lambda \in 1 + 2\widehat{\mathbb{Z}}$ y f pertenece a la completación pro-finita del grupo libre: la pareja (λ, f) corresponde (ver (4.14)) al endomorfismo $\varphi : \widehat{\Gamma} \to \widehat{\Gamma}$ tal que $\varphi(\overline{\sigma}_1) = \overline{\sigma}_1^{\lambda}, \overline{\varphi}(\overline{\sigma}_1\overline{\sigma_2\sigma}_1) = \overline{\sigma}_1\overline{\sigma_2\sigma}_1 f(\overline{\sigma}_1^2, \overline{\sigma_2}^2)$, donde $\overline{\sigma}_i$ es la imagen de σ_1 en $\widehat{\Gamma}$. Para obtener un isomorfismo entre los grupos de elementos invertibles de los dos semigrupos, combinamos el antihomomorfismo con el homomorfismo $y \to y^{-1}$.

Queda por demostrar que los pares (λ, f) correspondientes a los elementos de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ satisfacen (4.10). Esto se puede interferir de § 2 de Grothendieck [2]. Es propuesto en [2] considerar, para cada g y ν, el 'Grupoide de Teichmüller' $T_{\mathfrak{g},\nu}$, es decir, el grupoide fundamental del almiar modular $M_{\mathfrak{g},\nu}$ de superficies compactas de Riemann X de género $\mathfrak{g}$ con ν puntos distinguidos $x_1, \cdots, x_\nu$. El grupoide fundamental difiere del grupo fundamental en que uno elige no uno, sino varios puntos distinguidos. En el caso presente es conveniente elegir los puntos distinguidos en "el infinito" (ver § 15 de [11]) de acuerdo a los métodos de "degeneración máxima" del conjunto $(X, x_1, \cdots, x_\nu)$. Dado que la degeneración del conjunto $(X, x_1, \cdots, x_\nu)$ resulta en el decrecimiento de $\mathfrak{g}$ y ν, los grupoides $T_{\mathfrak{g},\nu}$ para distintas $\mathfrak{g}$ y ν están conectados por ciertos homomorfismos. La colección de todos los $T_{\mathfrak{g},\nu}$ y todos los homomorfismos es llamada en [2] la torre de Teichmüller. Se observa en [2] que existe un homomorfismo natural $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to G$, donde G es el grupo de automorfismos del análogo pro-finito de la torre de Teichmüller (en la que $T_{\mathfrak{g}m\nu}$ se reemplaza por la completación pro-finita $\widehat{T}_{\mathfrak{g},\nu}$). También se menciona en [2], como una conjetura posible, que $\widehat{T}_{0,4}$ y $\widehat{t}_{1,1}$ en un sentido determinado generan la torre $\{\widehat{T}_{\mathfrak{g},\nu}\}$ por completo y que todas las relaciones entre generadores de la torre provienen de $\widehat{T}_{0,4}, \widehat{T}_{1,1}, \widehat{T}_{0,5}$, y $\widehat{T}_{1,2}$. Esta conjetura fue probada, aparentemente, en el apéndice B de el artículo de física [22]. En todo caso, es fácil ver que $\widehat{T}_{0,4}$ genera la subtorre $\{\widehat{T}_{0,\nu}\}$, y que todas las relaciones en $\{\widehat{T}_{0,\nu}\}$ provienen de $\widehat{T}_{0,4}$ y $\widehat{T}_{0,5}$. Se puede mostrar que $\widehat{\mathrm{GT}}$ es el grupo de automorfismos de la torre $\{\widehat{T}_{0,\nu}\}$. Efectivamente, un automorfismo de la torre esta determinado de manera única por su acción en $\{\widehat{T}_{0,4}\}$, es decir, en $\widehat{\Gamma}$. Esta acción se describe por una pareja (λ, f) que satisface (4.3) y (4.4), y (4.10) es necesaria y suficiente para extender el automorfismo de $\widehat{T}_{0,4}$ a uno en $\widehat{T}_{0,5}$. La conjetura de Grothedieck implica que el grupo de automorfismos de la torre $\{\widehat{T}_{\mathfrak{g},\nu}\}$ que son compatibles con el homomorfismo natural $\widehat{T}_{0,4} \to \widehat{T}_{1,1}$ (a un cuádruple de puntos en $\mathbb{P}^1$ se les asigna la doble cubierta de $\mathbb{P}$ ramificada en esos puntos) coincide también con $\widehat{\mathrm{GT}}$: si un automorfismo de $\widehat{T}_{0,4}$ se extiende a uno de $\widehat{T}_{0,5}$, entonces también se extiende a uno de $\widehat{T}_{1,2}$, pues, de acuerdo con [2], $M_{1,2}$ es casi igual a $M_{0,5}$.

El homomorfismo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{GT}}$ es, por el teorema de Belyĭ [21], inyectivo. El estudio del kernel y la imagen del homomorfismo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GT}_l$ has sido el tema de varios artículos (ver [11–14] y la literatura citada ahí).

5. Prueba del Teorema A''

Sea k un campo de característica 0, $\mathfrak{fr}_k(A, B)$ el álgebra formal de series de Lie sobre k en las variables A y B ($\mathfrak{fr}$ proviene de "free", libre), $\mathrm{Fr}_k(A, B) = \exp \mathfrak{fr}_k(A, B)$ y $M_1(k)$ es el conjunto de $\varphi \in \mathrm{Fr}_k(A, B)$ que satisfacen (2.13), (2.14), donde

$$\begin{aligned} X^{ij} = X^{ji}, [X^{ij}, X^{rl}] = 0 \text{ para } i \neq j \neq r \neq l, \\ [X^{ij} + X^{ir}, X^{jr}] = 0 \text{ para } i \neq j \neq r. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Sea $\mathfrak{a}_n^k$ la completación (con respecto a la graduación natural) de el álgebra de Lie sobre k con generadores $X^{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j$, y relaciones (5.1). Para $n \geq 3$ las álgebras $\mathfrak{a}_n^k$ no son libres, pero se reducen a libres: $\mathfrak{a}_n^k$ es el producto semidirecto de $\mathfrak{a}_{n-1}^k$ y el álgebra topológicamente libre generada por los $X_{in}, 1 \leq i \leq n-1$ (este último es un ideal en $\mathfrak{a}_n^k$). Para $n = 3$ hay una realización más conveniente: $\mathfrak{a}_3^k$ es la suma directa de su centro, generado por el elemento $X^{12} + X^{13} + X^{23}$, y el álgebra topológicamente libre generada por X^{12} y X^{23}. Por lo cual (2.14a) es equivalente a dos igualdades, una de las cuales se obtiene al substituir $X^{12} = A, X^{23} = B, X^{13} = -A - B$ y la otra al substituir $X^{12} = X^{23} = 0$. La segunda igualdad es tautológica, y la primera es de la forma

$$e^{A/2}\varphi(C, A)e^{C/2}\varphi(C, B)^{-1}e^{B/2}\varphi(A, B) = 1, A + B + C = 0. \tag{5.2a}$$

Similarmente, (2.14b) es equivalente a la igualdad

$$\varphi(B,A)^{-1}e^{A/2}\varphi(C,A)e^{C/2}\varphi(C,B)^{-1}e^{B/2} = 1, A+B+C=0. \tag{5.2b}$$

obtenida al substituir $X^{12}=C, X^{23}=B, X^{13}=A$. (5.2a) y (5.2b) implican (2.12). Por otra parte, si (2.12) es cierta, entonces (5.2a) y (5.2b) equivalen a la igualdad

$$e^{A/2}\varphi(C,A)e^{C/2}\varphi(B,C)e^{B/2}\varphi(A,B) = 1, A+B+C=0. \tag{5.3}$$

Así, $M_1(k)$ es el conjunto de los $\varphi \in \mathrm{Fr}_k(A,B)$ que satisfacen (2.12), (5.3), y (2.13). Sea $M_\mu(k)$ el conjunto de $\varphi \in \mathrm{Fr}_k(A,B)$ que satisface (2.12), (2.13), y la igualdad obtenida de (5.3) al reemplazar $e^{A/2}, e^{B/2}, e^{C/2}$, por $e^{\mu A/2}, e^{\mu B/2}, e^{\mu C/2}$. Sea $\underline{M}(k) = \{(\mu,\varphi)|\mu \in k, \varphi \in M_\mu(k)\}$ y $M(k)=\{(\mu,\varphi)\in \underline{M}(k)|\mu\neq 0\}$. En $\underline{M}(k)$ hay una acción de $\underline{\mathrm{GT}}(k)$: un elemento $(\lambda, f)\in \underline{\mathrm{GT}}(k)$ manda $(\mu,\varphi)\in \underline{M}(k)$ en $(\lambda\mu,\overline{\varphi})$, donde $\overline{\varphi}(A,B) = f(\varphi(A,B)e^A\varphi(A,B)^{-1}, e^B)\times\varphi(A,B)$ (cf. (4.12)).

Proposición 5.1. *La acción de $GT(k)$ en $M(k)$ es libre y transitiva.*

Demostración. Si $(\mu,\varphi)\in M(k)$ y $(\overline{\mu},\overline{\varphi})\in M(k)$, entonces existe exactamente un f tal que $\overline{\varphi}(A,B) = f(\varphi(A,B)e^A\varphi(A,B)^{-1}, e^B)\cdot\varphi(A,B)$. Debemos demostrar que $(\lambda, f)\in \mathrm{GT}(k)$, donde $\lambda = \overline{\mu}/\mu$. Probemos (4.10). Sea G_n el producto semidirecto de S_n y $\exp\mathfrak{a}_n^k$. Considere el homomorfismo $B_n\to G_n$ que manda σ_i en $\varphi(X^{1i}+\cdots+X^{i-1,i}, X^{i,i+1})^{-1}\sigma^{i,i+1}e^{\mu X^{i,i+1}/2}\times\varphi(X^{1i}+\cdots+X^{i-1,i}, X^{i,i+1})$, donde $\sigma^{ij}\in S_n$ transpone i y j. El induce un homomorfismo $K_n\to\exp\mathfrak{a}_n^k$, y por lo tanto un homomorfismo $\alpha_n : K_n(k)\to\exp\mathfrak{a}_n^k$, donde $K_n(k)$ es la completación k-pro unipotente de K_n. Es fácil ver que el lado izquierdo y derecho de (4.10) tienen la misma imagen en $\exp\mathfrak{a}_4^k$. Basta probar que α_n es un isomorfismo. El álgebra de Lie $K_n(k)$ es topológicamente generada por los elementos $\xi_{ij}, 1\leq i<j\leq n$, con relaciones obtenidas por (4.7)-(4.9) substituyendo $x_{ij}=\exp\xi_{ij}$. La parte principal de esas relaciones es las mismas que (5.1), mientras que $(\alpha_n)_*(\xi_{ij}) = \mu X^{ij}+\{$ términos menores$\}$, donde $(\alpha_n)_* :$ Lie $K_n(k)\to\mathfrak{a}_n^k$ es inducido por el homomorfismo α_n. Concluimos que α_n es un isomorfismo, es decir, probamos (4.10). (4.3) es obvio. Para probar (4.4), podemos interpretar lo en términos de K_3 y argumentar como en la prueba de (4.10), o, lo que es lo mismo, hacer la substitución

$$X_1 = e^A, X_2 = e^{-A/2}\varphi(B,A)e^B\varphi(B,A)^{-1}e^{A/2}, X_3 = \varphi(C,A)e^C\varphi(C,A)^{-1}, \tag{5.4}$$

donde $A+B+C=0$. □

Identificando $M_1(k)$ con el cociente de $M(k)$ por la acción natural de k^* ($c \in k^*$ manda (μ, φ) en $(c\mu, \tilde{\varphi})$, donde $\tilde{\varphi}(A, B) = \varphi(cA, cB)$), obtenemos una acción de $\mathrm{GT}(k)$ en $M_1(k)$. La proposición 5.1 dice que el subgrupo $\mathrm{GT}_1(k) = \{(\lambda, f) \in \mathrm{GT}(k) | \lambda = 1\}$ actúa libre y transitivamente; y si $M_1(k) \neq \emptyset$, entonces la sucesión $1 \to \mathrm{GT}_1(k) \to \mathrm{GT}(k) \xrightarrow{\nu} k^* \to 1$, donde $\nu(\lambda, f) = \lambda$, es exacta y a cada $\varphi \in M_1(k)$ le corresponde un homomorfismo $\theta_\varphi : k^* \to \mathrm{GT}(k)$ tal que $\nu \circ \theta_\varphi = id$, mientras que $\theta_\varphi(k^*)$ es el estabilizador de φ en $\mathrm{GT}(k)$.

Denotamos las álgebras de Lie de los grupos pro-algebraicos $\mathrm{GT}(k)$ y $\mathrm{GT}_1(k)$ por $\mathfrak{gt}(k)$ y $\mathfrak{gt}_1(k)$. Substituimos $f(X, Y) = \exp \varepsilon\psi(\ln X, \ln Y)$ y $\lambda = 1 + \varepsilon s$ en (4.3), (4.4), y (4.10), y linearizados con respecto a ε, veremos que $\mathfrak{gt}(k)$ consiste de pares (s, ψ), $s \in k, \psi \in \mathfrak{fr}_k(\alpha, \beta)$, tales que

$$\psi(\alpha, \beta) = -\psi(\beta, \alpha), \tag{5.5}$$

$$\psi(\alpha, \beta) + \psi(\beta, \gamma) + \psi(\gamma, \alpha) + \frac{s}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 0, \text{ con } e^\alpha \varepsilon^\beta e^\gamma = 1, \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi_{12}, \xi_{23} * \xi_{24}) + \psi(\xi_{13} * \xi_{23}, \xi_{34}) = \psi(\xi_{23}, \xi_{34}) + \\ + \psi(\xi_{12} * \xi_{13}, \xi_{24} * \xi_{34}) + \psi(\xi_{12}, \xi_{23}). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Aquí $u * v = \ln(e^u e^v)$, y los ξ_{ij} satisfacen las relaciones obtenidas de (4.7)-(4.9) al substituir $x_{ij} = \exp \xi_{ij}$. El conmutador en $\mathfrak{gt}(k)$ tiene la forma $[(s_1, \psi_1), (s_2, \psi_2)] = (0, \psi)$, donde $\psi = [\psi_1, \psi_2] + s_2 D(\psi_1) - s_1 D(\psi_2) + D_{\psi_2}(\psi_1) - D_{\psi_1}(\psi_2)$, donde D y D_ψ son derivaciones de $\mathfrak{fr}_k(\alpha, \beta)$ tales que $D(\alpha) = \alpha$, $D(\beta) = \beta$, $D_\psi(\alpha) = [\psi, \alpha]$, y $D_\psi(\beta) = 0$.

Si $M_1(k) \neq \emptyset$, entonces la sucesión

$$0 \to \mathfrak{gt}_1(k) \to \mathfrak{gt}(k) \xrightarrow{\nu_*} k \to 0, \nu_*(s, \psi) = s, \tag{5.8}$$

es exacta, y a cada $\varphi \in M_1(k)$ le corresponde un escisión, definida por el álgebra de Lie del estabilizador de φ en $\mathrm{GT}(k)$.

Proposición 5.2. *El mapeo $M_1(k) \to \{$ escisiones de la sucesión* (5.8)*$\}$ es biyectivo. En particular, la exactitud de* (5.8) *implica que $M_1(k) \neq \emptyset$.*

Demostración. El mapeo manda $\varphi \in M_1(k)$ en la escisión definida por el elemento $(1, \psi) \in \mathfrak{gt}(k)$, donde ψ se obtiene de la condición

$$\varphi(A, B)^{-1} \cdot \frac{d}{dt}\varphi(tA, tB)|_{t=1} = \psi(A, \varphi(A, B)^{-1} B \varphi(A, B)). \tag{5.9}$$

Dado ψ, existe exactamente un $\varphi \in \mathrm{Fr}_k(A, B)$ que satisface (5.9). En vista de (5.5), (5.9) sigue siendo valido si $\varphi(A, B)$ es reemplazado por $\varphi(B, A)^{-1}$. Concluimos que

$\varphi(A,B)=\varphi(B,A)^{-1}$. Probaremos (5.3). Denote el lado izquierdo de (5.3) por $Q(A,B)$. Entonces

$$Q(A,B)^{-1}\frac{d}{dt}Q(tA,tB)|_{t=1}=\psi(A,\overline{B})+\psi(\overline{B},\overline{C})+\psi(\overline{C},\overline{A})+\frac{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}}{2}, \tag{5.10}$$

donde $\overline{A}=Q(A,B)^{-1}AQ(A,B)$, $\overline{B}=\varphi(A,B)^{-1}B\varphi(A,B)$,
$\overline{C}=\varphi(A,B)^{-1}e^{-B/2}\varphi(B,C)^{-1}C\varphi(B,C)e^{B/2}\varphi(A,B)$.

Supongamos que hemos probado que $Q(A,B)\equiv 1 \mod \text{grado } n$ (es decir, $Q(A,B)=1+$ términos de grado mayor o igual que n). Si $Q(A,B)\equiv 1+q(A,B) \mod \text{grado } (n+1)$, donde q es homogéneo de grado n, entonces el lado izquierdo de (5.10) es congruente con $nq(A,B) \mod \text{grado } (n+1)$. Como $e^{\overline{B}}e^{\overline{C}}=e^{-A/2}Q(A,C)e^{-A/2}Q(A,B)$, encontramos, que si α,β, y γ son las clases residuales de A, $\overline{B}-q(A,B)$, y $\overline{C}-q(A,C) \mod \text{grado } (n+1)$, entonces $e^{\alpha}e^{\beta}e^{\gamma}=1$. Así se satisface (5.6) con $s=1$. Por lo tanto el lado derecho de (5.10) es congruente con $q(A,B)+q(A,C) \mod \text{grado } (n+1)$. De la definición de $\mathbb{Q}$ se sigue que $q(A,C)=q(B,A)$. Así, $q(B,A)=(n-1)q(A,B)$. Entonces, $q=0$ (para $n=2$, esto se sigue de que $q(A,B)$ es un polinomio de *Lie* y por lo tanto proporcional a $[A,B]$).

Queda por demostrar (2.13). Denotemos el lado izquierdo de (2.13) por f, y el lado derecho por g. Supongamos que hemos probado que $f\equiv g \mod \text{grado } (n)$. Para probar que $f\equiv g \mod \text{grado } (n+1)$, basta probar que

$$\begin{aligned}&f(X^{12},X^{13},\cdots)^{-1}\frac{d}{dt}f(tX^{12},tX^{13},\cdots)|_{t=1}\\ &\equiv g(X^{12},X^{13},\cdots)^{-1}\frac{d}{dt}g(tX^{12},tX^{13},\cdots)|_{t=1} \mod \text{grado } (n+1),\end{aligned}$$

$\square$

es decir, que

$$\psi(\alpha,\beta)+\psi(\gamma,\delta)\equiv\psi(\lambda,\delta)+\psi(\mu,\nu)+\psi(\alpha,\lambda) \mod \text{grado } (n+1), \tag{5.11}$$

donde

$$\begin{gathered}\alpha=X^{12},\beta=f^{-1}(X^{23}+X^{24})f,\gamma=X^{13}+X^{23},\\ \delta=\varphi(X^{13}+X^{23},X^{34})^{-1}X^{34}\varphi(X^{13}+X^{23},X^{34}),\\ \lambda=\varphi(X^{12},X^{23})^{-1}X^{23}\varphi(X^{12},X^{23}),\\ \mu=\varphi(X^{12},X^{23})^{-1}(X^{12}+X^{13})\varphi(X^{12},X^{23}),\\ \nu=\varphi(X^{12},X^{23})^{-1}\varphi(X^{12}+X^{13},X^{24}+X^{34})^{-1}\times\end{gathered}$$

$$\times(X^{24}+X^{34})\varphi(X^{12}+X^{13},X^{24}+X^{34})\varphi(X^{12},X^{23}).$$

Usando (2.12), (5.3), y la congruencia $f \equiv g \mod \text{grado}\,(n)$, construimos (ver la prueba de la proposición 5.1) un homomorfismo $h : K_4(k) \mapsto \exp(\mathfrak{a}_4^k/I)$, donde $I = \{a \in \mathfrak{a}_4^k | a \equiv 0 \mod \text{grado}\,(n+1)\}$. Entonces en (5.7) poniendo $\xi_{ij} = \ln h(x_{ij})$, donde las x_{ij} son definidas por (4.6), obtenemos (5.11). □

Proposición 5.3. $M_1(k) \neq \varnothing$.

Demostración. Debido a que $M_1(\mathbb{C}) \neq \varnothing$ (ver § 2), la sucesión (5.8) es exacta para $k = \mathbb{C}$. Entonces $M_1(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ (ver Proposición 5.2) y, mas aun $M_1(k) \neq \varnothing$. Otra versión de la prueba: dado que la composición del homomorfismo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \mapsto \text{GT}(\mathbb{Q}_l)$ (ver 4) y el homomorfismo $\nu : \text{GT}(\mathbb{Q}_l) \mapsto \mathbb{Q}_L^*$ es el homomorfismo $f : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \mapsto \mathbb{Z}_l^*$ definido por la relación $\sigma^{-1}(\zeta) = \zeta^{f(\sigma)}$, donde $\zeta^{l^n} = 1, \sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, se sigue que la imagen de ν es infinita, la sucesión (5.8) es exacta para $k = \mathbb{Q}_l$, etc. □

Se sigue que Teorema A'' (ver § 1) esta demostrado.

Proposición 5.4. *El conjunto* $M_1^+(k) = \{\varphi \in M_1(k) | \varphi(-A,-B) = \varphi(A,B)\}$ *es no vació. En este conjunto actúa el grupo* $GT^+(k) = \{(\lambda, f) \in GT(k) | f(X^{-1}, Y^{-1}) = f(X,Y)\}$, *y la acción en* $M_1^+(k)$ *por el subgrupo* $GT^+(k) \cap GT_1(k)$ *es libre y transitiva.*

Demostración. $M_1^+(k)$ es el conjunto de elementos invariantes bajo σ de $M_1(k)$, donde $\sigma \in \text{GT}(k)$ es la involución correspondiente a $\lambda = -1, f = 1$. Dado que (5.8) tiene una escisión invariante bajo σ, tenemos que $M_1^+(k) \neq \varnothing$. El resto es obvio. □

Nota. $\varphi_{KZ}(-A,-B) \neq \varphi_{KZ}(A,B)$ *(ver* (2.15), (2.17), *o* (2.18)*).*

La prueba previa de la Proposición 5.4 no es constructiva. Nuestro objetivo siguiente es probar la Proposición 5.8, en donde se mostrara que es posible construir elementos de $M_1(k)$ por aproximaciones sucesivas. Para este objetivo introduciremos la siguiente modificación $\text{GRT}(k)$ del grupo $\text{GT}(k)$. Denotamos por $\text{GRT}_1(k)$ el conjunto de todos los $g \in \text{Fr}_k(A,B)$ tales que

$$g(B,A) = g(A,B)^{-1}, \tag{5.12}$$

$$g(C,A)g(B,C)g(A,B) = 1 \text{ para } A+B+C=0, \tag{5.13}$$

$$A + g(A,B)^{-1}Bg(A,B) + g(A,C)^{-1}Cg(A,C) = 0$$
$$\text{para } A+B+C=0 \tag{5.14}$$

$$g(X^{12},X^{23}+X^{24})g(X^{13}+X^{23},X^{34})$$
$$= g(X^{23},X^{34})g(X^{12}+X^{13},X^{24}+X^{34})g(X^{12},X^{23}), \tag{5.15}$$

donde los X^{ij} satisfacen (5.1). $\mathrm{GRT}_1(k)$ es un grupo con la operación

$$(g_1 \circ g_2)(A,B) = g_1(g_2(A,B)Ag_2(A,B)^{-1}, B) \cdot g_2(A,B). \tag{5.16}$$

En $\mathrm{GRT}_1(k)$ esta definida la acción de k^*, dada por $\tilde{g}(A,B) = g(c^{-1}A, c^{-1}B), c \in k^*$. Denotamos por $\mathrm{GRT}(k)$ al producto semidirecto de k^* y $\mathrm{GRT}_1(k)$. El álgebra de Lie $\mathfrak{grt}_1(k)$ del grupo $\mathrm{GRT}_1(k)$ consiste en series $\psi \in \mathfrak{fr}_k(A,B)$ tales que

$$\psi(B,A) = -\psi(A,B), \tag{5.17}$$

$$\psi(C,A) + \psi(B,C) + \psi(A,B) = 0 \text{ para } A+B+C=0, \tag{5.18}$$

$$[B, \psi(A,B)] + [C, \psi(A,C)] = 0 \text{ para } A+B+C=0 \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} &\psi(X^{12}, X^{23}+X^{24}) + \psi(X^{13}+X^{23}, X^{34}) \\ = {}&\psi(X^{23}, X^{34}) + \psi(X^{12}+X^{13}, X^{24}+X^{34}) + \psi(X^{12}, X^{23}), \end{aligned} \tag{5.20}$$

donde las X^{ij} satisfacen (5.1). Un conmutador $<,>$ en $\mathfrak{grt}_1(k)$ es de la forma

$$< \psi_1, \psi_2 >= [\psi_1, \psi_2] + D_{\psi_2}(\psi_1) - D_{\psi_1}(\psi_2), \tag{5.21}$$

donde $[\psi_1, \psi_2]$ es el conmutador en $\mathfrak{fr}_k(A,B)$ y D_ψ es la derivación de $\mathfrak{fr}_k(A,B)$ data por $D_\psi(A) = [\psi, A], D_\psi(B) = 0$. El álgebra $\mathfrak{grt}_1(k)$ es graduada, y el álgebra de Lie $\mathfrak{grt}_1(k)$ del grupo $\mathrm{GRT}(k)$ es la suma semi directa del álgebra de dimensión 1 k y $\mathfrak{grt}_1(k)$, donde k actúa en $\mathfrak{grt}_1(k)$ de la manera siguiente: $1 \in k$ transforma un elemento homogéneo $\psi \in \mathfrak{grt}_1(k)$ de grado n en $-n\psi$.

Notas. *1.* $\mathfrak{grt}_1(k)$ *tiene la filtración cuyo termino n-ésimo es* $\{(0,\psi) \in \mathfrak{grt}_1(k) \mid \psi \equiv 0 \mod \text{grado } n\}$*. Podemos usar la filtración para construir una álgebra de Lie graduada completa* $\hat{\mathfrak{gr}}\mathfrak{gt}_1(k)$*. Se mostrara (ver proposición 5.6) que* $\hat{\mathfrak{gr}}\mathfrak{gt}_1(k) = \mathfrak{grt}_1(k)$*. Esta es la razón por la que usamos las notaciones* $\mathfrak{grt}$*, GRT. No es difícil de probar la inclusión* $\hat{\mathfrak{gr}}\mathfrak{gt}_1(k) \subset \mathfrak{grt}_1(k)$*:* (5.19) *se sigue de la relación* $\psi(\alpha,\beta) - e^{-\beta}\psi(\alpha,\beta)e^{\beta} + e^{\gamma}\psi(\alpha,\gamma)e^{-\gamma} - \psi(\alpha,\gamma) = 0$*, donde* $(0,\psi) \in \mathfrak{gt}_1(k), e^{\alpha}e^{\beta}e^{\gamma} = 1$*. A su vez, esto se sigue del resultado análogo valido en* $GT_1(k)$*: si* $(1,f) \in GT_1(k)$*, entonces*

$$\begin{aligned} &X_1 \cdot f(X_1,X_2)^{-1}X_2 f(X_1,X_2) \cdot f(X_1,X_3)^{-1}X_3 f(X_1,X_3) \\ &= X_1 f(X_2,X_1) X_2 f(X_3,X_2) X_3 f(X_1,X_3) \\ &= f(\widetilde{X}_2, X_1) f(X_3, \widetilde{X}_2) f(X_1,X_3) = 1 \end{aligned}$$

para $X_1X_2X_3 = 1$*, donde* $\tilde{X}_2 = X_1X_2X_1^{-1} = X_3^{-1}X_2X_3$*. Sin embargo no es necesario verificar* (5.19) *(ver Proposición 5.7).*

2. *La conección entre $GT_1(k)$ y $GRT_1(k)$ también se puede explicar de la siguiente manera: si $\{g_\varepsilon\}$ es una familia de elementos de $Fr_k(A,B)$ tal que $(1, f_\varepsilon) \in GT_1(k)$ para $\varepsilon \neq 0$, donde $f_\varepsilon(X,Y) = g_\varepsilon(\varepsilon^{-1}\ln X, \varepsilon^{-1}\ln Y)$, entonces $g_0 \in GRT_1(k)$.*

3. *$GRT_1(k)$, y $GT(k)$ tienen una interpretación categórica. Sea C una categoría tensorial, y supongamos que hemos fijado automorfismos $\tau_{V,W} \in Aut(V \otimes W)$, que son functoriales en $V, W \in C$, con $c_{V,W}\tau_{V,W} = \tau_{W,V}c_{V,W}$ y*

$$\ln \tau_{U\otimes V,W} = id_U \otimes \ln \tau_{V,W} + (c_{U,V}^{-1} \otimes id)(id_V \otimes \ln \tau_{U,W})(c_{U,V} \otimes id),$$

donde c es el isomorfismo de conmutatividad (por supuesto, uno primero debe fijar las condiciones necesarias en C y τ para que la igualdad tenga sentido; ejemplo típico: C es la categoría de $U\mathfrak{g}$ módulos completos h-ádicamente, y $\tau_{V,W}$ es el operador en $V \otimes W$ correspondiente a $e^{\hbar t} \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ y t son los objetos definidos en § 1). Asumiendo que todas las expresiones de la forma $g(\ln \tau_{U,V} \otimes id_W, id_U \otimes \ln \tau_{V,W})$, donde $g(A,B) \in FR_k(A,B)$. Entonces si $g \in GRT_1(k)$ y consideramos $g(\ln \tau_{U,V} \otimes id_W, id_U \otimes \ln \tau_{V,W})$ como nuevo isomorfismo de asociatividad $(U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$ sin cambiar c ni τ, entonces obtenemos una estructura del mismo tipo que la estructura original.

La formula $\tilde{\varphi}(A,B) = \varphi(g(A,B)Ag(A,B)^{-1}, B) \cdot g(A,B)$, donde $\varphi \in M_\mu(k)$ y $g \in GRT_1(k)$, define una acción derecha de $GRT_1(k)$ en $M_\mu(k)$. Esto induce una acción de $GRT_1(k)$ en $\underline{M}(k) = \{(\mu,\varphi) | \varphi \in M_\mu(k)\}$. Las formulas $\tilde{\varphi}(A,B) = \varphi(c^{-1}A, c^{-1}B)$ y $\tilde{\mu} = c^{-1}\mu$, donde $c \in k^*$, definen una acción de k^* en $\underline{M}(k)$. Como resultado, obtenemos una acción derecha de $GRT(k)$ en $\underline{M}(k)$. Esta acción conmuta con la acción izquierda de $GT(k)$.

Proposición 5.5. *La acción de $GRT(k)$ en $M(k)$ es libre y transitiva. La acción de GRT_1 en $M_1(k)$ también tiene esas dos propiedades.*

Demostración. Es suficiente con probar el segundo enunciado. Si $\varphi, \overline{\varphi} \in M_1(k)$ entonces existe exactamente un $g \in \mathrm{Fr}_k(A,B)$ tal que $\overline{\varphi}(A,B) = \varphi(g(A,B)Ag(A,B)^{-1}, B) \times g(A,B)$; explícitamente,

$$g(A,B) \quad = \quad \chi(\overline{\varphi}(A,B)A\overline{\varphi}(A,B)^{-1}, B) \cdot \overline{\varphi}(A,B), \tag{5.22}$$

donde $\chi \in \mathrm{Fr}_k(A,B)$ es inversa a ϕ con respecto a la operación (5.16), i.e., $\chi(\phi(A,B)A\phi(A,B)^{-1}, B) \cdot \phi(A,B) = 1$. Siguiendo los pasos de la prueba de la Proposición 5.1, encontramos que $(0, f) \in \underline{\mathrm{GT}}(k)$, donde $f(X,Y) = \chi(\ln X, \ln Y)$. La ecuación (5.22) dice que g es el resultado de la acción de $(0,f)$ en $\overline{\varphi}$, y por lo tanto $g \in M_0(k)$, i.e., g satisface (5.12),(5.13) y (5.15). Ahora usaremos la igualdad

$$\begin{aligned}\ln X_1 + X_1^{1/2} f(X_1,X_2)^{-1} \ln X_2 \cdot f(X_1,X_2) X_1^{-1/2} \\ + f(X_1,X_3)^{-1} \ln X_3 \cdot f(X_1,X_3) = 0,\end{aligned} \tag{5.23}$$

donde $X_1X_2X_3 = 1$, demostrado por la substitución (5.4). Finalmente, haciendo una substitución como (5.4) en (5.23) con φ reemplazada por $\bar{\varphi}$, y usando (5.22), obtenemos (5.14). □

De la Proposición 5.1 y Proposición 5.5 se deduce:

Proposición 5.6. *Cada $\varphi \in M(k)$ determina un isomorfismo $s_\varphi : GRT(k) \xrightarrow{\sim} GT(k)$, que se caracteriza por el hecho de que $\gamma \in GRT(k)$ actúa on φ por la derecha de la misma manera que $s_\varphi(\gamma)$ actúa por la izquierda. El diagrama*

$$\begin{tikzcd} GRT(k) \arrow[rr, "s_\varphi"] \arrow[dr] & & GT(k) \arrow[dl] \\ & k^* & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, de tal manera que $s_\varphi(GRT_1(k)) = GT_1(k)$. La escisión de la secuencia (5.8) que corresponde a $\varphi \in M_1(k)$ esta definida por el homomorfismo $s_\varphi \circ i : k^* \mapsto GT(k)$, donde i es el encaje canónico $k^* \to GRT(k)$. Finalmente, $\hat{\mathfrak{grgt}}_1(k) = \mathfrak{grt}_1(k)$, y si $\varphi \in M_1(k)$, entonces s_φ induce la función identidad $\mathfrak{grt}_1(k) \to \hat{\mathfrak{grgt}}_1(k)$.

Proposición 5.7. (5.17), (5.18) *y* (5.20) *implican* (5.19).

Demostración. Denote el lado izquierdo de (5.19) por $s(B,C)$. Entonces $s(B,C) = s(C,B)$. Mas aun,

$$s(Y_1,Y_2) = s(Y_1, Y_2+Y_3) + s(Y_1+Y_2, Y_3) - s(Y_2,Y_3) = 0, \tag{5.24}$$

donde los Y_i son generadores del álgebra libre de Lie. En efecto, denote el lado izquierdo de (5.24) por $u(Y_1,Y_2,Y_3)$. Entonces se sigue de (5.17) y (5.18) que $u(X^{14},X^{24},X^{34}) = [X^{14}+X^{24}+X^{34},\mu^{1234}]-[X^{14}+X^{24},\mu^{1243}]+[X^{14},\mu^{1423}]$, donde $\mu^{1234} = \{$ el lado izquierdo de (5.20)$\} - \{$ el lado derecho de (5.20)$\}$. Entonces, (5.17), (5.18), y (5.20) implican (5.24). Falta probar que si un polinomio simétrico de Lie $s(B,C)$ satisface (5.24), entonces $s = 0$. Es bien sabido que si $s(x,y)$ es un polinomio ordinario (conmutativo) en dos conjuntos de variables $x = (x^{(1)},\cdots,x^{(n)})$ y $y = (y^{(1)},\cdots,y^{(n)})$ tales que $s(y,x) = s(x,y)$ y se satisface (5.24), entonces s es de la forma $f(x+y)-f(x)-f(y)$. Esto se puede observar (ver la prueba de [1, Proposición 2.2]) al representar el espacio de polinomios homogéneos $s(X,Y)$ de grado n en la forma $V_m \otimes_{S_m} W_m$, donde V_m es el espacio de polinomios en $x_1 = (x_1^{(1)},\cdots,x_1^{(n)}),\cdots,x_m = (x_m^{(1)},\cdots,x_m^{(n)})$, lineal en cada x_i, y W_m es un S_m modulo apropiado. El mismo argumento aplica al caso de Lie (por V_m debemos considerar el espacio de todos los polinomios de Lie en m variables, lineal en cada variable); pero ahora $f(x)$ es un polinomio de *Lie* en x, i.e., $f(x) = cx, c \in k$. Entonces $s = 0$. $\square$

Pongamos $\mathfrak{fr}_k^{(r)}(A,B) = \mathfrak{fr}_k(A,B)/I_r$, donde $I_r = \{u \in \mathfrak{fr}_k(A,B) | u \equiv 0 \mod \text{grado } r\}$. Sea $\mathrm{Fr}_k^{(r)}(A,B) = \exp \mathfrak{fr}_k^{(r)}(A,B)$, y sea $M_1^{(r)}(k)$ el conjunto de todos los $\varphi \in \mathrm{Fr}_k^{(r)}(A,B)$ que satisfacen (2.12), (5.3), y (2.13) $\mod$ grado r.

Proposición 5.8. *La función $M_1^{(r+1)}(k) \to M_1^{(r)}(k)$ es suprayectiva.*

Demostración. Similarmente a $\mathrm{GRT}_1(k)$ consideramos al grupo $\mathrm{GRT}_1^{(r)}(k)$, consistente de todos los elementos $g \in \mathrm{Fr}_k^{(r)}(A,B)$ que satisfacen (5.12)-(5.15) $\mod$ grado n. Similarmente a la Proposición 5.5 podemos probar que $\mathrm{GRT}_1^{(r)}(k)$ actúa en $M_1^{(r)}(k)$ de manera libre y transitiva. Basta probar que el homomorfismo $\mathrm{GRT}_1^{(r+1)}(k) \to \mathrm{GRT}_1^{(r)}(k)$ es suprayectivo. Como ambos grupos son unipotentes y por lo tanto conexos, basta con probar suprayectividad del homomorfismo $\mathfrak{grt}_1^{(r+1)}(k) \to \mathfrak{grt}_1^{(r)}(k)$. Y de hecho, de la Proposición 5.7 se sigue que $\mathfrak{grt}_1^{(r)}(k)$ es la suma de los componentes homogéneos de $\mathfrak{grt}_1(k)$ de grado menor que r. $\square$

Nota.

1. *Cualquier $\varphi \in M_1^{(r)}(k)$ tal que $\varphi(-A,-B) = \varphi(A,B)$ se puede extender a $\overline{\varphi} \in M_1^{(r+1)}(k)$ tal que $\overline{\varphi}(-A,-B) = \overline{\varphi}(A,B)$: basta con poner $\overline{\varphi}(A,B) = (\tilde{\varphi}(A,B) + \tilde{\varphi}(-A,-B))/2$, donde $\tilde{\varphi}$ es cualquier imagen inversa de φ en $M_1^{(r+1)}(k)$.*

2. *La prueba de la Proposición 5.8 usa la Proposición 5.3. Sin usar la Proposición 5.3, uno puede mostrar, por métodos estándares en la teoría de la deformación, que la obstrucción a la existencia, para alguna $\varphi \in M_1^{(r)}(k)$, de una imagen inversa en $M_1^{(r+1)}(k)$ pertenece a la componente r-esima del cuarto grupo de cohomología del siguiente complejo $\underline{L}^*$. Primero considere un complejo L^*, donde L^n es la suma directa algebraica de los componentes homogéneos de $\mathfrak{a}_n^k$, y la diferencial en L^* es tal que para cada álgebra de Lie/k $\mathfrak{g}$ y cada invariantes simétrico $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ el homomorfismo $\mathfrak{a}_n^k \to (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$ que manda X^{ij} en t^{ij} define un morfismo de L^* al complejo $C^*(\mathfrak{g})$ (ver (3.7)). $C^*(\mathfrak{g})$ contiene el subcomplejo de Harrison-Barr $\underline{C}^*(\mathfrak{g})$ ($\oplus C^n(\mathfrak{g})$ es el super álgebra de Lie generada por el espacio vectorial $U\mathfrak{g}$, cuyos elementos se consideran impares, donde $\oplus_n C^n(\mathfrak{g})$ es un álgebra libre asociativa). En [23] una proyección $e_n \in \mathbb{Q}[S_n]$ es construida tal que $\underline{C}^n(\mathfrak{g}) = e_n \cdot C^n(\mathfrak{g})$; a saber, $e_n = (n!)^{-1} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) c_\sigma \cdot \sigma$, donde $\sigma \in S_n, \varepsilon(\sigma)$ es el signo de σ, y $c_\sigma = (-1)^a a!(n-1-a)!$, $a = $ Card$\{k | \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k+1)\}$.*

El complejo $\underline{L}^*$ esta definido por la formula $\underline{L}^n = e_n \cdot L^n$. El autor no sabe si su cuarto grupo de cohomología H^4 es igual a 0. Es fácil ver que $H^n = \underline{L}^n = 0$ para $n < 2$, $dim H^2 = dim \underline{L}^2 = 1$, y H^3 es la suma directa algebraica de los componentes homogéneos de $\mathfrak{grt}_1(k)$.

Proposición 5.9. *(5.12), (5.13), y (5.15) implican (5.14). En otras palabras, $GRT_1(k) = M_0(k)$.*

Demostración. Basta con mostrar que si $\varphi \in M_0(k)$, $\varphi \equiv 1 \mod \text{grado } n$, entonces el resultado de la acción en φ por algún $g \in \mathrm{GRT}_1(k)$, donde $g \equiv 1 \mod \text{grado } n$, es congruente con $1 \mod \text{grado } (n+1)$. En efecto, sea ψ la componente de grado n de la serie $\ln\varphi \in \mathfrak{fr}_k(A, B)$. Entonces ψ satisface (5.17), (5.18), y (5.20), y por lo tanto también (5.19), i.e., $\phi \in \mathfrak{grt}_1(k)$. Por lo tanto podemos poner $g = \mathrm{Exp}(-\psi)$, donde Exp es la función exponencial $\mathfrak{grt}_1(k) \to \mathrm{GRT}_1(k)$ correspondiente a la operación (5.16). □

Notas. *1. Con la ayuda de la Proposición 5.9 o su método de prueba, es sencillo obtener una prueba de la Proposición 5.5 mas simple que la expuesta arriba, pero usando Proposición 5.7.*

2. Aquí hay un bosquejo de otra prueba de la Proposición 5.2. Denote por Spl(k) el conjunto de homomorfismos $k \to \mathfrak{gt}(k)$ que escinden (5.8). Ponga $GT_0(k) = \{(\lambda, f) \in \underline{GT}(k) | \lambda = 0\}$ y $GT_0'(k) = \{(0, f) \in GT_0(k) | f$ satisface (5.23)$\}$. En el proceso de probar la Proposición 5.5 construimos una función $M_1(k) \to GT_0'(k)$. Es fácil ver que es biyectiva. Por otra parte, un elemento de Spl(k), o, lo que es lo mismo, un elemento de $\mathfrak{gt}(k)$ de la forma $(1, \psi)$, determina a un subgrupo uni-paramétrico $\gamma : k^* \to GT(k)$. A priori, γ es una función formal (i.e., $\gamma(\lambda)$ se expresa en términos de series formales en $\lambda - 1$), pero de hecho λ es regular y, mas aun, se extiende una función regular (i.e., polinomio) $\underline{\gamma} : k^* \to \underline{GT}(k)$. Esto se sigue de $\gamma(\lambda) = (\lambda, f_\lambda)$, donde

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} f_\lambda(X, Y) = \psi(\lambda f_\lambda(X, Y) \cdot \ln X \cdot f_{\lambda\succ}(X, Y)^{-1}, \lambda \ln Y) \cdot f_{\lambda\succ}(X, Y).$$

Fijemos $f = f_0$. Entonces $(0, f) \in GT_0'(k)$. En efecto, pues $(\lambda, f_\lambda) \in \underline{GT}(k)$ y $(-1, 1) \in \underline{GT}(k)$, tenemos $(-\lambda, f_\lambda) = (-1, 1) \cdot (\lambda, f_\lambda) \in \underline{GT}(k)$, y para probar (5.23) es suficiente con substraer de la igualdad (4.4) para (λ, f_λ) la igualdad (4.4) para $(-\lambda, f_\lambda)$, dividir por λ y dejar λ tender a 0. La composición Spl$(k) \to GT_0'(k) \to M_1(k)$ es inversa a la función $M_1(k) \to$ Spl(k) usado en la Proposición 5.2.

3. En realidad, $GT_0(k) = GT_0'(k)$. En efecto, elije $\varphi \in M_1(k)$, y sea g el resultado de la acción de $(0, f) \in GT_0(k)$ en φ. Entonces $g \in M_0(k)$. Por lo tanto $g \in$

$GRT_1(k)$ (ver la Proposición 5.9). Si $\tilde{\varphi}$ es el resultado de la acción derecha de g^{-1} en φ, entonces el resultado de la acción izquierda de $(0,f)$ en $\tilde{\varphi}$ es 1, i.e., $(0,f)$ es la imagen de $\tilde{\varphi}$ bajo la función canónica $M_1(k) \to GT_0'(k)$.

4. *Aquí hay otra prueba del Teorema B. Fije $\varphi \in M_1(k)$, y sea $(0,f)$ el elemento correspondiente en $GT_0'(k)$. Sea $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ una álgebra quasitriangular quasi-Hopf EUC sobre $k[[h]]$. Bajo la acción del elemento $(0,f) \in GT_0'(k)$ en $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ (ver (4.12)), obtenemos una álgebra triangular quasi-Hopf EUC $(A,\Delta,\varepsilon,\bar{\Phi},\bar{R})$ (triangular es quasitriangular mas la igualdad $\bar{R}^{21} = \bar{R}^{-1}$). De las Proposiciones 3.6 y 3.7 de [1], una torsión elegida cuidadosamente hace $\bar{R} = 1$ y $\bar{\Phi} = 1$, y entonces (A,Δ,ε) es el álgebra envolvente universal de algún álgebra por deformación de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $k[[h]]$. En esta situación definimos $t = 2h^{-1} \cdot \ln R$ y mostramos que t es un elemento simétrico invariante bajo $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, donde $\Phi = \varphi(ht^{12}, ht^{23})$. Como $\overline{R} = 1$, tenemos $R^{21} = R$, i.e., $t^{21} = t$. De (1.5) se sigue que t es invariante bajo $\mathfrak{g}$. Substituyendo $X_1 = (\Delta \otimes id)(R^{12}R)^{-1}$, $X_2 = (R^{12})^{-1}(\Phi^{213})^{-1}R^{31}R^{13}(\Phi^{213})R^{12}$, y $X_3 = \Phi^{-1}R^{32}R^{23}\Phi$ en (5.23), y usando el hecho que $X_1^{-1} \cdot R^{21}R^{12}$ conmuta con X_1, X_2, X_3, deducimos que*

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)(\ln(R^{21}R)) = \overline{\Phi}^{-1} \cdot \ln(R^{32}R^{23}) \cdot \overline{\Phi} \\ +(\widetilde{R}^{12})^{-1}(\overline{\Phi}^{213})^{-1} \cdot \ln(R^{31}R^{13}) \cdot \overline{\Phi}^{213}\overline{R}^{12},\end{aligned}$$

i.e. $(\Delta \otimes id)(t) = t^{13} + t^{23}$. Entonces, $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Finalmente, tenemos $\varphi(\chi(A,B)A\chi(A,B)^{-1},B) \cdot \chi(A,B) = 1$, donde $\chi(A,B) = f(e^A,e^B)$ (ver la prueba de la Proposición 5.5). Poniendo $A = h \cdot \Phi t^{1/2}\Phi^{-1}$ y $B = ht^{23}$, obtenemos $\varphi(h \cdot \overline{\Phi}t^{12}\overline{\Phi}^{-1}, ht^{23}) \cdot \overline{\Phi}\Phi^{-1} = 1$, i.e., $\Phi = \varphi(ht^{12}, ht^{23})$.

6. Sobre el álgebra $\mathfrak{grt}_1(k)$

Recordemos que denotamos por $\mathfrak{fr}_k(A,B)$ al conjunto de series formales de Lie $\psi(A,B)$ con coeficientes en k, y por $\mathfrak{grt}_1$ el conjunto de todas las $\psi \in \mathfrak{fr}_k(A,B)$ que satisfacen (5.17)-(5.20). Por la Proposición 5.7, las identidades (5.17), (5.18), y (5.20) implican (5.19). Mas aun, (5.17) y (5.19) implican (5.18): en efecto, de (5.17) y (5.19) uno puede derivar sencillamente que el lado izquierdo de (5.18) conmuta con A y B. Ahora, $\mathfrak{grt}_1(k)$ es un álgebra de Lie con conmutador (5.21). El conjunto de los $\psi \in \mathfrak{fr}_k(A,B)$ que satisface (5.17), (5.19), y por lo tanto (5.18) también forma un álgebra de Lie con conmutador (5.21). Llamamos a esta álgebra $\mathrm{Ih}(k)$, en honor a Ihara. Ambas álgebras $\mathfrak{grt}_1(k)$ y $\mathrm{Ih}(k)$ son graduadas: $\mathfrak{grt}_1(k) = \widehat{\oplus}_n \mathfrak{grt}_1^n(k)$ y $\mathrm{Ih}(k) = \widehat{\oplus}_n \mathrm{Ih}^n(k)$, donde $\widehat{\oplus}$ es la completación de la suma directa. Como $\mathrm{Ih}^1(k)$ es generado por el elemento central $A - B$, el estudio de $\mathrm{Ih}(k)$ se reduce al estudio del subálgebra $\underline{\mathrm{Ih}}(k) = \widehat{\oplus}_{n>1} \mathrm{Ih}^n(k)$. Notemos que

$\mathfrak{grt}_1(k) \subset \underline{\mathrm{Ih}}(k)$ (basta con substituir $X^{12} = A$ y $X^{13} = X^{14} = X^{23} = X^{34} = 0$ en (5.20)).

En [13] y [14], Ihara usa la siguiente realización de $\underline{\mathrm{Ih}}(k)$. El denomina a una derivación continua $\partial : \mathfrak{fr}_k(A,B) \to \mathfrak{fr}_k(A,B)$ como *especial* si $\partial(A) = [R_1, A], \partial(B) = [R_2, B]$, y $\partial(C) = [R_3, C]$ para ciertos $R_1, R_2, R_3 \in \mathfrak{fr}_k(A,B)$ y donde $C = -A - B$. Las derivaciones especiales forman un álgebra de Lie $\mathrm{SDer}\mathfrak{fr}_k(A,B)$. Considera la acción de grupo S_3 en $\mathfrak{fr}_k(A,B)$ que permuta A, B, C. Esta acción induce una acción de S_3 en $\mathrm{SDer}\mathfrak{fr}_k(A,B)$ y en el conjunto de derivaciones internas $\mathrm{Int}\mathfrak{fr}_k(A,B)$. Es posible mostrar que la subálgebra de invariantes bajo la acción de S_3 en el álgebra $\mathrm{SDer}\mathfrak{fr}_k(A,B)/\mathrm{Int}\mathfrak{fr}_k(A,B)$ es isomorfa canónicamente a $\underline{\mathrm{Ih}}(k)$: un elemento $\psi \in \underline{\mathrm{Ih}}(k)$ corresponde a la clase de la derivación $\partial_\psi : \mathfrak{fr}_k(A,B) \to \mathfrak{fr}_k(A,B)$ dada por $\partial_\psi(A) = 0$ y $\partial_\psi(B) = [\psi, B]$. En efecto, podemos identificar $\mathrm{SDer}\mathfrak{fr}_k(A,B)/\mathrm{Int}\mathfrak{fr}_k(A,B)$ con el álgebra de derivaciones $\partial : \mathfrak{fr}_k(A,B) \to \mathfrak{fr}_k(A,B)$ tal que $\partial(A) = 0, \partial(B) = [\psi, B]$, y $\partial(C) = [\chi, C]$ para algunos $\psi, \chi \in \mathfrak{fr}_k(A,B)$ tales que $[\psi(A,B), B] + [\chi(A,B), C] = 0$, $\psi \equiv 0 \mod \text{grado } 2$, $\chi \equiv 0 \mod \text{grado } 2$. La invariancia de ∂ con respecto a la permutación de B y C significa que $\chi(A,B) = \psi(A,C)$. La invariancia de ∂ modulo $\mathrm{Int}\mathfrak{fr}_k(A,B)$ con respecto a la permutación de A y B significa que $\psi(B,A) = -\psi(A,B)$. Finalmente, $\partial_{<\psi_1,\psi_2>} = [\partial_{\psi_1}, \partial_{\psi_2}]$: en efecto, en (5.21) $D_\psi = \mathrm{ad}\psi - \partial_\psi$, y por lo tanto $< \psi_1, \psi_2 >= \partial_{\psi_1}(\psi_2) - \partial_{\psi_2}(\psi_1) - [\psi_1, \psi_2]$.

Nota. *Si de la acción derecha* (4.13) *del grupo $GT_1(k)$ en la completación del grupo libre con generadores σ_1^2 y σ_2^2 construimos de la manera usual una acción izquierda, y luego pasamos del grupos a álgebras de Lie y de álgebras filtradas a graduadas, obtenemos la acción de $\mathfrak{grt}_1(k)$ en $\mathfrak{fr}_k(A,B)$ dada por la formula $\psi \to \partial_\psi$.*

Ahora veremos una interpretación "hamiltoniana" de $\mathrm{Ih}(k)$. Para cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ denotamos por $\mathscr{F}(\mathfrak{a})$ el cociente de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ por el subespacio generado por los elementos de la forma $x \otimes y - y \otimes x$ y $[x,y] \otimes z - x \otimes [y,z]$, donde $x, y, z \in \mathfrak{a}$. La imagen de $x \otimes y$ en $\mathscr{F}(\mathfrak{a})$ es denotada por (x,y). Las identidades $(x,y) = (y,x)$ y $([x,y],z) - (x,[y,z])$ nos permiten considerar (x,y) como un producto escalar invariante con valores en $\mathscr{F}(\mathfrak{a})$ (cualquier producto invariante escalar con valores en k en $\mathfrak{a}$ es composición de este producto y un funcional lineal $\mathscr{F}(\mathfrak{a}) \to k$). Si $\mathfrak{a}$ es un álgebra de Lie libre con generadores $Y_1, \cdots, Y_m$, entonces en lugar de $\mathscr{F}(\mathfrak{a})$ debemos escribir $\mathscr{F}(Y_1, \cdots, Y_m)$. Un elemento $f \in \mathscr{F}(A,B)$ se puede considerar como una formula definiendo para cada álgebra de Lie metrizada $\mathfrak{g}$ (i.e., álgebra de Lie de dimensión finita con un producto invariante escalar no degenerado) una función $f_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$. Por ejemplo, $f = ([A,B],[A,B]) \in \mathscr{F}(A,B)$ define la función $f_\mathfrak{g}(x,y) = ([x,y],[x,y])$. Es fácil mostrar que si $f \neq 0$, entonces $f_\mathfrak{g} \neq 0$ en algún Lie álgebra metrizada (por $\mathfrak{g}$ podemos tomar $\mathfrak{gl}(n)$, donde n es suficientemente largo). Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie metrizada, entonces $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ se identifica con $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, y consecuentemente el espacio de funciones en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ tiene un bracket de Poisson natural (el "bracket de Kirillov"). Si $f, \varphi \in \mathscr{F}(A,B)$, entonces $\{f_\mathfrak{g}, \varphi_\mathfrak{g}\} = \psi_\mathfrak{g}$ para algún $\psi \in \mathscr{F}(A, B)$ independiente de $\mathfrak{g}$, que denotamos por $\{f, \varphi\}$. Entonces, $\mathscr{F}(A, B)$ es un álgebra de Lie con respecto a este bracket de Poisson. La acción descrita previamente de S_3 en $\mathfrak{fr}_k(A, B)$ induce una acción de S_3 en $\mathscr{F}(A, B)$.

Proposición 6.1.

1. *La acción de S_3 en $\mathscr{F}(A, B)$ preserva el bracket de Poisson.*
2. *El subálgebra de invariantes bajo la acción de S_3 del álgebra $\mathscr{F}(A, B)$ es isomorfo a $\oplus_n Ih^n(k)$, donde $\oplus$ es la suma directa algebraica.*

Demostración.

1. Basta con mostrar que para toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ la acción de S_3 en el álgebra de Poisson de funciones invariantes bajo $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, que es obtenida al identificar $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ con $\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* | \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$ vía la proyección $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \to (\lambda_1, \lambda_2)$, preserva el bracket de Poisson. Esto se sigue del hecho que el álgebra de Poisson estudiada se puede representar como el cociente del álgebra de Poisson de funciones invariantes bajo $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ por el ideal de funciones que son 0 cuando $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ (que este ideal es Poisson es sabido por la teoría de reducción hamiltoniana).
2. Si $f \in \mathscr{F}(Y_1, \cdots, Y_m)$, denotamos por $\partial f / \partial Y_i$ el polinomio de Lie en $Y_1, \cdots, Y_m$ tal que la parte lineal en Z de $f(Y_1, \cdots, Y_{i-1}, Y_i + Z, Y_{i+1}, \cdots, Y_m)$ es igual a $(\partial f / \partial Y_i, Z)$. De la invarianza bajo $\mathfrak{g}$ de $f_\mathfrak{g}$ para cualquier álgebra de Lie metrizada se sigue que $\sum_{i=1}^m [Y_i, \partial f / \partial Y_i] = 0$.

$\square$

Lema. *Si $\sum_{i=1}^m [Y_i, P_i] = 0$, donde P_i son polinomios de Lie en $Y_1, \cdots, Y_m$, entonces existe exactamente un $f \in \mathscr{F}(Y_1, \cdots, Y_m)$ tal que $\partial f / \partial Y_i = P_i$ para todo i.*

Demostración. La relación usual entre polinomios y funciones simétricas multilineales nos permite restringirnos al caso en que P_1 no contiene Y_1, manteniendo $P_2, \cdots, P_m$ y f lineales en Y_1. En este caso, si f existe, entonces $f = (Y_1, P_1)$. Conversamente, si $f = (Y_1, P_1)$, entonces $\partial f / \partial Y_i = P_i$ para toda i. En efecto, ponemos $Q_i = P_i - \partial f / \partial Y_i$. Entonces $Q_1 = 0$ y $\sum_{i=1}^m [Y_i, Q_i] = 0$. Para $i > 1$ escribimos Q_i en la forma $R_i(\mathrm{ad} Y_2, \cdots, \mathrm{ad} Y_m) Y_1$, donde R_i es un polinomio asociativo. Entonces $\sum_{i=2}^m u_i R_i(u_2, \cdots, u_m) = 0$, y por lo tanto $R_2 = \cdots = R_m = 0$. $\square$

Supongamos que $\psi \in \oplus_n \mathrm{Ih}^n(k)$. Se sigue del lema que existe un único $f \in \mathscr{F}(A, B)$ tal que $\partial f / \partial A = \psi(A, -A - B)$ y $\partial f / \partial B = \psi(B, -A - B)$. Claramente, $f(B, A) = f(A, B)$. Mas aun, $f(A, B) = f(-A - B, B)$ (ambos lados de la identidad tienen la mismas derivadas parciales). Esto implica que f es invariante bajo la acción de S_3. Conversamente, si $f \in \mathscr{F}(A, B)$ es invariante con respecto a la acción de S_3, entonces, definiendo $\psi(A, B)$ de la relación $\psi(A, -A - B) = \partial f / \partial A$, encontramos que $\psi \in \mathrm{Ih}(k)$.

Para mostrar que el bracket de Poisson en $\mathscr{F}(A,B)$ corresponde al conmutador en $\mathrm{Ih}(k)$, usamos el encaje $\mathrm{Ih}(k) \to \mathrm{Der}\mathfrak{fr}_k(A,B)$ que manda ψ en $\delta_\psi = \sigma\partial_\psi\sigma$, donde $\partial_\psi \in \mathrm{Der}\mathfrak{fr}_k(A,B)$ fue definido previamente y σ es el automorfismo de $\mathfrak{fr}_k(A,B)$ dado por $\sigma(A) = -A - B$ y $\sigma(B) = B$. Tenemos $\delta_\psi(A) = [\psi(-A-B,A),A]$ y $\delta_\psi(B) = [\psi(-A-B,B),B]$. Si ψ corresponde a $f \in \mathscr{F}(A,B)$, entonces $\delta_\psi(A) = [A, \partial f/\partial A]$ y $\delta_\psi(B) = [B, \partial f/\partial B]$. Estas formulas se pueden considerar la ecuación Hamiltoniana correspondiente a f. Para continuar, se usa la conexión entre el bracket de Poisson del Hamiltoniano y el conmutador de los correspondientes campos vectoriales. $\square$

Notas. *1. Al elemento $f \in \mathfrak{fr}_k(A,B)$ que corresponde a $\psi \in \mathfrak{grt}_1^n(k) \subset Ih(k)$ (ver prueba de la Proposición 6.1 se le puede dar la siguiente interpretación. Suponga que $\varphi \in M_1(k)$, y $\tilde{\varphi}$ se obtiene de φ por la acción de Exp(ψ), donde Exp es la función exponencial $\mathfrak{grt}_1(k) \mapsto GRT_1(k)$. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie metrizada sobre k, y $t \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ corresponde al producto escalar en $\mathfrak{g}$, entonces $\Phi = \varphi(ht^{12}, ht^{23})$ y $\tilde{\Phi} = \tilde{\varphi}(ht^{12}, ht^{23})$ están relacionados por la transformación* (1.11) *para cierto $F \in (U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ (ver TeoremaA). Es fácil verificar que F se puede elegir tal que $1) F \equiv 1 \mod h^n, 2) h^{-n}(F-1) \mod h \in L_{n+1}$ donde L_{n+1} es el conjunto de elementos de $U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$ que son polinomios de grado no mayor que $n+1$ en elementos de $\mathfrak{g}\otimes 1$ y $1\otimes\mathfrak{g}$, y 3) la imagen de $h^{-n}(F-1) \mod h$ en $L_{n+1}/L_n = Sym^{n+1}(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}) = Sym^{n+1}(\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*)$, considerada una función en $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, es igual a $-f_{\mathfrak{g}}$.*

2. *Deligne ha notado que, usando el argumento de la prueba de la Proposición 6.1, uno puede obtener para toda n un isomorfismo equivariante bajo la acción de S_n entre el cociente del álgebra de derivaciones especiales de $\mathfrak{fr}_k(A_1,\cdots,A_n)$ por el ideal de derivaciones internas y el cociente de $\mathscr{F}(A_1,\cdots,A_n)$ por el subespacio generado por los elementos $(A_1,A_1), 1 \le i \le n+1$, donde $A_{n+1} = -A_1 - \cdots - A_n$. A saber, el elemento $f \in \mathfrak{fr}_k(A_1,\cdots,A_n)$ corresponde a la derivación $A_i \to [A_i, \partial f/\partial A_i], 1 \le i \le n$.*

Proposición 6.2. *(Deligne-Ihara [13]). dim $Ih^n(k) = \alpha_n - \beta_{n+1}$, donde*

$$\alpha_n = (3n)^{-1}\Big\{\sum_{d|n}(1 - a(d/3))\,\mu(d)2^{n/d} - \varepsilon_n\Big\},$$

$$\beta_n = (6n)^{-1}\Big\{\sum_{d|n}(1 + 3a(d/2) + 2a(d/3))\,\mu(d)2^{n/d} + 2\varepsilon_n\Big\};$$

donde μ es la función de Möbius, $a(x) = 1$ para $x \in \mathbb{Z}$, $a(x) = 0$ para $x \notin \mathbb{Z}$, $\varepsilon_n = -1$ si n es de la forma 3^m, $\varepsilon_n = 2$ si $n = 2\cdot 3^m$, y $\varepsilon_m = 0$ en otro caso.

Demostración. Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 con base A, B. En V existe una acción de S_3, que permuta A, B y $C = -A-B$. Sea $L_n(V)$ el componente homogéneo de grado n del álgebra de Lie libre generada por V, i.e., $L_n(V) = \mathfrak{fr}_k^n(A, B)$. La formula $\psi \mapsto A \otimes \psi(-A-B, A) + B \otimes \psi(-A-B, B)$ define un isomorfismo $\mathrm{Ih}^n(k) \xrightarrow{\sim} (V \otimes L_n(V))^{S_3} \cap \mathrm{Ker} f$, donde f es el conmutador $V \otimes L_n(V) \mapsto L_{n+1}(V)$. Como f es suprayectiva, tenemos $\dim \mathrm{Ih}^n(k) = \dim(V \otimes L_n(V))^{S_3} - \dim(L_{n+1}(V))^{S_3}$. Ahora usamos la formula para el carácter de la representación de $\mathrm{GT}(V)$ en $L_n(V)$ ([16, Capitulo II,§3, formula (16)]) $\square$

Aquí están los valores de los números $a_n = \dim \underline{\mathrm{Ih}}^n(k)$ para $n \leq 13 : a_1 = a_2 = a_4 = a_6 = 0, a_3 = a_5 = a_8 = 1, a_7 = a_{10} = 2, a_9 = 4, a_{11} = 9, a_{12} = 7, a_{13} = 21$. Una base en $\oplus_{n \leq 7} \underline{\mathrm{Ih}}^n(k)$ esta formada por los elementos de $\mathrm{Ih}(k)$ correspondientes (ver Proposición 6.1) a los elementos $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathscr{F}(A, B)$, donde

$$f_1 = ([A, B], [A, B]) \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} f_2 = (x, x) + (x, y) + (y, y), \quad \text{donde} \quad & x = [A, [A, B]] \\ & y = [B, [A, B]] \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} f_3 = (z, z), \quad \text{donde} \quad & z = [A, [A, [A, B]]] + [A, [B, [A, B]]] \\ & +[B, [B, [A, B]]], \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$f_4 = ([[A, u], [B, u]], u) \text{ donde } u = [A, B]. \tag{6.4}$$

En el proceso de probar la [14, Proposición 1], Ihara obtuvo el siguiente resultado.

Proposición 6.3. *Para todo $n \geq 3$ impar existe un $\psi \in \mathfrak{grt}_1^n(k)$ tal que*

$$\psi(A, B) = \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} (adA)^{m-1} (adB)^{n-m-1} [A, B] \quad \text{mód } [\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_k],$$

donde $\mathfrak{p}_k$ es el conmutador de $\mathfrak{fr}_k(A, B)$.

La prueba de Ihara usa $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Proveemos otra prueba. Uno puede asumir $k = \mathbb{C}$. Pongamos $\overline{\varphi}_{KZ}(A, B) = \varphi_{KZ}(-A, -B)$. De la Proposición 5.5, $\overline{\varphi}_{KZ}$ se obtiene de φ_{KZ} por la acción de algún $g \in \mathrm{GRT}_1(\mathbb{C})$. Sea $\tilde{\psi}$ el componente homogéneo de grado n de la imagen de g bajo el mapeo logarítmico $\mathrm{GRT}_1(\mathbb{C}) \mapsto \mathfrak{grt}_1(\mathbb{C})$. De (2.15) se puede verificar fácilmente que $(n(2\pi i)^n / 2\zeta(n)) \cdot \tilde{\psi}$ es el elemento deseado. $\square$

No es difícil ver que si $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{p}_k$, entonces el lado derecho de (5.21) pertenece a $[\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_k]$. Se sigue de la Proposición 6.3 que $\mathfrak{grt}_1(k)$ tiene al menos un generador de grado n para cada impar $n \geq 3$.

Preguntas. *¿Es cierto que* $\mathfrak{grt}_1(k)$ *tiene exactamente un generador de grado* n *para cada impar* $n \geq 3$ *y no tiene generadores de otros grados? ¿El álgebra* $\oplus_n \mathfrak{grt}_1^n(k)$ *es libre?*

Notas. *1. Una respuesta positiva a esta pregunta es equivalente a la conjunción de la conjetura de Deligne en [14, Introducción] y la conjetura de densidad de la imagen de Zariski de* $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *en* $GT(\mathbb{Q}_l)$.

2. Para $n = 1, 2, 4, 6$ *tenemos* $\mathfrak{grt}_1^n(k) = \underline{Ih}(k) = 0$. *Dado que* $\dim Ih^3(k) = \dim Ih^5(k) = 1$, *se sigue de la Proposición 6.3 que* $\mathfrak{grt}_1^n(k) = \underline{Ih}^n(k)$ *para* $n = 3, 5$. *Dado que* $\dim Ih^8(k) = 1$, *y* $[Ih^3(k), Ih^5(k)] \neq 0$ *(ver [14]), tenemos* $\mathfrak{grt}_1^8(k) = Ih^8(k) = [\mathfrak{grt}_1^3(k), \mathfrak{grt}_1^5(k)]$. *Se puede mostrar que* $\dim \mathfrak{grt}_1^7(k) = 1 < \dim Ih^7(k)$ *y* $\mathfrak{grt}_1^7(k)$ *es generado por el elemento correspondiente a* $8f_3 - f_4 \in \mathscr{F}(A, B)$, *donde* f_3 *y* f_4 *son determinados por las formulas* (6.3) *y* (6.4).

Referencias

[1] V. G. Drinfeld. Quasi-hopf algebras. *Leningrad Math. J.*, pages 1419–1457, 1990.

[2] Alexandre Grothendieck. Esquisse d'un programme. *preprint*, 1984.

[3] V. G. Drinfeld. Quantum groups. *Proc. Internat. Congr. Math*, Berkeley, 1986.

[4] L. D. Faddeev. Integrable models in (1+1) dimensional quantum field theory. *Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics (Les Houches, 1982)*, pages 561–608, 1984.

[5] N. Yu. Reshetikhin. Quasitriangular hopf algebras, solutions of the yang-baxter equation and invariatns of connections. *Leningrad. Math. J.*, 1990.

[6] Pierre Deligne and J. S. Milne. Tannakian categories, hodge cycles, motives and shimura varieties. *Lecture Notes in Math*, pages 101–228, 1980.

[7] Toshitake Kohno. Monodromy representations of braid groups and yang-baxter equations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, pages 139–160, 1987.

[8] Toshitake Kohno. Quantized universal enveloping algebras and monodromy of braid groups. *preprint Nagoya Univ, Nagoya*, 1988.

[9] Akihiro Tsuchiya and Yukihiro Kanie. Vertex operators in conformal field theory on p^1 and monodromy representations of braid groups. *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models, Adv. Stud. Pure Math*, pages 297–372, 1988.

[10] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov. Current algebra and wess-zumino models in two dimensions. *Soviet J. Nuclear Phys.*, (1), 1984.

[11] Pierre Deligne. Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, galois groups over q. *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 79–297, 1989.

[12] Greg Anderson and Yusataka Ihara. Pro-l branched coverings of p^1 and higher circular l-units. *Ann. of Math.*, (128):271–293, 1988.

[13] Yasutaka Ihara. Some problems on three-point ramifications and associated large galois representations. *Adv. Stud. Pure Math.*, (12):173–188, 1987.

[14] Yasutaka Ihara. The galois representations arising from $p^1 - \{0, 1, \infty\}$ and tate twist of even degree. galois groups over q. *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 299–313, 1989.

[15] Yasutaka Ihara. Automorphisms of pure sphere braid groups and galois representations,. *preprint Tokyo Univ. Tokyo*, 1988.

[16] N. Bourbaki. Elements de mathematique, fasc, xxxvii, groupes et algebres de lie, chaps, 17. *Actualites Sci. Indust.*, (1349), 1972.

[17] Toshitake Kohno. Serie de poincare-koszul associee aux groupes de tresses pures. *Invent. Math.*, (82):57–75, 1985.

[18] Yu. A. Bakhturin. Identical relations in lie algebras. *VNU Science Press, Utrecht*, 1987.

[19] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Univ. Press, New York, 1962. 4th ed.

[20] Emil Artin. Theory of braids. *Ann. of Math*, 1947.

[21] G. V. Belyi. On galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Math. USSR Izv*, 1980.

[22] G.W. Moore and Nathan Seiberg. Classical and quantum conformal field theory. *Comm. Math. Phys*, 1989.

[23] Michael Barr. Harrison homology, hochschild homology and triples. *J. Algebra*, 1968.

Traducido por Eric R. Dolores Cuenca