РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫМИ МЕТОДАМИ. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Теоретический материал к данной теме содержится [1, глава 5].

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: 1) постановка задачи; 2) необходимый теоретический материал; 3) аналитическое решение **тестового** примера и результат вычислительного эксперимента по тесту; 4) решение поставленной задачи; 5) анализ полученных результатов; 6) графический материал (если необходимо);
7) тексты программ.

Варианты заданий к задачам 3.1-3.10 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 3.А.*

Задача 3.1. Дана система уравнений $Ax=b$ порядка n. Исследовать зависимость погрешности решения x от погрешностей правой части системы b.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать матрицу системы A и вектор правой части b. Используя встроенную функцию, найти решение x системы $Ax=b$
с помощью метода Гаусса.

2. С помощью встроенной функции вычислить число обусловленности матрицы A.

3. Принимая решение x, полученное в п. 1, за точное, вычислить вектор $d=(d_1,...,d_n)^T$,
$d_i = \dfrac{\| x - x^i \|_\infty}{\| x \|_\infty}$, i=1, ..., n, относительных погрешностей решений x^i систем $Ax^i = b^i$, i=1, ..., n, где компоненты векторов b^i вычисляются по формулам: $b_k^i = \begin{cases} b_k + \Delta, & k = i, \\ b_k, & k \neq i, \end{cases}$ k=1, ..., n
($\Delta -$ произвольная величина погрешности).

4. На основе вычисленного вектора d построить гистограмму. По гистограмме определить компоненту b_m вектора b, которая оказывает наибольшее влияние на погрешность решения.

5. Оценить теоретически погрешность решения x^m по формуле:
$\delta(x^m) \le cond(A) \cdot \delta(b^m)$. Сравнить значение $\delta(x^m)$ со значением практической погрешности d_m. Объяснить полученные результаты.

УКАЗАНИЕ. Пусть функция **cond**(A) возвращает число обусловленности матрицы A, основанное на ∞-норме. Для вычисления $\| \cdot \|_\infty$ вектора удобно воспользоваться встроенной функцией, возвращающей максимальную компоненту вектора v.

Задача 3.2. Для системы уравнений $Ax=b$ из **задачи 3.1** исследовать зависимость погрешности решения системы от погрешностей коэффициентов матрицы A (аналогично **задаче 3.1**). Теоретическая оценка погрешности в этом случае имеет вид: $\delta(x^*) \le cond(A) \cdot \delta(A^*)$, где x^*- решение системы с возмущенной матрицей A^*.

Задача 3.3. Дана матрица A. Найти число обусловленности матрицы, используя вычислительный эксперимент.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Выбрать последовательность линейно независимых векторов $b^i, i=1,...k$. Решить k систем уравнений $Ax^i = b^i$, $i=1, ..., k$, используя встроенную функцию.

2. Для каждого найденного решения x^i вычислить отношение $\dfrac{\| x^i \|}{\| b^i \|}$, i=1, ...,k.

3. Вычислить норму матрицы A^{-1} по формуле $\| A^{-1} \| \approx \max\limits_{1 \le i \le k} \dfrac{\| x^i \|}{\| b^i \|}$, вытекающей из неравенства $\|x\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b\|$.

4. Вычислить число обусловленности матрицы *A* по формуле $cond(A) \approx \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$.

Задача 3.4. Решить систему уравнений *Ax*=*b* из **задачи 3.1**, используя LU-разложение матрицы *A*.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить функцию **lu**(*A*), и с ее помощью получить LU- разложение матрицы *A*.
2. Преобразовать вектор *b* по формулам прямого хода метода Гаусса. С помощью обратной подстановки найти решение системы *x*.

УКАЗАНИЕ. Функция **lu**(*A*) должна возвращать матрицу, в которой содержатся матрицы *P*, L и U такие, что *PA*=LU (*P*- матрица перестановок).

Задача 3.5. Дана система уравнений *Ax=b* порядка *n* с симметричной положительно определенной матрицей *A*. Решить систему методом Холецкого.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Написать функцию **cholesky**(*A*), и с ее помощью получить LL^T - разложение матрицы *A*.
2. Решить последовательно системы *Ly=b* и $L^T x = y$ с треугольными матрицами.

УКАЗАНИЕ. Функция **cholesky**(*A*) должна возвращать нижнетреугольную матрицу *L*.

Задача 3.6.[*] Дана система уравнений *Ax=b* порядка *n*, где *A=A(t), t* - параметр. Исследовать зависимость решения системы *Ax=b* от вычислительной погрешности при заданных значениях параметра *t*.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить программу, реализующую метод Гаусса (схема частичного выбора) для произвольной системы *Ax=b*. Используя составленную программу, найти решение заданной системы *Ax=b*.
2. Составить программу округления числа до *m* знаков после запятой. Вычислить элементы матрицы *A* и вектора *b* по формулам индивидуального варианта, производя округление до *m*- знаков после запятой (в результате будут получены матрица *A*1 и вектор *b*1).
3. Решить систему уравнений *A*1*x*1=*b*1 методом, указанным в п.1, обращаясь каждый раз к программе округления. Оценить практически полученную погрешность решения.
4. Сравнить результаты, полученные при разных значениях параметра *t*.

Задача 3.7.* Исследовать зависимость числа обусловленности матрицы *A* из **задачи 3.1** от порядка *n* матрицы.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить программу, выполняющую LU- разложение матрицы произвольного порядка *n* (схема единственного деления).
2. Используя составленную программу, для каждого *n*=1,2,3,..., *k* (*k* - максимально возможное значение, при котором удается решить задачу) найти обратную матрицу A^{-1}.
3. Вычислить число обусловленности матрицы по формуле $cond(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$ для каждого значения *n*.
4. Построить график зависимости *cond(A)* от *n*.

Задача 3.8.* Дана система уравнений *Az(x)=b(x)* порядка *n*. Построить график функции $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i(x)$ на отрезке [*a, b*]; здесь $z(x) = (z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x))^T$ - решение системы. Для решения системы уравнений использовать метод Гаусса (схема полного выбора).

---

[*] Задачи 3.6 –3.10 выполняются на <u>АЛГОРИТМИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ</u>. Для проверки правильности работы запрограммированных алгоритмов необходимо провести расчет для тестового примера.

Задача 3.9.* Решить систему уравнений $Ax=b$ порядка n из **задачи 3.5** методом Холецкого. Вычислить число обусловленности матрицы A.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить программу, выполняющую LL^T - разложение симметричной положительно определенной матрицы произвольного порядка n .

2. Используя составленную программу, найти решение системы $Ax=b$ и обратную матрицу A^{-1}.

3. Вычислить число обусловленности матрицы по формуле $cond(A) \approx \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

УКАЗАНИЕ. Предусмотреть компактное размещение элементов матрицы в памяти ЭВМ.

Задача 3.10.* Дана система уравнений $Ax=b$ порядка n с разреженной матрицей A. Решить систему методом прогонки.

УКАЗАНИЕ. Предусмотреть компактное размещение элементов матрицы в памяти ЭВМ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.А.

Схема вариантов к лабораторной работе

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	3.1.1, 3.5.1, 3.10.1	11	3.1.11, 3.3.3, 3.10.3	21	3.1.21, 3.5.6, 3.6.5
2	3.1.2, 3.4, 3.9.1**	12	3.1.12, 3.2, 3.9.3**	22	3.1.22, 3.4, 3.7
3	3.1.3, 3.3.1, 3.8.1	13	3.1.13, 3.5.4, 3.8.3	23	3.1.23, 3.3.6, 3.8.5
4	3.1.4, 3.2, 3.7	14	3.1.14, 3.4, 3.7	24	3.1.24, 3.3.2, 3.9.5**
5	3.1.5, 3.5.2, 3.6.1	15	3.1.15, 3.3.4, 3.6.3	25	3.1.25, 3.3.7, 3.10.5
6	3.1.6, 3.4, 3.10.2	16	3.1.16, 3.2, 3.10.4	26	3.1.26, 3.4, 3.7
7	3.1.7, 3.3.2, 3.9.2**	17	3.1.17, 3.5.5, 3.9.4**	27	3.1.27, 3.3.7, 3.6.6
8	3.1.8, 3.2, 3.8.2	18	3.1.18, 3.4, 3.8.4	28	3.1.28, 3.2, 3.10.6
9	3.1.9, 3.5.3, 3.7	19	3.1.19, 3.3.5, 3.7	29	3.1.29, 3.3.8, 3.8.6
10	3.1.10, 3.4, 3.6.2	20	3.1.20, 3.2, 3.6.4	30	3.1.30, 3.4, 3.9.6**

** 3.9.i = 3.5.i, i=1,2,3,4,5,6.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Таблица к задаче 3.1

Компоненты вектора b во всех вариантах задаются формулой $b_i = N$, $\forall i = 1 \ldots n$, коэффициенты $c = c_{ij} = 0.1 \cdot N \cdot i \cdot j$, $\forall i, j = 1 \ldots n$, N - номер варианта.

N	n	a_{ij}	N	n	a_{ij}
3.1.1	6	$\dfrac{15}{4 \cdot c^5 + 6 \cdot c + 1}$	3.1.16	5	$\dfrac{100}{(3 + 0.3 \cdot c)^5}$
3.1.2	6	$\dfrac{125}{(4 + c \cdot 0.25)^6}$	3.1.17	4	$\dfrac{115}{3c + 4c^3}$
3.1.3	6	$\dfrac{12}{4c + 4}$	3.1.18	5	$\dfrac{123}{2c^3 + 5c^2}$
3.1.4	7	$\dfrac{55}{c^2 + 3 \cdot c + 100}$	3.1.19	5	$\dfrac{100}{(11 + c)^5}$

* Задачи 3.6 – 3.10 выполняются на АЛГОРИТМИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ. Для проверки правильности работы запрограммированных алгоритмов необходимо провести расчет для тестового примера.

3.1.5	7	$\dfrac{135}{(2+0.3\cdot c)^5}$	3.1.20	6	$\cos\left(\dfrac{c}{25}\right)$
3.1.6	7	$\dfrac{3}{c^4-4\cdot c^3}$	3.1.21	6	$\dfrac{1000}{3c^2+c^3}$
3.1.7	6	$\dfrac{256}{(5+c\cdot 0.256)^5}$	3.1.22	5	$\dfrac{150}{13c^3+777c}$
3.1.8	6	$\dfrac{1}{\sqrt{c^2+0.58\cdot c}}$	3.1.23	5	$\dfrac{11.7}{(1+c)^7}$
3.1.9	5	$\dfrac{3}{(1+c)^2}$	3.1.24	4	$\dfrac{159}{10c^3+c^2+25}$
3.1.10	5	$\sin\left(\dfrac{c}{8}\right)$	3.1.25	5	$\dfrac{321}{(1+c)^6}$
3.1.11	4	$\dfrac{1}{67+c^4}$	3.1.26	5	$\dfrac{31}{\sqrt{c^2+6c}}$
3.1.12	4	$\dfrac{111}{c^4+13+3c}$	3.1.27	6	$\dfrac{350}{(5+0.35c)^3}$
3.1.13	5	$\dfrac{1}{(1+c)^3}$	3.1.28	5	$\dfrac{500}{(8\cdot c-5)^2}$
3.1.14	7	$\dfrac{1.5}{0.001c^3-2.5c}$	3.1.29	6	$\dfrac{10}{0.3c^3+10c}$
3.1.15	6	$\dfrac{88.5}{c+0.03c^2}$	3.1.30	5	$\dfrac{1}{0.4c^3+20c}$

Таблица к задаче 3.3

N	*A*	N	*A*
3.3.1	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$	3.3.5	$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \end{matrix}$
3.3.2	$\begin{matrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$	3.3.6	$\begin{matrix} 611 & 196 & -192 & 407 \\ 196 & 899 & 113 & -192 \\ -192 & 113 & 899 & 196 \\ 407 & -192 & 196 & 611 \end{matrix}$
3.3.3	$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{matrix}$	3.3.7	$\begin{matrix} 1 & 0.5 & 0.333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.5 & 0.333 & 0.25 & 0.2 & 0.167 \\ 0.333 & 0.25 & 0.2 & 0.167 & 0.143 \\ 0.25 & 0.2 & 0.167 & 0.143 & 0.125 \\ 0.2 & 0.167 & 0.143 & 0.125 & 0.111 \end{matrix}$

3.3.4	1 1 1 1 8 4 2 1 27 9 3 1 64 16 4 1	3.3.8	1 1 1 1 1 2 3 4 1 3 6 10 1 4 4 20

Таблица к задаче 3.5

Элементы матрицы *A* вычисляются по формулам:

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i+j}{m+n}, & i \neq j, \\ n + m^2 + \dfrac{j}{m} + \dfrac{i}{n}, & i = j, \end{cases}$$

где $i, j = 1, \ldots n$. Элементы вектора *b* задаются в индивидуальном варианте.

N	*n*	*m*	b_i , *i=1, ..., n*	N	*n*	*m*	b_i , *i=1, ..., n*
3.5.1	40	10	$b_i = n \cdot i + m$	3.5.4	50	15	$b_i = m \cdot n - i^3$
3.5.2	20	8	$b_i = 200 + 50 \cdot i$	3.5.5	30	20	$b_i = m \cdot i + n$
3.5.3	30	9	$b_i = i^2 - 100$	3.5.6	25	10	$b_i = i^2 - n$

Таблица к задаче 3.6

Элементы матрицы *A* вычисляются по формулам:

$$A_{ij} = \begin{cases} q_M^j, & i \neq j, \\ q_M^j + t, & i = j, \end{cases}$$

где $q_M = 0.993 + (-1)^M \cdot M \cdot 10^{-4}$, $i, j = 1, \ldots n$. Параметр *t* =0.0001, 1, 10000. Элементы вектора *b* вычисляются по формулам: $b_j = q_M^{(n+1-j)}$, $j = 1, \ldots n$.

N	*M*	*n*	*m*	N	*M*	*n*	*m*	N	*M*	*n*	*m*
3.6.1	1	50	6	3.6.3	3	40	7	3.6.5	5	45	4
3.6.2	2	100	5	3.6.4	4	120	4	3.6.6	6	100	6

Таблица к задаче 3.8

Элементы матрицы *A* вычисляются по формулам:

$$A_{ij} = \begin{cases} q_M^{i+j} + 0.1 \cdot (j - i), & i \neq j, \\ (q_M - 1)^{i+j}, & i = j, \end{cases}$$ где $q_M = 1.001 - 2 \cdot M \cdot 10^{-3}$, $i, j = 1, \ldots n$.

Элементы вектора *b* задаются в индивидуальном варианте. Во всех вариантах отрезок [*a*, *b*]=[-5, 5].

N	*M*	*n*	b_i , *i=1, ..., n*	N	*M*	*n*	b_i , *i=1, ..., n*
3.8.1	1	50	$n \cdot e^{\frac{x}{i}} \cdot \cos(x)$	3.8.4	4	100	$n \cdot \exp\left(\dfrac{x}{i}\right) \cdot \cos(x)$
3.8.2	2	40	$\lvert x - \dfrac{n}{10} \rvert \cdot i \cdot \sin(x)$	3.8.5	5	100	$\lvert x - \dfrac{n}{10} \rvert \cdot i \cdot \sin(x)$

3.8.3	3	30	$x \cdot \exp\left(\frac{x}{i}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{i}\right)$	3.8.6	6	100	$x \cdot \exp\left(\frac{x}{i}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{i}\right)$

Таблица к задаче 3.10

N	*n*	*A*	b_i, *i=1, ..., n*
3.10.1	50	на главной диагонали элементы равны 1000, на первой наддиагонали элементы равны 1, на 3 наддиагонали элементы равны 1, на 1 поддиагонали элементы равны 1.	$b_i = i \cdot e^{\frac{18}{i}}$
3.10.2	35	на главной диагонали элементы равны 100, на 1, 2 и 3 наддиагоналях элементы равны 1, на 1 поддиагонали элементы равны 1.	$b_i = i \cdot e^{\frac{22}{i}} \sin\left(\frac{9}{i}\right)$
3.10.3	40	на главной диагонали элементы равны 100, на 1и 2 наддиагоналях элементы равны 1, на 2 поддиагонали элементы равны 3.	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}}$
3.10.4	50	на главной диагонали элементы равны 100, на первой наддиагонали элементы равны 1, на 1 поддиагонали элементы равны 2, $a_{1,n-1} = a_{2,n} = 1$.	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}} \cos\left(\frac{9}{i}\right)$
3.10.5	40	на главной диагонали элементы равны 100, на 1 наддиагонали элементы равны 2, на 1 и 2 поддиагоналях элементы равны 7.	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}}$
3.10.6	30	на главной диагонали элементы равны 100, на 1 наддиагонали элементы равны 47, на 20 наддиагонали 1, на 1 поддиагонали 47, на 20 поддиагонали 1.	$b_i = i \cdot e^{\frac{22}{i}}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.