

## 2.1 $(\underline{X}_a, Z_a)$ 的相对轨形 GW- 不变量

类似于绝对轨形 GW- 不变量,  $(\underline{X}_a, Z_a)$  的相对轨形 GW- 理论中的赋值映射的像落在  $\underline{X}_a$  与  $Z_a$  的惯性轨形中. 我们前面已经分析过它们的惯性轨形, 即:

$$(\mathbb{I}\underline{X}_a, \mathbb{I}Z_a) = (\underline{X}_a \sqcup \bigsqcup_{s \in D_a, s > 0} Z_a(s), \bigsqcup_{s \in D_a} Z_a(s)).$$

相对模空间  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\vec{\mu},A}(\underline{X}_a, Z_a)$  参数化了到  $(\underline{X}_a, Z_a)$  的如下的相对的轨形稳定映射:

(1) 映射的原像曲线的亏格为  $g$ ;

(2) 此映射代表的下同调类为  $A \in H_2(|\underline{X}_a|; \mathbb{Z})$ , 且  $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{\ell(\vec{\mu})})$  为相交数  $A \cdot [Z_a]$  的一个由正有理数给出的划分, 表示映射与除子  $Z_a$  相交于后  $\ell(\vec{\mu})$  个标识点, 并以  $\vec{\mu}$  为相应的分数阶相交重数 (fractional contact order). 令  $|\vec{\mu}| = \sum_{i=1}^{\ell(\vec{\mu})} \mu_i$ , 则  $|\vec{\mu}| = A \cdot [Z_a]$ .

前  $n$  个标识点是非轨形标识点, 称为绝对标识点, 它们决定了如下的赋值映射

$$\text{ev}_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n,\vec{\mu},A}(\underline{X}_a, Z_a) \rightarrow \mathbb{I}\underline{X}_a, \quad 1 \leq i \leq n.$$

同时, 它们还决定了  $n$  个余切线丛  $L_i$ . 这些余切线丛的第一陈类也记为  $\bar{\psi}_i$ . 后  $\ell(\vec{\mu})$  个标识点为相对标识点, 它们决定了  $\ell(\vec{\mu})$  个赋值映射

$$\text{rev}_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n,\vec{\mu},A}(\underline{X}_a, Z_a) \rightarrow Z_a(\{-\mu_i\}) \subseteq \mathbb{I}Z_a, \quad 1 \leq i \leq \ell(\vec{\mu}).$$

**定义 2.1** 取  $\underline{\alpha} = (\bar{\psi}^{a_1} \alpha_1, \dots, \bar{\psi}^{a_n} \alpha_n) \in (\mathbb{C}[\bar{\psi}] \otimes H^*(\underline{X}_a))^{\otimes n}$  与  $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{\ell(\vec{\mu})}) \in H^*(\mathbb{I}Z_a)^{\otimes \ell(\vec{\mu})}$ , 其中  $\epsilon_j \in H^*(Z_a(\{-\mu_j\}))$ .  $(\underline{X}_a, Z_a)$  的相对轨形 GW- 不变量定义为

$$\langle \underline{\alpha} | \underline{\epsilon} \rangle_{g,n,\vec{\mu},A}^{(\underline{X}_a, Z_a)} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\vec{\mu},A}(\underline{X}_a, Z_a)]^{\text{vir}}} \prod_{i=1}^n \bar{\psi}_i^{a_i} \text{ev}_i^* \alpha_i \wedge \prod_{j=1}^{\ell(\vec{\mu})} \text{rev}_j^* \epsilon_j. \quad (2.1)$$

模空间  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\vec{\mu},A}(\underline{X}_a, Z_a)$  的期望维数 (参见 [20, Lemma 3.1]) 为

$$\text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n,\vec{\mu},A}(\underline{X}_a, Z_a) = c_1^{\underline{X}_a}(A) + (\dim_{\mathbb{C}} X - 3)(1 - g) + n + \ell(\vec{\mu}) - \iota^{Z_a}(\underline{\epsilon}) - |\vec{\mu}|,$$

类似于绝对 GW- 不变量, 当  $\frac{1}{2}(\deg \underline{\alpha} + \deg \underline{\epsilon}) \neq \text{vdim}_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n,\vec{\mu},A}(\underline{X}_a, Z_a)$  时, 不变量定义为 0. 有关相对轨形 GW- 理论的构造与退化公式可以参见 [1, 10].

为了后面使用方便, 我们引入两个记号:

$$\iota^{Z_a}(\epsilon_j) := \iota^{Z_a}(\{-\mu_j\}) = \sum_{u=1}^{\kappa} \{-a_u \mu_j\}, \quad \text{和} \quad \iota^{Z_a}(\underline{\epsilon}) := \sum_{j=1}^{\ell(\vec{\mu})} \iota^{Z_a}(\epsilon_j). \quad (2.2)$$

## 2.2 $\kappa = 1$ 时 $(X, S)$ 的相对 GW- 不变量

当  $\kappa = 1$  时, 我们也需要用到  $(X, S)$  的相对不变量. 令  $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{\ell(\vec{\mu})})$  为相交数  $A \cdot [S]$  的由正整数给出的划分. 如此有  $|\vec{\mu}| := \sum_i \mu_i = A \cdot [S]$ .

模空间  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n,\vec{\mu},A}(X, S)$  参数化了到  $(X, S)$  的如下的相对稳定映射: