chapter 7 参考答案

1. (1)

$\pi P=[1/2\ 1/2]$

$\pi P^2=[3/8\ 5/8]$

$\pi P^3=[11/32\ 21/32]$

$\pi P^4=[43/128\ 85/128]$

1. (2)

设P为Markov链$\{X_i,i\in[2]\}$的转移概率矩阵。

由P118定理7.2，要证πP^n收敛，只需证明$\{X_i,i\in[2]\}$为不可约且反周期。

1.$P_{1,2},P_{2,1}>0$, 因此状态1与状态2互通，即$\{X_i,i\in[2]\}$不可约。

2.$P_{1,1}>0$, 因此状态1的周期为1，从而与状态1互通的状态2周期也为1。即$\{X_i,i\in[2]\}$反周期。

2.

设向量 π 是矩阵 P 的平稳分布，则有 $\pi P=\pi$。

对于矩阵 $(1/n)((n-1)I+P)$，可以计算出它的平稳分布为：

$$\begin{aligned}\pi'&=\pi'\left(\frac{1}{n}((n-1)I+P)\right)\\&=\frac{1}{n}\pi'(n-1)I+\pi'P\\&=\frac{1}{n}(n-1)\pi'+\pi'P\\&=\frac{1}{n}(n\pi'-\pi')+\pi'P\\&=\frac{1}{n}(n\pi'P-\pi'P)+\pi'P\\&=\pi'P\end{aligned}$$

因此，如果 π 是矩阵 P 的平稳分布，则 π 也是矩阵 $(1/n)((n-1)I+P)$ 的平稳分布。

反之，如果 π 是矩阵 $(1/n)((n-1)I+P)$ 的平稳分布，则 $\pi\left(\frac{1}{n}((n-1)I+P)\right)=\pi$，即：

$$\pi\left(\frac{1}{n}(n-1)I+P\right)=\pi$$

$$(n-1)\pi I+n\pi P=n\pi$$

$$(n-1)\pi I=(n-1)\pi P$$

由于 $(n-1)\neq 0$，所以有 $\pi I=\pi P=\pi$。

因此，矩阵 P 和 $(1/n)((n-1)I+P)$ 有相同的平稳分布。

4. (1)

$\pi P=[2/5,3/5]\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix}=[2/5,3/5]=\pi$

4. (2)(3)

由习题2的结果，取$n=2$时, 命题(2)(3)成立

5.

状态1与状态2互通，因此该马氏链不可约。

状态1存在自环，因此状态1的周期为1。状态2与状态1互通，从而周期同为1，故该马氏链反周期。

6.

状态转移图7.6构成双向链表结构，因此任意两个状态都互通，故该马氏链不可约

以状态-1为例，从状态-1出发分别经过2,4,6,8,...步可以重返回状态-1。

状态-1的周期为{2,4,6,8,...}的最大公因数2。因此该马氏链不是反周期的。

10.

$P=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$

容易验证,

(1)$\forall i\in[4],\sum_{j=1}^4 P_{ij}=1$。 因此，$P$是状态转移矩阵。

(2)任意两个状态互通，即该状态转移图对应的马氏链不可约。

(3)从状态A出发经过2,3,4,...可以重返状态A，因此状态A的周期为{2,3,4,...}的最大公因数1。即该不可约马氏链反周期。

取初始状态分布$\pi_0=[1/4\ 1/4\ 1/4\ 1/4]$, 平稳分布$\pi=\lim_{n\to\infty}\pi_0 P^n$。 当n较大时，状态分布收敛至[9/34 4/17 7/34 5/17]