

1. 证明：集合函数 $f: 2^V \rightarrow R$ 是一个子模函数，当且仅当对于所有的 $S \subseteq T \subseteq V, C \subseteq V \setminus T$,

$$f(S \cup C) - f(S) \geq f(T \cup C) - f(T).$$

必要性

考虑 $S \cup T$ 和 $T, c \in V \setminus T$

$$f(S \cup C \cup T) + f((S \cup C) \cap T) \leq f(S \cup C) + f(T)$$

$$\text{又 } f(S \cup C \cup T) = f(T \cup C) \quad f((S \cup C) \cap T) = f(S)$$

$$\text{有 } f(T \cup C) + f(S) \leq f(S \cup C) + f(T)$$

$$f(S \cup C) - f(S) \leq f(T \cup C) - f(T)$$

充分性

取 C 集合为单元素集合 $v \in V \setminus T$

给定任意两个集合 S 和 T 令 $T \setminus S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

$$T_j = \{v_1, v_2, \dots, v_j\} \quad A_j = (S \cap T) \cup T_j \quad B_j = S \cup T_j$$

$$\text{易知 } f(A_j \cup \{v_{j+1}\}) - f(A_j) \geq f(B_j \cup \{v_{j+1}\}) - f(B_j) \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

相加

$$f(A_{k-1} \cup \{v_k\}) - f(A_0) \geq f(B_{k-1} \cup \{v_k\}) - f(B_0)$$

$$f(T) - f(S \cap T) \geq f(S \cup T) - f(S)$$

$$\text{有 } f(S \cap T) + f(S \cup T) \geq f(S) + f(T)$$

3. 给定一个集合 V ，当 $A \subseteq V$ 时， $f(A)$ 是一个子模函数。

a. 证明： $\bar{f}(A) = f(A^c)$ 是一个子模函数。

b. 证明：当 $S \subset V, g(A) = f(A \cap S)$ 是一个子模函数。

证

a. 因为 $f(A)$ 是子模函数， $A \subseteq V$

所以 $S, T \subseteq V$

$$\text{有 } f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T)$$

所以有

$$f(S^c) + f(T^c) \geq f(S^c \cap T^c) + f(S^c \cup T^c) = f((S \cap T)^c) + f((S \cup T)^c)$$

$$\text{所以 } \bar{f}(S) + \bar{f}(T) \geq \bar{f}(S \cup T) + \bar{f}(S \cap T) \text{ 证毕}$$

$$\text{b. } f(A \cap S) + f(B \cap S) \geq f(A \cap S \cap B \cap S) + f((A \cap S) \cup (B \cap S))$$

$$\text{则 } f(A \cap S) + f(B \cap S) \geq f(A \cap B \cap S) + f((A \cup B) \cap S)$$

$$\text{则 } g(A) + g(B) \geq g(A \cap B) + g(A \cup B) \text{ 证毕}$$

5. 令 $w : \Omega \rightarrow R$, 以及任意 $A \subset \Omega$, 验证

$$F(A) = \begin{cases} \max_{a \in A} w_a, & A \neq \emptyset, \\ c, & \text{否则.} \end{cases}$$

是一个集合函数。如果 $c \leq \max_{a \in \Omega} w_a$, 请证明集合函数 F 是一个子模函数。

证

不存在空集的情况下

对 $S \subset \Omega, T \subset \Omega$ 且 $S \neq \emptyset, T \neq \emptyset$

不妨设 $\max_{c \in S} w_c \leq \max_{c \in T} w_c$

$$F(S \cup T) = \max_{c \in S \cup T} w_c = \max\{\max_{c \in S} w_c, \max_{c \in T} w_c\} = \max_{c \in T} w_c$$

$$\text{所以 } F(S) + F(T) - F(S \cup T) - F(S \cap T)$$

$$= \max_{a \in S} w_a + \max_{b \in T} w_b - \max_{c \in T} w_c - \max_{d \in S \cap T} w_d$$

$$= \max_{a \in S} w_a - \max_{d \in S \cap T} w_d$$

$$\geq 0 \text{ 证毕}$$

存在空集的情况下

不妨设 $S \subset \Omega, T \subset \Omega$ 且 $S = \emptyset$

$$F(S) + F(T) - F(S \cup T) + F(S \cap T)$$

$$= c + F(T) - F(T) - c$$

$$= 0$$

综上有 $F(S) + F(T) \geq F(S \cup T) + F(S \cap T)$ 证毕

12. 假设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 和子集族

$$S = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{3\}, \{1, 5\}\}.$$

当 $k = 2$ 时, 运用登山算法求解最大覆盖问题, 可能的解有哪些?

第一轮算法迭代结果为 $S_2 = \{1, 2, 4\}$.

第二轮迭代结果过程如下:

子集	$f(s')$	$f(s \cup \{s_i\})$	$\Delta(s_i)$
s_1	3	3	0
s_3	3	4	1
s_4	3	4	1
s_5	3	4	1
s_6	3	4	1

S_3, S_4, S_5, S_6 边际贡献最大。

$k=2$, 可能的解有 $\{s_2, s_3\}, \{s_2, s_4\}, \{s_2, s_5\}, \{s_2, s_6\}$.

必须出这一套!