温兆和. 10205501432. 数据科学算法 作业6.

2、解：(1). 特征矩阵：$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -4 & \lambda-5 \end{pmatrix}$.

解特征方程：$|\lambda E - A| = 0$：$(\lambda-2)(\lambda-5)-4=0$：

得特征值：$\lambda_1 = 1$. $\lambda_2 = 6$.

(2). 第一步：$v = Au = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$u = \frac{v}{\|v\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = u^T A u = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 14 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 6.2$

第二步：$v = Au = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}$

$u = \frac{v}{\|v\|_2} = \frac{1}{\sqrt{386}}\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = u^T A u = \frac{1}{386}\begin{pmatrix} 5 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix} = 6.03626943$.

第三步：$v = Au = \frac{1}{\sqrt{386}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 115 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{386}}$

$u = \frac{v}{\|v\|_2} = \frac{1}{\sqrt{14066}}\begin{pmatrix} 29 \\ 115 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = u^T A u = \frac{1}{14066}\begin{pmatrix} 29 & 115 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 29 \\ 115 \end{pmatrix} = 6.006114034$

$u = \begin{pmatrix} 29 \\ 115 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14066}}$. $\lambda \approx 6$.

3. 证：(1). ~~A~~ · 由 $A\alpha = \lambda\alpha$.

$$(A - \sigma I)\alpha = A\alpha - \sigma I\alpha = \lambda\alpha - \sigma\alpha = (\lambda - \sigma)\alpha$$

故当 A 的特征值为 λ. $A - \sigma I$ 特征值为 $\lambda - \sigma$.

(2). 当 $A\alpha = \lambda\alpha$. $A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$

又：$A - \sigma I$ 特征值是 $\lambda - \sigma$.

故 $(A - \sigma I)^{-1}$ 特征值为 $(\lambda - \sigma)^{-1}$.

4. 解：(1) 第一步：假设从 $(1, 0)^T$ 开始.

$$\mu = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

第二步：$\mu = -\frac{1}{2}$. $\Rightarrow v = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $u = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

第三步：$\mu = -\frac{29}{34} \approx -0.85$. 已经比较接近 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的一个特征值.

故 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的一个特征值是 $-\frac{29}{34}$

(2) 选定随机向量 $u = (1, 0)^T$

$$(A - \mu I)v = u \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \mu = 1$$

$$u = \frac{v}{\|v\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故该特征值对应的特征向量接近于 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. 解：用幂法求得A第一个特征值：$\lambda_1 = 7.87298335$ ~~$\lambda_1=7$~~ 求对应特征向量

~~求 $A^{(1)} = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$ 的第一个特征值：$\lambda_2 = 1$~~

~~求 $A^{(2)} = A^{(1)} - \lambda_2 v_2 v_2^T$ 的第一个特征值~~：$\lambda_3 = 1$

~~故A的三个特征~~

$v_1 = (-0.19382266 \quad -0.81649658 \quad 0.54384383)$

求 $A^{(1)} = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$ 的主特征值：$\lambda_2 = 1$.

解方程组，求 v_2：$v_2 = (-0.47224729 \quad 0.40824829 \quad -0.78122713)$

求 $A^{(2)} = A^{(1)} - \lambda_2 v_2 v_2^T$ 的主特征值：$\lambda_3 = 0.12701665$

解方程组：$A v_3 = \lambda v_3$. $v_3 = (-0.8598926 \quad 0.40824829 \quad 0.30646033)$

7. 证：$(AA^T)^T = AA^T \quad (A^TA)^T = A^TA$

故 AA^T、A^TA 对称

对任意向量 x

$x^T A A^T A x = (A^T x)^T (A^T x) = \|A^T x\|_2^2 \geq 0$（范数非负性）

故 AA^T 半正定.

同理，A^TA 半正定

9. 解：第一步：$v = Au = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

$u = \dfrac{v}{\|v\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

$\lambda = u^T A u = \dfrac{8}{3}$

再用同样方法经第二步迭代得: $\lambda_1 \approx 2.457354750$

(该步中 $v = \left(\frac{3}{2}\ \ \frac{17}{12}\ \ \frac{7}{6}\right)^T$)

~~10.解~~:

10. 解: 通过写代码. 有

```
import numpy as np
from numpy.linalg import solve
mat = np.array([[2, 1, 0],
                [1, 3, 1],
                [0, 1, 4]])
equ = 3 - 3**0.5
A_comma = mat - equ*np.eye(3)
u = np.array([1, 1, 1])
for i in range(1000):
        x = solve(A_comma, u)
        u = x/np.linalg.norm(x)
~~lamda = u~~  ~~print~~
print(u)
```

得: $u = (0.78867513,\ -0.57735027,\ 0.21132487)^T$