

温冰如. 10205501432. 数据科学算法作业10.

4. 解: 设:  $x_i = \begin{cases} 1, & S_i \text{ 被选中}, 1 \leq i \leq m. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i, j \in S_i, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则该问题可表示为:  $\max_{x_i} \sum_{i=1}^m c_i x_i$   
s.t.  $\forall j: \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq 1, x_i \in \{0, 1\}$

5. 解: 设:  $x_i = \begin{cases} 1, & S_i \text{ 被选中}, 1 \leq i \leq m. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i, j \in S_i, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则该问题可以表示为:  $\min_{x_i} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i$   
s.t.  $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i = k, x_i \in \{0, 1\}$

6. 解: (1) IP(1) 的线性规划松弛是:

$$\max 10x_1 + 4x_2 + 9x_3$$

$$\text{s.t. } 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 9$$

$$0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq 3$$

(2)  $x_1 = 1$ . 原整数规划问题化为:

$$\max 10 + 4x_2 + 9x_3$$

$$\text{s.t. } 4x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$0 \leq x_i \leq 1, x_i \in \mathbb{Z}, 2 \leq i \leq 3$$

其对应该线性规划问题的:

故: 该线性规划问题的最优解为  
 $10 + 1 + 9 = 20$

是  $x_1 = 1$  对应整数规划问题的上界.

(3) IP(1) active.

$$\text{解: } \max 10x_1 + 4x_2 + 9x_3$$

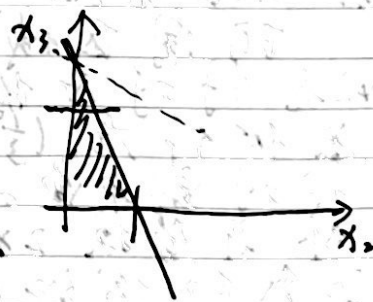
$$\text{s.t. } 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 9$$

$$0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq 3$$

最优解为 20 非整数解. (1.4, 1)

故: IP(2) IP(3) active. IP(1) in active.

IP(2) active 解:  $\max 4x_2 + 9x_3$



$$\text{s.t. } 4x_2 + 3x_3 \leq 9$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad 2 \leq i \leq 3$$

当  $(x_2, x_3) = (1, 1)$  最优值为 13

$Z_1 = 13$ .  $2P(12)$  及其子节点被剪枝.

对  $2P(13)$  约:  $\max 10 + 4x_2 + 9x_3$   
 $\text{s.t. } 4x_2 + 3x_3 \leq 4$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad 2 \leq i \leq 3$$

~~当  $(x_2, x_3) = (1, 1)$  最优值为 13~~ 由 (12),  $2P(16)$   $2P(17)$  active.  
 对  $2P(16)$  约:  $\max 10 + 9x_3$   
 $\text{s.t. } 3x_3 \leq 4$   
 $0 \leq x_3 \leq 1$

$x_3 = 1$  最优值为: 19

$Z_2 = 19$ .  $2P(16)$  及其子节点被剪枝

对  $2P(17)$  约:  $\max 14 + 9x_3$   
 $\text{s.t. } 3x_3 \leq 0$

当  $x_3 = 0$ , 最优值为 14  $< Z_1$ .

$2P(17)$  被剪枝. 此时无 active 节点

最终:  $2P(1) > Z_2 = 19$ .  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$

7. 约: (1).  $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4$

(2). 如右图所示

(3).  $x_1$  轴,  $x_2$  轴.  $x_1 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 4$

所围区域

(4). 先对应该松弛线性规划问题.

最优解在  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

找到割平面  $x_1 \leq 3$  将其排除在

外并替换  $2x_1 - x_2 \leq 6$

再对松弛 LP 问题:

当  $(x_1, x_2) = (3, 1)$  得最优解: 10.

是整数解退出循环

