華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

数据科学与工程算法基础

Algorithm Foundations of Data Science and Engineering

第四章　哈希算法

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$$

课程提纲

Content

1 算法引入

2 布隆过滤器

3 局部位置敏感哈希

课程提纲

Content

1 算法引入

2 布隆过滤器

3 局部位置敏感哈希

如何快速判断用户名是否被注册

- 判断用户名是否被注册相当于判断一个元素是否出现在一个集合中
- 如何能做到瞬间反馈结果?
  - 用链表表示集合，查找效率会很低
  - 对用户名建立B+树索引，可以提高查询效率，复杂度为$O(\log n)$，其中n为集合大小
  - 能否找到$O(1)$复杂度的方法呢?

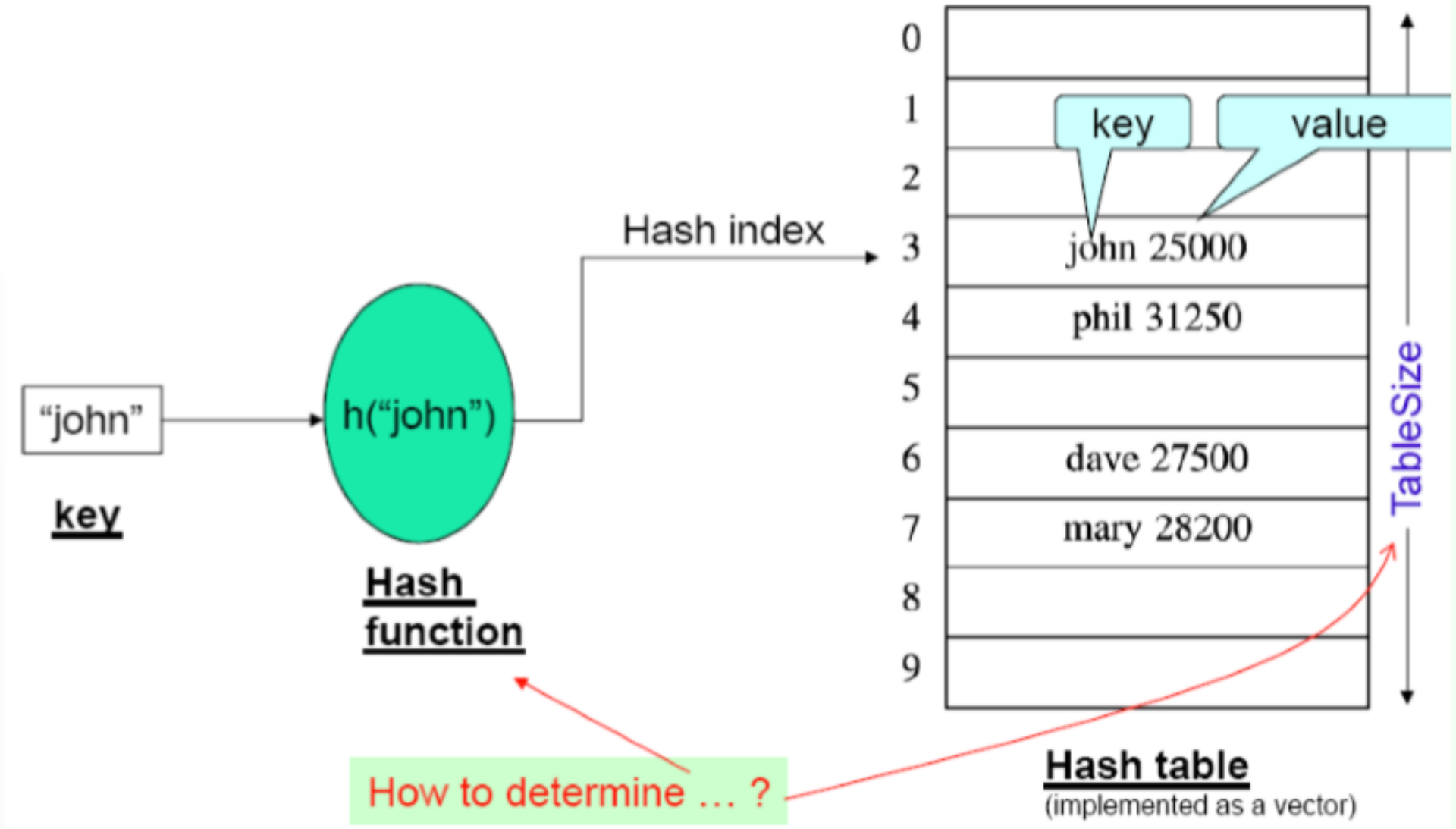
文本冗余检测

- 搜索引擎定期爬取网页内容
  - 爬取太多冗余文本会浪费存储空间
  - 但海量文本需要爬取，逐篇对比过于低效
  - 如何快速判断网页内容是否冗余?

哈希函数

- 哈希函数$h(\cdot)$是一个数学函数，满足$h:\text{key}\rightarrow\text{value}$，即$h(\text{key})=\text{value}\in\mathbb{Z}^+$
- 哈希函数的作用
  - **压缩存储**：哈希值所需的存储空间远小于输入关键词占用的空间
    - ✓网页URL哈希到某个位置，可以表示为一个整数
    - ✓邮件地址哈希成一个整数
  - **无冲突**：理想状态下，输入不同的关键词会得到不同的哈希值
    - ✓即使是两个差异很小的关键词也会得到两个完全不同的哈希值
    - ✓相同关键词被相同哈希函数哈希后不可能得到两个不同的哈希值
  - **不可逆**：在不知道哈希函数的情形下，仅知道哈希值，不可能轻易地猜到此哈希值对应的关键词
    - ✓唯一找到关键词的方法是蛮力法（Brute-Force）
    - ✓正是因为这一点，哈希函数成为最重要的密码学工具之一

哈希表


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
key
value
john 25000
phil 31250
dave 27500
mary 28200
TableSize
Hash index
"john"
key
h("john")
Hash function
How to determine … ?
Hash table
(implemented as a vector)

数据结构的操作效率

操作	未排序数组	排序数组	链表	二叉排序树
插入	O(1)	O(n)	O(1) 或 O(n)	O(log n)
查找	O(n)	O(log n)	O(n)	O(log n)
删除	O(n)	O(n)	O(1)	O(log n)

- 通常，对哈希表的插入、查找和删除操作复杂度均为$O(1)$，但并不总是这样
- 影响哈希表操作性能的因素
  - **哈希函数**：将冲突最小化，使key和value均匀地分布在整个表中
  - **冲突解决策略**：将key/value存储在不同的位置，或将多个key/value用链表串起来
  - **哈希表大小**：表过大会降低碰撞的可能，但会造成内存空间的浪费；过小的哈希表会增加碰撞的可能性

课程提纲

Content

1 算法引入

2 布隆过滤器

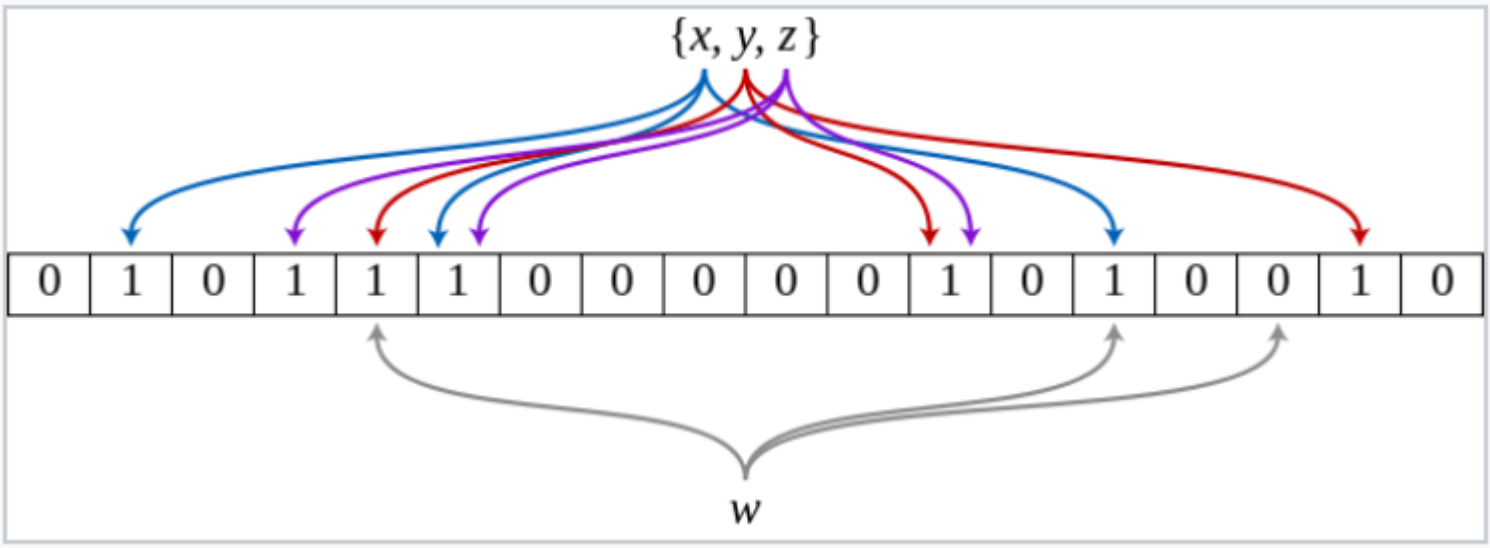
3 局部位置敏感哈希

布隆过滤器

- 回答一个元素是否出现在一个集合中时，仅仅使用一个哈希函数，碰撞可能是一个大的问题
- 布隆过滤器（Bloom Filter）是为了应对碰撞而提出的
  - 它是一种高空间效率的概率数据结构
  - 用于判断一个元素是否属于一个集合的成员
- 布隆过滤器具有广泛的应用
  - 垃圾邮件地址过滤器：可以有效过滤垃圾邮件地址
  - 拼写检查：能很快发现文字编辑软件中输入的错
  - 重复检查：用于网络爬虫判断某个URL是否已经被爬取过了，或用户名是否被注册过

布隆过滤器示例

假定集合中有n个元素，给定一组k个哈希函数$h_1, \ldots, h_k$，其中h_i的范围为$\{0, \ldots, m-1\}$，初始状态长度为m的位数组每个位置被置为0



- 如图为布隆过滤器示例
  - 示例中$m = 18$，$k = 3$
  - 每个元素被哈希到位数组中的三个位置
  - 图示为插入元素$\{x, y, z\}$后的情形

元素插入

给定 3 个哈希函数 h_1, h_2, h_3，其中 h_i 的范围为 $\{0,1,\ldots,9\}$，初始状态长度为 10 的位数组每个位置被置为 0

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

令 $H(x) = \{h_1(x), h_2(x), h_3(x)\}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1

插入 x_1

$H(x_1) = \{1,4,9\}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

插入 x_2

$H(x_2) = \{4,5,8\}$

元素查询

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

$H(x_1) = \{1,4,9\}$

$H(x_2) = \{4,5,8\}$

- 元素查询
  - 查询 y_1, $H(y_1) = \{1,4,9\} \rightarrow$ Yes
  - 查询 y_2, $H(y_2) = \{0,4,8\} \rightarrow$ No
  - 查询 y_3, $H(y_3) = \{1,5,8\} \rightarrow$ Yes (假阳性)
- 布隆过滤器可能会误判
  - 不会出现拒真的情形（假阴性不会出现）
  - 但是可能出现纳伪的情形（假阳性）
- 如何降低误判率?

误判率分析

- 当插入一个元素到布隆过滤器，一个哈希函数未将某个特定位置置为1的概率为$1-\frac{1}{m}$
- 当一个元素插入布隆过滤器后，k个哈希函数未将特定位置置为1的概率为$\left(1-\frac{1}{m}\right)^k$
- 将n个元素插入布隆滤波器后，特定位置未被置为 1 的概率为$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{kn}$
- 因此，某个特定位置为1的概率为$1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^{kn}$

误判率分析（续）

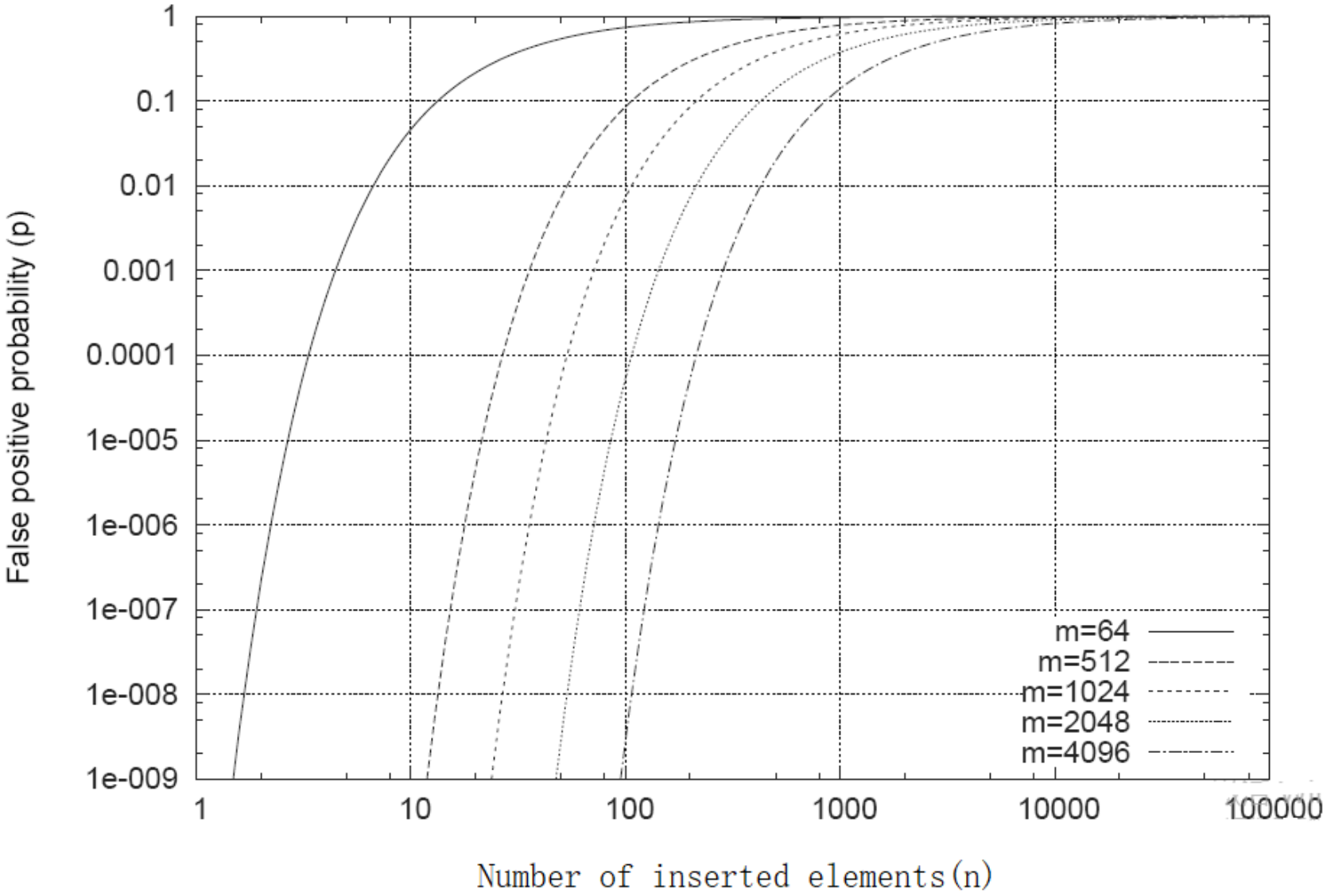
- 查询某个元素时，当k个哈希函数对应的位置均为1，则过滤器声称该元素属于该集合
- 当该元素不属于该集合时，会发生误判，其概率为

$$f = \left(1 - (1 - \frac{1}{m})^{kn}\right)^k \approx \left(1 - e^{-\frac{kn}{m}}\right)^k$$

x	$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$
4	3.160494
16	2.808404
64	2.739827
256	2.723610
1024	2.719610
4096	2.718614
16384	2.718365
65536	2.718303
262144	2.718287
1048576	2.718283
4194304	2.718282

- 误判概率随布隆过滤器m的增大而减小
- 随着更多元素的加入，误判概率随n的增加而增加
- 如何降低误判概率
  - 集合中元素个数相对固定，空间大小可能受限
  - 可以通过适当选择哈希函数的个数即k值，最小化概率 $\left(1 - e^{-\frac{kn}{m}}\right)^k$

误判率


False positive probability (p)
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-005
1e-006
1e-007
1e-008
1e-009
1
10
100
1000
10000
100000
Number of inserted elements(n)
m=64
m=512
m=1024
m=2048
m=4096

最小化误判率

- 给定m 和 n，选择一个合适的k使得误判率最小
- 令$\rho = e^{-\frac{kn}{m}}$，则 $f \approx (1-\rho)^k = e^{k\ln(1-\rho)}$
- 注意到 $\ln\rho = -\frac{nk}{m}$，即 $k = -\frac{m\ln\rho}{n}$，令

$$g = k\ln(1-\rho) = -\frac{m}{n}\ln\rho\ln(1-\rho)$$

- 因此，对固定的 m 和 n，当 $\rho = 1/2$ 时，误判概率最小

k 值的选择

- 当 $\rho = 1/2$ 时，$k = \ln 2 \cdot \frac{m}{n}$
- 将其值代入，得 $f = (\frac{1}{2})^k \approx 0.6185^{\frac{m}{n}}$
- 因此，最优布隆过滤器结构为 $\rho = 1/2$ 时，即布隆过滤器有一半位置为空
- 此时，$k = \ln 2 \cdot \frac{m}{n}$

误判概率表

- 给定 m/n，不同 k 值对应的误判率
  - 当 k 值太小时，两个元素被哈希到相同位置的概率增加，误判概率也会增加
  - 当 k 值太大时，更多位置被置为 1，因此误判概率增加

m/n	k	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
2	1.39	0.393	0.400			
3	2.08	0.283	0.237	0.253		
4	2.77	0.221	0.155	0.147	0.160	
5	3.46	0.181	0.109	0.092	0.092	0.101
6	4.16	0.154	0.0804	0.0609	0.0561	0.0578
7	4.85	0.133	0.0618	0.0423	0.0359	0.0347
8	5.55	0.118	0.0489	0.0306	0.024	0.0217

习题：布隆过滤器

假设一个布隆过滤器的容量为10000位，集合中有2000个元素。

- 计算使用2个哈希函数时的误判率(表示为自然常数e的表达式);
- 计算使用8个哈希函数时的误判率(表示为自然常数e的表达式);
- 计算使用几个哈希函数可以使得误判率最低。

课程提纲

Content

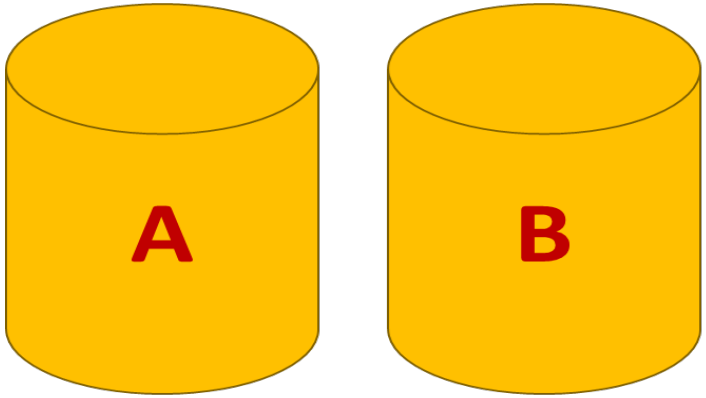
1 算法引入

2 布隆过滤器

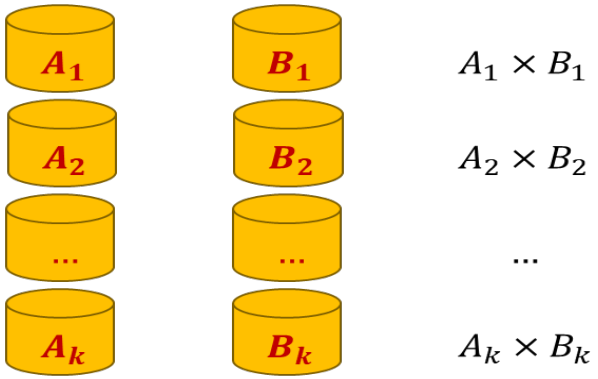
3 局部位置敏感哈希

冗余文本检测

- 给定海量文档（百万或数十亿计）查找其中的冗余文本
  - 文档太多，逐一比较费时费力
  - 文档太大或太多，以致无法放入主存
  - 分块或者索引是常用的方法



$A \times B$

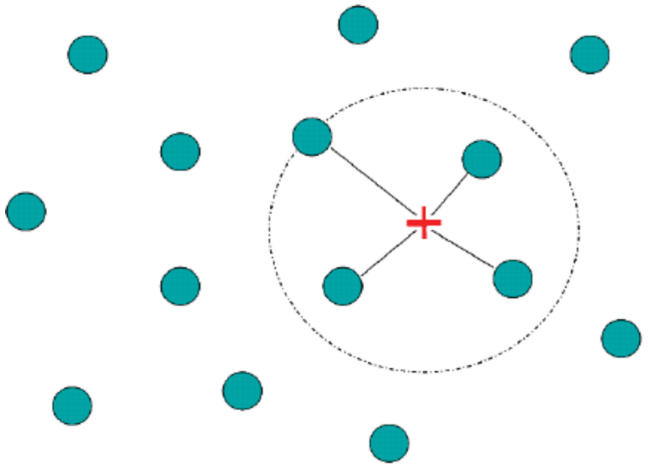


$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \times B_i$

- 应用
  - 镜像网站发现
  - 抄袭检测
  - 对象分块

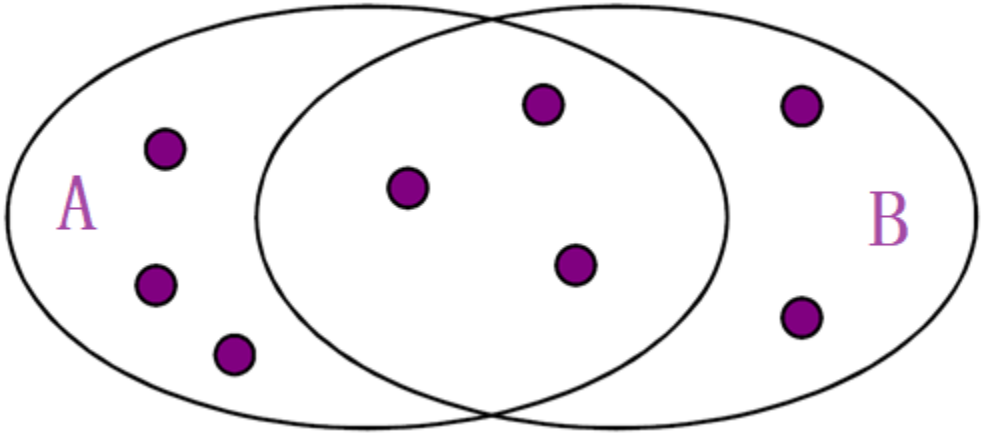
（近似）最近邻查找

- 给定海量高维数据，找到与查询对象最相似的对象
  - 应用：分类，聚类，文本检索，图像和音频检索
  - 最近邻查找（NN）：树型索引结构，如二叉搜索树，B+ 树等
  - “维度诅咒”：当数据维度很高时，树型索引结构的查找效率会接近线性查找
- 近似最近邻查找（ANN）：局部敏感哈希（LSH）



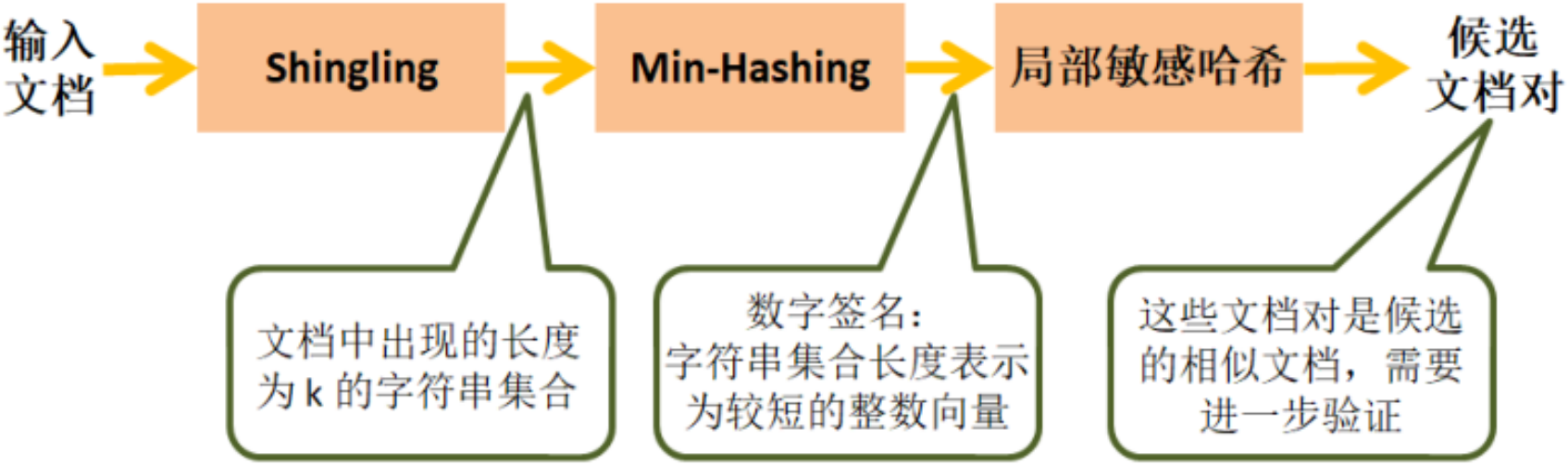
文本相似度

- 集合相似度和距离
  - 给定集合 A 和 B，Jaccard 相似度定义为
    - ✓ $\text{Jaccard}(A,B) = \dfrac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$
    - ✓ 用于衡量文本、图中顶点间的相似度
  - 给定集合 A 和 B，Jaccard 距离定义为
    - ✓ $d(A,B) = 1 - \dfrac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$
  - 示例
    - ✓ $\text{Jaccard}(A,B) = \dfrac{3}{8}$
    - ✓ $d(A,B) = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$



冗余文本检测的步骤

- **Shingling**：将文档转换为集合
- **Min-Hashing**：将大的集合转换为短的签名，同时保留相似性
- **局部敏感哈希**：筛选或寻找相似文档候选对



Shingling：文档的集合表示

- 文本建模
  - Document = 文档中出现的单词集合
  - Document = 一组“重要”单词的集合
  - 简单分词会损失上下文信息
  - 为关注单词的顺序，定义 Shingles
- 文本中的 k–Shingles (k–gram) 是文本中连续 k 个 token 组成的序列
  - Token 可能是字符、单词等
  - 给定字符串 $D = abcab$，令 $k = 2$, 字符串的 2–Shlingles 为

$$S(D) = \{ab, bc, ca\}$$

  - 如果 k–Shingles 看作是 multi–set，表示为 $S(D) = \{ab, bc, ca, ab\}$

位向量编码

Documents

Shingles

1	1	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0
1	0	1	0

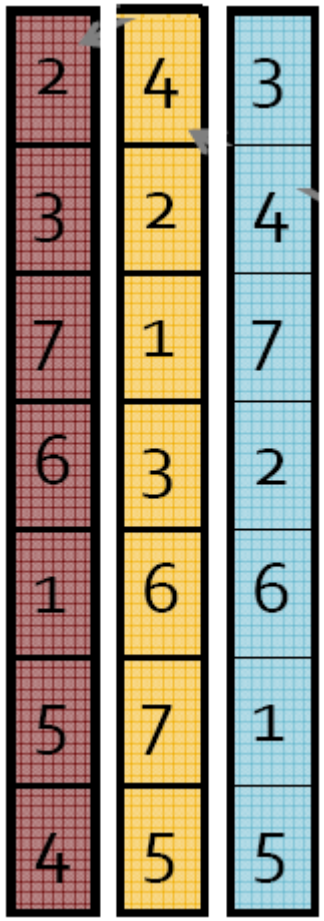
- 所有 k–Shingles 构成全集
- 文本的位向量
  - 行 = k–Shingles，列 = 单个文本
  - 第 i 行第 j 列的数值表明第 i 个 k –Shingles 出现在第 j 个文本中
  - 文本的 Jaccard 相似度也可以运用位向量进行计算
- 对文本 C_1 和 C_2
  - 交集大小为 3， 并集大小为 6
  - $\text{Jaccard}(C_1, C_2) = \frac{1}{2}$
  - 距离 $d(C_1, C_2) = \frac{1}{2}$

Min-Hashing

- 目标：找到哈希函数 $h(\cdot)$，使得集合 C_1 和 C_2
  - 当 $\text{Jaccard}(C_1, C_2)$ 较高时，则 $P(h(C_1) = h(C_2))$ 较高
  - 当 $\text{Jaccard}(C_1, C_2)$ 较低时，则 $P(h(C_1) \neq h(C_2))$ 较高
- 一旦目标达成
  - 相似文档大概率会被哈希到同一个桶中
  - 不相似文档大概率会被哈希到不同的桶中
- 如何选择哈希函数?
  - 显然，哈希函数的选择依赖于相似度度量
  - 并非所有相似度度量都能找到合适的哈希函数
  - 幸运的是，对 Jaccard 相似度，**最小哈希**（Min-Hashing）可以实现这一目标

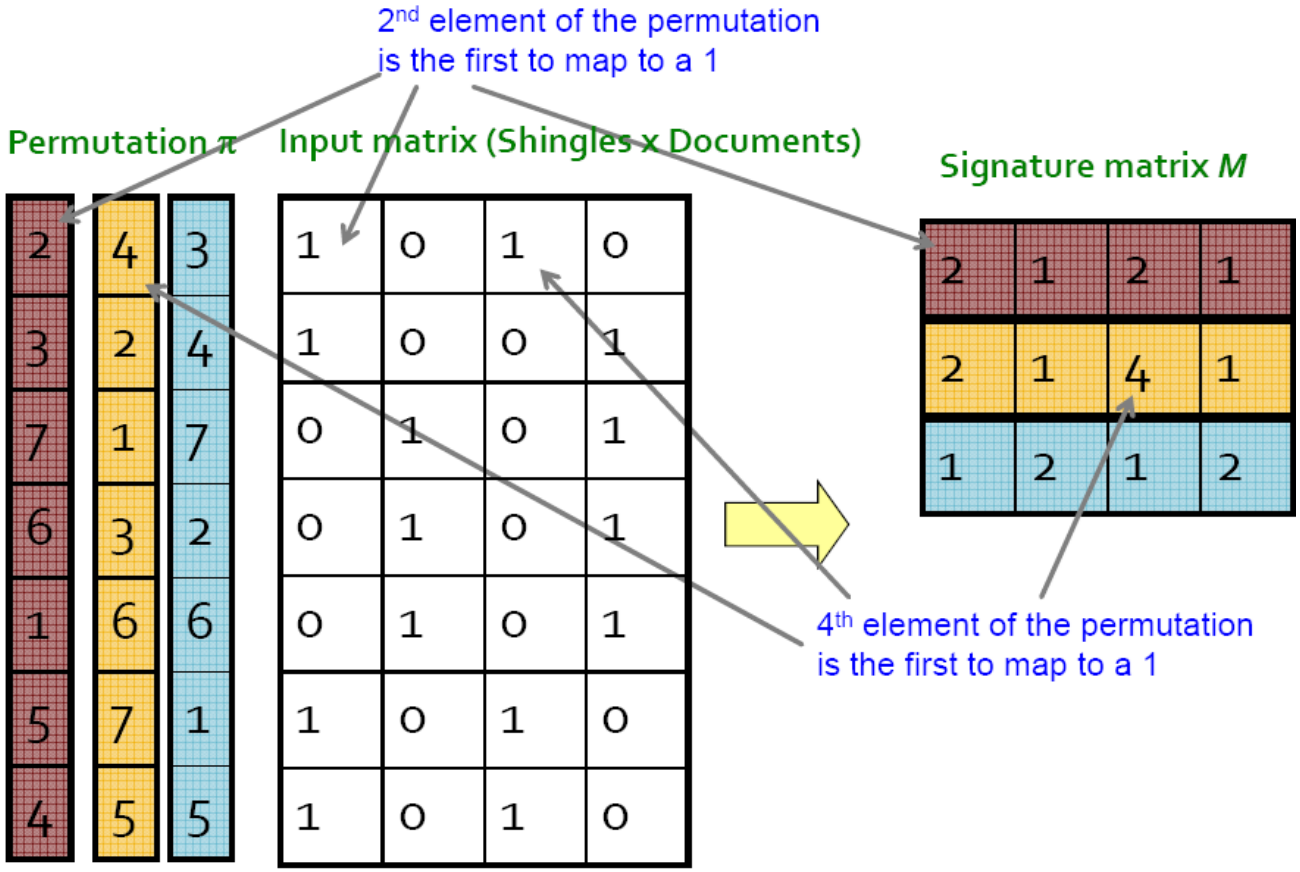
随机排列

- 随机排列是 n 个不同元素的随机排序
  - 洗一副扑克是随机排列最好的例子
  - 因此，随机排列的数量为 $n!$
  - 如图为数字1—7的三个随机排列
  - 以第一列为例，新的排列
    - ✓第一行是原来的第5个位置
    - ✓第二行是原来的第1个位置
    - ✓第三行是原来的第2个位置
    - ✓第四行是原来的第7个位置
    - ✓第五行是原来的第6个位置
    - ✓第六行是原来的第4个位置
    - ✓第七行是原来的第3个位置



最小哈希

- 令 π 为一个随机排列和布尔向量 C，定义一个“哈希”函数 $h_\pi(C) =$ 随机排列后第一个不为 0 的行号索引，即 $h_\pi(C) = \min_\pi \pi(C)$



最小哈希的性质

- 给定一个随机排列 π，我们有 $P\left(h_\pi(C_1) = h_\pi(C_2)\right) = \text{Jaccard}(C_1, C_2)$
- **证明：**

集合 C_1 和 C_2 的特征矩阵每行只有三类情况：（1）均为 1；（2）有且只有一个为 1；（3）均为 0。

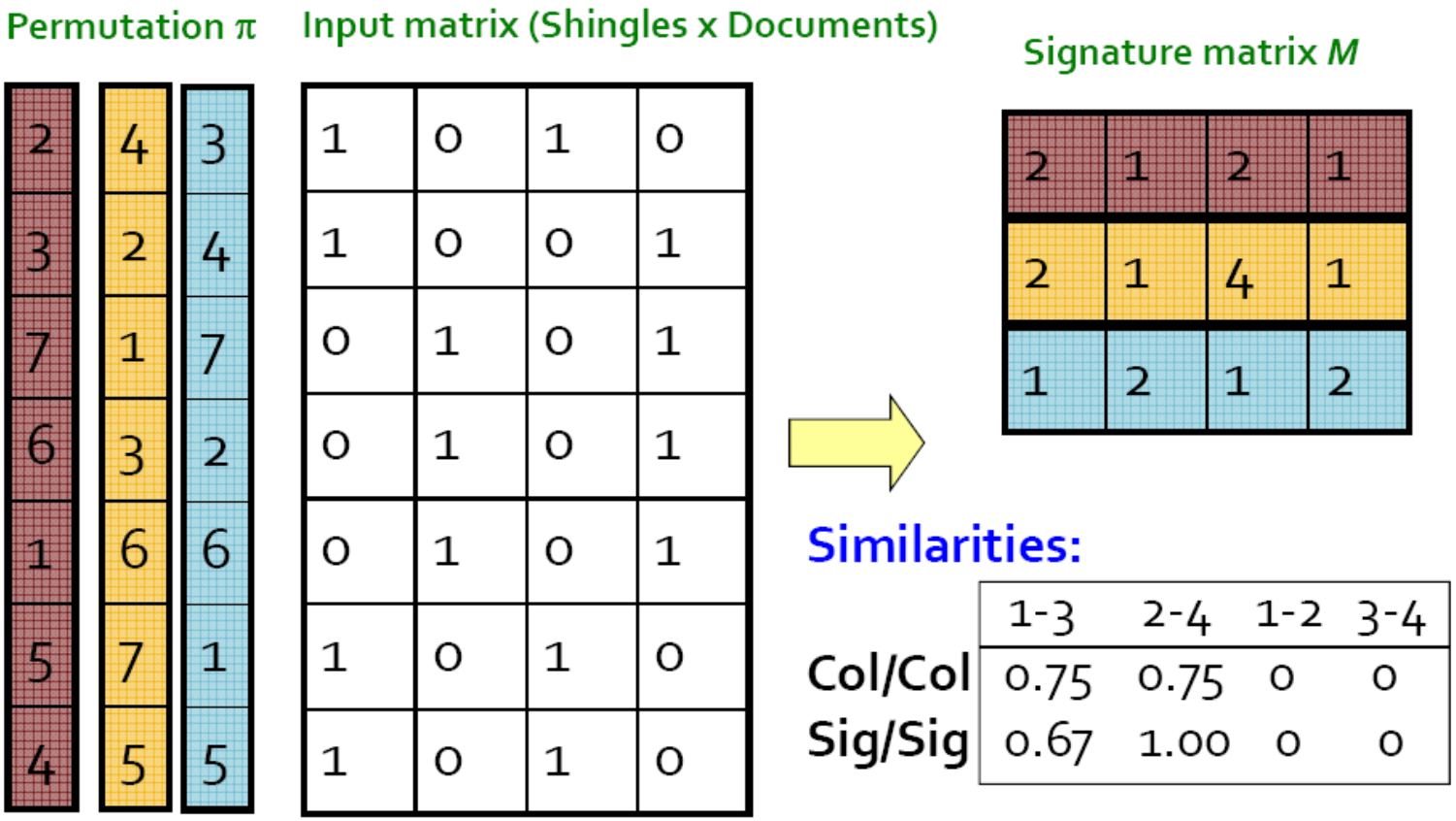
假设第一类有 a 行，第二类有 b 行，第三类有 c 行，则 $\text{Jaccard}(C_1, C_2) = a/(a+b)$。

随机重排之后 $h_\pi(C_1) = h_\pi(C_2)$ 则意味着在遇到第一类情况之前没有遇到第二类情况。由于重排是随机的，根据古典概型，可以知道

$$P\left(h_\pi(C_1) = h_\pi(C_2)\right) = \frac{a}{a+b} = \text{Jaccard}(C_1, C_2)$$

基于最小哈希的相似度

- 对任意的 π，$h_\pi(C_1) = h_\pi(C_2)$ 是一个伯努利随机变量，可以通过成功频数估计概率
- 因此，可以基于最小哈希估计集合间的相似度



最小哈希签名

- 假定有100个随机排列，每一个文本C对应100个最小哈希值
- 把这100个哈希值看作是一个列向量，记为$\text{sig}(C)$，其中$\text{sig}(C)[i] = \min(h_{\pi_i}(C))$
  - 将高维布尔向量“压缩”为低维向
  - 低维向量记作一个文本的签名向量
- 重要观察
  - 100维签名向量相同的两个集合大概率是相同的
  - 即使很相似，稍有不同的集合可能签名向量也不同
  - 为了能够找到相似文本，对签名向量进行分组

习题：最小哈希签名

- 计算下表中三个集合S_1, S_2, S_3两两间的Jaccard相似度
- 用以下哈希函数重新排列计算S_1, S_2, S_3的MinHash签名：
  - $h_1(x) = (3x + 3) \mod 4$
  - $h_2(x) = (7x + 2) \mod 4$
  - $h_3(x) = (x + 1) \mod 4$

集合的位向量编码表示

集合	S1	S2	S3
0	1	0	1
1	0	1	0
2	0	1	0
3	1	1	0

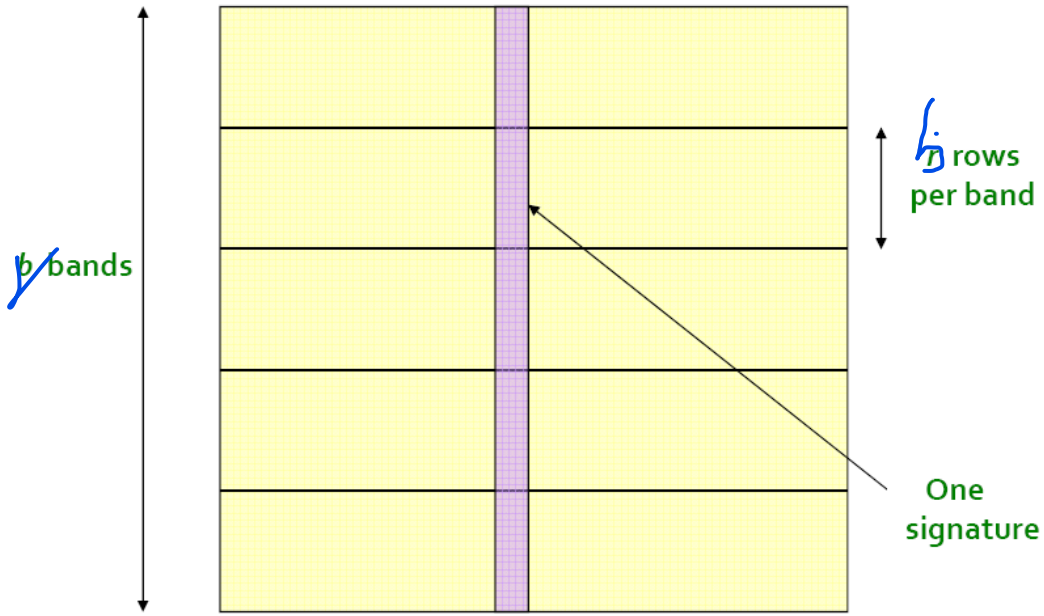
行变换顺序

h1	h2	h3
3	2	1
2	1	2
1	0	3
0	3	0

最小哈希签名

集合	S1	S2	S3
h1	0	0	3
h2	2	0	2
h3	0	0	1

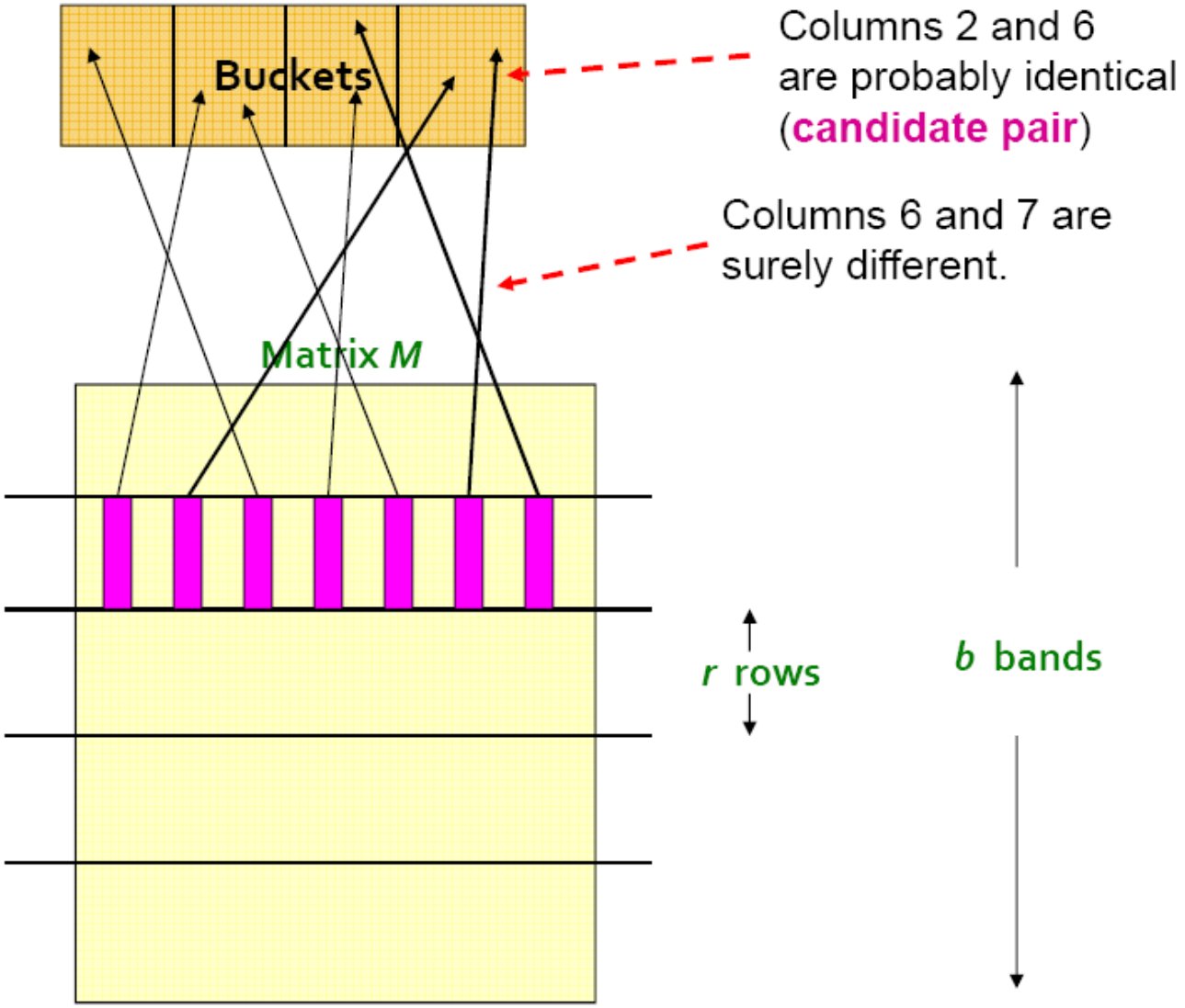
签名矩阵分组



Signature matrix M

- 将签名矩阵 M 划分为 r 行，每行由 b 个最小哈希值构成
  - 每 b 个最小哈希值构成一个签名，每个集合由 r 个签名构成
  - 在每行条中，如果两个集合的签名相同，它们将被哈希到同一个桶中
  - 在 r 个行条中，两个集合至少一次被哈希到同一个桶中被认为是相似的
- 重要观察
  - 固定相似度（小于 1），两个集合被哈希到同一桶的概率随着 b 值的增加而减少
  - 随着行条数 r 的增加，两个集合被哈希到同一桶的概率会增加

Locality Sensitive Hashing (LSH)



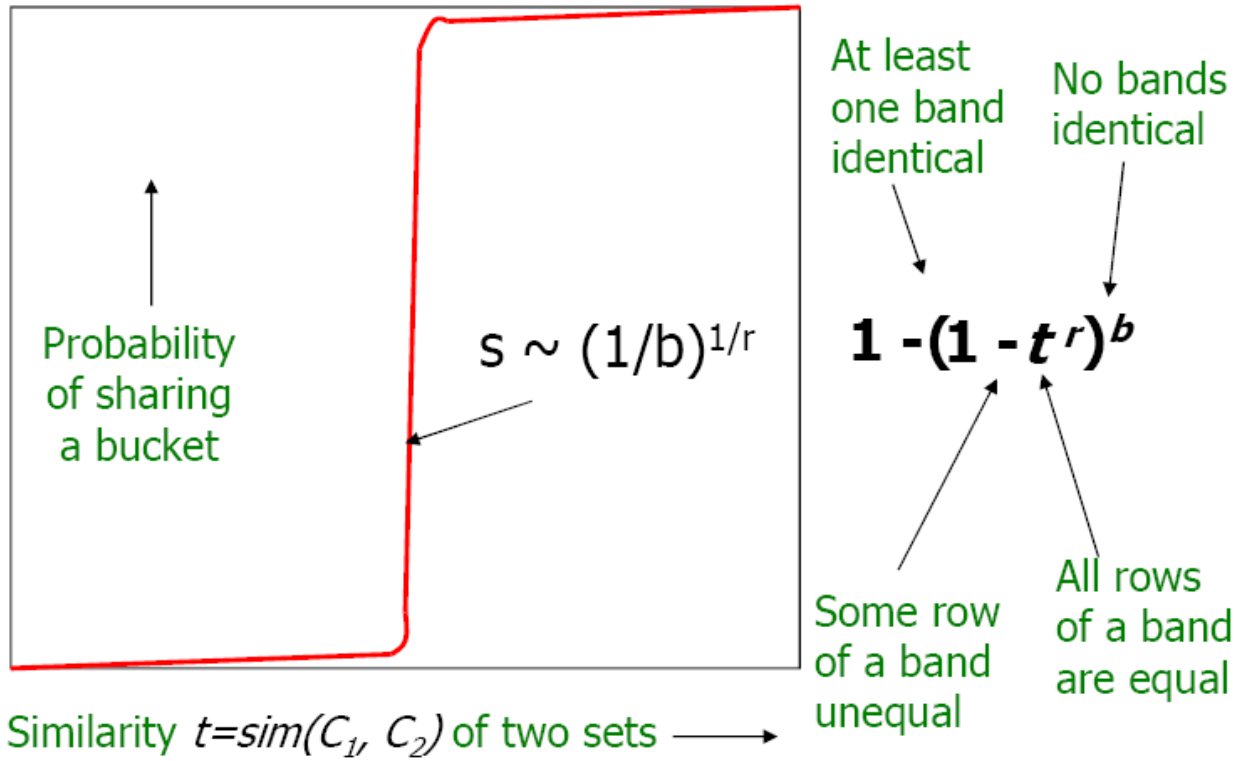
Jaccard 相似度为 0.8

- 令集合 C_1 和 C_2 的相似度为 0.8，$b = 20$，$r = 5$
  - C_1, C_2 的签名相同概率为 $0.8^5 = 0.328$
  - C_1, C_2 的 20 个行条都不相同的概率为 $(1 - 0.328)^{20} \approx 0.00035$
- C_1, C_2 为候选相似集合，即两个集合被哈希到至少一个公共 bucket 中，因此发生概率为$1 - (1 - 0.328)^{20} \approx 99.965\,\%$
- 计算结果表明
  - 相似集合以大概率被哈希到同一个桶中
  - 相似度越高越可能被哈希到同一个桶中

Jaccard 相似度为 0.3

- 令集合 C_1 和 C_2 的相似度为 0.3，$b = 20$，$r = 5$
  - C_1, C_2 的签名相同，其概率为 $0.3^5 = 0.00243$
  - C_1, C_2 的 20 个行条都不相同的概率为 $(1 - 0.00243)^{20} \approx 0.9526$
- C_1, C_2 为候选相似集合，即两个集合被哈希到至少一个公共 bucket 中，因此发生概率为 $1 - (1 - 0.00243)^{20} \approx 4.74\,\%$
- 计算结果表明
  - 不相似集合以小概率被哈希到同一个桶中
  - 相似度越低越不可能被哈希到同一个桶中

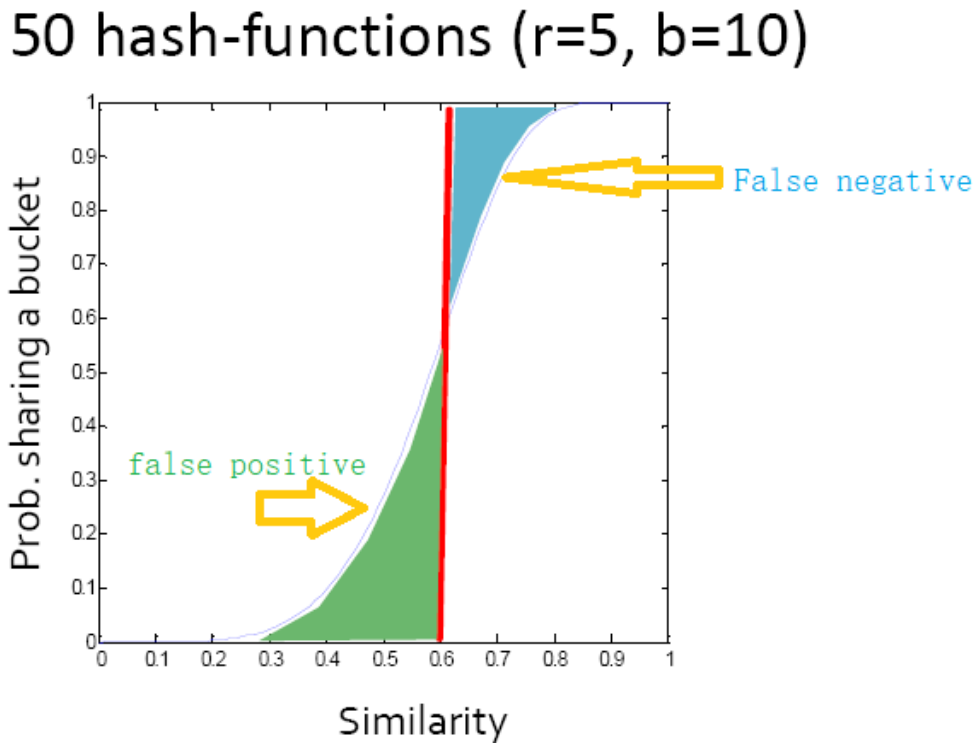
LSH 分析



- 设两个集合相似度为 t
  - 某个签名相同的概率为 t^r
  - 没有一次被哈希到同一个桶中的概率为 $(1-t^r)^b$
  - 至少一次被哈希到同一个桶中的概率为 $1-(1-t^r)^b$

LSH 分析（续）

s	$1-(1-s^r)^b$
.2	.006
.3	.047
.4	.186
.5	.470
.6	.802
.7	.975
.8	.9996



- 通过适当选择 b 和 r 得到最好的 s 曲线
- 因此，LSH 能够实现文本分块
  - 落在同一桶中的文本大概率是相同的
  - 不在同一桶中的文本大概率是不相同的

本章小结

- 哈希算法
  - 哈希函数
  - 布隆过滤器
  - 局部敏感哈希（LSH）
    - ✓Shingling，最小哈希，局部敏感哈希
- 针对如下相似度或者距离，可以利用局部敏感哈希解决冗余检测和最近邻搜索的问题
  - Jaccard 相似度
  - Hamming 距离
  - Cosine 距离
  - 欧几里得距离

课后作业

- 课本第66–67页习题4
  - 第2，3，5，7，8，9，11题
  - 第6题难度较大，供大家扩展思考