温张和 10205501432. 数据科学算法作业5.

1. 解: (1). $\pi P = (1\ \ 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = (\frac{1}{2}.\ \frac{1}{2})$

$\pi P^2 = \pi P\cdot P = (\frac{1}{2}.\ \frac{1}{2})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = (\frac{3}{8}.\ \frac{5}{8})$.

$\pi P^3 = \pi P^2 P = (\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = (\frac{11}{32}\cdot\ \frac{21}{32})$.

$\pi P^4 = \pi P^3 P = (\frac{11}{32}\ \ \frac{21}{32})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = (\frac{43}{128}\cdot\ \frac{85}{128})$.

(2). 证明: P^5. P^6. P 运行结果都接近于 $\begin{pmatrix} 0.3333 & 0.6666 \\ 0.3333 & 0.6666 \end{pmatrix}$

故: 对每一个 $n \geq 5$. πP^n 都接近一个常数向量.

2. 证: 假设 P 的一个平稳分布是 π. 即 $\pi P = \pi$.

则 $\pi\cdot\frac{1}{n}((n-1)I+P) = \frac{1}{n}(n-1)\pi + \frac{1}{n}\pi P$

$= \frac{1}{n}(n-1)\pi + \frac{1}{n}\pi$.

$= \frac{1}{n}(n-1+1)\pi$.

$= \frac{1}{n}\cdot n\pi = \pi$.

故: P 和 $\frac{1}{n}((n-1)I+P)$ 有相同的平稳分布.

4. 证: (1). $\pi P = (0.4.\ 0.6)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = (0.4,\ 0.6) = \pi$.

故: $\pi = (0.4.\ 0.6)$ 是该链的一个平稳分布.

(2). 由第2题结论. P 和 $\frac{1}{n}((n-1)I+P)$ 有相同平稳分布.

当 $n=2$. $\frac{1}{n}((n-1)I+P) = \frac{1}{2}(I+P)$

又：$\pi=(0.4,0.6)$是P的平稳分布.

故$\pi=(0.4,0.6)$也是马氏链$\frac{1}{2}(I+P)$的平稳分布.

(2). 现进行验证：

$$\pi\cdot\frac{1}{2}(I+P)=(0.4,0.6)\cdot\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right)=(0.4,0.6)$$

说明π的确是链$\frac{1}{2}(I+P)$的一个平稳分布.

(3). 由第2题结论：P和$\frac{1}{n}((n-1)I+P)$有相同平稳分布.

当$n=2$. $\frac{1}{n}((n-1)I+P)=\frac{1}{2}(I+P)$

故P和$\frac{1}{2}(I+P)$有相同平稳分布

5. 解：状态1： $1\to1$. $1\to2\to1$. 周期为1.

状态2： $2\to1\to2$. $2\to1\to1\to2$. 周期为1. (2、3最大公因数).

故：该马氏链是非周期的.

由1可经有限步(1步)到达2. 由2也可经有限步到达1.

故该马氏链是不可约的.

6. 解：状态-1： $-1\to0\to-1$. $-1\to0\to1\to0\to-1$

$-1\to0\to1\to2\to1\to0\to-1$. 周期为2.

同样地，其余各状态的周期也都是2.

故：该马氏链是周期的

从任一状态均可在1至3步内到达另一状态.

故：该马氏链是不可约的.

10. 解：由图列方程组：

$$\begin{cases} r_a = \frac{1}{2} r_b + \frac{1}{2} r_d. \\ r_b = \frac{1}{3} r_a + \frac{1}{2} r_d. \\ r_a = \frac{1}{3} r_a + \frac{1}{2} r_b. \\ r_d = r_c + \frac{1}{3} r_a. \end{cases}$$

由于该方程组有无穷多解，假设$(r_a.\ r_b.\ r_c.\ r_d)$构成随机分布，增加限定条件 $r_a + r_b + r_c + r_d = 1$.

解得
$$\begin{cases} r_a = \frac{9}{34} \\ r_b = \frac{8}{34} = \frac{4}{17} \\ r_c = \frac{7}{34} \\ r_d = \frac{10}{34} = \frac{5}{17} \end{cases}$$