温兆松. 1020550143. 数据科学算法作业9.

No.

Date

1. 证: 以归纳性: 令 $A \subset B$. $C \subseteq U \setminus T$. 则.

$f(A \cup \{C\}) + f(B) \geq f((A \cup C) \cap B) + f(A \cup C) \cup B)$.

$A \cup C \cup B = B \cup C$. $(A \cup C) \cap B = A$.

故: $f(A \cup C) + f(B) \geq f(A) + f(B \cup C)$.

故 $f(A \cup C) - f(A) \geq f(B \cup C) - f(B)$.

充分性: 对 $\forall A, B \subseteq U$. $B \setminus A = \{v_1 \cdots v_k\}$ $B_j = \{v_1 \cdots v_j\}$.

$S_j = (A \cap B) \cup B_j$. $T_j = A \cup B_j$. $\forall j = 0 \cdots k-1$.

$f(S_j \cup \{v_{j+1}\}) - f(S_j) \geq f(T_j \cup \{v_{j+1}\}) - f(T_j)$

对 k 分式多求和求得: $f(A) + f(B) \geq f(A \cap B) + f(A \cup B)$

3. 证: (1). 由于 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $A \cup B = \bar{A} \cap \bar{B}$.

故 $f(\bar{A}) + f(\bar{B}) \geq f(\bar{A} \cup \bar{B}) + f(\bar{A} \cap \bar{B}) = f(A \cap B) + f(A \cup B)$

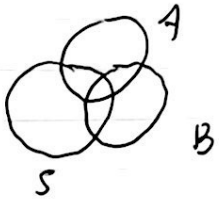
故: $f(A)$ 是子模函数;

(2). $g(A) + g(B) = f(A \cap S) + f(B \cap S) \geq f((A \cap S) \cap (B \cap S))$

$+ f((A \cap S) \cup (B \cap S)) = f((A \cap B) \cap S) + f((A \cup B) \cap S)$.

$= g(A \cap B) + g(A \cup B)$.

故. $g(A)$ 是子模函数



5. 证: 令 $A \subset B \subseteq \Omega$. $v \in A \setminus B$.

由 $F(A)$ 定义: 有: $F(B) \geq F(A)$.

且 $F(A+v) - F(A) = \begin{cases} 0. & w_v \leq F(A) \\ w_v - F(A) \neq 0. & w_v > F(A) \end{cases}$

且当 $F(A+v) - F(A) = 0$. 时. $F(B+v) - F(AB) \neq 0$ 不成立.

当 $F(A+v) - F(A) \neq 0$ 时.

若: $F(B \setminus A) > F(A)$. 则. $F(A+v) - F(A) = w_v - F(A) > w_v - F(B) = F(B+v) - F(B)$

反则: $F(A+v) - F(A) = F(B+v) - F(B) = w_v - F(A)$.

故 $F(A+v) - F(A) \geq F(B+v) - F(B)$ 成立.

故 F 是子模函数.

12. 解: 解1: $\{1, 2, 4\}$. $\{2, 3\}$

解2: $\{1, 2, 4\}$ $\{4, 5\}$

解3: $\{1, 2, 4\}$ $\{3\}$

解4: $\{1, 2, 4\}$ $\{1, 5\}$.