线性规划

- 线性规划模型
  - 模型
  - 二维线性规划的图解法
- 标准形
  - 标准形
  - 标准形的可行解的性质
- 单纯形法
  - 确定初始基本可行解
  - 最优性检验

线性规划

- 基变换
  - 单纯形表
  - 人工变量和两阶段法
  - 单纯形法的有限终止性
- 对偶性
  - 对偶线性规划
  - 对偶单纯形法

简要历史

线性规划是应用最广的数学模型

L.V.Kantorovich 苏联数学家、经济学家、**1975**年诺贝尔经济学奖获得者, **1939**年在《组织和计划生产的数学方法》一文中最早提出线性规划

G.B.Dantzig 1947年 给出一般的线性规划模型和单纯形法.

L.G. Khachian 苏联数学家 **1979**年 椭球算法 这是多项式时间算法

N. Karmarkar 印度数学家 **1984**年 投影算法

线性规划模型

模型

例1 生产计划问题

用3种原料混合配制2种清洁剂

	原料1	原料2	原料3	售价(万元/吨)
清洁剂A	0.25	0.50	0.25	12
清洁剂B	0.50	0.50		15
存量 (吨)	120	150	50	

这2种清洁剂应各配制多少才能使总价值最大?

例1(续)

设清洁剂A和B分别配制x和y

$$
\begin{aligned}
&\max\ z=12x+15y\\
&\text{s.t.}\ \ 0.25x+0.50y \le 120\\
&\qquad\ 0.50x+0.50y \le 150\\
&\qquad\ 0.25x \qquad\qquad\ \le 50\\
&\qquad\ x\ge 0,\ y\ge 0
\end{aligned}
$$

例2 投资组合问题

10亿元投资5个项目, 其中项目1和项目2是高新技术产业的企业债, 项目3和项目4是基础工业的企业债, 项目5是国债和地方政府债. 预测它们的年收益率(%)分别为8.1, 10.5, 6.4, 7.5和5.0.

基于风险的考虑, 要求投资组合满足下述条件:

(1) 每个项目不超过3亿元.

(2) 高新技术产业的投资不超过总投资的一半, 即5亿元, 其中项目2又不超过高新技术产业投资的一半.

(3) 国债和地方政府债不少于基础工业项目投资的40%.

试确定投资组合中各项目的投资额, 使年收益率最大.

例2(续)

设项目i的投资额为x_i亿元，i=1,2,3,4,5.

$$
\begin{aligned}
&\max\ z=8.1x_1+10.5x_2+6.4x_3+7.5x_4+5.0x_5\\
&\text{s.t.}\ \ x_1\le 3,\quad x_2\le 3\\
&\qquad x_3\le 3,\quad x_4\le 3\\
&\qquad x_5\le 3\\
&\qquad x_1+x_2\le 5\\
&\qquad x_2\le 0.5(x_1+x_2),\ \text{即}\ x_1-x_2\ge 0\\
&\qquad x_5\ge 0.4(x_3+x_4),\ \text{即}\ 0.4x_3+0.4x_4-x_5\le 0\\
&\qquad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10\\
&\qquad x_i\ge 0,\ \ i=1,2,3,4,5
\end{aligned}
$$

例3 运输问题

	分销中心1	分销中心2	分销中心3	产量
工厂1	3	2	7	5000
工厂2	7	5	2	6000
需求量	6000	4000	1000	11000

产销平衡. 试制定供销方案, 使总运费最小.

设工厂i供应分销中心j的数量为x_{ij}, i=1,2; j=1,2,3.

$$\min\ z=3x_{11}+2x_{12}+7x_{13}+7x_{21}+5x_{22}+2x_{23}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ & x_{11}+x_{12}+x_{13}=5000\\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}=6000\\ & x_{11}+x_{21}=6000, \quad x_{12}+x_{22}=4000\\ & x_{13}+x_{23}=1000, \quad x_{ij}\geq 0, \quad i=1,2;\ j=1,2,3\end{aligned}$$

例4 饲料配方问题

每头每天至少需要b_i个单位的营养素i, $1≤i≤n$. 有n种饲料, 饲料j每千克含有a_{ij}个单位的营养素i, 售价c_j元, $1≤j≤m$. 要保证动物有足够营养且饲料成本最低, 应如何配方?

设每头每天的饲料中含x_j千克饲料j, $1≤j≤n$.

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

线性规划的一般形式

$$\min(\max)\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ 目标函数

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=,\ge) b_i,\qquad i=1,2,\ldots,m$$ 约束条件

$$x_j \ge 0,\quad j\in J\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$$ 非负条件

x_j任意, $j\in\{1,2,\ldots,n\}-J$ 自由变量

可行解 满足约束条件和非负条件的变量

可行域 全体可行解

最优解 目标函数值最小(最大)的可行解

最优值 最优解的目标函数值

二维线性规划的图解法

例1(续)

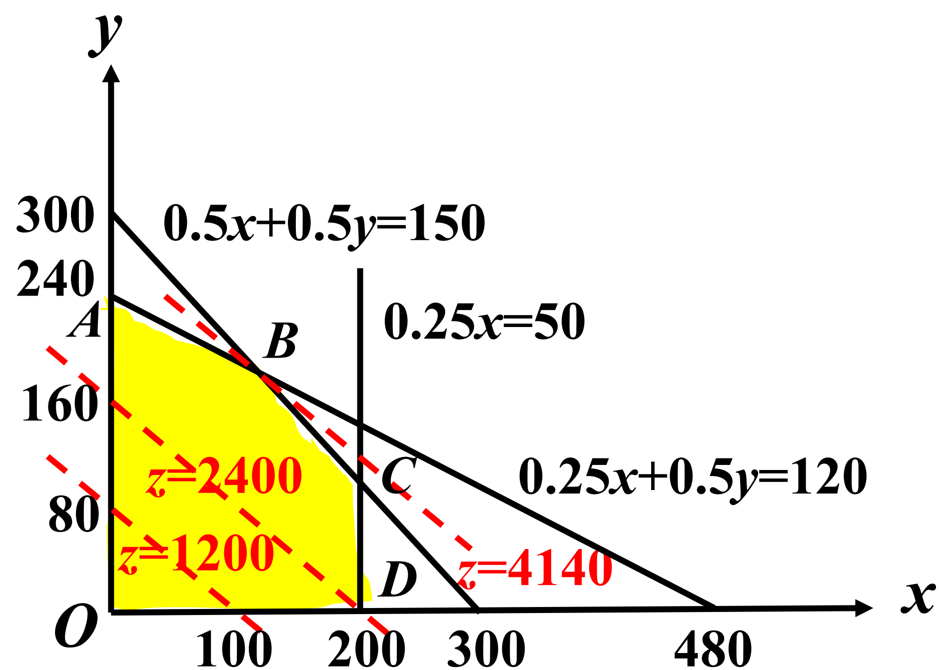
$\max\ z=12x+15y$

s.t. $0.25x+0.50y\le 120$

$0.50x+0.50y\le 150$

$0.25x\qquad\quad\le 50$

$x\ge 0,\ y\ge 0$



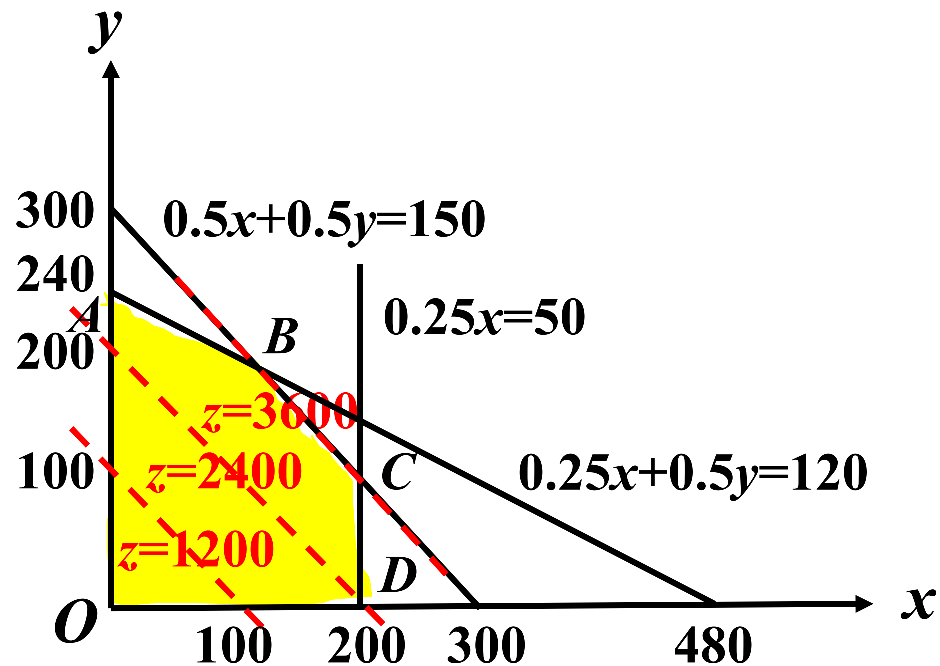
$O(0,0)$, $A(0,240)$, $B(120,180)$, $C(200,100)$, $D(200)$

最优解 $x^*=120,\ y^*=180$ (点B) 最优值 $z^*=4140$.

例5

例1中的目标函数改为

$\max z=12x+12y$



最优解 $x^*=120t+200(1-t)=200-80t$

$y^*=180t+100(1-t)=100+80t$, $0\le t\le 1$ 线段BC

最优值 $z^*=3600$.

例6

$\min z=x-2y$

s.t. $2x+y\geq 2$

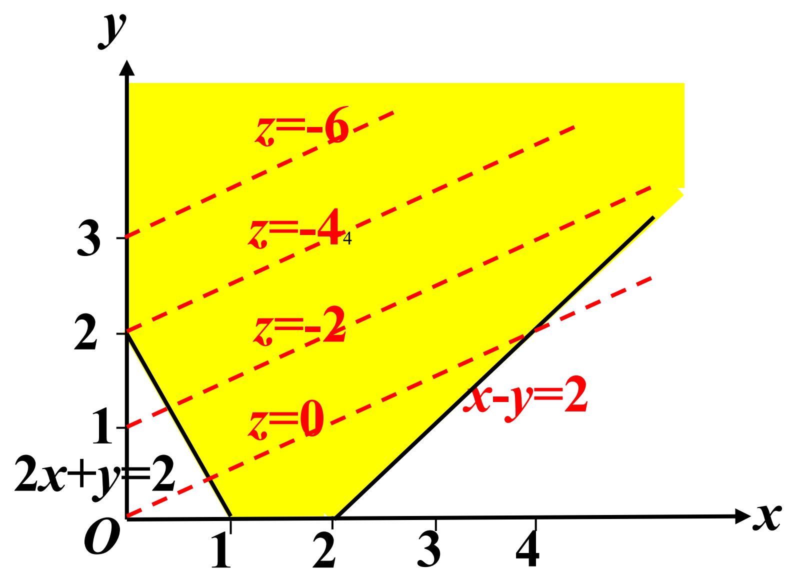
$x-y\leq 2$

$x\geq 0,\ y\geq 0$

有可行解

目标函数值可以任意小

无最优解.



$2x+y\geq 2$ 改为 $2x+y\leq 2$, 可行域为空集, 无可行解

性质

(1) 解有4种可能

(a) 有唯一的最优解.

(b) 有无穷多个最优解.

(c) 有可行解, 但无最优解(目标函数值无界).

(d) 无可行解, 更无最优解.

(2) 可行域是一个凸多边形(可能无界, 也可能是空集).

如果有最优解, 则一定可以在凸多边形的顶点取到.

一般的n维线性规划也是如此

标准形

标准形

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \geq 0, \quad i=1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\ldots,n$$

化成标准形

(1) 把max z 替换成min $z'= -z$, 即取$c_j'=-c_j$.

(2) $b_i<0$. 两边同时变号, ≤改变成≥, ≥改变成≤. .

(3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$. 引入松弛变量$y_i\ge 0$ ，替换成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i$$

(4) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$. 引入剩余变量$y_i\ge 0$ ，替换成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i$$

(5) 自由变量x_j替换成$x_j'-x_j''$, $x_j'\ge 0$, $x_j''\ge 0$

例7

写出下述线性规划的标准形,

$$\max z=3x_1-2x_2+x_3$$

$$\text{s.t. } x_1+3x_2-3x_3\le 10$$

$$4x_1-x_2-5x_3\le -30$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3 \text{ 任意}$$

解

$$\min z'=-3x_1+2x_2-x_3'+x_3''$$

$$\text{s.t. } x_1+3x_2-3x_3'+3x_3''+x_4=10$$

$$-4x_1+x_2+5x_3'-5x_3''-x_5=30$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3'\ge 0,\ x_3''\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0,$$

标准形

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad c=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

矩阵形式

$$\min\ z=c^T x$$

$$\text{s.t.}\quad Ax=b$$

$$x\ge 0$$

向量形式

$$\min\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,\ldots,n$$

$$P_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

标准形的可行解的性质

定义 设A的秩为m, A的m个线性无关的列向量称作标准形的基. 给定基$B=(P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_m})$, 对应基中列向量的变量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$ 称作基变量, 其余的变量称作非基变量.

基变量构成的向量记作x_B, 非基变量构成的向量记作x_N. 令$x_N=0$, 等式约束变成

$$Bx_B=b$$

解得$x_B=B^{-1}b$. 这个向量x满足约束$Ax=b$且非基变量全为0, 称作关于基B的基本解. 如果x是一个基本解且$x\geq 0$, 则称x是一个基本可行解, 对应的基B为可行基.

例8

$$\min z = -12x_1 - 15x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 0.25x_1+0.50x_2+x_3 = 120 \\ 0.50x_1+0.50x_2+x_4 = 150 \\ 0.25x_1+x_5 = 50 \\ x_i \ge 0, \quad i=1,2,\dots,5 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 & 1 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0.50 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取基$B_1=(P_1,P_2,P_3)$. 基变量x_1,x_2,x_3,非基变量x_4,x_5. 令$x_4=0$, $x_5=0$, 得

$$\begin{aligned} 0.25x_1+0.50x_2+x_3 &= 120 \\ 0.50x_1+0.50x_2 &= 150 \\ 0.25x_1 &= 50 \end{aligned}$$

解得$x_1=200$, $x_2=100$, $x_3=20$.

$x^{(1)}=(200,100,20,0,0)^T$是基本可行解, B_1是可行基.

例8(续)

取基$B_2=(P_1,P_2,P_4)$. 基变量 x_1,x_2,x_4, 非基变量 x_3,x_5. 令$x_3=0$, $x_5=0$, 由

$$
\begin{aligned}
0.25x_1+0.50x_2 \quad &=120\\
0.50x_1+0.50x_2+x_4 &=150\\
0.25x_1 \qquad\qquad &=50
\end{aligned}
$$

解得$x_1=200$, $x_2=140$, $x_4=-20$.

$x^{(2)}=(200,140,0,-20,0)^T$是基本解, 但不是基本可行解.

B_2不是可行基.

这个线性规划是例1中线性规划的标准形, $x^{(1)}$是例1图中的顶点C. $x^{(2)}$是直线$0.25x+0.5y=120$与$0.25x=50$的交点, 不在可行域内.

基本可行解的性质

引理1 $Ax=b$的解α是基本解$\Leftrightarrow$ x中非零分量对应的列向量线性无关.

证 必要性 根据基本解的定义, 这是显然的.

充分性 设α的非零分量为 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$, 对应的列向量 $P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_r}$ 线性无关. A的秩为m, 必存在 $P_{j_r+1},\cdots,P_{j_m}$ 使得 $P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_m}$ 线性无关, 构成一个基, 记作B. α是方程$Bx_B=b$的解, 而这个方程的解是惟一的, 故α是关于B的基本解.

基本可行解的性质

定理1 如果标准形有可行解, 则必有基本可行解.

证 设α是一个可行解, 从α开始, 构造出一个基本可行解.

设α的非零分量为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, $r \le n$. 如果对应的列向量 $P_1, P_2, \ldots, P_r$线性无关, 则α是一个基本可行解.

否则, 存在不全为0的$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$使

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_r = 0$$

取$\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, 有

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_n = 0$$

于是, 对任意的δ,

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \delta \lambda_j) P_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j + \delta \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j = b$$

定理1(续)

记$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)^T$, 为使$\alpha+\delta\lambda$成为一个可行解, 要求所有$\alpha_j+\delta\lambda_j\geq 0$. 当$\lambda_j=0$时, 不等式自然成立.

当$\lambda_j>0$时, 要求$\delta\geq -\alpha_j/\lambda_j$;当$\lambda_j<0$时, 要求$\delta\leq -\alpha_j/\lambda_j$.

综上所述, 要求当$\lambda_j\neq 0$时, $\delta\leq|\alpha_j/\lambda_j|$.

设 $\left|\alpha_{j_0}/\lambda_{j_0}\right| = \min\left\{\alpha_j/\lambda_j : \lambda_j \neq 0\right\}$, $1\leq j_0\leq r$

取 $\delta^* = -\alpha_{j_0}/\lambda_{j_0}$,令$\beta_j=\alpha_j+\delta^*\lambda_j$ ($j=1,2,\ldots,n$), 则

$$\beta_1 P_1+\ldots+\beta_n P_n=b$$

且$\beta_j\geq 0$ ($j=1,2,\ldots,n$), $\beta_{j_0}=0$, $\beta_{r+1}=\ldots=\beta_n=0$.

从而, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$是可行解且比$\alpha$至少少一个非零分量.

上述过程至多进行r-1次一定可以得到一个基本可行解.

基本可行解的性质

定理2 如果标准形有最优解, 则必存在一个基本可行解是最优解.

证 补充证明: 在定理1证明中, 当α是最优解时, β也是最优解. 由$\alpha_j=0\Rightarrow\lambda_j=0$, 对足够小的$\delta>0$, $\alpha+\delta\lambda$和$\alpha-\delta\lambda$都是可行解. 从而

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_j+\delta\lambda_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j + \delta\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_j-\delta\lambda_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j - \delta\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j$$

得 $\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j = 0.$

定理2(续)

于是

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\beta_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_j + \delta^*\lambda_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j + \delta^*\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j = \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j$$

得证$\beta=\alpha+\delta^*\lambda$也是最优解.

根据定理2, 解线性规划问题只需考虑标准形的基本可行解. A有m行n列, 至多有C_n^m个基, 故至多有 C_n^m 个基本解. 从而, 线性规划成为一个组合优化问题.

单纯形法

基本步骤

(1) 确定初始基本可行解.

(2) 检查当前的基本可行解.

若是最优解或无最优解, 计算结束;

否则作基变换, 用一个非基变量替换一个基变量, 得到一个新的可行基和对应的基本可行解, 且使目标函数值下降(至少不升).

(3) 重复(2).

确定初始基本可行解

暂时只考虑最简单的情况, 设约束条件为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \le b_i \ge 0, \quad i=1,2,\ldots,m$$

其中$b_i\ge0(i=1,2,\ldots,m)$. 引入m个松弛变量$x_{n+i}\ge0(i=1,2,\ldots,m)$,

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+i}=b_i\ , \quad i=1,2,\ldots,m$$

取$x_{n+i}(i=1,2,\ldots,m)$作为基变量, 初始基本可行解为

$$x^{(0)}=(0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$$

例

例1(续)

$$\max\ z=12x+15y$$

$$\text{s.t.}\ \ 0.25x+0.50y \le 120$$

$$0.50x+0.50y \le 150$$

$$0.25x \le 50$$

$$x\ge 0,\ y\ge 0$$

标准形

$$\min\ z' = -12x_1+15x_2$$

$$\text{s.t.}\ \ 0.25x_1+0.50x_2+x_3 = 120$$

$$0.50x_1+0.50x_2 \quad +x_4 = 150$$

$$0.25x_1 \quad +x_5 = 50$$

$$x_j\ge 0,\quad i=1,2,\ldots,5$$

取x_3, x_4, x_5作为基变量

$$x^{(0)}=(0,0,120,150,50)^T$$

最优性检验

给定可行基$B=(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)},\ldots, P_{\pi(m)})$, $Ax=b$ 两边同乘B^{-1}, 得 $B^{-1}Ax=B^{-1}b$. 记A中对应非基变量的列构成的矩阵为N,

$$x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$$

解得 $$x_B=B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

代入目标函数 $$z=c^Tx$$

$$=c_B^Tx_B+c_N^Tx_N$$

$$=c_B^T(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N)+c_N^Tx_N$$

$$=c_B^TB^{-1}b+(c_N^T-c_B^TB^{-1}N)x_N$$

基本可行解 $x_B^{(0)}=B^{-1}b$, $x_N^{(0)}=0$, 目标函数值 $z_0=c_B^TB^{-1}b$

最优性检验

$$z = c^T x$$

$$= z_0 + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$= z_0 + (c_B^T - c_B^T B^{-1} B) x_B + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$= z_0 + (c^T - c_B^T B^{-1} A) x$$

记 $\lambda^T = c^T - c_B^T B^{-1} A$ 　　检验数

$z = z_0 + \lambda^T x$ 　　简化的目标函数

最优性检验

记$B^{-1}A=(\alpha_{ij})_{m\times n}$, $P_j'=B^{-1}P_j\,(1\le j\le n)$, $\beta=B^{-1}b$.

定理3 给定基本可行解$x^{(0)}$, 若所有检验数大于等于0, 则$x^{(0)}$是最优解. 若存在检验数$\lambda_k<0$且所有$\alpha_{ik}\le 0(1\le i\le m)$, 则无最优解.

证 如果$\lambda\ge 0$, 则对任意可行解$x\ge 0$, $z\ge z_0$, 故$x^{(0)}$是最优解.

如果存在检验数$\lambda_k<0$(λ_k必对应非基变量)且所有$\alpha_{ik}\le 0$ $(1\le i\le m)$, 取$x_k=M>0$, 其余非基变量$x_j=0$, 解得

$$x_{\pi(i)}=\beta_i-\alpha_{ik}M\ge 0,\qquad 1\le i\le m$$

这是一个可行解, 其目标函数值为

$$z=z_0+\lambda_k M$$

当$M\to+\infty$时, $z\to-\infty$. 得证无最优解.

基变换

给定可行基$B=(P_{\pi(1)},P_{\pi(2)},\dots,P_{\pi(m)})$, 设$\lambda_k<0$且$\alpha_{lk}>0$, x_k必是非基变量.

基变换: 用非基变量x_k替换基变量$x_{\pi(l)}$, 用P_k替换B中的$P_{\pi(l)}$, 新的基为$B'=(P_{\pi(1)},\dots, P_{\pi(l-1)}, P_k, P_{\pi(l+1)},\dots, P_{\pi(m)})$.

称x_k为换入变量, $x_{\pi(l)}$为换出变量.

(1) 要证B'实是一个基, 即$P_{\pi(1)},\dots, P_{\pi(l-1)}, P_k, P_{\pi(l+1)},\dots, P_{\pi(m)}$是线性无关的. 由于$P_{\pi(1)},P_{\pi(2)},\dots,P_{\pi(m)}$是线性无关的, 只需证$P_{\pi(l)}$可表成$P_{\pi(1)},\dots,P_{\pi(l-1)},P_k,P_{\pi(l+1)},\dots,P_{\pi(m)}$的线性组合.

由于$(P'_{\pi(1)},P'_{\pi(2)},\dots,P'_{\pi(m)})=B^{-1}B=E$,

$$P'_k=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}P'_{\pi(i)} \quad \xRightarrow{\text{两边同乘}B} \quad P_k=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}P_{\pi(i)}$$

基变换

解得

$$P_{\pi(l)} = \frac{1}{\alpha_{lk}} P_k - \sum_{\substack{i=1 \\ 且\neq l}}^{m} \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{lk}} P_{\pi(i)}$$

得证B'是一个基.

(2) 要保证B'是可行基.

$$Ax=b$$

$$B^{-1}Ax=B^{-1}b=\beta$$

$$x_B+B^{-1}Nx_N=\beta$$

$B^{-1}A=(P_1',P_2',\ldots,P_m')$中对应$x_B$的列(第$\pi(1),\ldots,\pi(n)$列)构成单位矩阵. 用$P_k$替换$P_{\pi(l)}$得到$B'$, 将$x_B$中的$x_{\pi(l)}$替换成$x_k$, 即解出第$l$个方程中的$x_k$. 这只需用$\alpha_{lk}$除第$l$个方程, 再用第$l$个方程消去其它方程中的$x_k$

基变换

计算公式 $\alpha_{lj}'=\alpha_{lj}/\alpha_{lk},\quad 1\le j\le n$

$\alpha_{ij}'=\alpha_{ij}-\alpha_{ik}\alpha_{lj}/\alpha_{lk},\quad 1\le i\le m$ 且 $i\ne l,\ 1\le j\le n$

$\beta_l'=\beta_l/\alpha_{lk}$

$\beta_i'=\beta_i-\alpha_{ik}\beta_l/\alpha_{lk},\quad 1\le i\le m$ 且 $i\ne l$

要保证B'是可行的, 只需

$$\beta_i'=\beta_i-\alpha_{ik}\beta_l/\alpha_{lk}\ge 0,\qquad 1\le i\le m \text{ 且 } i\ne l$$

注意到$\beta_i\ge 0$, $\beta_l\ge 0$, $\alpha_{lk}>0$, 当$\alpha_{ik}\le 0$时不等式自然成立. 于是,
只需当$\alpha_{ik}>0$时 $\beta_l/\alpha_{lk}\le\beta_i/\alpha_{ik}$

应取l使得 $\beta_l/\alpha_{lk}=\min\{\beta_i/\alpha_{ik}\mid\alpha_{ik}>0,\ 1\le i\le m\}$

用第l个方程消去简化的目标函数中的x_k,

$\lambda_j'=\lambda_j-\lambda_k\alpha_{lj}/\alpha_{lk},\quad 1\le j\le m$

$z_0'=z_0+\lambda_k\beta_l/\alpha_{lk}$

单纯形法

算法 单纯形法 (针对最小化)

1. 设初始可行基$B=(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)},\dots, P_{\pi(m)})$, $\alpha=B^{-1}A$, $\beta=B^{-1}b$, $\lambda^T=c^T- B^{-1}A$, $z_0= B^{-1}b$.
2. 若所有$\lambda_j\geq 0(1\leq j\leq n)$, 则$x_B=\beta$, $x_N=0$是最优解, 计算结束.
3. 取$\lambda_k<0$. 若所有$\alpha_{ik}\leq 0(1\leq i\leq m)$, 则无最优解, 计算结束.
4. 取l使得

$$\beta_l/\alpha_{lk} = \min\{ \beta_i/\alpha_{ik} \mid \alpha_{ik}>0,\ 1\leq i\leq m\}$$

5. 以x_k为换入变量、$x_{\pi(l)}$为换出变量做基变换.
6. 转2.

对最大化, 2中$\lambda_j\geq 0$改为$\lambda_j\leq 0$, 3中$\lambda_k<0$改为$\lambda_k>0$.

单纯形表

			c_1	c_2	$\cdots$	c_n	θ
c_B	x_B	b	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
$c_{\pi(1)}$	$x_{\pi(1)}$	β_1	α_{11}	α_{12}	$\cdots$	α_{1n}	
$c_{\pi(2)}$	$x_{\pi(2)}$	β_2	α_{21}	α_{22}	$\cdots$	α_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
$c_{\pi(m)}$	$x_{\pi(m)}$	β_m	α_{m1}	α_{m2}	$\cdots$	α_{mn}	
	$-z$	$-z_0$	λ_1	λ_2	$\cdots$	λ_n	

$$-z+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n = -z_0$$

例1(续)

			-12	-15	0	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	120	0.25	0.50	1	0	0	240
0	x_4	150	0.50	0.50	0	1	0	300
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	
	$-z$	0	-12	-15	0	0	0	
-15	x_2	240	0.50	1	2	0	0	480
0	x_4	30	0.25	0	-1	1	0	120
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	200
	$-z$	3600	-4.5	0	30	0	0	
-15	x_2	180	0	1	4	-2	0	
-12	x_1	120	1	0	-4	4	0	
0	x_5	20	0	0	1	- 1	1	
	$-z$	4140	0	0	12	18	0	

例9

用单纯形法解下述线性规划

$$\min z=x_1-2x_2$$

$$\text{s.t.}\ \ x_1-x_2\leq 1$$

$$-2x_1+x_2\leq 4$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

解 引入2个松弛变量x_3,x_4, 得到标准形

$$\min z=x_1-2x_2$$

$$\text{s.t.}\ \ x_1-x_2+x_3\quad =1$$

$$-2x_1+x_2\quad +x_4=4$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,2,3,4$$

例9(续)

			1	-2	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_3	1	1	-1	1	0	
0	x_4	4	-2	1	0	1	4
	$-z$	0	1	-2	0	0	
0	x_3	5	-1	0	1	1	
-2	x_2	4	-2	1	0	1	
	$-z$	8	-3	0	0	2	

目标函数值没有下界, 无最优解

人工变量和两阶段法

现考虑剩余的两种情况:

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$

其中$b_i \geq 0$. 对于(1), 引入剩余变量转化成(2).

对(2)引入人工变量$y_j \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_j = b_i$$

取所有松弛变量和人工变量作为基变量, 得到初始可行基.

例10

$$\min z=-3x_1+x_2+x_3$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1-2x_2+x_3 \le 11 \\ -4x_1+x_2+2x_3 \ge 3 \\ -2x_1+x_3=1 \\ x_j\ge 0,\ j=1,2,3 \end{cases}$$

引入松弛变量x_4, 剩余变量x_5, 标准形为

$$\min z=-3x_1+x_2+x_3$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5=3 \\ -2x_1+x_3=1 \\ x_j\ge 0,\quad 1\le j\le 5 \end{cases}$$

例10

再引入人工变量x_6, x_7

$$\min z=-3x_1+x_2+x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4 = 11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5+x_6 = 3 \\ -2x_1+x_3+x_7 = 1 \\ x_j \geq 0,\quad 1\leq j\leq 7 \end{cases}$$

取基变量x_4, x_6, x_7, $x^{(0)}=(0,0,0,11,0,3,1)^T$

问题: $x^{(0)}$不对应标准形的可行解.

只有当所有人工变量等于0时, 才能舍去人工变量得到标准形的可行解

两阶段法

设问题

$$\min z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ 1\le i\le m$$

$$x_j\ge 0,\qquad 1\le j\le n$$

其中$b_i\ge 0$, $(1\le i\le m)$.

引入人工变量y_j $(1\le j\le m)$

辅助问题

$$\min z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_j = b_i,\ 1\le i\le m$$

$$x_j\ge 0,\qquad 1\le j\le n$$

其中$b_i\ge 0$, $(1\le i\le m)$.

两阶段法

由于$w\geq 0$, 辅助问题必有最优解. 设最优值为w^*. 有3种可能

(1) $w^*>0$. 原问题无可行解.

假如不然, 设$(x_1,\ldots,x_n)^T$是原问题的可行解, 则 $(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)^T$是辅助问题的可行解, 对应的$w=0$. 与$w^*>0$矛盾.

(2) 在最优解中所有的人工变量都是非基变量. 此时, 人工变量都等于0, $w^*=0$, 删去人工变量得到是原问题的基本可行解.

(3) $w^*=0$, 但基变量中含有人工变量. 这种情况可以进一步转化成情况(2).

两阶段法

此时, 所有人工变量都等于0. 设 y_k是基变量,

$$y_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \sum_{\substack{t=1\\ 且\neq k}}^{m} \alpha'_{it} y_t = 0$$

且y_k不出现在其它约束等式中.

(a) 若所有α_{ij}=0($1\le j\le n$),则表明原问题中m个约束等式不是线性无关的, 可以把这个等式删去. 这样就删去了y_k.

(b) 否则, 存在某个$\alpha_{il}\neq 0$(可正可负). 用x_l作换入变量, y_k作换出变量, 做基变换. 由于β_i=0, 经过基变量, β的所有值均不改变, 从而新的基本解是可行解且w=0不变.

总之, 可以使基变量中的人工变量少一个, 且保持w=0. 重复进行, 最终总能变成情况(2).

两阶段法

阶段一 引入人工变量, 写出辅助问题, 用单纯形法求解. 若为情况(1), 则原问题无可行解, 计算结束. 若为情况(2), 则进入阶段二.

阶段二 删去人工变量, 得到原问题的一个基本可行解. 以这个解为初始基本可行解, 用单纯形法解原问题.

例10(续) 用两阶段法. 阶段一 辅助问题为

$$
\begin{aligned}
\min\ & w = x_6 + x_7 \\
\text{s.t.}\ & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\
& -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\
& -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 7
\end{aligned}
$$

例10(续)

			0	0	0	0	0	1	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	1.5
1	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	1
	$-w$	-4	6	-1	-3	0	1	0	0	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	–
1	x_6	1	0	1	0	0	-1	1	-2	1
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	–
	$-w$	-1	0	-1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	
0	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
	$-w$	0	0	0	0	0	0	0	1	

例10(续)

阶段二

			-3	1	1	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	–
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	–
	$-z$	-2	-1	0	0	0	1	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	
0	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	
	$-z$	2	0	0	0	1/3	1/3	

最优解 $x_1^*=4$, $x_2^*=1$, $x_3^*=9$, 最优值 $z^*=-2$

例11

$$\min z=3x_1-2x_2$$
$$\text{s.t. } 2x_1+x_2\le 4$$
$$x_1-x_2\ge 3$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

标准形

$$\min z=3x_1-2x_2$$
$$\text{s.t. } 2x_1+x_2+x_3 \quad =4$$
$$x_1-x_2 \quad -x_4 =3$$
$$x_j\ge 0,\quad 1\le j\le 4$$

阶段一　辅助问题

$$\min w=x_5$$
$$\text{s.t. } 2x_1+x_2+x_3 \qquad =4$$
$$x_1-x_2 \quad -x_4+x_5 =3$$
$$x_j\ge 0,\quad 1\le j\le 5$$

例11(续)

			0	0	0	0	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	4	2	1	1	0	0	2
1	x_5	3	1	-1	0	-1	1	3
	$-w$	-3	-1	1	0	1	0	
0	x_1	2	1	1/2	1/2	0	0	
1	x_5	1	0	-3/2	-1/2	-1	1	
	$-w$	-1	0	3/2	1/2	1	0	

$w^*=1>0$，原规划没有可行解.

例12

$$\min z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ 2x_1 \quad + x_3 \quad = 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq 4 \end{cases}$$

阶段一 辅助问题

$$\min z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 12 \\ 2x_1 \quad + x_3 \quad + x_6 = 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 0 \\ x_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq 7 \end{cases}$$

例12(续)

			0	0	0	0	1	1	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
1	x_5	12	3	6	2	-1	1	0	0	4
1	x_6	4	2	0	1	0	0	1	0	2
1	x_7	0	3	-6	1	1	0	0	1	0
	$-w$	-16	-8	0	-4	0	0	0	0	
1	x_5	12	0	12	1	-2	1	0	-1	1
1	x_6	4	0	4	1/3	-2/3	0	1	-2/3	1
0	x_1	0	1	-2	1/3	1/3	0	0	1/3	–
	$-w$	-16	0	-16	-4/3	8/3	0	0	8/3	
1	x_5	0	0	0	0	0	1	-3	1	
0	x_2	1	0	1	1/12	-1/6	0	1/4	-1/6	
0	x_1	2	1	0	1/2	0	0	1/2	0	
	$-w$	0	0	0	0	0	0	4	0	

例12(续)

$w^*=0$, 人工变量x_5是基变量且$\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{14}=0$, β_1必为0.

原规划中第1个约束等式是另两个的线性组合, 可以删去.

阶段二

			1	3	-2	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_2	1	0	1	1/12	-1/6	12
0	x_1	2	1	0	1/2	0	4
	$-z$	-5	0	0	-11/4	1/2	
3	x_2	2/3	-1/6	1	0	-1/6	
-2	x_3	4	2	0	1	0	
	$-z$	6	11/2	0	0	1/2	

最优解 $x_1^*=0$, $x_2^*=2/3$, $x_3^*=4$, $x_4^*=0$, 最优值$z^*=-6$.

例13

$$\begin{aligned}
\min\ z &= x_1+x_2+x_3-x_4 \\
\text{s.t.}\quad & 6x_1+3x_2-4x_3+3x_4=12 \\
& \qquad -x_2 \qquad +3x_4=6 \\
& -6x_1 \qquad +4x_3+3x_4=0 \\
& x_j\geq 0,\ 1\leq j\leq 4
\end{aligned}$$

例13(续)

阶段一　引入人工变量x_5, x_6, x_7.

			0	0	0	0	1	1	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
1	x_5	12	6	3	-4	3	1	0	0	4
1	x_6	6	0	-1	0	3	0	1	0	2
1	x_7	0	-6	0	4	3	0	0	1	0
	$-w$	-18	0	-2	0	-9	0	0	0	
1	x_5	12	12	3	-8	0	1	0	-1	1
1	x_6	6	6	-1	-4	0	0	1	-1	1
0	x_4	0	-2	0	4/3	1	0	0	1/3	–
	$-w$	-18	-18	-2	12	0	0	0	3	

例13(续)

c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_1	1	1	1/4	-2/3	0	1/12	0	-1/12	
1	x_6	0	0	-5/2	0	0	-1/2	1	-1/2	
0	x_4	2	0	1/2	0	1	1/6	0	1/6	
	$-w$	0	0	5/2	0	0	3/2	0	3/2	
0	x_1	1	1	0	2/3	0	1/30	1/10	-2/15	
0	x_2	0	0	1	0	0	1/5	-2/5	1/5	
0	x_4	2	0	0	0	1	1/15	1/5	1/15	
	$-w$	0	0	0	0	0	1	1	1	

在倒数第2个表中, $w=0$, 但x_6是基变量且$\alpha_{22}\neq 0$, 取x_6为换出变量、 x_2为换入变量作基变量.

例13(续)

阶段二

			1	1	1	-1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
1	x_1	1	1	0	-2/3	0	
1	x_2	0	0	1	0	0	
-1	x_4	2	0	0	0	1	
	$-z$	1	0	0	2/3	0	

最优解 $x_1^*=1, x_2^*=0, x_3^*=0, x_4^*=2$, 最优值$z^*=-1$.

单纯形法的有限终止

定义 如果基本可行解中基变量的值都大于0, 则称这个基本可行解是非退化的, 否则称作退化的.

如果线性规划的所有基本可行解都是非退化的, 则称这个线性规划是非退化的.

如果线性规划有可行解并且是非退化的, 则在计算的每一步

$$z_0' = z_0 + \lambda_k \beta_l / \alpha_{lk} < z_0,$$

可行基不会重复出现, 因此单纯形法在有限步内终止.

如果不是非退化的, 当$\beta_l=0$且取$x_{\pi(l)}$为换出变量时, 基变换不改变目标函数值. 这就可能使计算出现循环, 计算永不终止.

单纯形法出现循环的例子

1955年E.Beal给出一个例子

$$\min z = -0.75x_1 + 20x_2 - 0.5x_3 + 6x_4$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } 0.25x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 &= 0 \\ 0.5x_1 - 12x_2 - 0.5x_3 + 3x_4 + x_6 &= 0 \\ x_3 + x_7 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0,\quad 1 \leq j \leq 7$$

取x_5, x_6, x_7作为初始基变量, 并规定: 当有多个$\lambda_j<0$时, 设$|\lambda_k|=\max\{|\lambda_j|: \lambda_j<0\}$, 取$x_k$作为换入变量; 当有多个$\theta_i$同时取到最小值时, 取对应的下标最小的基变量作为换出变量. 计算经过6次基变换回到初始可行基, 从而计算出现循环, 永不终止.

避免循环的方法

1954年G.B.Dantzigt提出字典序方法.

1977年R.G.Bland提出避免循环的两条十分简单的规则.

Bland规则

规则1. 当有多个λ_j<0时, 取对应的非基变量中下标最小的作为换入变量.

规则2. 当有多个$\theta_i=\beta_i/\alpha_{ik}(\alpha_{ik}>0)$同时取到最小值时, 取对应的基变量中下标最小的作为换出变量.

对偶性

对偶线性规划

再看例1 公司甲用3种原料混合成2种清洁剂.
这2种清洁剂应各配制多少才能使总价值最大?

	原料1	原料2	原料3	售价(万元/吨)
清洁剂A	0.25	0.50	0.25	12
清洁剂B	0.50	0.50		15
存量 (吨)	120	150	50	

公司乙急需这3种原料, 打算向公司甲购买, 应出什么价钱?

实例

设清洁剂A和B分别配制x和y

$$\max\ z=12x+15y$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 0.25x+0.50y \le 120 \\ & 0.50x+0.50y \le 150 \\ & 0.25x \le 50 \\ & x\ge 0,\ y\ge 0 \end{aligned}$$

设公司乙出价原料每吨分别为y_1, y_2,y_3万元. 显然, 希望总价尽可能的小, 但又不能低于公司甲用这些原料生产清洁剂所产生的价值

$$\min\ w=120y_1+150y_2+50y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 0.25y_1+0.50y_2+0.25y_3 \ge 12 \\ & 0.50y_1+0.50y_2 \ge 15 \\ & y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,\ y_3\ge 0 \end{aligned}$$

对偶线性规划

定义 原始线性规划 (P)

$$\max\ c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

对偶线性规划(D)

$$\min\ b^T y$$
$$\text{s.t. } A^T y \ge c$$
$$y \ge 0$$

定理4 对偶的对偶是原始线性规划.

证 (D)可改写成(D′)

$$\max\ -b^T y$$
$$\text{s.t. } -A^T y \le -c$$
$$y \ge 0$$

(D′)的对偶为

$$\min\ -c^T x$$
$$\text{s.t. } (-A^T)^T x \ge -b$$
$$x \ge 0$$

例14

写出下述线性规划的对偶

$$\max\ 2x_1-x_2+3x_3$$
$$\text{s.t.}\ \ x_1+3x_2-2x_3\le 5$$
$$-x_1-2x_2+x_3=8$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ \text{任意}$$

对偶规划为

$$\min\ 5y_1+8y_2'-8y_2''$$
$$\text{s.t.}\ \ y_1-y_2'+y_2''\ge 2$$
$$3y_1-2y_2'+2y_2''\ge -1$$
$$-2y_1+y_2'-y_2''\ge 3$$
$$2y_1-y_2'+y_2''\ge -3$$
$$y_1\ge 0,\ y_2'\ge 0,\ y_2''\ge 0$$

令$x_3=x_3'-x_3''$,

$A=B$等价于$A\le B$和$-A\le -B$,

$$\max\ 2x_1-x_2+3x_3'-3x_3''$$
$$\text{s.t.}\ \ x_1+3x_2-2x_3'+2x_3''\le 5$$
$$-x_1-2x_2+x_3'-x_3''\le 8$$
$$x_1+2x_2-x_3'+x_3''\le -8$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3'\ge 0,\ x_3''\ge 0$$

令$y_2=y_2'-y_2''$, 合并后2个不等式

$$\min\ 5y_1+8y_2$$
$$\text{s.t.}\ \ y_1-y_2\ge 2$$
$$3y_1-2y_2\ge -1$$
$$-2y_1+y_2=3$$
$$y_1\ge 0,\ y_2\text{任意}$$

对偶规划的一般形式

原始规划

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ 1 \le i \le s$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ s+1 \le i \le m$$

$x_j \ge 0,\ 1 \le j \le t$

x_j 任意, $t+1 \le j \le n$

对偶规划

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$y_i \ge 0,\ 1 \le i \le s$

y_i 任意, $s+1 \le i \le m$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j,\ 1 \le j \le t$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j,\ t+1 \le j \le n$$

性质

定理5 设x是原始规划(P)的可行解, y是对偶规划(D)的可行解, 则恒有

$$c^T x \le b^T y$$

证

$$c^T x \le (A^T y)^T x = y^T (Ax) \le y^T c = c^T y$$

定理6 如果x和y分别是原始规划(P)和对偶规划(D)的可行解, 且$c^T x = b^T y$, 则x和 y分别是它们的最优解.

定理7 如果原始规划(P)有最优解, 则对偶规划(D)也有最优解, 且它们的最优值相等. 反之亦然.

定理7证明

证 引入松弛变量u, 将(P)写成

$$\max\ c^Tx \qquad\qquad A\text{是}m\times n\text{矩阵}$$

$$\text{s.t. } Ax+Eu=b \qquad\qquad E\text{是}m\times m\text{单位矩阵}$$

$$x\geq 0,\ u\geq 0 \qquad\qquad u\text{是}m\text{维向量}$$

设最优解基为B, 基变量$x_B=B^{-1}b$, 检验数$\lambda\leq 0$(这是最大化). λ分成两部分, 对应x的λ_1和对应u的λ_2. u在目标函数中的系数都为0, 有

$$\lambda_1^{\mathrm{T}}=c^{\mathrm{T}}-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A\leq 0$$

$$\lambda_2^{\mathrm{T}}=-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}E=-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}\leq 0$$

令$y^T=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}$, 有 $\quad y\geq 0,\quad A^Ty\geq c$

从而y是(D)的可行解. 又

$$w=b^Ty=y^Tb=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b=c_B^{\mathrm{T}}x=z$$

得证 y是(D)的最优解.

原始规划和对偶规划解的可能情况

(1) 都有最优解, 且最优值相等.

(2) 一个有可行解且目标函数值无界, 而另一个无可行解.

(3) 都没有可行解.

		对偶规划		
		有最优解	有可行解且无界	无可行解
原始规划	有最优解	(1)	×	×
	有可行解且无界	×	×	(2)
	无可行解	×	(2)	(3)

互补松弛性

定理8 设x和y分别是原始规划(P)和对偶规划(D)的可行解，则x和y分别是它们的最优解当且仅当

$$(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i = 0, \qquad 1 \le i \le m \qquad (*)$$

$$x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j) = 0, \qquad 1 \le j \le n \qquad (**)$$

证 $u_i = (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i \ge 0$， $v_j = x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j) \ge 0$

(*)和(**)成立 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j = 0$

定理8证明(续)

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{i=1}^{m}(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)y_i + \sum_{j=1}^{n} x_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

得证

$$(*)\text{和}(**)\text{成立} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\Leftrightarrow x\text{是(P)的最优解}, y\text{是(D)的最优解}.$$

对偶单纯形法

原始规划(P)	对偶规划(D)
$\min\ z=c^Tx$	$\max\ w=b^Ty$
s.t. $Ax=b$	s.t. $A^Ty\le c$
$x\ge 0$	y 任意

设B是(P)的一个可行基, 对应的可行解$x_B=B^{-1}b$, $x_N=0$, $\lambda^T=c^T-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A$, $z_0=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b$. 令$y^T=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}$, 恒有

$$w_0=b^Ty=y^Tb=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b=z_0$$

只要y是(D)的可行解, 则x和y分别是(P)和(D)的最优解.

由$\lambda^T=c^T-c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}A=c^T-y^TA$, 有

$$y\text{是(D)的可行解}\Leftrightarrow \lambda\ge 0$$

对偶单纯形法

定义 设B是一个基, 如果$\lambda\geq 0$, 则称B是**正则的**.

如果B是正则的, 那么y是(D)的可行解, 从而只要x是(P)的可行解, 亦即$x_B=B^{-1}b\geq 0$, 则x和y分别是(P)和(D)的最优解.

单纯形法 保持x是(P)的可行解(保持B是可行基), 即保持$B^{-1}b\geq 0$, 通过基变换使y逐步成为(D)的可行解(B变成正则基), 即逐步使$\lambda\geq 0$.

对偶单纯形法 保持y是(D)的可行解(保持B是正则基), 即保持$\lambda\geq 0$, 通过基变换使x逐步成为(P)的可行解(B变成可行基), 即逐步使$B^{-1}b\geq 0$.

对偶单纯形法

设$\lambda \geq 0$, $\beta_l < 0$, 若所有$\alpha_{lj} \geq 0 (1 \leq j \leq n)$, 则不存在$x \geq 0$使得

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj} x_j = \beta_l$, (P)无可行解. 若存在$\alpha_{lk} < 0$, 则以$x_{\pi(l)}$为换出变量、 x_k为换入变量做基变换, 必须保证

$$\lambda_j' = \lambda_j - \lambda_k \alpha_{lj} / \alpha_{lk} \geq 0, \qquad 1 \leq j \leq n$$

注意到$\lambda_j \geq 0$, $\lambda_k \geq 0$, $\alpha_{lk} < 0$, 当$\alpha_{lj} \geq 0$时, 不等式自然成立. 于是, 只要当$\alpha_{lj} < 0$时,

$$\lambda_j / \alpha_{lj} \leq \lambda_k / \alpha_{lk}$$

故应取k使得

$$|\lambda_k / \alpha_{lk}| = \min\{ | \lambda_j / \alpha_{lj} | : \alpha_{lj} < 0\}$$

对偶单纯形法

算法 对偶单纯形法

1. 取正则基B.

2. 如果$\beta \geq 0$, 则x是最优解, 计算结束.

3. 取$\beta_l < 0$. 若所有$\alpha_{lj} \geq 0 (1 \leq j \leq n)$, 则无可行解, 计算结束.

4. 取k使得

$$|\lambda_k / \alpha_{lk}| = \min\{ | \lambda_j / \alpha_{lj} | : \alpha_{lj} < 0\}$$

5. 以$x_{\pi(l)}$为换出变量、 x_k为换入变量做基变换.

6. 转2.