温兆和　10205501432. 数据科学算法作业7.

1. 解：(1). $A^TA=\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}$. 对其进行特征分解.

$|\lambda E-A^TA|=0$: $\begin{vmatrix}\lambda-5&-5\\-5&\lambda-5\end{vmatrix}=0$. $(\lambda-5)^2-25=0$

解得 $\lambda_1=10$. $\lambda_2=0$

故矩阵A的奇异值为 $\sigma_1=\sqrt{10}$. $\sigma_2=0$.

(2) 求. 矩阵 $A^TA=\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}$ 的特征向量.

$\lambda=10$: 求 $\begin{pmatrix}10-5&-5\\-5&10-5\end{pmatrix}x=0$ 基础解系:

解得：其基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 单位化：$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$\lambda=0$: 求 $\begin{pmatrix}0-5&-5\\-5&0-5\end{pmatrix}x=0$ 基础解系.

解得：其基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. 单位化. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

求：矩阵 $AA^T=\begin{pmatrix}2&4&0\\4&8&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的特征向量.

$\lambda=10$: 求: $\begin{pmatrix}10-2&-4&0\\-4&10-8&0\\0&0&10-0\end{pmatrix}x=0$ 基础解系.

解得其基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 单位化: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=0$: 求: $\begin{pmatrix} 0-2 & -4 & 0 \\ -4 & 0-8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x=0$ 的基础解系.

解得: 其基础解系为 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单位化: $\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

故: $A=U\Sigma V^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}^T$

2. 解: (1). $Cov(x,x)=\frac{(1-\frac43)^2+(-1-\frac43)^2+(4-\frac43)^2}{3-1}=\frac{19}{3}$

$Cov(x,z)=Cov(z,x)=\frac{(1-\frac43)(-1-1)+(4-\frac43)(1-1)+(-1-\frac43)(3-1)}{3-1}=-5$

$Cov(x,y)=Cov(y,x)=\frac{(1-\frac43)(2-2)+(4-\frac43)(3-2)+(-1-\frac43)(1-2)}{3-1}=\frac52$

$Cov(z,z)=\frac{(-1-1)^2+(1-1)^2+(3-1)^2}{3-1}=4$

$Cov(y,z)=Cov(z,y)=\frac{(-1-1)(2-2)+(1-1)(3-2)+(3-1)(1-2)}{3-1}=-2$

$Cov(y,y)=\frac{(2-2)^2+(3-2)^2+(1-2)^2}{3-1}=1$

故协方差矩阵 $\Sigma=\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac52 & -5 \\ \frac52 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

(2). 对 Σ 进行特征分解: $\Sigma = UDU^T$.

$$U = \begin{pmatrix} 6.63920986\times10^{-1} & 7.47802731\times10^{-1} & 7.88860905\times10^{-31} \\ -3.34427548\times10^{-1} & 2.96914491\times10^{-1} & 8.94427191\times10^{-1} \\ 6.68855096\times10^{-1} & -5.93828982\times10^{-1} & 4.47213595\times10^{-1} \end{pmatrix}$$

$D = \mathrm{diag}(1.129644486\times10 \quad 3.688474486\times10^{-2} \quad -1.08731017\times10^{-32})$.

计算前两个主成分: $\hat{x}_1 = (u_1 \ u_2)x_1 = \begin{pmatrix} 6.34588643 \\ -3.42774638 \\ -4.32484713 \end{pmatrix}$

$\hat{x}_2 = (u_1 \ u_2)x_2 = \begin{pmatrix} 2.53342781 \\ -1.38099557 \\ -1.71014455 \end{pmatrix}$

7. 解: 对于A, 求其特征值, 特征向量:

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -3 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0$: $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -2$.

$\lambda = 0$: 解 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} x = 0$. 基础解系维数为1

$\lambda = -2$: 解 $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} x = 0$ 基础解系维数为1.

故A所有特征值代数重数等于几何重数, 可对角化.

对于B: 求其特征值 特征向量.

$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 2 \\ 0 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0$.

解得：$\lambda_1=\lambda_2=2$. $\lambda_3=1$

$\lambda=2$：解 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x=0$. 基础解系维数为2

$\lambda=1$：解 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x=0$ 基础解系维数为1

故. 矩阵B所有特征值代数重数等于几何重数. 可对角化.