第八章参考答案

2.

a.$det(\lambda I - A) = 0$

解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$

$\lambda_1 = 1$ 时 $\lambda I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

特征向量为 $(1, -1)^T$

$\lambda_2 = 6$ 时 $\lambda I - A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

特征向量为 $(1, 4)^T$

b. $v_0 = (1, 1)^T \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$v_1^{'} = Av_0 = (3, 9)^T \quad ||v_1^{'}|| = 9.847 \quad v_1 = v_1^{'}/||v_1^{'}|| = (0.3162, 0.9487)^T$

$v_2^{'} = Av_1 = (1.58, 6.008)^T \quad ||v_2^{'}|| = 6.213 \quad v_2 = v_2^{'}/||v_2^{'}|| = (0.2545, 0.967)^T$

$v_3^{'} = Av_3 \quad v_3 = v_3^{'}/||v_3^{'}|| = (0.2445, 0.9696)^T$

$v_4^{'} = Av_4 \quad v_4 = v_4^{'}/||v_4^{'}|| = (0.2429, 0.9701)^T$

$v_5^{'} = Av_5 \quad v_5 = v_5^{'}/||v_5^{'}|| = (0.2426, 0.9701)^T$

$v_6^{'} = Av_6 \quad v_6 = v_6^{'}/||v_6^{'}|| = (0.2425, 0.9701)^T$

不断迭代，$v_i - v_{i-1} < (0.0001, 0.0001)^T$ λ_{max} 约为 6，特征向量 $(0.2425, 0.9701)^T$

3.

a.

$$Av = \lambda_i v$$

$$(A - \sigma I)v = Av - \sigma v = \lambda_i v - \sigma v = (\lambda_i - \sigma)v$$

所以，$(A - \sigma I)$ 有特征值 $\lambda_i - \sigma$，证毕

b.

$$Av = \lambda_i v$$

左右同乘 A^{-1}

$$A^{-1}A\lambda = \lambda_i A^{-1} v$$

$$\frac{1}{\lambda_i} v = A^{-1} v$$

所以 A 有特征值 λ_i

可推出 $A^{-1} \quad \lambda_i^{-1}$

由 a 可知 $A - \sigma I$ 有特征值 $\lambda_i - \sigma$

可知 $(A - \sigma I)^{-1} \quad (\lambda_i - \sigma)^{-1}$ 证毕

4.
特征值-0.8541,特征向量[-0.8507, 0.5257]
特征值5.8541,特征向量[-0.5257, -0.8507]

6.
特征值7.873，特征向量 [-0.1938, -0.4722, -0.8599]
 特征值1，特征向量[-0.8165, -0.4082, 0.4082]
特征值0.127,特征向量 [0.5438, -0.7812, 0.3065]

7.

先证明对称

$$(AA^T)^T = AA^T$$

$$(A^TA)^T = A^TA$$

所以 AA^T, A^TA 是对称的

再证明半正定

$$x^T(AA^T)x = (x^TA)(A^Tx) = (A^Tx)^T(A^Tx)$$

即 A^Tx 和 A^Tx 所以 $x^T(AA^T)x \geq 0$ 即 AA^T 半正定，证毕

9.
主特征值2.5365,主特征向量[-0.5315, -0.4615, -0.7103]

10.

构造新矩阵 $A' = A - \lambda_3 I$ 通过反幂法求解其主特征值和特征向量计算过程如表 1，不断迭代，可知特征向量为 $[0.7887, -0.5774, 0.2113]$

表 1: 反幂法运行过程

迭代次数	向量
1	[0.788688,-0.577336,0.211316]
2	[0.788675,-0.577350,0.211324]
3	[0.788675,-0.577350,0.211324]
4	[0.788675,-0.577350,0.211324]
5	[0.788675,-0.577350,0.211324]