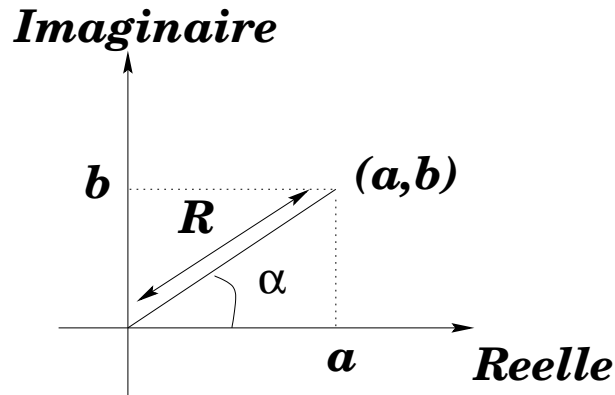


TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOMBRES COMPLEXES (RAPPEL)



$$(a, b) \longleftrightarrow a + jb \longleftrightarrow R \cos \alpha + jR \sin \alpha$$

Notation : $\exp(j\alpha) = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad j^2 = -1$

$$a + jb = R \cos \alpha + jR \sin \alpha = R \exp(j\alpha)$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Amplitude}$$

$$\alpha = \arctan(b/a) \quad \text{Phase}$$

Propriétés

$$a + jb = R \exp(j\alpha) \quad a - jb = R \exp(-j\alpha) \quad \text{Conjugué}$$

$$R_1 \exp(j\theta) * R_2 \exp(j\alpha) = R_1 R_2 \exp(j(\theta + \alpha)) \quad \text{Multiplication}$$

$$\frac{d}{d\alpha} (R \exp(j\alpha)) = jR \exp(j\alpha) \quad \text{Dérivée}$$

Notation Complexes des Fonction sinus et cosinus

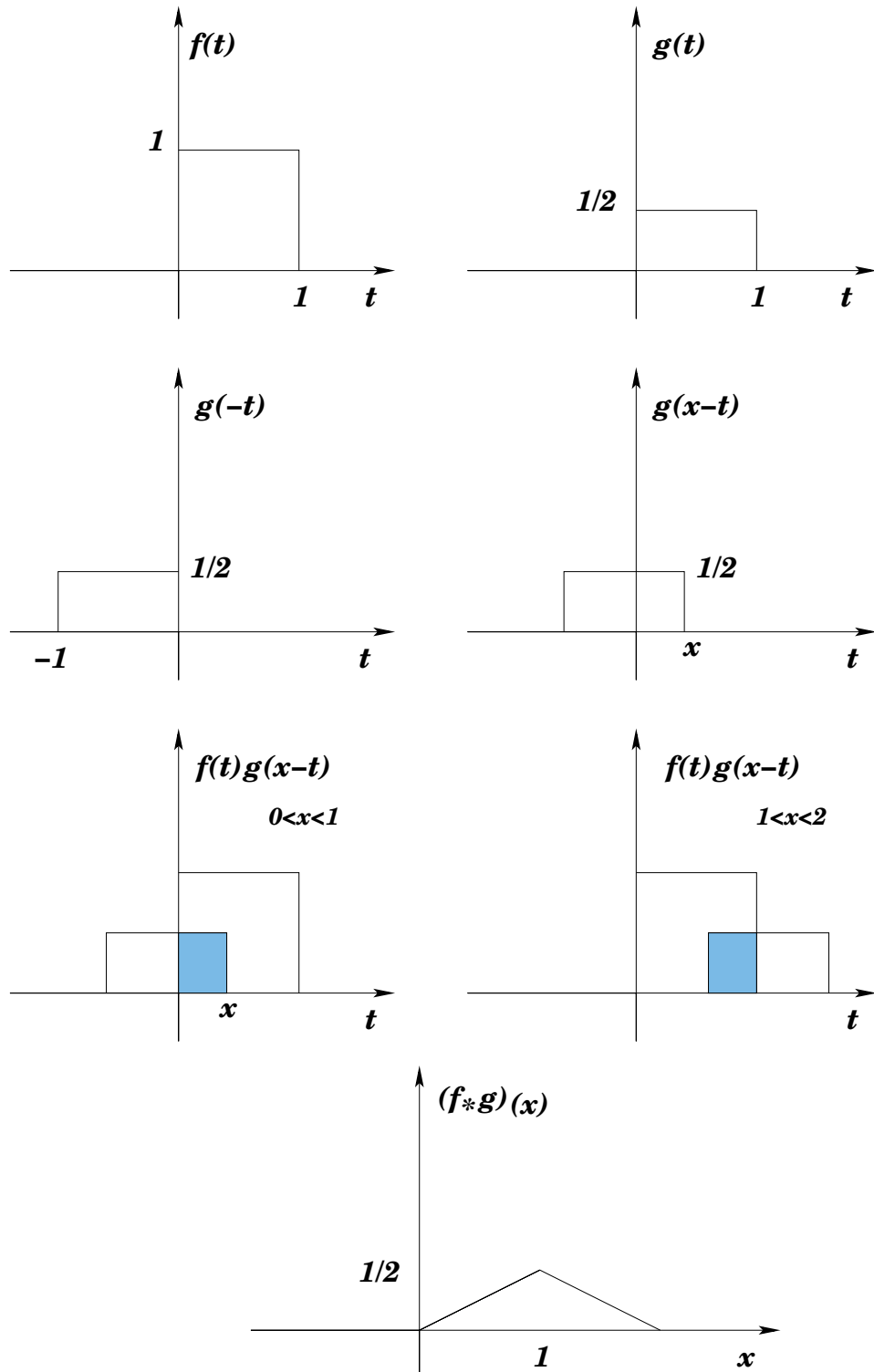
$$\cos x = \frac{1}{2} (\exp(jx) + \exp(-jx))$$

$$\sin x = \frac{-j}{2} (\exp(jx) - \exp(-jx))$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

CONVOLUTION 1D -FONCTIONS CONTINUES-

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$



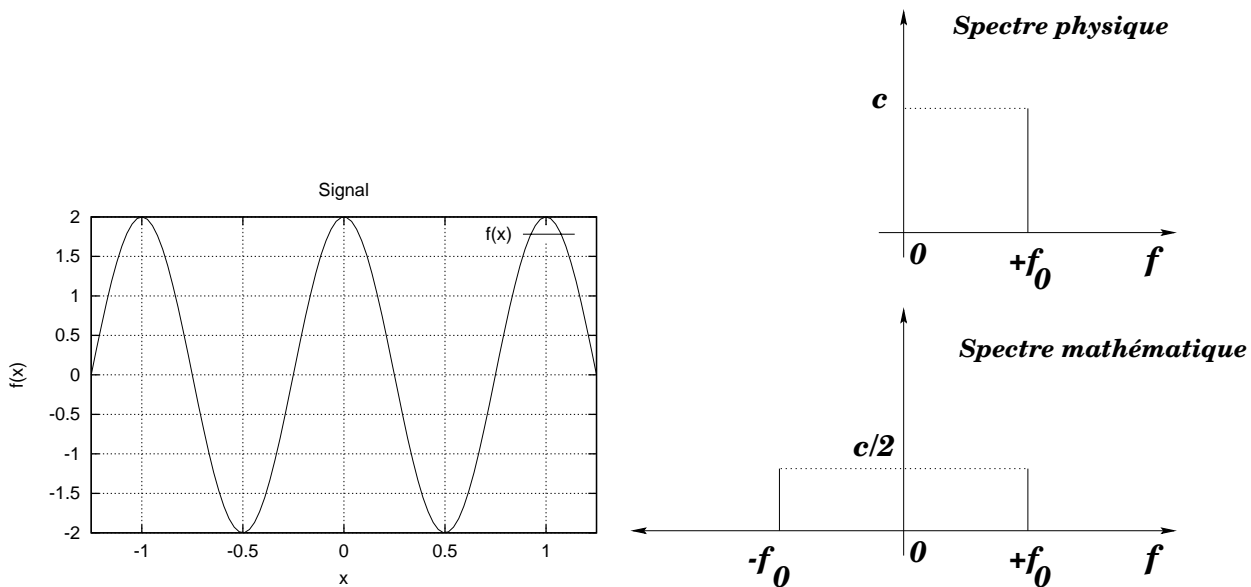
TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (1)

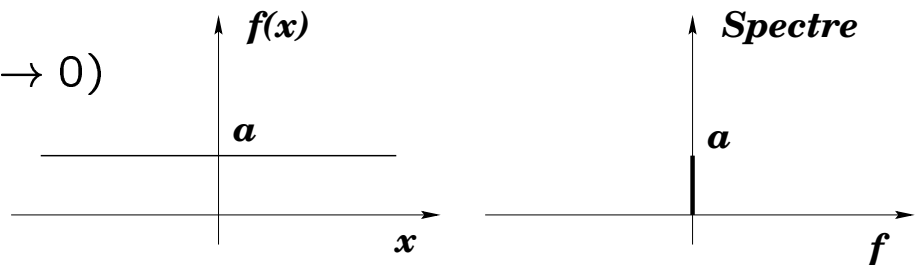
NOTION DE SPECTRE

- Signal sinusoïdal de fréquence $f_0 \rightarrow f(x) = c \cos(2\pi f_0 x)$
(c est l'amplitude du signal et $T = 1/f_0$, sa période)

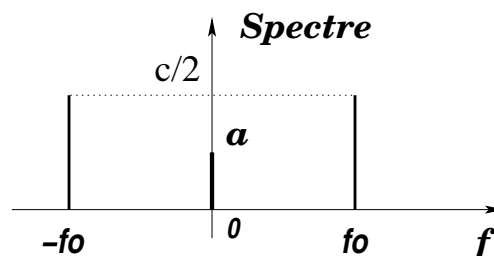
Notation complexe $\rightarrow f(x) = \frac{c}{2} (\exp(2\pi j f_0 x) + \exp(-2\pi j f_0 x))$



- Si $T \rightarrow \infty$, ($f_0 \rightarrow 0$)



- $f(x) = a + \frac{c}{2} (\exp(2\pi j f_0 x) + \exp(-2\pi j f_0 x))$

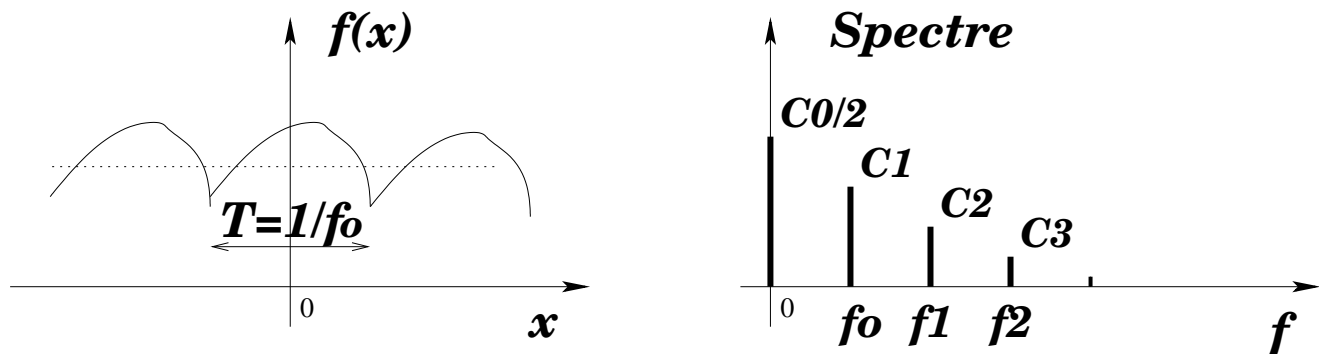


TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (2)

SÉRIE DE FOURIER

Soit $f(x)$, un signal périodique de période $T = 1/f_0$



$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(2\pi n f_0 x) dx \quad n > 0$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(2\pi n f_0 x) dx \quad n > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 x + \theta_n) + C_0/2$$

où $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ et $\theta_n = \arctan\left(\frac{B_n}{A_n}\right)$

Spectre de raies

- $C_0/2$ ◀▶ Niveau moyen du signal
- f_0 ◀▶ Le fondamental
- $n f_0$ ◀▶ Les harmoniques

TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (3)

Preuve de : $A \sin(kx) + B \cos(kx) = C \sin(kx + \theta)$

$$A \sin(kx) + B \cos(kx) = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(kx) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(kx) \right) \quad (1)$$

Puisque, $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1$

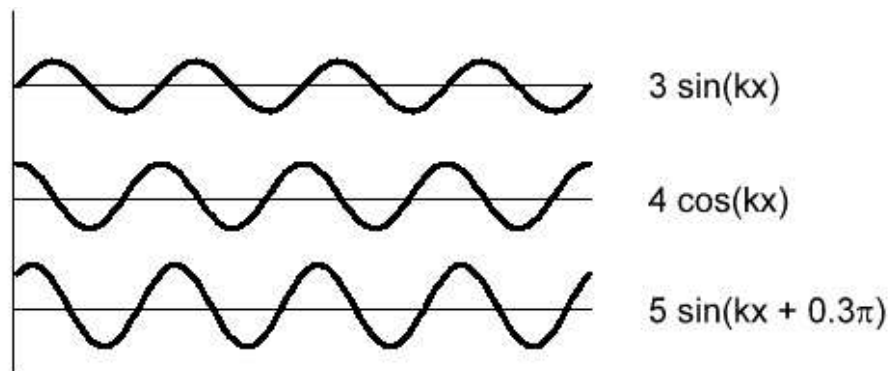
Il existe un θ , tel que, $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \theta$ et $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \theta$

Ainsi, on obtient,

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Leftrightarrow \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \theta \sin(kx) + \sin \theta \cos(kx)) \\ & \Leftrightarrow C \sin(kx + \theta) \end{aligned}$$

avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ (Amplitude)
et $\theta = \arctan(B/A)$ (Phase)

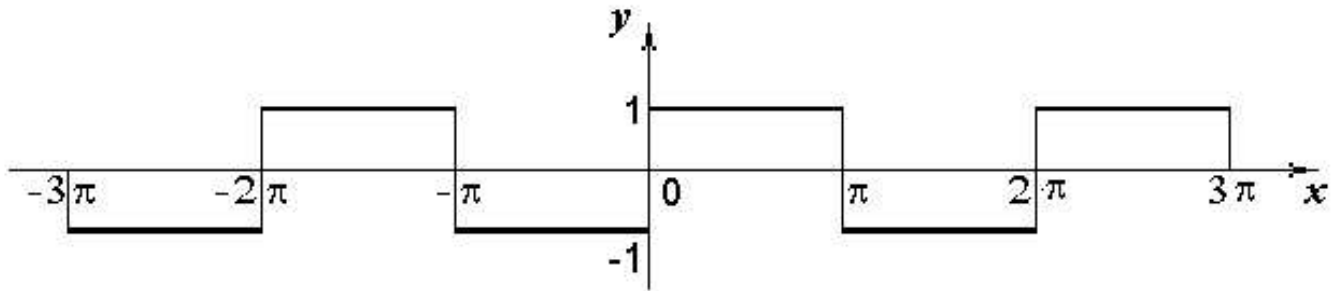
Exemple :



TRANSFORMÉE DE FOURIER

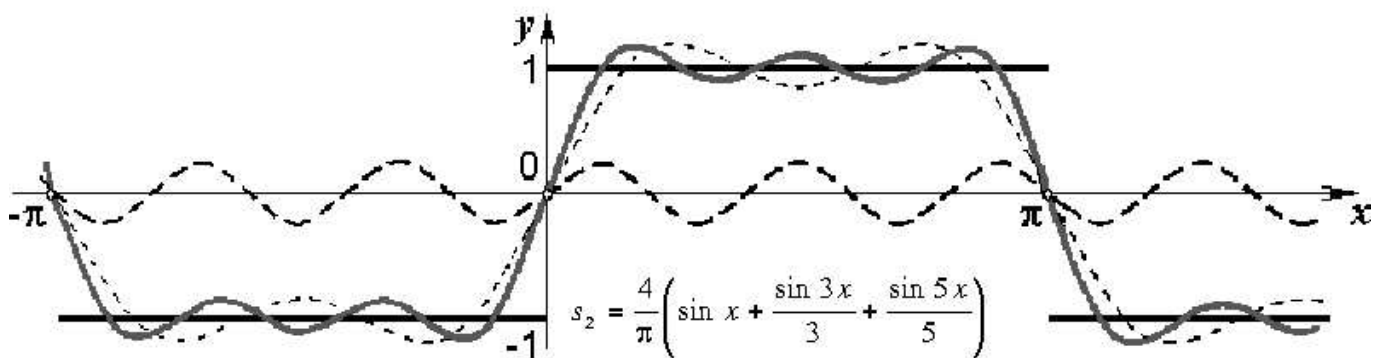
NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (4)

Série de Fourier de l'onde carrée 1D



$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \dots \right)$$



Note :

Signal impair ◀▶ constitué de fonctions sinus

Signal discontinu ◀▶ demande une infinité d'harmoniques pour une bonne reconstruction

Signal à moyenne nulle ◀▶ $A_0 = 0$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (5)

FORME COMPLEXE D'UNE SÉRIE DE FOURIER

► Plus facile de manipuler des exponentielles complexes que des fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 x + \theta_n) + C_0/2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{2} \left(\exp(2\pi j n f_0 x) \exp(j\theta_n) + \exp(-2\pi j n f_0 x) \exp(-j\theta_n) \right) \right) + C_0/2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n \exp(2\pi j n f_0 x) + D_n^* \exp(-2\pi j n f_0 x) \right) + C_0/2 \end{aligned}$$

avec $D_n = \frac{C_n}{2} \exp(j\theta_n) = \frac{1}{2}(A_n - jB_n)$, $\forall n > 0$ et $D_0 = \frac{C_0}{2}$.

$D_n \blacktriangleleft \blacktriangleright$ Coefficients de Fourier, généralement complexes.

Pour les signaux réels, on montre que $\blacktriangleleft \blacktriangleright D_n^* = D_{-n}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} D_n \exp(2\pi j n f_0 x)$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2}(A_n - jB_n) \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(2\pi n f_0 x) dx - j \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(2\pi n f_0 x) dx \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \exp(-2\pi j n f_0 x) dx \end{aligned}$$

Représentation des D_n :

Partie réelle et parties imaginaires $\blacktriangleleft \blacktriangleright (a_n, b_n)$

Modules et arguments $\blacktriangleleft \blacktriangleright (c_n, \theta_n)$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER 1D (1)

Un signal non périodique ► $\lim_{T \rightarrow \infty}$ signal ► spectre continu

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx \quad \nu \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j\nu x) d\nu$$

où x coordonnée spatiale
et ν coordonnée spectrale

► Continuum de fréquences harmoniques

$$F(\nu) = \mathcal{R}[F(\nu)] + j\mathcal{I}[F(\nu)] = R(\nu) + jI(\nu)$$

$$F(\nu) = |F(\nu)| \exp[j\Phi(\nu)]$$

$$\text{Spectre d'amplitude :} \quad |F(\nu)| = \sqrt{R(\nu)^2 + I(\nu)^2}$$

$$\text{Phase :} \quad \Phi(\nu) = \arctan\left(\frac{I(\nu)}{R(\nu)}\right)$$

Principe du filtrage :

► Modification de la phase et du spectre d'amplitude d'un signal

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -CAS PARTICULIER- (2)

a) f est paire ► $F(\nu)$ est réel

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos 2\pi\nu x - j \sin 2\pi\nu x) dx$$

Or les fonctions $x \rightarrow f(x) \cos 2\pi\nu x$ et $x \rightarrow f(x) \sin 2\pi\nu x$ sont respectivement paire et impaire. Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx$$

$$\text{et, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x dx = 0$$

b) f est impaire ► $F(\nu)$ est imaginaire pure

Cette fois, on a,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx = 0$$

c) f est réelle ► symétrie hermitienne

$\mathcal{R}[F(\nu)]$ est paire et $\mathcal{I}[F(\nu)]$ est impaire

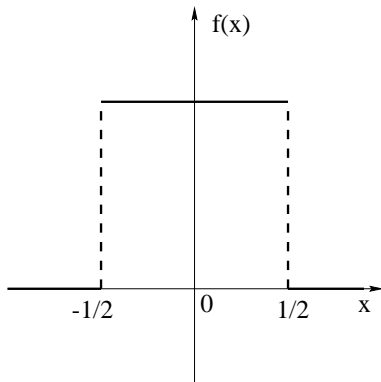
d) f est paire ► $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$

$$\begin{aligned} f(x) - \mathcal{F} &= \mathcal{F}^{-1} - > F(\nu) \\ F(\nu) - \mathcal{F} &= \mathcal{F}^{-1} - > f(x) \end{aligned}$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

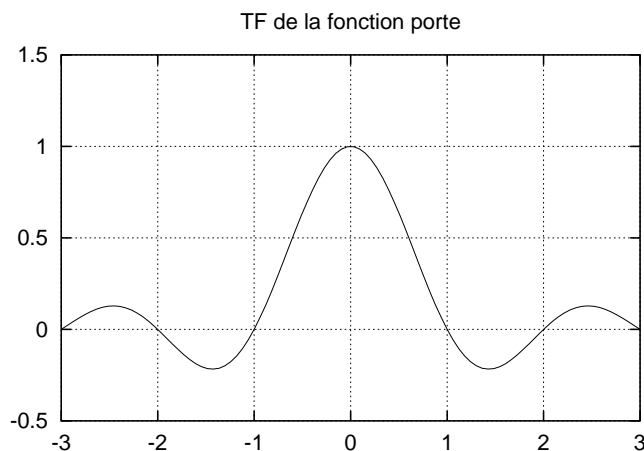
TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (3)

Fonction "Porte"



$$\begin{cases} \Pi(x) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \Pi(x) = 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi j\nu x) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu} [\exp(-2\pi j\nu x)]_{-1/2}^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu} [\exp(-\pi j\nu) - \exp(\pi j\nu)] \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu} [\cos(\pi\nu) - j\sin(\pi\nu) - \cos(\pi\nu) - j\sin(\pi\nu)] \\ F(\nu) &= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = \text{sinc}(\nu) \end{aligned}$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (4)

Fonction impulsion

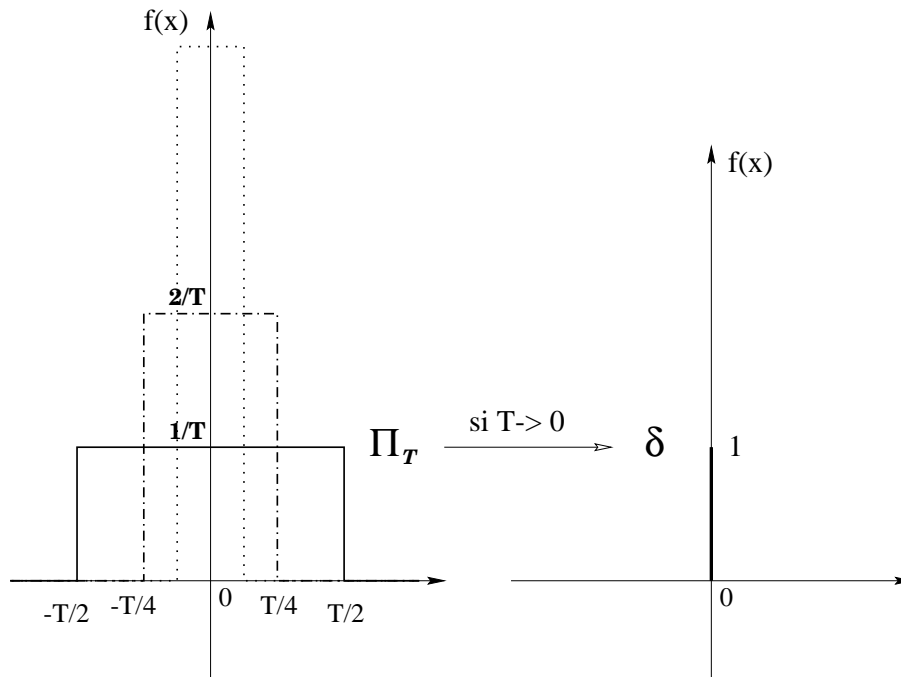
Soit la fonction $\Pi_T(x)$, définie par,

$$\Pi_T(x) = \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right)\right) = \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T}$$

Lorsque $T \rightarrow 0$, la limite obtenue, qui n'est pas une fonction, est appelée *distribution de Dirac* et noté δ

$$\mathcal{F}(\delta) = 1$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

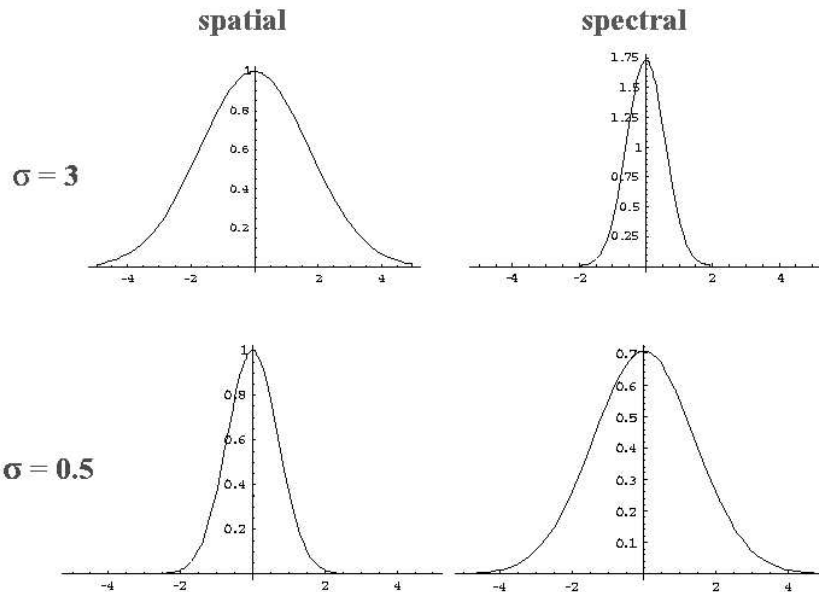
TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (5)

Fonction Gaussienne

Soit $f(x) = \exp(-\pi x^2)$

$$\begin{aligned}
 F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-2\pi j\nu x) dx \\
 &= \exp(-\pi \nu^2) \exp(\pi \nu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-2\pi j\nu x) dx \\
 &= \exp(-\pi \nu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi(x + j\nu)^2) dx \\
 &= \exp(-\pi \nu^2) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi w^2) dw}_1 \quad (w = x + j\nu)
 \end{aligned}$$

$$F(\nu) = \exp(-\pi \nu^2)$$



$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \exp -2\pi^2 \sigma^2 \nu^2$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (6)

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j\nu x) d\nu$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^{-1} \\ f & \text{en} & F \\ x & \text{en} & \nu \\ j & \text{en} & -j \end{array} \text{ en échangeant,}$$

► Toute propriété de \mathcal{F} est donc vraie pour \mathcal{F}^{-1} en tenant compte de cette transposition

1. Linéarité

Si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$,

$$\boxed{\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda F + \mu G}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\lambda F + \mu G) = \lambda f + \mu g$$

2. Transformée de f(ax)

$$\boxed{\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)}$$

3. Transformée de f(x-x₀)

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x - x_0)] = \exp(-2j\pi\nu x_0) F(\nu)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu - \nu_0)] = \exp(2\pi j\nu_0 x) f(x)$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (7)

La transformée d'une porte décalée est,

$$\mathcal{F}[\Pi(x - x_0)] = \exp(-2j\pi\nu x_0) \times \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$$

Plus généralement, on a,

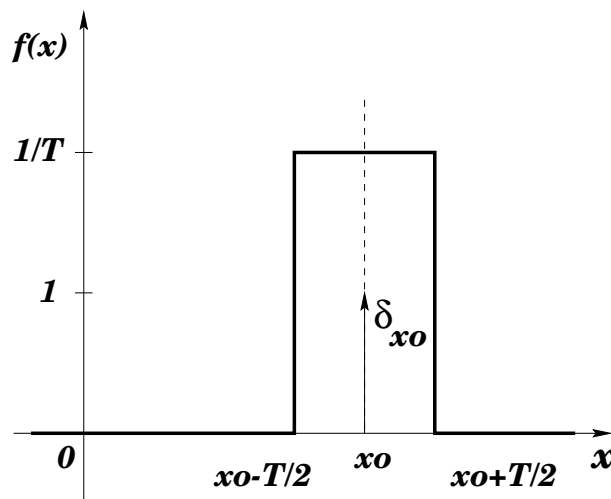
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)\right] = \exp(-2\pi j\nu x_0) \times \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}$$

Si $T \rightarrow 0$, on en déduit, en posant,

$$\delta_{x_0} = \delta(x - x_0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)$$

i.e., la distribution de Dirac translatée en x_0 . On obtient,

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = \exp(-2\pi j\nu x_0)$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (8)

4. Transformée de $f'(x)$

$$\mathcal{F}[f'(x)] = 2j\pi\nu F(\nu)$$

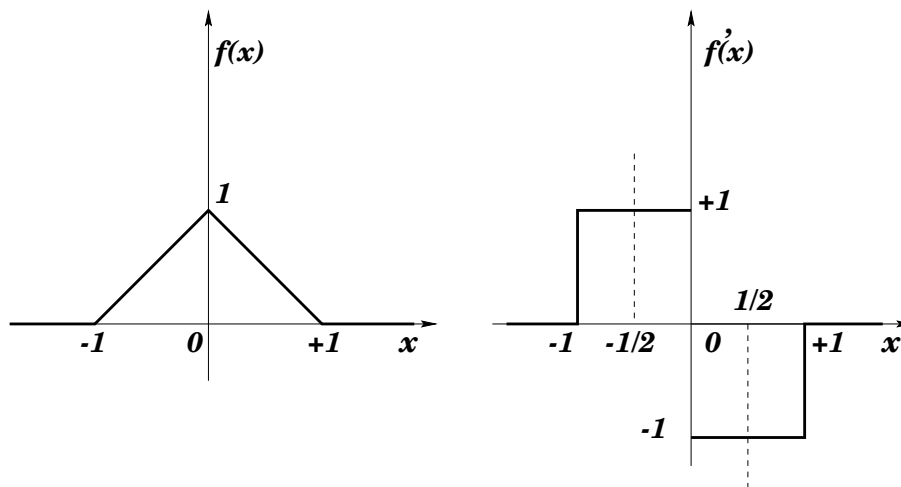
De même, pour \mathcal{F}^{-1} , $\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2j\pi x f(x)$

Plus généralement, si $f^{(n)}(x)$ existe et possède une TF,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (2j\pi\nu)^n F(\nu) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\nu)] = (-2j\pi x)^n f(x)$$

-TF de la fonction triangle $\Lambda(x)$ -

$$\Lambda'(x) = \Pi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$



$$2j\pi\nu F(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \left[\exp\left(-2\pi j\nu\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \exp\left(-2\pi j\nu\left(\frac{1}{2}\right)\right) \right]$$

$$2j\pi\nu F(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \times 2j \sin \pi\nu$$

$$F(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (9)

5. Transformée du produit de convolution

Produit de convolution :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

On démontre que si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$ alors,

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = F \times G}$$

De la même façon pour \mathcal{F}^{-1} , on a,

$$\mathcal{F}^{-1}(F * G) = f \times g$$

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \times \\ \times & \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} & * \end{array}$$

-Exemple-

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Lambda(x)] &= \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} \right)^2 \\ \mathcal{F}[\Lambda(x)] &= \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} \times \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} \\ \text{or,} \quad \mathcal{F}[\Pi(x)] &= \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} \\ \text{donc,} \quad \Lambda &= \Pi * \Pi \end{aligned}$$

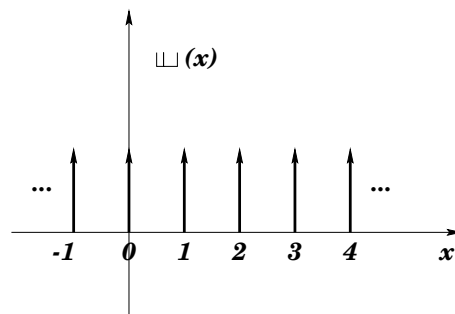
TRANSFORMÉE DE FOURIER

PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (2)

Peigne de Dirac

On appelle “peigne de Dirac”, la distribution noté $\text{III}(x)$, définie par,

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n)$$

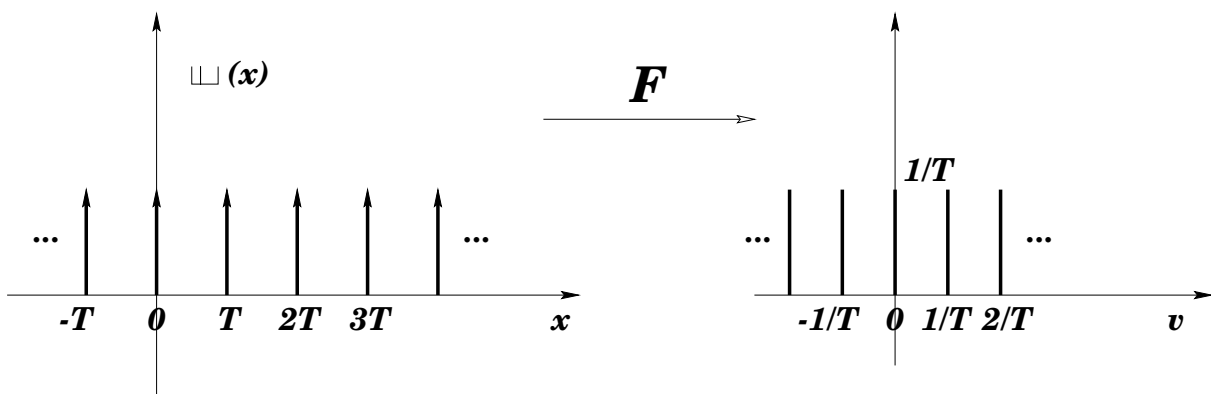


Le peigne de Dirac est invariant dans la TF,

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n)\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu - n)$$

Dans le cas d'un peigne de période T ,

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - nT)\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu - \frac{n}{T})$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER 2D (1)

$$\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + \nu y)) dx dy$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u, \nu)] = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, \nu) \exp(2\pi j(ux + \nu y)) du d\nu$$

où x, y coordonnée spatiale
et u, ν coordonnée spectrale

$$F(u, \nu) = \mathcal{R}[F(u, \nu)] + j\mathcal{I}[F(u, \nu)] = R(u, \nu) + jI(u, \nu)$$

$$F(u, \nu) = |F(u, \nu)| \exp[j\Phi(u, \nu)]$$

$$\text{Phase :} \quad \Phi(u, \nu) = \arctan\left(\frac{I(u, \nu)}{R(u, \nu)}\right)$$

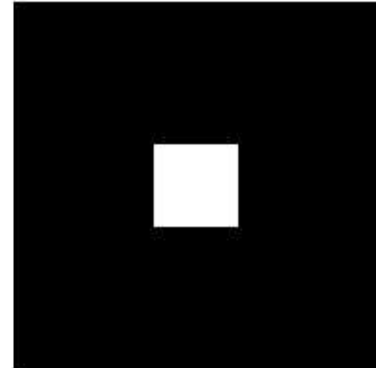
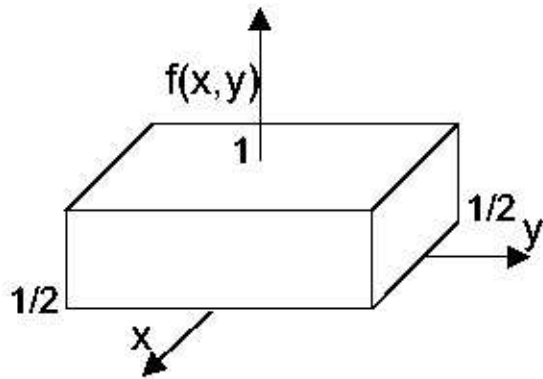
$$\text{Spectre d'amplitude :} \quad |F(u, \nu)| = \sqrt{R(u, \nu)^2 + I(u, \nu)^2}$$

$$\text{Spectre de puissance :} \quad |F(u, \nu)|^2 = R(u, \nu)^2 + I(u, \nu)^2$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

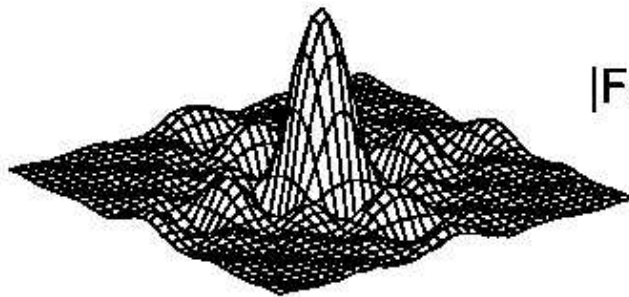
TRANSFORMÉE DE FOURIER 2D -EXEMPLE- (2)

Fonction "Rectangle"



$$\begin{cases} f(x, y) = \Pi(x, y) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{2} \\ f(x, y) = \Pi(x, y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(u, \nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + \nu y)) dx dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi jux) dx \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi j\nu y) dy \\ &= \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \\ &= \text{sinc}(u, \nu) \end{aligned}$$



$|F(u, \nu)|$

