1.2 Цикли

1) Скласти функцію обчислення за даним дійсним x та натуральним n число $y=\sin(\sin(\ldots\sin(x)\ldots))$ (n разів).

2) Скласти функції для обчислення значень многочленів і виконати їх при заданих значеннях аргументів:

а) $y=x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x+1$ $\quad n=3,\ x=2;$

б) $y=x^{2^n}+x^{2^{n-1}}+\ldots+x^4+x^2+1$ $\quad n=4,\ x=1;$

в) $y=x^{3^n}+x^{3^{n-1}}+\ldots+x^9+x^3+1$ $\quad n=3,\ x=1;$

г) $y=x^{2^n}*y^n+x^{2^{n-1}}*y^{n-1}+\ldots+x^2*y+1$, n =4 ,x =1 ,y =2 ;

д) $y=x^{1^2}+x^{2^2}+\ldots+x^{n^2}$, $\quad n=5,\ x=-1.$

3) Вивести на екран такий рядок:

n! = 1*2*3*4*5*...*n,

де n – введене з клавіатури натуральне число.

4) **Дано натуральне число** n. Написати програми обчислення значень виразів при заданому значенні x:

а) $1+(x-1)+(x-1)^2+\ldots+(x-1)^n;$

б) $1+\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{(x^2+1)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(x^2+1)^n};$

в) $x+(2x)^2+\ldots+((n-1)x)^{n-1}+(nx)^n;$

г) $1+\sin(x)+\sin^2(x)+\ldots+\sin^n(x).$

5) Дано натуральне число *n*. Скласти програму обчислення факторіала *y=n!*, використовуючи

а) цикл по діапазону із зростанням;

б) цикл по діапазону зі спаданням.

6) Скласти функцію обчислення подвійного факторіала натурального числа n $y=n!!$.

<u>*Вказівка*</u>. За означенням

$$n!!=\begin{pmatrix} 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot n, & \text{якщо } n-\text{непарне}, \\ 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot n, & \text{якщо } n-\text{ парне}. \end{pmatrix}$$

7) Скласти функції обчислення факторіалів:

а) $y=(2n)!!;$ б) $y=(2n+1)!!;$ в) $y=n!n!!(n+1)!!.$

8) Скласти програму обчислення

а) $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n коренів),

б) $\sqrt{3+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{3(n-1)+\sqrt{3n}}}}.$

9) Скласти програми обчислення значень многочленів

а) $y=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\ldots+2x+1,$ $(x<1, n\geq 0);$

б) $y=\sum_{k=0}^{n} kx^k(1-x)^{n-k},$ $(0<x<1, n\geq 0);$

в) $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$ (дійсне $x<1, n\geq 0$).

10) Для довільного цілого числа $m\geq 1$ знайти найбільше ціле k, при якому $4^k\leq m$.

11) Для заданого натурального числа n одержати найменше число вигляду 2^r, яке перевищує n.

12) Знайдіть машинний нуль для вашого компілятора, тобто таке дійсне число $a > 0$, що $1 + a = 1$ буде істиною.

Вказівка: в циклі ділить значення a на 2 доки не виконується вказана вище рівність.

13) Ввести послідовність наступним чином: користувачу виводиться напис "a[**]= ", де замість ** стоїть номер числа, що вводиться. Тобто там виводяться написи "a[0]= ", і після знаку рівності користувач вводить число, "a[1]= ", і після знаку рівності користувач вводить число і так далі доки користувач не введе число 0. Після цього потрібно вивести суму введених чисел (масив чисел заводити необов'язково).

14) Введіть послідовність цілих ненульових чисел (тобто введення закінчується коли ми вводимо 0) та виведіть середнє арифметичне введених чисел та середнє геометричне.

15) Введіть послідовність цілих ненульових чисел (тобто введення закінчується коли ми вводимо 0). Визначити кількість змін знаку в цій послідовності. Наприклад, у послідовності 1, −34, 8,14, −5, 0 знак змінюється три рази.

16) Введіть послідовність натуральних ненульових чисел (тобто введення закінчується коли ми вводимо 0). Визначити порядковий номер найменшого з них.

17) Введіть послідовність дійсних ненульових чисел (тобто введення закінчується коли ми вводимо 0). Визначити величину найбільшого серед від`ємних членів цієї послідовності. Якщо від'ємних чисел немає вивести найменший серед додатних членів.

18) Банк пропонує річну ставку по депозиту А та 15% по вкладу додаються до основної суми депозиту кожен рік. Ви кладете в цей банк D гривень. Скільки років потрібно чекати, щоб сума вкладу зросла до очікуваної суми P?

19) Скласти програми для обчислення елементів послідовностей. Операцію піднесення до степені та функцію обчислення факторіалу не використовувати.

а) $x_k=\dfrac{x^k}{k}\ \left(k\geq 1\right);$

д) $x_k=\dfrac{x^{2k}}{\left(2k\right)!}\ \left(k\geq 0\right);$;

б) $x_k=\dfrac{\left(-1\right)^k x^k}{k}\ \left(k\geq 1\right);$

е) $x_k=\dfrac{x^{2k+1}}{\left(2k+1\right)!}\ \left(k\geq 0\right);$;

в) $x_k=\dfrac{x^k}{k!}\ \left(k\geq 0\right);$

ж) $x_k=\dfrac{\left(-1\right)^k x^{2k}}{\left(2k\right)!}\ \left(k\geq 0\right);$;

г) $x_k=\dfrac{\left(-1\right)^k x^k}{k!}\ \left(k\geq 0\right);$

з) $x_k=\dfrac{\left(-1\right)^k x^{2k+1}}{\left(2k+1\right)!}\ \left(k\geq 0\right);$

20) Задане натуральне число *n*. Скласти програми обчислення добутків

а) $p=\left(1+\dfrac{1}{1^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right), 2\,;$

б) $p=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right), 2.$

21) Скласти програму друку таблиці значень функції $y=\sin x$ на відрізку [0,1] з кроком $h=0.1$.

22) Скласти програму визначення кількості тризначних натуральних чисел, сума цифр яких дорівнює $n\ \left(n>1\right)$. Операцію ділення не використовувати.

23) Дано *n* цілих чисел. Скласти програму, що визначає, скільки з них більші за своїх "сусідів", тобто попереднього та наступного чисел.

24) Задані натуральне число *n*, дійсні числа $y_1,\ldots y_n$. Скласти програму визначення

а) $\max\left(\left(z_1\right),\ldots,\left(z_n\right)\right),$ де $z_i=\begin{cases} y_i, & \text{при } \left(y_i\right)\leq 2,\\ 0.5, & \text{у інших випадках}\end{cases}$;

б) $\min(f((z_1),\ldots,(z_n)),$ де $z_i = \begin{pmatrix} y_i, & \text{при } (y_i) \geq 1, \\ 2, & \text{у інших випадках} \end{pmatrix};$

в) $z_1 + z_2 + \ldots + z_n,$ де $z_i = \begin{pmatrix} y_i, & \text{при } 0 < y_i < 10, \\ 1, & \text{у інших випадках} \end{pmatrix}$

25) Дано натуральне число n. Викинути із запису числа n цифри 0 і 5, залишивши порядок інших цифр. Наприклад, з числа 59015509 повинно вийти 919.

26) Знайти період десяткового дробу для відношення n/m для заданих натуральних чисел n та m.

27*) Скоротити дріб n/m для заданих цілого числа n та натурального числа m.

28*) Ввести натуральні числа a і b та натуральне число n. Чи можна представити число n у вигляді n= k*a + m*b, де k та m — натуральні числа? Якщо можна — то знайдіть такі числа k та m, що мають найменшу суму модулів.

29) Представити дане натуральне число як суму двох квадратів натуральних чисел. Якщо це неможливо представити як суму трьох квадратів. Якщо і це неможливо, представити у вигляді суми чотирьох квадратів натуральних чисел.

30) Знайти всі цілі корені кубічного рівняння . Вказівка: цілі корені повинні бути дільниками (від'ємними або додатними дільниками вільного члену d).

31) Напишіть функцію, яка розраховує для даного натурального числа n значення функції Ойлера (кількість чисел від 1 до n, взаємно простих з n).

32*) Ввести натуральне число $d > 1$ та натуральне число m. Знайдіть мінімальну кількість натуральних чисел вигляду x^d (d-ступенів натуральних чисел) сума яких дорівнює m.

1.2.1 Рекурентні співвідношення

1) Числами Фібоначчі називається числова послідовність (F_n), задана рекурентним співвідношенням другого порядку $F_0=0, F_1=1, F_k=F_{k-1}+F_k, \ k=2,3,\ldots$. Скласти функцію для обчислення F_n за номером члену.

1) Маємо дійсне число *a*. Скласти програми обчислення:

а) серед чисел $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots$ першого, більшого за . ;

б) такого найменшого . , що $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>a$.

2) Введіть натуральне число n. Далі утворить рекурентну послідовність a_i за наступним правилом: $a_0=n$. Якщо a_k парне, то $a_{k+1}=a_k/2$, якщо — непарне, то $a_{k+1}=3a_k+1$. Доведіть що для n<1000 ця послідовність буду містити член рівний одиниці. Знайдіть серед цих n число, якому потрібно максимальна кількість кроків для досягнення одиниці.

3) Скласти програми для обчислення добутків:

а) $P_n=\prod_{i=1}^{n}\left(2+\frac{1}{i!}\right)$; б) $P_n=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{i+2}\right)$;

в) $P_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)!}$; г) $P_n=\frac{\prod_{i=1}^{n}1}{i^i+1}$.

4) <u>*Вказівка*</u>. Добуток P_n обчислити за допомогою рекурентного співвідношення $P_0=1, \ P_k=P_{k-1}*a_k, \ k=1,2,\ldots,n,$ *k*=1,2,...,*n,* де a_k - *k*- тий множник.

5) Скласти програми обчислення:

а) номера найбільшого числа Фібоначчі, яке не перевищує задане число *a;*

б) номера найменшого числа Фібоначчі, яке більше заданого числа *a;*

в) суми всіх чисел Фібоначчі, які не перевищують 1000.

6) *Вводиться послідовність натуральних чисел (починаючи з першого члена) доки не введемо 0. Обчислити суму тих членів послідовності, порядкові номери яких - числа Фібоначчі.*

7) Скласти програми для обчислення найменшого додатного члена числових послідовностей, які задаються рекурентними співвідношеннями, та його номера

а) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + 100, \quad x_1 = x_2 = -99, \quad n = 3,4,\ldots;$

б) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + 200, \quad x_1 = x_2 = x_3 - 99, \quad n = 4,5,\ldots;$

в) $x_n = x_{n-1} + x_{n-3} + 100, \quad x_1 = x_2 = x_3 = -99, \quad n = 4,5,\ldots$

8) Скласти програми для обчислення ланцюгових дробів

а) $$b_n = b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \ddots + \cfrac{1}{b}}};$$; б) $$\lambda_n = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \ddots + \cfrac{1}{4n+2}}};$$

в) $$x_{2n} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots + \cfrac{1}{2}}}}};$$

Вказівка. Використати рекурентні співвідношення

а) $b_0 = b, b_k = b + \dfrac{1}{b_{k-1}}, \quad k = 1,2,\ldots,n;$

в) $b_0 = 4n+2, b_k = 4(n-k) + 2 + \dfrac{1}{b_{k-1}}, \quad k = 1,2,\ldots,n.$

9) Скласти програми обчислення довільного елемента послідовностей, заданих рекурентними співвідношеннями

а) $v_0=1,\ v_1=0.3,\qquad v_i=(i+2)\,v_{i-2},\quad i=2,3,\ldots$

б) $v_0=v_1=v_2=1,\qquad v_i=(i+4)(v_{i-1}-1)+(i+5)\,v_{i-3},\quad i=3,4,\ldots$

в) $v_0=v_1=0,\ \ v_2=\dfrac{3}{2},\quad v_i=\dfrac{i-2}{(i-3)^2+1}\,v_{i-1}-v_{i-2}\,v_{i-3}+1,\ \ i=2,3,\ldots$

10) Скласти програму обчислення довільного елемента послідовності v_n, визначеної системою співвідношень

$$v_0=v_1=1,\qquad v_i=\frac{u_{i-1}-v_{i-1}}{(u_{i-2}+v_{i-1})+2},\quad i=2,3,\ldots;$$

де $u_0=u_1=0,\qquad \mathrm{u}_i=\dfrac{u_{i-1}-u_{i-2}\,v_{i-1}-v_{i-2}}{1+u_{i-1}^2+v_{i-1}^2},\quad i=2,3,\ldots;$

11) Скласти програми для обчислення сум:

а) $S_n=\sum_{k=1}^{n}2^k a_k$, де $a_1=0, a_2=1, a_k=a_{k-1}+k*a_{k-2},\ k=3,4,\ldots;$

б) $S_n=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}3^k}{a_k}$, де $a_1=a_2=1,\ a_k=\dfrac{a_{k-1}}{k}+a_{k-2},\ \ k=3,4,\ldots;$

в) $S_n=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}k!}{a_k}$, де $a_1=a_2=1,\ a_k=a_{k-1}+\dfrac{a_{k-1}}{2^k},\ \ k=3,4,\ldots;$

г) $S_n=\sum_{k=1}^{n}k!\,a_k$, де $a_1=0, a_2=1,\ a_k=a_{k-1}+\dfrac{a_{k-2}}{(k-1)!},\ k=3,4,\ldots;$

г) $S_n=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{2^k}$, де $a_1=a_2=a_3=1,\ a_k=a_{k-1}+a_{k-3},\ \ k=4,5,\ldots;$

д) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k!}a_k$, де $a_0=1, a_k=k\,a_{k-1}+\dfrac{1}{k},\ \ k=1,2,\ldots.$

12) Скласти програми для обчислення сум:

а) $S_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} 2^k}{a_k + b_k},$,

де $\left(\begin{array}{c} a_1 = 0,\, a_2 = 1, \\ a_k = \dfrac{a_{k-1}}{k} + a_{k-2}\, b_k, \end{array} \right)$ $\left(\begin{array}{c} b_1 = 0,\, b_2 = 1, \\ b_k = b_{k-1} + a_{k-1}, \end{array} \right)$ $k = 3,4,K\ ;$

б) $S_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{(k+1)!},$

де $\left(\begin{array}{c} a_1 = u, \\ a_k = 2\, b_{k-1} + a_{k-1}, \end{array} \right)$ $\left(\begin{array}{c} b_1 = v, \\ b_k = 2\, a_{k=1}^2 + b_{k-1}, \end{array} \right)$ $k = 2,3,\ldots;$

u,v – задані дійсні числа;

в) $S_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} 2^k}{(1 + a_k + b_k)\, k!¿}$ ¿

де $\left(\begin{array}{c} a_1 = 1, \\ a_k = 3\, b_{k-1} + 2\, a_{k-1}, \end{array} \right)$ $\left(\begin{array}{c} b_1 = 1, \\ b_k = 2\, a_{k-1} + b_{k-1}, \end{array} \right)$ $k = 2,3,\ldots;$

г) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{a_k}{b_k} \right)^k,$

де $\left(\begin{array}{c} a_0 = 1,\, a_1 = 2, \\ a_k = b_{k-2} + \dfrac{b_k}{2}, \end{array} \right)$ $\left(\begin{array}{c} a_0 = 5,\, b_1 = 5, \\ b_k = b_{k-2}^2 - a_{k-1}, \end{array} \right)$ $k = 2,3,\ldots;$

д) $S_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{1 + b_k},$

де $\left(\begin{array}{c} a_0 = 1, \\ a_k = b_{k-1} a_{k-1}, \end{array} \right)$ $\left(\begin{array}{c} b_0 = 1, \\ b_k = b_{k-1} + a_{k-1}, \end{array} \right)$ $k = 1,2,\ldots.$

13) Скласти програми для обчислення добутків

а) $P_n = \prod_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{3^k},$ де $\left(\begin{array}{c} a_0 = a_1 = 1,\ \ a_2 = 3, \\ a_k = a_{k-3} + \dfrac{a_{k-2}}{2^{k-1}}, \end{array} \right),$ $k = 3,4,\ldots;$

б) $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k b_k,$

де $\begin{pmatrix} b_1 = 1, \\ b_k = 2b_{k-1} + 5a_{k-1}^2, \end{pmatrix}$ $k = 2,3,\ldots$.

14) Реалізувати функцію яка з`ясовує, чи входить задана цифра до запису заданого натурального числа.

15) Реалізувати функцію "обернення" (запису в оберненому порядку цифр) заданого натурального числа.

Вказівка. Для побудови числа використати рекурентне співвідношення $y_0 = 0,\ y_i = y_{i-1} * 10 + a_i,$ де a_i - наступна цифра числа n при розгляді цифр справа наліво.

16) а) Скласти програму, яка визначає потрібний спосіб розміну будь-якої суми грошей до 99 коп. за допомогою монет вартістю 1, 2, 5, 10, 25, 50 коп.

б) Розв'яжить цю задачу для будь-якого натурального числа m (1<m<100000) копійок так щоб кількість монет при цьому була найменша.

17) Скласти програми наближеного обчислення суми всіх доданків, абсолютна величина яких не менше ε>0:

а) $y = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots;$

б) $y = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots;$

в) $y = sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots;$

г) $y = ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots;$

д) $y = e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots;$

е) $y = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} - \ldots, \qquad ((x) < 1);$

ж) $y = \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \qquad ((x) < 1);$

з) $y = \ln \frac{1 + x}{1 - x} = 2 * \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \right), \qquad ((x) < 1);$

і) $y = \frac{1}{(1 + x)^2} = 1 - 2 * x + 3 * x^2 - \ldots, \qquad ((x) < 1);$

к) $y = \frac{1}{(1 + x)^3} = 1 - \frac{2 * 3}{2} x + \frac{3 * 4}{2} x^2 - \frac{4 * 5}{2} x^3 + \ldots, \qquad ((x) < 1);$

л) $y = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \qquad ((x) < 1);$

м) $y = \sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 * 4} x^2 + \frac{1 * 3}{2 * 4 * 6} x^3 - \ldots, \qquad ((x) < 1);$

н) $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 * 3}{2 * 4} x^2 - \frac{1 * 3 * 5}{2 * 4 * 6} x^3 - \ldots, \qquad ((x) < 1);$

о) $y = \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3\,!} + \frac{1 * 3}{2 * 4} \frac{x^5}{5\,!} + \ldots, \qquad ((x) 1).$

Вказівка. Суму y обчислювати за допомогою рекурентного співвідношення $S_0 = 0,\ S_k = S_{k-1} + a_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ де $a_k - k$ -тий доданок, для обчислення якого також складається рекурентне співвідношення. В якості умови повторення циклу розглядається умова $(a_k) \geq \varepsilon.$

18) Маємо дійсні числа $x, \varepsilon \ (x \neq 0, \varepsilon > 0)$. Обчислити з точністю ε нескінченну суму і вказати кількість врахованих доданків.

а) $\dfrac{\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}}{2k!}$;   б) $\dfrac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k}{(k+1)^2}$;

в) $\dfrac{\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}}{2^k k!}$;   г) $\dfrac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)!}$. .

Рекурсія

19) Маємо ціле $n > 2$. Скласти програму для обчислення всіх простих чисел з діапазону $(1, n)$.

20) Скласти програму друку всіх простих дільників заданого натурального числа.

21) Скласти програму, яка визначає чи є задане натуральне число n досконалим, тобто рівним сумі всіх своїх (додатних) дільників, крім самого цього числа (наприклад, число 6 - досконале: 6=1+2+3).

<u>Вказівка</u>. Шукаємо суму *S* всіх дільників заданого числа *n*. Якщо *S*=*n,* то число, яке перевіряємо, є досконалим. Перша ідея полягає в знаходженні дільників числа *n* в діапазоні [1*, n div* 2]. У відповідності з другою ідеєю пошук ведеться тільки між 1 та $\sqrt{n}$ і якщо дільник знайдений, то до суми *S* додаються як дільник, так і частка.

22) Дано натуральне число k . Скласти програму одержання *к*-тої цифри послідовності

а) 110100100010000 ... , в якій виписані підряд степені 10;

б) 123456789101112 ... , в якій виписані підряд всі натуральні числа;

в) 149162536 ... , в якій виписані підряд квадрати всіх натуральних чисел;

г) 01123581321 ... , в якій виписані підряд всі числа Фібоначчі.

23) Скласти програму знаходження кореня рівняння $tg\, x = x$ на відрізку [0,001;1,5] із заданою точністю ε, використовуючи метод ділення відрізку навпіл.

24) Знайти корінь рівняння $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, який міститься на відрізку [0,2], з заданою точністю

<u>*Вказівка.*</u> Одним з методів розв`язування рівняння є метод хорд, який полягає в обчисленні елементів послідовності

$$u_0 = a,$$

$$u_n = u_{n-1} - \frac{y(u_n - 1)}{y(b) - y(u_{n-1})}(b - u_{n-1})$$

до виконання умови $(u_n - u_{n-1}) < \varepsilon$. В умовах нашої задачі $a = 0, b = 2, \quad y(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.