Algoritmos: Seminario 2

Resolución de recurrencias

Antonio Blanco, Alberto Valderruten

Dept. de Computación, Universidade da Coruña

blanco@udc.es, alberto.valderruten@udc.es

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

- **Recurrencias homogéneas lineales con coef. constantes:**
  Ecuaciones de la forma:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0 \qquad (1)$$

  t_i son los *valores de la recurrencia*.
  Además, k valores de t_i: las *condiciones iniciales*
  $\rightarrow$ permiten pasar de infinitas soluciones a una solución.

- **Ejemplo: fibonacci**

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = a_2 = -1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{array} \right.$$

- **Regla:** *toda combinación lineal de soluciones es solución*
  Si $\sum_{i=0}^{k} a_i f_{n-i} = 0$ y $\sum_{i=0}^{k} b_i g_{n-i} = 0$
  i.e. si f_n satisface (1), y g_n también satisface (1),
  y $t_n = cf_n + dg_n$ (donde c y d son constantes arbitrarias)
  entonces t_n también es solución de (1).
  $\rightarrow$ Se generaliza para cualquier número de soluciones.
- **¿Buscar una solución de la forma $t_n = x^n$?**
  (1): $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} = 0$ (Solución trivial: x=0)
  $\Leftrightarrow \underbrace{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k}_{p(x)} = 0$
  es la *ecuación característica* de (1);
  $p(x)$ es el *polinomio característico* de (1).
  $\rightarrow$ Técnica de la ecuación característica

- **Técnica de la ecuación característica:**
  Todo polinomio de grado k posee k raíces: $p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - r_i)$
  r_i: pueden ser complejos, únicas soluciones de $p(x) = 0$, i.e. $p(r_i) = 0$.
  $x = r_i$ es solución de la ecuación característica;
  $\rightarrow r_i^n$ es solución de la recurrencia (1).

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n \tag{2}$$

  (2) *satisface la recurrencia* (1) con c_i: constantes adecuadas; es la *solución más general*.
  (1) sólo posee soluciones de esta forma, siempre y cuando todas las r_i sean diferentes.
  Las k constantes se determinan a partir de las k cond. iniciales, resolviendo un sistema de k ecuaciones lineales con k incógnitas.

Recurrencias homogéneas lineales con coef. ctes. (4)

- **Ejemplo: fibonacci (Cont.)**

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$
$$p(x) = x^2 - x - 1 \Rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
$$\Rightarrow f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

Condiciones iniciales:

$$n = 0, f_0 = 0 \wedge f_0 = c_1 + c_2$$
$$n = 1, f_1 = 1 \wedge f_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2$$

Sistema de ecuaciones a resolver: $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\phi})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

Más exacto que decir sólo $f_n = O(\phi^n)$

Recurrencias homogéneas lineales con coef. ctes. (5)

- **Problema**: ¿las k raices no son todas diferentes entre sí?
  $\rightarrow$ (2) sigue siendo solución, pero ya no es la más general.
  ¿Otras soluciones?
  $\rightarrow$ Sea r una raíz múltiple (de momento de multiplicidad 2): por definición, existe un polinomio q(x), de grado k-2, tal que

$$p(x) = (x-r)^2 q(x)$$

Para todo $n \geq k$, consideremos:

$$u_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k}$$
$$v_n(x) = a_0 n x^n + a_1 (n-1) x^{n-1} + \cdots + a_k (n-k) x^{n-k}$$
$$\rightarrow v_n(x) = x u_n'(x) \qquad (*)$$
$$u_n(x) = x^{n-k} p(x) = x^{n-k} (x-r)^2 q(x) = (x-r)^2 [x^{n-k} q(x)]$$
$$u_n'(x) = 2(x-r) x^{n-k} q(x) + (x-r)^2 [x^{n-k} q(x)]'$$
$$\Rightarrow u_n'(r) = 0$$
$$(*) \Rightarrow v_n(r) = x u_n'(r) = 0, \qquad \forall n \geq k$$
$$\Leftrightarrow a_0 n r^n + a_1 (n-1) r^{n-1} + \cdots + a_k (n-k) r^{n-k} = 0$$

$\Rightarrow t_n = n r^n$ **también es solución de (1)** (nueva)

Recurrencias homogéneas lineales con coef. ctes. (6)

- Más generalmente, si r tiene multiplicidad m:

$$t_n = r^n, t_n = nr^n, t_n = n^2 r^n, \ldots, t_n = n^{m-1} r^n$$

son soluciones de (1).

- Solución general: combinación lineal
  $\rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_l$: raices distintas de $p(x)$,
  de multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_l \Rightarrow$

$$t_n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n \tag{3}$$

  (3) es la solución general de (1).
- Los c_{ij} se determinan a partir de las condiciones iniciales:
  $\rightarrow$ son k constantes, $c_1, c_2, \ldots, c_k$.
  $\sum_{i=1}^{l} m_i = k$: suma de las multiplicidades, número total de raices.

- **Ejemplo:**

$$t_n = \begin{cases} n & n = 0, 1, 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & \textit{sino} \end{cases}$$

Con la forma de la ecuación (1):

$$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-3} = 0$$

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 & m_1 = 1 \\ r_2 = 2 & m_2 = 2 \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$$

$$\left.\begin{array}{lll} n = 0: & c_1 + c_2 & = 0 \\ n = 1: & c_1 + 2c_2 + 2c_3 & = 1 \\ n = 2: & c_1 + 4c_2 + 8c_3 & = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$$

- **Recurrencias no homogéneas:** La comb. lineal ya no es = 0 $\rightarrow$ la combinación lineal de soluciones ya no es solución.
  Consideramos inicialmente recurrencias de la forma:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b^n p(n) \tag{4}$$

  donde b es una constante y p(n) un polinomio de grado d.

- **Ejemplo 1:** $t_n - 2t_{n-1} = 3^n$ $\quad$ $^*p(n) = 1$: pol. de grado 0
  Reducir al caso homogéneo:
  Multiplicar por 3: $\rightarrow 3t_n - 6t_{n-1} = 3^{n+1}$
  Sustituir n por n-1: $\rightarrow 3t_{n-1} - 6t_{n-2} = 3^n$
  Diferencia entre 2 ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc} & t_n & -2t_{n-1} & & = & 3^n \\ - & & 3t_{n-1} & -6t_{n-2} & = & 3^n \\ \hline & t_n & -5t_{n-1} & +6t_{n-2} & = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 - 5x + 6}_{p(x)} = (x-2)(x-3)$$

- **Ejemplo 1:** (Cont.)
  $\Rightarrow$ Las soluciones son de la forma: $t_n = c_1 2^n + c_2 3^n$
  Y como $t_n \geq 0 \quad \forall n \geq 0$, se deduce que $t_n = O(3^n)$
  Pero c_1 y c_2 ya no se determinan a partir de las cond. iniciales:
  $t_n = 2^n$ y $t_n = 3^n$ **no** son soluciones de la recurrencia original.
  $\rightarrow t_n - 2t_{n-1} = 3^n \Rightarrow t_1 = 2t_0 + 3 \Rightarrow$
  $$\begin{cases} c_1 + c_2 & = & t_0 & n = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 & = & 2t_0 + 3 & n = 1 \end{cases}$$
  $$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = t_0 - 3 \\ c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow t_n = (t_0 - 3)2^n + 3^{n+1} = \theta(3^n)$$
  (Sol. gral., independientemente de las condiciones iniciales).
  Otro razonamiento:
  $$\begin{aligned} 3^n &= t_n - 2t_{n-1} \\ &= (c_1 2^n + c_2 3^n) - 2(c_1 2^{n-1} + c_2 3^{n-1}) \\ &= c_2 3^{n-1} \end{aligned}$$
  $\Rightarrow c_2 = 3$, indep. de t_0, i.e. queda descartado que $c_2 = 0$.
  $\Rightarrow t_n = \theta(3^n)$

- **Ejemplo 2:**

$$
\begin{array}{lccccl}
 & t_n & -2t_{n-1} & & & = (\overbrace{n+5}^{d=1})3^n \\
\star(-6), n-1: & & -6t_{n-1} & +12t_{n-2} & & = -6(n+4)3^{n-1} \\
\star 9, n-2: & & & 9t_{n-2} & -18t_{n-3} & = 9(n+3)3^{n-2} \\
\hline
 & t_n & -8t_{n-1} & +21t_{n-2} & -18t_{n-3} & = 0
\end{array}
$$

$p(x) : x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x-2)(x-3)^2$

$\Rightarrow t_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n$: Solución general.

La recurrencia original impone las siguientes restricciones:

$t_1 = 2t_0 + 18$

$t_2 = 2t_1 + 63 = 4t_0 + 99$

$$
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll}
n=0: & c_1 & +c_2 & & = t_0 \\
n=1: & 2c_1 & +3c_2 & +3c_3 & = 2t_0 + 18 \\
n=2: & 4c_1 & +9c_2 & +18c_3 & = 4t_0 + 99
\end{array} \right.
$$

Recurrencias no homogéneas (4)

- **Ejemplo 2: (Cont.)**

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = t_0 - 9 \\ c_2 = 9 \\ c_3 = 3 \end{cases}$$

Solución general:

$$t_n = (t_0 - 9)2^n + (n+3)3^{n+1}$$

$t_n = \theta(n3^n)$ independientemente de t_0.

Alternativamente, sustituyendo la solución general en la recurrencia original, se llega a idéntico resultado (ejercicio).

- **Generalización:**

$$
\begin{array}{llll}
Ej1: & t_n - 2t_{n-1} = 3^n & \rightarrow & p(x) = (x-2)(x-3)^{0+1} \\
Ej2: & \underbrace{t_n - 2t_{n-1}}_{(x-2)} = (n+5)3^n & \rightarrow & p(x) = (x-2)(x-3)^{1+1}
\end{array}
$$

$\rightarrow$ para resolver (4), utilizar:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x-b)^{d+1} \tag{5}$$

Se procede igual que en el caso homogéneo, salvo que algunas ecuaciones para determinar las constantes se obtienen a partir de la recurrencia.

- **Ejemplo 3: Las torres de Hanoi**

  procedimiento Hanoi (m, i, j)
  si $m > 0$ **entonces** Hanoi $(m-1, i, 6-i-j)$;
  mover_anillo (i, j); $\{$*instr. elemental*$\}$
  Hanoi $(m-1, 6-i-j, j)$

  Problema de los monjes: ¿Hanoi (64,1,2)?

  $\Rightarrow t(m)$: núm. de ejec. de la instr. elemental en Hanoi$(m, -, -)$.

  $$t(m) = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ 2t(m-1)+1 & \textit{sino} \end{cases}$$

  $\rightarrow t(m) - 2t(m-1) = 1$ (4) con $b = 1$ y $p(n) = 1$, $d = 0$

  (5) $\Rightarrow p(x) = (x-2)(x-1)$

  Todas las soluciones son de la forma $t(m) = c_1 1^m + c_2 2^m$

  $$\begin{cases} t(0) = 0 \\ t(1) = 2t(0)+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 & m = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 1 & m = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

  $$\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow t(m) = 2^m - 1$$

- **Ejemplo 3: Las torres de Hanoi** (Cont.)

  ¿Determinar θ sin calcular c_1 y c_2?

  $$\begin{array}{l} t(m) = c_1 + c_2 2^m \\ t(m) \geq m \end{array} \Rightarrow c_2 > 0 \Rightarrow t(m) = \theta(2^m)$$

- **Ejemplo 4:**

  $t_n = 2t_{n-1} + n \to t_n - 2t_{n-1} = n \qquad (4)\text{: } b = 1, p(n) = n, d = 1$

  $(5) \Rightarrow p(x) = (x-2)(x-1)^2$

  $\Rightarrow$ Solución de la forma $t_n = c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n$

  $(t_0 \geq 0 \Rightarrow t_n \geq 0 \;\; \forall n) \Rightarrow t_n = O(2^n)$

  $¿t_n = \theta(2^n)? \Leftrightarrow c_1 > 0?$

  $$\left.\begin{aligned} n &= t_n - 2t_{n-1} \\ &= (c_1 2^n + c_2 + c_3 n) - 2(c_1 2^{n-1} + c_2 + c_3(n-1)) \\ &= \underbrace{2c_3 - c_2}_{=0} \underbrace{- c_3}_{=1} n \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

  $$\begin{cases} c_3 = -1 \\ c_2 = -2 \\ c_1 = ? \end{cases}$$

  $$\to \begin{array}{l} t_n = c_1 2^n - n - 2 \\ (t_0 \geq 0 \Rightarrow t_n \geq 0 \;\; \forall n) \end{array} \Rightarrow c_1 > 0 \Rightarrow t_n = \theta(2^n)$$

  (c_1 también se puede calcular, pero no es necesario)

  Problema: no siempre se puede usar este método...

Recurrencias no homogéneas (9)

- **Ejemplo 5:** $t_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 4t_{n-1} - 2^n & sino \end{cases}$

  $t_n - 4t_{n-1} = -2^n$ (4): $b = 2, p(n) = -1, d = 0$

  (5) $\Rightarrow p(x) = (x-4)(x-2)^{0+1}$

  $\Rightarrow$ Solución de la forma $t_n = c_1 4^n + c_2 2^n$

  $\rightarrow t_n = \theta(4^n)$?

  $$\begin{aligned} -2^n &= t_n - 4t_{n-1} \\ &= (c_1 4^n + c_2 2^n) - 4(c_1 4^{n-1} + c_2 2^{n-1}) \\ &= -\underbrace{c_2}_{=1} 2^n \end{aligned}$$

  Cálculo de c_1?

  i sistema de ecuaciones

  ii $\begin{cases} t_n = c_1 4^n + 2^n \\ t_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = c_1 + 1 \Rightarrow c_1 = 0 \quad !$

  $\Rightarrow t_n = 2^n \neq \theta(4^n)$

  Pero con $t_0 > 1, t_n = \theta(4^n)$

  Conclusión: para algunas recurrencias las cond. ini. son determinantes, mientras que en otras sólo importa que $t_0 \geq 0$.

- **Generalización:**
  Las recurrencias de la forma:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \ldots \tag{6}$$

  donde las b_i son constantes y los $p_i(n)$ son polinomios de grado d_i, se resuelven con:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b_1)^{d_1+1}(x - b_2)^{d_2+1} \ldots \tag{7}$$

  (Un factor corresponde al lado izquierdo, un factor por cada término al lado derecho).

- **Ejemplo 6:** $t_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 2t_{n-1} + n + 2^n & sino \end{cases}$

  $t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n \qquad (6): \begin{cases} b_1 = 1, p_1(n) = n, d_1 = 1 \\ b_2 = 2, p_2(n) = 1, d_2 = 0 \end{cases}$

  $(7) \Rightarrow (x-2)(x-1)^2(x-2) = (x-1)^2(x-2)^2$

  $\Rightarrow t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n$

  $t_n = O(n2^n)$

  $¿t_n = \theta(n2^n)? \Leftrightarrow ¿c_4 > 0?$

  i (en recurrencia original)
  $\rightarrow n + 2^n = (2c_2 - c_1) - c_2 n + \underbrace{c_4}_{=1} 2^n \Rightarrow t_n = \theta(n2^n)$

  ii (sistema de ecuaciones)
  $\rightarrow t_n = n2^n + 2^{n+1} - n - 2 \Rightarrow t_n = \theta(n2^n)$

- **Ejemplo 1:**

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3T(n/2) + n & n = 2^i, n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Sustituir } n \text{ por } 2^i & \rightarrow & \text{nueva recurrencia } t_i = T(2^i) \\ n/2 & \rightarrow & 2^i/2 = 2^{i-1} \\ T(n) \text{ función de } T(n/2) & \rightarrow & t_i \text{ función de } t_{i-1}\text{: lo que sabemos resolver} \end{array}$$

$$\Rightarrow t_i = T(2^i) = 3T(2^{i-1}) + 2^i = 3t_{i-1} + 2^i$$

$$\Rightarrow t_i - 3t_{i-1} = 2^i \; (4) \Rightarrow (5) \; (x-3)(x-2)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_i = c_1 3^i + c_2 2^i \\ T(2^i) = t_i \Leftrightarrow T(n) = t_{log_2 n}, n = 2^i \end{array}\right\} \Rightarrow T(n) = c_1 3^{log_2 n} + c_2 2^{log_2 n}$$

$$\Rightarrow T(n) = c_1 n^{log_2 3} + c_2 n \Rightarrow T(n) = O(n^{log 3})$$

$$T(n) = \theta(n^{log 3}) \Leftrightarrow c_1 > 0?$$

$$\begin{array}{rl} n & = T(n) - 3T(n/2) \\ & = (c_1 n^{log_2 3} + c_2 n) - 3(c_1 (n/2)^{log_2 3} + c_2(n/2)) \quad \leftarrow (1/2)^{log_2 3} = 1/ \\ & = -c_2(n/2) \end{array}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} c_2 = -2 \\ T(n) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 > 0 \Rightarrow T(n) = \theta(n^{log 3}) \text{ si n potencia de 2}$$

- **Ejemplo 2: Recurrencias Divide y Vencerás**

$$T(n) = \ell T(n/b) + cn^k, n > n_0 \qquad (8)$$

Con $\ell \geq 1, b \geq 2, k \geq 0, n_0 \geq 1 \in \aleph$ y $c > 0 \in \Re$,
cuando n/n_0 es potencia exacta de b ($n \in \{bn_0, b^2 n_0, b^3 n_0 \dots\}$).
Cambio de variable: $n = b^i n_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t_i = T(b^i n_0) &= \ell T(b^{i-1} n_0) + c(b^i n_0)^k \\ &= \ell t_{i-1} + cn_0^k b^{ik} \end{aligned}$$

$\Rightarrow t_i - \ell t_{i-1} = cn_0^k (b^k)^i \quad$ (4): $p(i) = cn_0^k, d = 0, b = b^k$

(5) $\Rightarrow (x - \ell)(x - b^k)$

$\Rightarrow t_i = c_1 \ell^i + c_2 (b^k)^i \qquad (\star)$

$i = log_b(n/n_0)$ cuando n/n_0 es una potencia exacta de b

$\Rightarrow d^i = (n/n_0)^{log_b d}$ para $d > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(n) &= (c_1/n_0^{log_b \ell}) n^{log_b \ell} + (c_2/n_0^k) n^k \\ &= c_3 n^{log_b \ell} + c_4 n^k \qquad (\star\star) \end{aligned}$$

(en rec. original) $\begin{aligned} \rightarrow cn^k &= T(n) - \ell T(n/b) = \dots \\ &= (1 - \ell/b^k) c_4 n^k \Rightarrow c_4 = c/(1 - \ell/b^k) \end{aligned}$

- ¿Notación asintótica para $T(n)$?
  $\leftrightarrow$ ¿término dominante en $(\star\star)$?

  1. $\ell < b^k \Rightarrow c_4 > 0 \wedge k > log_b \ell \Rightarrow c_4 n^k$ domina
     $\Rightarrow T(n) = \theta(n^k)$
  2. $\ell > b^k \Rightarrow c_4 < 0 \wedge log_b \ell > k \Rightarrow c_3 > 0, c_3 n^{log_b \ell}$ domina
     $\Rightarrow T(n) = \theta(n^{log_b \ell})$
  3. $\ell = b^k \Rightarrow c_4 = c/0$!
     Pb: $(\star)$ no proporciona la solución general de la recurrencia
     $$\begin{aligned} (x-\ell)(x-b^k) \quad & \rightarrow (x-b^k)^2 \\ & \Rightarrow t_i = c_5 (b^k)^i + c_6 i (b^k)^i \\ & \Leftrightarrow T(n) = c_7 n^k + c_8 n^k log_b(n/n_0) \end{aligned}$$
     (en recurrencia original) $\rightarrow c_8 = c > 0 \Rightarrow c n^k log_b(n/n_0)$ domina
     $\Rightarrow T(n) = \theta(n^k logn)$

- **Teorema Divide y Vencerás**:
  Si una recurrencia es de la forma (8), se aplica

$$T(n) = \begin{cases} \theta(n^k) & si \quad \ell < b^k \\ \theta(n^k logn) & si \quad \ell = b^k \\ \theta(n^{log_b \ell}) & si \quad \ell > b^k \end{cases} \tag{9}$$

  En análisis de algoritmos, se suelen manejar desigualdades:
  $T(n) \leq \ell T(n/b) + cn^k, n > n_0$ con n/n_0 potencia exacta de b

$$\Rightarrow T(n) = \begin{cases} O(n^k) & si \quad \ell < b^k \\ O(n^k logn) & si \quad \ell = b^k \\ O(n^{log_b \ell}) & si \quad \ell > b^k \end{cases}$$

- **Otras técnicas:**
  - transformaciones de intervalo
  - recurrencias asintóticas

Bibliografía

- G. Brassard y P. Bratley,
  Fundamentals of Algorithmics, Prentice Hall 1996.
- G. Brassard y P. Bratley,
  Fundamentos de Algoritmia, Prentice Hall 1997.