

Estructuras de datos: Tablas de dispersión

Algoritmos

Dep. de Computación - Fac. de Informática
Universidad de A Coruña

Santiago Jorge
sjorge@udc.es



Referencias bibliográficas

- M. A. Weiss. Dispersión. En *Estructuras de datos y algoritmos*, capítulo 5, páginas 155–180. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- A. V. Aho, J. E. Hopcroft y J. D. Ullman. Operaciones básicas con conjuntos. En *Estructuras de datos y algoritmos*, capítulo 4, páginas 107–157. Addison-Wesley Iberoamericana, 1988.

Tablas de dispersión

- Objetivo: realizar inserciones, eliminaciones y búsquedas en tiempo promedio constante.
- Estructura de datos ideal: un vector con tamaño fijo N .
 - Una **función de dispersión** establece la correspondencia de cada clave con algún número en el intervalo $[0 \dots N - 1]$.
 - Esta función tiene que ser fácil de calcular, y asegurar que dos claves distintas se correspondan con celdas diferentes.
 - Como esto último es imposible, buscamos una función que distribuya homogéneamente las claves entre las celdas.
 - Resta escoger una función y decidir el tamaño de la tabla y qué hacer cuando dos claves caen en la misma celda.
 - Si al insertar un elemento, éste se dispersa en el mismo valor que un elemento ya insertado tenemos una **colisión** y hay que resolverla.
- Las tablas de dispersión se usan para representar diccionarios en los que se busca una clave y se devuelve su definición.

Índice

- 1 Funciones de dispersión
- 2 Dispersión abierta
- 3 Dispersión cerrada
 - Exploración lineal
 - Exploración cuadrática
 - Exploración doble

Funciones de dispersión (i)

- Toda función de dispersión debe:
 - calcularse de forma sencilla, y
 - distribuir uniformemente las claves.
- Por ejemplo, si las claves son números enteros, *clave mod N* es una función buena, salvo que haya propiedades indeseables:
 - Si N fuese 100 y todas las claves terminasen en cero, esta función de dispersión sería una mala opción.
 - Es buena idea asegurarse de que el tamaño de la tabla sea un **número primo**.
 - Si las claves fuesen enteros aleatorios, esta función sería muy simple y distribuiría las claves con uniformidad.
- Por lo regular, las claves son cadenas de caracteres.
 - La longitud y las propiedades de las claves influirán en la elección de una buena función de dispersión.

Funciones de dispersión (ii)

- Una opción es sumar los valores *ASCII* de los caracteres.

```
función Dispersión1 (Clave, TamañoClave): Índice
    valor := ascii(Clave[1]);
    para i := 2 hasta TamañoClave hacer
        valor := valor + ascii(Clave[i])
    fin para
    devolver valor mod N
fin función
```

- Es una función fácil de implementar, y se ejecuta con rapidez.
- Pero si el tamaño de la tabla es grande, esta función no distribuye bien las claves.
 - Por ejemplo, si $N = 10007$ y las claves tienen 8 caracteres, la función sólo toma valores entre 0 y $1016 = 127 \cdot 8$.

Funciones de dispersión (iii)

```
función Dispersión2 (Clave, TamañoClave): Índice  
    devolver (ascii(Clave[1]) + 27*ascii(Clave[2])  
              + 729*ascii(Clave[3])) mod N  
fin función
```

- En esta función de dispersión se supone que la clave tiene al menos tres caracteres.
- Si los primeros caracteres son aleatorios y el tamaño de la tabla es 10007, esperaríamos una distribución bastante homogénea.
- Desafortunadamente, los lenguajes naturales no son aleatorios.
 - Aunque hay $27^3 = 17576$ combinaciones posibles, en un diccionario el número de combinaciones diferentes que nos encontramos es menor que 3000.
 - Sólo un porcentaje bajo de la tabla puede ser aprovechada por la dispersión.

Funciones de dispersión (iv)

- En la función de dispersión que sigue intervienen todos los caracteres en la clave y se puede esperar una buena distribución.

```
función Dispersión3 (Clave, TamañoClave): Índice  
    valor := ascii(Clave[1]);  
    para i := 2 hasta TamañoClave hacer  
        valor := (32*valor + ascii(Clave[i])) mod N  
    fin para  
    devolver valor  
fin función
```

- El código calcula una función polinómica con base en la regla:

$$\sum_{i=0}^{LongitudClave-1} 32^i \cdot \text{ascii}(\text{clave}[LongitudClave - i])$$

- Para "abcd" p. ej.
 $(32^3 \cdot \text{ascii}(a) + 32^2 \cdot \text{ascii}(b) + 32 \cdot \text{ascii}(c) + \text{ascii}(d)) \bmod N$

Funciones de dispersión (v)

- La multiplicación por 32 es el desplazamiento de cinco bits.
- Con lenguajes que permitan el desbordamiento se aplicaría *mod* una sola vez justo antes de volver.
- Si las claves son muy grandes, no se usan todos los caracteres.

Índice

- 1 Funciones de dispersión
- 2 Dispersión abierta**
- 3 Dispersión cerrada
 - Exploración lineal
 - Exploración cuadrática
 - Exploración doble

Resolución de colisiones: dispersión abierta (i)

- La solución consiste en tener una lista de todos los elementos que se dispersan en un mismo valor.
- Al *buscar*, usamos la función de dispersión para determinar qué lista recorrer.
- Al *insertar*, recorreremos la lista adecuada.
 - Si el elemento resulta ser nuevo, se inserta al frente o al final de la lista.
- Además de listas, se podría usar cualquier otra estructura para resolver las colisiones, como un árbol binario de búsqueda.

Resolución de colisiones: dispersión abierta (ii)

- El **factor de carga**, λ , de una tabla de dispersión es la relación entre el número de elementos en la tabla y su tamaño.

$$\lambda = \frac{\text{Número de claves en la tabla}}{N}$$

- La longitud media de una lista es λ .
 - En dispersión abierta, la regla es igualar el tamaño de la tabla al número de elementos esperados, ($\lambda = 1$).
- El esfuerzo al realizar una búsqueda es:
 - el tiempo constante necesario para evaluar la función de dispersión, $O(1)$, más
 - el tiempo necesario para recorrer la lista, $O(\lambda)$.
 - En una búsqueda infructuosa el promedio de nodos recorridos es $O(\lambda)$
 - En una búsqueda con éxito, $O(\lambda/2)$

Ejemplo de dispersión abierta (i)

- Valores de la función de dispersión:

$\text{hash}(\text{Ana}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Luis}, 11) = 6$

$\text{hash}(\text{José}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Olga}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Rosa}, 11) = 6$

$\text{hash}(\text{Iván}, 11) = 6$

- Tabla después de insertar *Ana*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Ana]	[]	[]	[]

Ejemplo de dispersión abierta (i)

- Valores de la función de dispersión:

$$\text{hash}(\text{Ana}, 11) = 7$$
$$\text{hash}(\text{Luis}, 11) = 6$$
$$\text{hash}(\text{José}, 11) = 7$$
$$\text{hash}(\text{Olga}, 11) = 7$$
$$\text{hash}(\text{Rosa}, 11) = 6$$
$$\text{hash}(\text{Iván}, 11) = 6$$

- Tabla después de insertar *Ana*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Ana]	[]	[]	[]
----	----	----	----	----	----	----	-------	----	----	----

- Tabla después de insertar *Luis*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Luis]	[Ana]	[]	[]	[]
----	----	----	----	----	----	--------	-------	----	----	----

Ejemplo de dispersión abierta (i)

- Valores de la función de dispersión:

hash(Ana,11) =7

$$\text{hash}(\text{Luis}, 11) = 6$$

hash(José, 11) = 7

$$\text{hash}(\text{Olga}, 11) = 7$$
$$\text{hash}(\text{Rosa}, 11) = 6$$
$$\text{hash}(\text{Iván}, 11) = 6$$

- Tabla después de insertar *Ana*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Ana]	[]	[]	[]
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-------	-----	-----	-----

- Tabla después de insertar *Luis*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Luis]	[Ana]	[]	[]	[]
-----	-----	-----	-----	-----	-----	--------	-------	-----	-----	-----

- Tabla después de insertar *José*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Luis]	[Ana; José]	[]	[]	[]
-----	-----	-----	-----	-----	-----	--------	-------------	-----	-----	-----

Ejemplo de dispersión abierta (ii)

- Tabla después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7		8	9	10
[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Luis]	[Ana; José; Olga]	[]	[]	[]	[]

Ejemplo de dispersión abierta (ii)

- Tabla después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7		8	9	10
[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Luis]	[Ana; José; Olga]		[]	[]	[]

- Tabla después de insertar *Rosa*:

0	1	2	3	4	5	6	7		8	9	10
[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Luis; Rosa]	[Ana; José; Olga]		[]	[]	[]

Ejemplo de dispersión abierta (ii)

- Tabla después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Luis]	[Ana; José; Olga]	[]	[]	[]

- Tabla después de insertar *Rosa*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Luis; Rosa]	[Ana; José; Olga]	[]	[]	[]

- Tabla después de insertar *Iván*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
[]	[]	[]	[]	[]	[]	[Luis; Rosa; Iván]	[Ana; José; Olga]	[]	[]	[]

Tablas de dispersión abiertas: pseudocódigo (i)

tipo

Índice = 0.. $N-1$

Posición = ^Nodo

Lista = Posición

Nodo = **registro**

Elemento : TipoElemento

Siguiente : Posición

fin registro

TablaDispersión = **vector** [Índice] **de** Lista

procedimiento InicializarTabla (T)

para $i := 0$ **hasta** $N-1$ **hacer**

 CrearLista(T[i])

fin para

fin procedimiento

Tablas de dispersión abiertas: pseudocódigo (i)

```
función Buscar (Elem, Tabla): Posición  
    i := Dispersión(Elem);  
    devolver BuscarLista(Elem, Tabla[i])  
fin función
```

```
procedimiento Insertar (Elem, Tabla)  
    pos := Buscar(Elem, Tabla); {No inserta repetidos}  
    si pos = nil entonces  
        i := Dispersión(Elem);  
        InsertarLista(Elem, Tabla[i])  
fin procedimiento
```

Índice

- 1 Funciones de dispersión
- 2 Dispersión abierta
- 3 Dispersión cerrada**
 - Exploración lineal
 - Exploración cuadrática
 - Exploración doble

Dispersión cerrada

- En un sistema de dispersión cerrada, si ocurre una colisión, se buscan celdas alternativas hasta encontrar una vacía.
 - Se busca en sucesión en las celdas: $d_0(x), d_1(x), d_2(x) \dots$ donde:

$$d_i(x) = (\text{dispersion}(x) + f(i)) \bmod N, \text{ con } f(0) = 0$$

- La función f es la **estrategia de resolución de las colisiones**.
 - Determinará si la dispersión cerrada es lineal, cuadrática o doble.
- Como todos los datos se guardan en la tabla, ésta tiene que ser más grande para la dispersión cerrada que para la abierta.
- En general, para la dispersión cerrada el factor de carga λ debe estar por debajo de 0,5

Pseudocódigo (i)

tipo

ClaseDeEntrada = (legítima, vacía, eliminada)

Índice = 0.. $N-1$

Posición = Índice

Entrada = **registro**

Elemento : TipoElemento

Información : ClaseDeEntrada

fin registro

TablaDispersión = **vector** [Índice] **de** Entrada

procedimiento InicializarTabla (D)

para $i := 0$ **hasta** $N-1$ **hacer**

D[i].Información := vacía

fin para

fin procedimiento

Pseudocódigo (ii)

```
función Buscar (Elem, D): Posición
    i := 0;
    x = Dispersión(Elem);
    PosActual = x;
    mientras D[PosActual].Información <> vacía y
        D[PosActual].Elemento <> Elem hacer
        i := i + 1;
        PosActual := (x + FunResoluciónColisión(x, i)) mod N
    fin mientras;
    devolver PosActual
fin función

/*La búsqueda finaliza al caer en una celda vacía
   o al encontrar el elemento (legítimo o borrado)*/
```

Pseudocódigo (iii)

```
procedimiento Insertar (Elem, D)
    pos = Buscar(Elem, D);
    si D[pos].Información <> legítima
    entonces          {Bueno para insertar}
        D[pos].Elemento := Elem;
        D[pos].Información := legítima
fin procedimiento
```

```
procedimiento Eliminar (Elem, D)
    pos = Buscar(Elem, D);
    si D[pos].Información = legítima
    entonces
        D[pos].Información := eliminada
fin procedimiento
```

Dispersión cerrada con exploración lineal

- Aquí la **estrategia de resolución de las colisiones** es una función lineal de i , por lo general $f(i) = i$.
 - Esto equivale a buscar secuencialmente en el vector (con circularidad) una posición vacía.
 - Si la tabla es suficientemente grande, siempre se encontrará una celda vacía.
 - Pero ello puede tomar demasiado tiempo.
- Suponiendo independencia entre intentos, el número medio de celdas examinadas en una inserción es $\frac{1}{1-\lambda}$
 - En una tabla con factor de carga λ , la probabilidad de que una celda esté vacía es $1 - \lambda$.
 - Por tanto, el número medio de intentos independientes realizados hasta encontrar una celda vacía es $\frac{1}{1-\lambda}$.
 - P. ej., con $\lambda = 0,5$, $\frac{1}{1-\lambda} = 2$

Agrupamiento primario

- La supuesta independencia entre intentos, no se cumple.
- Aunque la tabla esté relativamente vacía, se pueden formar bloques de celdas ocupadas (**agrupamiento primario**).
 - Cualquier clave dispersada en el agrupamiento necesitará varios intentos para resolver la colisión, y después se agregará al agrupamiento.
- Teniendo esto en cuenta, el número medio de celdas examinadas en una inserción con exploración lineal es cercano a $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{(1-\lambda)^2})$

λ	Nº medio de celdas examinadas
0,5	2,5
0,75	8,5
0,9	50,5

- El coste de una búsqueda:
 - sin éxito: es el mismo que el de una inserción;
 - con éxito: es la media de los costes de las inserciones en tablas con factores de carga más pequeños, $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1-\lambda})$.

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración lineal(i)

- Valores de la función de dispersión:

$\text{hash}(\text{Ana}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Luis}, 11) = 6$

$\text{hash}(\text{José}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Olga}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Rosa}, 11) = 6$

$\text{hash}(\text{Iván}, 11) = 6$

- Tabla de dispersión después de insertar *Ana*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							Ana			

- Valores de la función de dispersión:

$$\text{hash}(\text{José}, 11) = 7$$
$$\text{hash}(\text{Iván}, 11) = 6$$

- Tabla de dispersión después de insertar *Ana*:

- Tabla de dispersión después de insertar *Luis*:

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración lineal(i)

- Valores de la función de dispersión:

hash(Ana,11) =7

hash(Luis,11)=6

hash(José,11)=7

hash(Olga,11)=7

hash(Rosa,11)=6

hash(Iván,11)=6

- Tabla de dispersión después de insertar *Ana*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							Ana			

- Tabla de dispersión después de insertar *Luis*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana			

- Tabla de dispersión después de insertar *José*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana	José		

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración lineal (ii)

Valores de la función de dispersión:

hash(Ana,11) =7
hash(Olga,11)=7

```
hash(Luis,11)=6
hash(Rosa,11)=6
```

hash(José,11)=7
hash(Iván,11)=6

- Tabla de dispersión después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana	José	Olga	

Se está formando un agrupamiento primario

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración lineal (ii)

Valores de la función de dispersión:

```
hash(Ana,11) =7
hash(Olqa,11)=7
```

```
hash(Luis,11)=6
hash(Rosa,11)=6
```

hash(José,11)=7
hash(Iván,11)=6

- Tabla de dispersión después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana	José	Olga	

Se está formando un agrupamiento primario

- Tabla de dispersión después de insertar *Rosa*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana	José	Olga	Rosa

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración lineal (ii)

Valores de la función de dispersión: $\text{hash}(\text{Ana}, 11) = 7$ $\text{hash}(\text{Luis}, 11) = 6$ $\text{hash}(\text{José}, 11) = 7$
 $\text{hash}(\text{Olga}, 11) = 7$ $\text{hash}(\text{Rosa}, 11) = 6$ $\text{hash}(\text{Iván}, 11) = 6$

- Tabla de dispersión después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana	José	Olga	

Se está formando un agrupamiento primario

- Tabla de dispersión después de insertar *Rosa*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana	José	Olga	Rosa

- Tabla de dispersión después de insertar *Iván*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Iván						Luis	Ana	José	Olga	Rosa

Dispersión cerrada con exploración cuadrática

- La función de resolución de colisiones es cuadrática, por lo general: $f(i) = i^2$.
- Con exploración lineal es malo llenar la tabla, porque se degrada el rendimiento. Para la exploración cuadrática, la situación es más drástica:
 - Con más de la mitad de la tabla ocupada, no hay garantías de encontrar una celda vacía (antes si el tamaño no es primo).
- Se demuestra que con la mitad de la tabla vacía, siendo su tamaño primo, siempre encontraremos una celda vacía al insertar.

Exploración cuadrática y agrupamientos

- La exploración cuadrática elimina el problema del agrupamiento primario que padece la exploración lineal.
 - Pero los elementos dispersados a la misma posición probarán en las mismas celdas alternas (**agrupamiento secundario**).
 - Se trata de un defecto teórico.
 - Los resultados prácticos indican que se producen, en general, menos de medio intento adicional por búsqueda.

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración cuadrática (i)

- Valores de la función de dispersión:

$\text{hash}(\text{Ana}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Luis}, 11) = 6$

$\text{hash}(\text{José}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Olga}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Rosa}, 11) = 6$

$\text{hash}(\text{Iván}, 11) = 6$

- Tabla de dispersión después de insertar *Ana*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							Ana			

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración cuadrática (i)

- Valores de la función de dispersión:

$\text{hash}(\text{Ana}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Luis}, 11) = 6$

$\text{hash}(\text{José}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Olga}, 11) = 7$

$\text{hash}(\text{Rosa}, 11) = 6$

$\text{hash}(\text{Iván}, 11) = 6$

- Tabla de dispersión después de insertar *Ana*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							Ana			

- Tabla de dispersión después de insertar *Luis*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana			

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración cuadrática (i)

- Valores de la función de dispersión:

hash(Ana,11) = 7

hash(Luis,11) = 6

hash(José,11) = 7

hash(Olga,11) = 7

hash(Rosa,11) = 6

hash(Iván,11) = 6

- Tabla de dispersión después de insertar *Ana*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							Ana			

- Tabla de dispersión después de insertar *Luis*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana			

- Tabla de dispersión después de insertar *José*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana	José		

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración cuadrática(ii)

Valores de la función de dispersión: $\text{hash}(\text{Ana}, 11) = 7$ $\text{hash}(\text{Luis}, 11) = 6$ $\text{hash}(\text{José}, 11) = 7$
 $\text{hash}(\text{Olga}, 11) = 7$ $\text{hash}(\text{Rosa}, 11) = 6$ $\text{hash}(\text{Iván}, 11) = 6$

- Tabla de dispersión después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Olga						Luis	Ana	José		

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración cuadrática(ii)

Valores de la función de dispersión:	hash(Ana,11)=7	hash(Luis,11)=6	hash(José,11)=7
	hash(Olga,11)=7	hash(Rosa,11)=6	hash(Iván,11)=6

- Tabla de dispersión después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Olga						Luis	Ana	José		

- Tabla de dispersión después de insertar *Rosa*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Olga						Luis	Ana	José		Rosa

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración cuadrática(ii)

Valores de la función de dispersión:	hash(Ana,11)=7	hash(Luis,11)=6	hash(José,11)=7
	hash(Olga,11)=7	hash(Rosa,11)=6	hash(Iván,11)=6

- Tabla de dispersión después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Olga						Luis	Ana	José		

- Tabla de dispersión después de insertar *Rosa*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Olga						Luis	Ana	José		Rosa

- Tabla de dispersión después de insertar *Iván*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Olga				Iván		Luis	Ana	José		Rosa

Dispersión cerrada con exploración doble

- Para la resolución de colisiones aplicamos una segunda función de dispersión, en general: $f(i) = i \cdot h_2(x)$.
 - La función nunca debe evaluarse a cero.
 - Y es importante que todas las celdas puedan ser intentadas.
 - Una función como $h_2(x) = R - (x \bmod R)$, con R un número primo menor que el tamaño de la tabla, funcionará bien.
 - Hay que asegurarse de que el tamaño de la tabla sea primo.

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración doble (i)

- Valores de la función de dispersión:

$$h_1(x, 11)$$

$$h_2(x, 11) = 5 - h_1(x, 11) \% 5$$

Ana	Luis	José	Olga	Rosa	Iván
7	6	7	7	6	6
3	4	3	3	4	4

- Tabla de dispersión después de insertar *Ana*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							Ana			

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración doble (i)

- Valores de la función de dispersión:

$$h_1(x, 11)$$

$$h_2(x, 11) = 5 - h_1(x, 11) \% 5$$

Ana	Luis	José	Olga	Rosa	Iván
7	6	7	7	6	6
3	4	3	3	4	4

- Tabla de dispersión después de insertar *Ana*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							Ana			

- Tabla de dispersión después de insertar *Luis*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana			

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración doble (i)

- Valores de la función de dispersión:

$$h_1(x, 11)$$

$$h_2(x, 11) = 5 - h_1(x, 11) \% 5$$

Ana	Luis	José	Olga	Rosa	Iván
7	6	7	7	6	6
3	4	3	3	4	4

- Tabla de dispersión después de insertar *Ana*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							Ana			

- Tabla de dispersión después de insertar *Luis*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana			

- Tabla de dispersión después de insertar *José*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						Luis	Ana			José

Valores de la función de dispersión:

$$h_1(x, 11)$$

$$h_2(x, 11) = 5 - h_1(x, 11) \% 5$$

Ana	Luis	José	Olga	Rosa	Iván
7	6	7	7	6	6
3	4	3	3	4	4

- Tabla de dispersión después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Olga				Luis	Ana			José

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración doble (ii)

Valores de la función de dispersión:

$$h_1(x, 11)$$

$$h_2(x, 11) = 5 - h_1(x, 11) \% 5$$

Ana	Luis	José	Olga	Rosa	Iván
7	6	7	7	6	6
3	4	3	3	4	4

- Tabla de dispersión después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Olga				Luis	Ana			José

- Tabla de dispersión después de insertar *Rosa*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Olga	Rosa			Luis	Ana			José

Ejemplo de dispersión cerrada con exploración doble (ii)

Valores de la función de dispersión:

$$h_1(x, 11)$$

$$h_2(x, 11) = 5 - h_1(x, 11) \% 5$$

Ana	Luis	José	Olga	Rosa	Iván
7	6	7	7	6	6
3	4	3	3	4	4

- Tabla de dispersión después de insertar *Olga*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Olga				Luis	Ana			José

- Tabla de dispersión después de insertar *Rosa*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		Olga	Rosa			Luis	Ana			José

- Tabla de dispersión después de insertar *Iván*:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Iván		Olga	Rosa			Luis	Ana			José