4018. Черепашка

В левом верхнем углу прямоугольной таблицы размером $n \times m$ находится черепашка. На каждой клетке таблицы разлито некоторое количество кислоты. Черепашка может перемещаться вправо или вниз, при этом маршрут черепашки заканчивается в правом нижнем углу таблицы.

Каждый миллилитр кислоты приносит черепашке некоторое количество урона. Найдите наименьшее возможное значение урона, которое получит черепашка после прогулки по таблице.

Вход. В первой строке записаны два натуральных числа n и m, не превосходящие 1000 – размеры таблицы. Далее идёт n строк, каждая из которых содержит m чисел, разделённых пробелами – описание таблицы с указанием для каждой клетки содержания кислоты на ней (в миллилитрах).

Выход. Вывести минимальную возможную стоимость маршрута черепашки.

Пример входа	Пример выхода
3 4 5 9 4 3 3 1 6 9 8 6 8 12	35

РЕШЕНИЕ

динамическое программирование

Анализ алгоритма

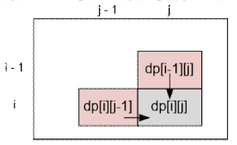
Пусть a[i][j] содержит количество урона, получаемое черепашкой при посещении клетки (i, j). Пусть dp[i][j] содержит величину наименьшего урона, которое может получить черепашка при проходе от клетки (1, 1) к клетке (i, j).

Рассмотрим базовые случаи:

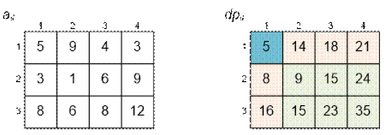
- dp[1][1] = a[1][1];
- dp[i][1] = dp[i – 1][1] + a[i][1], $1 < i \le n$ (первый столбец);
- dp[1][j] = dp[1][j – 1] + a[1][j], $1 < j \le m$ (первая строка);

В клетку (i, j) можно попасть или из клетки (i – 1, j), или из клетки (i, j – 1). Поскольку урон минимизируется то

$$dp[i][j] = \min(dp[i-1][j], dp[i][j-1]) + a[i][j]$$



Пример



Первый столбец:

- dp[2][1] = dp[1][1] + a[2][1] = 5 + 3 = 8,
- dp[3][1] = dp[2][1] + a[3][1] = 8 + 8 = 16.

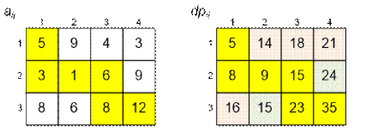
Первая строка:

- dp[1][2] = dp[1][1] + a[1][2] = 5 + 9 = 14,
- dp[1][3] = dp[1][2] + a[1][3] = 14 + 4 = 18.

Вычислим значения некоторых не приграничных ячеек:

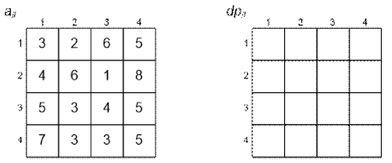
$$dp[2][2] = \min(dp[1][2], dp[2][1]) + a[2][2] = \min(14, 8) + 1 = 8 + 1 = 9$$
$$dp[3][4] = \min(dp[2][4], dp[3][3]) + a[3][4] = \min(24, 23) + 12 = 23 + 12 = 35$$

Искомый путь черепашки имеет вид:



Упражнение

По заданной матрице a[i][j] заполните матрицу dp[i][j].



Реализация алгоритма

Объявим рабочие массивы.

```
#define MAX 1010
int a[MAX][MAX], dp[MAX][MAX];
```

Читаем входные данные.

```
scanf("%d %d", &n, &m);
for (i = 1; i <= n; i++)
for (j = 1; j <= m; j++)
  scanf("%d", &a[i][j]);
```

Инициализация первой строки и первой колонки массива dp.

```
dp[1][1] = a[1][1];
for (i = 2; i <= n; i++)
  dp[i][1] = dp[i - 1][1] + a[i][1];
for (j = 2; j <= m; j++)
  dp[1][j] = dp[1][j - 1] + a[1][j];
```

Вычисляем минимальный урон черепашки для каждой клетки.

```
for (i = 2; i <= n; i++)
for (j = 2; j <= m; j++)
  dp[i][j] = min(dp[i - 1][j], dp[i][j - 1]) + a[i][j];
```

Выводим ответ.

```
printf("%d\n", dp[n][m]);
```

Java реализация

```
import java.util.*;

class Main
{
  static int a[][] = new int[1001][1001];
  static int dp[][] = new int[1001][1001];

  public static void main(String[] args)
  {
    Scanner con = new Scanner(System.in);
    int n = con.nextInt();
    int m = con.nextInt();

    for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j <= m; j++)
      a[i][j] = con.nextInt();

    dp[1][1] = a[1][1];
    for (int i = 2; i <= n; i++)
      dp[i][1] = dp[i - 1][1] + a[i][1];
    for (int j = 2; j <= m; j++)
      dp[1][j] = dp[1][j-1] + a[1][j];

    for (int i = 2; i <= n; i++)
    for (int j = 2; j <= m; j++)
      dp[i][j] = Math.min(dp[i - 1][j], dp[i][j - 1]) + a[i][j];

    System.out.println(dp[n][m]);
    con.close();
  }
}
```