ATREYA CHOUDHURY WEEK 1

webpage for notes

1. Jeder der folgenden Ausdrücke definiert eine Funktion D auf der Menge der 3×3-Matrizen über $\mathbb{R}$. In welchen dieser Fälle ist D eine 3-lineare Funktion?

   (a) $D(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$;
   (b) $D(A) = A_{11}^2 + 3A_{11}A_{22}$;
   (c) $D(A) = A_{11}A_{12}A_{33}$;
   (d) $D(A) = A_{13}A_{22}A_{32} + 5A_{12}A_{22}A_{32}$;
   (e) $D(A) = 0$;
   (f) $D(A) = 1$.

use $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ blank entries are zeroes.

and $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

to show a contradiction to (a), (b), (c) and (f)

show multilinearity criterion for (d) and (e)

2. Beweise die folgende Proposition:

Proposition (Satz 10.2.3 des Skripts). *Es sei $A \in M_{n\times n}(K)$, und es sei B eine Matrix, die wir von A durch die elementare Zeilenumformung X erhalten.*

(a) *wenn* $X = P(r,s)$ *fuer* $1 \leqslant r < s \leqslant n$, *dann gilt* $\det(B) = -\det(A)$;

(b) *wenn* $X = M(r,\lambda)$ *fuer* $1 \leqslant r \leqslant n$ *und* $\lambda \in K^\times$, *dann gilt* $\det(B) = \lambda \det(A)$;

(c) *wenn* $X = S(r,s,\lambda)$ *fuer* $1 \leqslant r, s \leqslant n, r \neq s$ *und* $\lambda \in K^\times$, *dann gilt* $\det(B) = \det(A)$.

use properties of determinant functions (multi linearity and alternating) to show the results

3. Seien x_i und y_i Elemente eines Körpers mit $x_i \neq y_j$ für alle i, j; und sei

$$F_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) := \det\left(\left(\frac{1}{x_i - y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\right).$$

(a) Beweisen Sie für alle $n \geqslant 1$ die Rekursionsformel

$$F_n(x_1, \ldots, y_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)(y_i - y_n)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_n)\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - y_i)} F_{n-1}(x_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Hint. Subtrahieren Sie die letzte Spalte von jeder anderen Spalte. Substrahieren Sie dann ein geeignetes Vielfache der letzten Zeile von jeder anderen Zeile.

(b) Leiten Sie daraus eine Formel für $F_n(x_1, \ldots, y_n)$ her.

we discuss the general idea for solving problems of this kind.

might be best explained by someone who was present for class today.

- perform

$$C_1 \to C_1 - C_n$$
$$C_2 \to C_2 - C_n$$
$$\vdots$$
$$C_{n-1} \to C_{n-1} - C_n$$

see what you can factorise from the columns and rows.

you should have all 1's in C_n at this point.

- now perform

$$R_1 \longrightarrow R_1 - R_n$$
$$R_2 \longrightarrow R_2 - R_n$$
$$\vdots$$
$$R_{n-1} \longrightarrow R_{n-1} - R_n$$

do another round of factorisation.

You should have reached the recursion formula.

(b) follows by use of the recursion formula.

(c) Zeigen Sie, dass mit $c_n := \prod_{i=1}^{n-1} i!$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.$$

c) notice that for the above matrix, if you let it be G, then

$$g_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

what values of x_i and y_j should you choose so that you can use the recursion formula from (a)

4. Sei K ein kommutativer Ring mit 1. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Definiere M_{ij} als die Determinante der $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die sich aus der Streichung der Zeile i und Spalte j von A ergibt. Betrachte dann

$$C := \left((-1)^{i+j}M_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ und } \operatorname{adj}(A) := C^T = \left((-1)^{i+j}M_{ji}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Sei ausserdem det die Determinantenfunktion auf $n \times n$-Matrizen uber K. Zeige:

(a) $(\operatorname{adj} A)A = A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I$;

(b) $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{n-1}$;

(c) $\operatorname{adj}\left(A^T\right) = (\operatorname{adj} A)^T$.

(A^T ist die Transponierte von A.)

a) proved in the lecture

b) use (a) to show this

c) write out an arbitrary element of the left hand side and show equality to the corresponding element on the right hand side

5. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Zeige

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Bemerkung: Produkte dieser Art werden *Vandermonde Determinanten* genannt und die obige Matrix wird *Vandermonde Matrix* genannt.

Hint. Benutze die Formel

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1})$$

und die vorhangehenden Übungen.

use a similar strategy as 3.
establish a recursion

- perform

$$R_2 \longrightarrow R_2 - R_1$$
$$R_3 \longrightarrow R_3 - R_1$$
$$\vdots$$
$$R_n \longrightarrow R_n - R_1$$

factor out $(x_i - x_1)$ from rows $i=2$ to $i=n$. Make use of the provided formula for this.

$$
\begin{bmatrix}
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\
1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\
\vdots & & & & \\
1 & x_n & \cdots & & x_n^{n-2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\
0 & 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^{n-2} \\
0 & 0 & 1 & x_1 \cdots & x_1^{n-2} \\
\vdots & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
$$

compute this product. Can you make use of this?

Single Choice. Pro Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$?

   - ○ $x = -2$
   - ○ $x = 2$
   - ○ $x = -1$
   - ○ $x = 1$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn

$$\det \begin{pmatrix} x^n & x^{n+2} & x^{2n} \\ 1 & x^n & a \\ x^{n+5} & x^{a+6} & x^{2n+5} \end{pmatrix} = 0, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

   gilt, dann ist a gleich

   - ○ n
   - ○ $n-1$
   - ○ $n+1$
   - ○ Keine der obigen Möglichkeiten

use row operations and effective factorisation for faster computation