1. Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $T : A \to A$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass das characteristische Polynom von T wohl-definiert ist, das heißt, dass es unabhängig von der Wahl der Basis ist.

Let B be the current basis and B' be another basis

$$T_{B'}^{B'} = id_{B'}^{B} \; T_{B}^{B} \; id_{B}^{B'}$$

Need to show:

$$\det(xI - T_{B'}^{B'}) = \det(xI - T_{B}^{B})$$

Use $id_{B'}^{B} \, id_{B}^{'} = I$ and try to factor.

Skipping 2 as it is straight forward
Use definitions from class.

3. Für eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix A, drücke das charakteristische Polynom von A^{-1} mit Hilfe des charakteristischen Polynoms von A aus.

start from $\det(xI - A^{-1})$

Try factoring x and A^{-1} out from above (why can you do this?) so that you get to an expression which contains

$$\det\left(\frac{1}{x} I - A\right)$$

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass für beliebigen Martrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

gilt.

Let $M = AB$ and $N = BA$

Calculate m_{ii} and n_{ii} and show that

$$\sum_i m_{ii} = \sum_i n_{ii}$$

5. Sei A eine nilpotente $n \times n$-Matrix, das heisst eine, für die ein $m \geqslant 1$ existiert mit $A^m = O_{n\times n}$. Zeige, dass der einzige mögliche Eigenwert von A gleich 0 ist. Wann genau ist 0 ein Eigenwert von A?

Let λ be an eigenvalue of A with eigenvector v

$$A^m = O \Rightarrow A^m v = O$$

$$A^m v = A^{m-1}(Av) = A^{m-1} \lambda v = \lambda^n v$$

why ?

make inductive argument

6. Eine komplexe Zahl z wird als n-*ten Wurzel der Einheit* bezeichnet, wenn $z^n - 1 = 0$ ist, und ist eine *primitive* n-ten Wurzel der Einheit, wenn zusätzlich

$$z^m - 1 \neq 0, \text{ für alle } 1 \leqslant m < n$$

gilt. Das n-te *Kreisteilungspolynom*, $\Phi_n(z)$, ist das jenige ganzzahlige Polynom größten Grades mit Leitkoeffizient 1, das $z^n - 1$ teilt, jedoch zu allen $z^d - 1$ mit $1 \leqslant d < n$ teilerfremd ist.

(a) Gib die Zerlegung von $z^n - 1$ in Kreisteilungspolynome.

(b) Zeige, dass die Wurzeln von $\Phi_n(z)$ genau die primitive n-ten Wurzeln der Einheit sind.

(c) Zeige, dass, wenn $n > 1$ ist, die Zahl $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ eine primitive Wurzel der Einheit ist.

(d) Gib die Zerlegung in Linearfaktoren von $\Phi_n(z)$ in $\mathbb{C}[z]$.

We know that the n^{th} roots of unity are those of the form $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$.

The primitive roots of unity are then these $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ which satisfy a certain condition.

What condition?

Hint: $e^{2\pi i \frac{2}{5}}$ is a primitive 5^{th} root of unity but $e^{2\pi i \frac{6}{15}} = e^{2\pi i \frac{2}{5}}$ is not a primitive 15^{th} root of unity.

at this point, try to see how the cyclotomic polynomial is a product of the primitive roots of unity. Convince yourself that is indeed true.

$x^n - 1$ can be written as the product of certain cyclotomic polynomials. which ones?

Hint: think about the divisors of n. try to group the roots together in some way.

7. Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

(a) Falls $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ ist und $G(v) \neq 0$, dann ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

(b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ die gleichen Eigenwerte.

(c) Gib ein Gegenbeispiel zu (b) an, falls V nicht endlichdimensional ist.

a We know $F \circ G(v) = \lambda v$

what happens when we do

$G \circ (F \circ G(v)) = G \circ (\lambda v)$

b use (a)

check carefully for $G(v) = 0$:)

c Hint: $(x_1, x_2, \dots) \longrightarrow (0, x_1, x_2, \dots)$

$(x_1, x_2, \dots) \longrightarrow (x_2, x_3, x_4, \dots)$