NOIP 提高组模拟赛（六）

李佳衡

实验舱科学辅导中心

2020 年 8 月 10 日

A - calc

给出 $f(i)$ $(1 \le i \le n)$，设

$$g(i) = \left(\sum_{i_k | i_{k-1} | \cdots | i_1 | i} f(i_k) \right) \bmod (10^9 + 7)$$

求 $g(i)$ $(1 \le i \le n)$。
$n \le 5 \times 10^5$，$k \le 10^{1000000}$。

解

由题意有 $g = f * h$，其中 $*$ 表示狄利克雷卷积，$h = \underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{k\text{ 个}}$。

解

由题意有 $g = f * h$，其中 $*$ 表示狄利克雷卷积，
$h = \underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{k\text{ 个}}$。

显然 h 是个积性函数，我们只需求出 $h(p^c)$，即可用筛法求出 h。

解

由题意有 $g = f * h$，其中 $*$ 表示狄利克雷卷积，$h = \underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{k\text{ 个}}$。

显然 h 是个积性函数，我们只需求出 $h(p^c)$，即可用筛法求出 h。

$h(p^c)$ 相当于，取 k 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_k$，使得 $x_i \in \mathbb{N}$ 且 $\sum x_i = c$。

解

由题意有 $g = f * h$，其中 $*$ 表示狄利克雷卷积，$h = \underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{k\text{ 个}}$。

显然 h 是个积性函数，我们只需求出 $h(p^c)$，即可用筛法求出 h。

$h(p^c)$ 相当于，取 k 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_k$，使得 $x_i \in \mathbb{N}$ 且 $\sum x_i = c$。

由插板法

$$h(p^c) = \binom{k+c-1}{k-1} = \frac{k!(k+1)!\ldots(k+c-1)!}{c!}$$

解

由题意有 $g = f * h$，其中 $*$ 表示狄利克雷卷积，
$h = \underbrace{1 * 1 * \cdots * 1}_{k\text{ 个}}$。

显然 h 是个积性函数，我们只需求出 $h(p^c)$，即可用筛法求出 h。

$h(p^c)$ 相当于，取 k 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_k$，使得 $x_i \in \mathbb{N}$ 且 $\sum x_i = c$。

由插板法

$$h(p^c) = \binom{k+c-1}{k-1} = \frac{k!(k+1)!\ldots(k+c-1)!}{c!}$$

k 可以对 10^9+7 取模读入，积性函数可以用筛法求出，然后暴力求出狄利克雷卷积即可，时间复杂度 $O(n \log n)$。

B - 求和

给定 n、t，求

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{t}(i+j)$$

不超过 10000 组数据，$n \le 10^{10}$，$t \le 1000$。

B - 求和

给定 n、t，求

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{t}(i+j)$$

不超过 10000 组数据，$n \le 10^{10}$，$t \le 1000$。

解

我们要求：

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{t}(i+j)$$

B - 求和

给定 n、t，求

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{t}(i+j)$$

不超过 10000 组数据，$n \le 10^{10}$，$t \le 1000$。

解

我们要求：

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{t}(i+j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+t)!}{i!}$$

B - 求和

给定 n、t，求

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{t}(i+j)$$

不超过 10000 组数据，$n \le 10^{10}$，$t \le 1000$。

解

我们要求：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{t}(i+j)\\
=&\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+t)!}{i!}\\
=&t!\sum_{i=1}^{n}\binom{i+t}{t}
\end{aligned}$$

解

其中 $\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$，因此原式可继续变形：

$$
\begin{aligned}
& t!\sum_{i=1}^{n}\binom{i+t}{t} \\
=& t!\left(\binom{n+t+1}{t+1}-1\right)
\end{aligned}
$$

解

其中 $\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$，因此原式可继续变形：

$$
\begin{aligned}
&t!\sum_{i=1}^{n}\binom{i+t}{t}\\
=&t!\left(\binom{n+t+1}{t+1}-1\right)\\
=&\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+t+1)}{t+1}-t!
\end{aligned}
$$

单组数据时间复杂度 $O(t)$。

C - tree

给一棵 n 个点、有边权的树，将其中 k 个点设为黑色，其余点为白色，求同色点对距离和的最大值。

$n \leq 2000$。

C - tree

给一棵 n 个点、有边权的树，将其中 k 个点设为黑色，其余点为白色，求同色点对距离和的最大值。

$n \leq 2000$。

解

设 $f_{i,j}$ 表示 i 子树内有 j 黑色点的最大收益。

C - tree

给一棵 n 个点、有边权的树，将其中 k 个点设为黑色，其余点为白色，求同色点对距离和的最大值。

$n \leq 2000$。

解

设 $f_{i,j}$ 表示 i 子树内有 j 黑色点的最大收益。

设 w 为 i 与父亲的边权，则这种选法会使得 j 个黑点与其余 $n-j$ 个黑点之间的距离都有 w 的贡献；同样地，$\mathrm{size}_i - j$ 个黑点与其余 $n-k-(\mathrm{size}_i - j)$ 个黑点之间也有 w 的贡献。

C - tree

给一棵 n 个点、有边权的树，将其中 k 个点设为黑色，其余点为白色，求同色点对距离和的最大值。

$n \leq 2000$。

解

设 $f_{i,j}$ 表示 i 子树内有 j 黑色点的最大收益。

设 w 为 i 与父亲的边权，则这种选法会使得 j 个黑点与其余 $n-j$ 个黑点之间的距离都有 w 的贡献；同样地，$\mathrm{size}_i - j$ 个黑点与其余 $n-k-(\mathrm{size}_i - j)$ 个黑点之间也有 w 的贡献。

除以上贡献之外，合并子树时背包转移黑点的个数即可。

C - tree

给一棵 n 个点、有边权的树，将其中 k 个点设为黑色，其余点为白色，求同色点对距离和的最大值。

$n \leq 2000$。

解

设 $f_{i,j}$ 表示 i 子树内有 j 黑色点的最大收益。

设 w 为 i 与父亲的边权，则这种选法会使得 j 个黑点与其余 $n-j$ 个黑点之间的距离都有 w 的贡献；同样地，$\text{size}_i - j$ 个黑点与其余 $n-k-(\text{size}_i - j)$ 个黑点之间也有 w 的贡献。

除以上贡献之外，合并子树时背包转移黑点的个数即可。

每两个点只会在其 LCA 处贡献 $O(1)$ 的时间复杂度，总时间复杂度 $O(n^2)$。