

NOIP 提高组模拟赛（七）

李佳衡

实验舱科学辅导中心

2020 年 8 月 11 日

A - B

有一个无穷序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots$, 可以执行如下操作若干次:

$a_i \leftarrow a_i - 1, a_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - 1, a_{i+2} \leftarrow a_{i+2} + 1$ (要求开始时 $a_i, a_{i+1} > 0$)。

求可能得到多少种不同的序列, 对 $10^9 + 7$ 取模。

$n \leq 50, 0 \leq a_i \leq 50$ 。

解

显然, 从左到右依次执行操作是最优的。

A - B

有一个无穷序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots$, 可以执行如下操作若干次:

$a_i \leftarrow a_i - 1, a_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - 1, a_{i+2} \leftarrow a_{i+2} + 1$ (要求开始时 $a_i, a_{i+1} > 0$)。

求可能得到多少种不同的序列, 对 $10^9 + 7$ 取模。

$n \leq 50, 0 \leq a_i \leq 50$ 。

解

显然, 从左到右依次执行操作是最优的。

猜想: 任意操作后 $\min\{a_i, a_{i+1}\} \leq 100, a_i \leq 150$ 。

A - B

有一个无穷序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots$, 可以执行如下操作若干次:

$a_i \leftarrow a_i - 1, a_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - 1, a_{i+2} \leftarrow a_{i+2} + 1$ (要求开始时 $a_i, a_{i+1} > 0$)。

求可能得到多少种不同的序列, 对 $10^9 + 7$ 取模。

$n \leq 50, 0 \leq a_i \leq 50$ 。

解

显然, 从左到右依次执行操作是最优的。

猜想: 任意操作后 $\min\{a_i, a_{i+1}\} \leq 100, a_i \leq 150$ 。

从左向右归纳法可知猜想成立。

A - B

有一个无穷序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots$, 可以执行如下操作若干次:

$a_i \leftarrow a_i - 1, a_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - 1, a_{i+2} \leftarrow a_{i+2} + 1$ (要求开始时 $a_i, a_{i+1} > 0$)。

求可能得到多少种不同的序列, 对 $10^9 + 7$ 取模。

$n \leq 50, 0 \leq a_i \leq 50$ 。

解

显然, 从左到右依次执行操作是最优的。

猜想: 任意操作后 $\min\{a_i, a_{i+1}\} \leq 100, a_i \leq 150$ 。

从左向右归纳法可知猜想成立。

设 $f_{i,j,k}$ 表示将要第 i 位的操作、 $a_i = j, a_{i+1} = k$ 的方案数, 转移考虑这一位的操作执行多少次即可。

时间复杂度 $O(n \cdot \max\{a_i\}^3)$, 常数优秀。

B - T1

给一棵 n 个点、有点权的树，设 r_u 表示 u 子树点权最小值。每次向 r 最小的方向走，走到叶子结点后删除该点并返回根继续。求删点顺序。

$$n \leq 10^6。$$

B - T1

给一棵 n 个点、有点权的树，设 r_u 表示 u 子树点权最小值。每次向 r 最小的方向走，走到叶子结点后删除该点并返回根继续。求删点顺序。

$$n \leq 10^6。$$

解

u 比 v 后被删除，当且仅当 u 到 $\text{LCA}(u, v)$ 链上（不含 LCA ）的最小值比 v 对应的最小值大。

B - T1

给一棵 n 个点、有点权的树，设 r_u 表示 u 子树点权最小值。每次向 r 最小的方向走，走到叶子结点后删除该点并返回根继续。求删点顺序。

$$n \leq 10^6。$$

解

u 比 v 后被删除，当且仅当 u 到 $\text{LCA}(u, v)$ 链上（不含 LCA ）的最小值比 v 对应的最小值大。

考虑求出这棵树从根开始的最大拓扑序， u 点在 v 前的条件与之前的条件相同。

答案即为的最大拓扑序的逆序列，时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

C - road

给一条 n 个点、 m 条边、有边权的无向图。有 q 次询问，每次询问给定 k 个点，选出一些边使得这 k 个点通过这 k 条边连通，使得最大边权尽量小。

$$n, q \leq 2 \times 10^5, \quad m \leq 5 \times 10^5, \quad \sum k \leq 10^6.$$

C - road

给一条 n 个点、 m 条边、有边权的无向图。有 q 次询问，每次询问给定 k 个点，选出一些边使得这 k 个点通过这 k 条边连通，使得最大边权尽量小。

$$n, q \leq 2 \times 10^5, \quad m \leq 5 \times 10^5, \quad \sum k \leq 10^6.$$

解

由最小生成树的性质，选择的边这张图的一定在最小生成树上。

C - road

给一条 n 个点、 m 条边、有边权的无向图。有 q 次询问，每次询问给定 k 个点，选出一些边使得这 k 个点通过这 k 条边连通，使得最大边权尽量小。

$$n, q \leq 2 \times 10^5, \quad m \leq 5 \times 10^5, \quad \sum k \leq 10^6.$$

解

由最小生成树的性质，选择的边这张图的一定在最小生成树上。

树上 k 个点连通需要的边（虚树上的边）可以按照 DFS 序排序，取每相邻两个点之间的路径合并即可，路径可以倍增求出。

时间复杂度 $O(m \log m + \sum k \log n)$ 。