图论（二）

李佳衡

实验舱科学辅导中心

2020 年 8 月 11 日

欧拉路

对于一张图，求一条路径（回路），使得每条边恰好被经过一次。

欧拉路

对于一张图，求一条路径（回路），使得每条边恰好被经过一次。

判定

一个无向图存在欧拉回路，当且仅当所有点度数为偶数；

一个无向图存在欧拉路径，当且仅当存在至多两个点度数为奇数；

一个有向图存在欧拉回路，当且仅当所有点入度出度相等；

一个有向图存在欧拉路径，当且仅当存在至多两个点入度与出度差 1，其余点入度出度相等。

欧拉路

求解

如果求欧拉回路，则以任意一个点开始；如果求欧拉路径(且不存在欧拉回路)，无向图以任意一个奇点开始，有向图以出度比入度大 1 的点开始。

从起点开始 DFS，只走未经过的边，然后在回溯时将递归过程压栈，倒序输出。(等价于每次将一个点变为一个环。)

时间复杂度 $O(m)$。

- [UOJ 117] 欧拉回路

[BZOJ 3033] 太鼓达人

给定整数 k，求最大的 m，并构造 m 的 01 环，其 m 个长为 k 的子串两两不同。

$k \leq 11$。

[BZOJ 3033] 太鼓达人

给定整数 k，求最大的 m，并构造 m 的 01 环，其 m 个长为 k 的子串两两不同。

$k \leq 11$。

解

将所有长为 $k-1$ 的 01 串看作点，每次在后面添加一个(并去掉前面一个）视为转移，则每个点的入度、出度都是 2，每条边对应一个长为 k 的 01 串。

图的欧拉回路存在，因此当 $m = 2^k$ 可以通过欧拉回路构造出解，显然这是最大的 m。

时间复杂度 $O(2^k)$。

[CodeForces 325E] The Red Button

有一张 n 个点的有向图，点的编号从 0 至 $n-1$。点 i 向点 $(2i) \bmod n$、$(2i+1) \bmod n$ 分别连一条出边。求这张图的一个哈密顿回路，或判断无解。

$n \le 10^5$。

[CodeForces 325E] The Red Button

有一张 n 个点的有向图，点的编号从 0 至 $n-1$。点 i 向点 $(2i) \bmod n$、$(2i+1) \bmod n$ 分别连一条出边。求这张图的一个哈密顿回路，或判断无解。

$n \leq 10^5$。

解

当 n 是奇数时，一定无解。

[CodeForces 325E] The Red Button

有一张 n 个点的有向图，点的编号从 0 至 $n-1$。点 i 向点 $(2i) \bmod n$、$(2i+1) \bmod n$ 分别连一条出边。求这张图的一个哈密顿回路，或判断无解。

$n \leq 10^5$。

解

当 n 是奇数时，一定无解。因为点 0 和点 $n-1$ 都只有唯一入边 $\frac{n-1}{2}$。

[CodeForces 325E] The Red Button

有一张 n 个点的有向图，点的编号从 0 至 $n-1$。点 i 向点 $(2i) \bmod n$、$(2i+1) \bmod n$ 分别连一条出边。求这张图的一个哈密顿回路，或判断无解。

$n \leq 10^5$。

解

当 n 是奇数时，一定无解。因为点 0 和点 $n-1$ 都只有唯一入边 $\frac{n-1}{2}$。

当 n 是偶数时，点 i 和 $i+\frac{n}{2}$ 的出边都是 $(2i) \bmod n$ 和 $(2i+1) \bmod n$。将 $2i$ 和 $2i+1$ 合并，则每个集合都有恰好 2 条入边、2 条出边。

[CodeForces 325E] The Red Button

有一张 n 个点的有向图，点的编号从 0 至 $n-1$。点 i 向点 $(2i) \bmod n$、$(2i+1) \bmod n$ 分别连一条出边。求这张图的一个哈密顿回路，或判断无解。

$n \le 10^5$。

解

当 n 是奇数时，一定无解。因为点 0 和点 $n-1$ 都只有唯一入边 $\frac{n-1}{2}$。

当 n 是偶数时，点 i 和 $i+\frac{n}{2}$ 的出边都是 $(2i) \bmod n$ 和 $(2i+1) \bmod n$。将 $2i$ 和 $2i+1$ 合并，则每个集合都有恰好 2 条入边、2 条出边。

新图的每条边对应原图的每个点，而欧拉回路一定存在，因此新图的欧拉回路即为答案。

时间复杂度 $O(n)$。

[CodeForces 723E] One-Way Reform

给定一张 n 个点、m 条边的无向简单图，要求给所有边定向，使得尽量多的点入度与出度相等，需要输出方案。

不超过 200 组数据，$\sum n \leq 200$。

[CodeForces 723E] One-Way Reform

给定一张 n 个点、m 条边的无向简单图，要求给所有边定向，使得尽量多的点入度与出度相等，需要输出方案。

不超过 200 组数据，$\sum n \leq 200$。

解

显然答案不超过偶点的个数，我们尝试构造这样的方案。

显然奇点可以两两配对，配对后连边，所有点都变成偶点，求欧拉回路即可。

[CodeForces 429E] Points and Segments

数轴上有 n 个区间 $[l_i, r_i]$，你需要给每个区间染上红色或蓝色，使得数轴上覆盖任意一点的红、蓝区间数相差不超过 1。需要判定无解。

$n \le 10^5$，$0 \le l_i \le r_i \le 10^9$。

[CodeForces 429E] Points and Segments

数轴上有 n 个区间 $[l_i, r_i]$，你需要给每个区间染上红色或蓝色，使得数轴上覆盖任意一点的红、蓝区间数相差不超过 1。需要判定无解。

$n \le 10^5$，$0 \le l_i \le r_i \le 10^9$。

解一

我们将 $[l_i, r_i]$ 红色看作一条 $l_i \to r_i + 1$ 的边，蓝色看作一条反向的边。那么如果能求出一条欧拉回路，则可以满足为所有位置差都为 0。

为了保证欧拉回路的存在性，我们可以将奇数点按顺序两两配对处理掉，这样差仍满足不超过 1。

时间复杂度 $O(n \log n)$。

[CodeForces 429E] Points and Segments

数轴上有 n 个区间 $[l_i, r_i]$，你需要给每个区间染上红色或蓝色，使得数轴上覆盖任意一点的红、蓝区间数相差不超过 1。需要判定无解。

$n \leq 10^5$，$0 \leq l_i \leq r_i \leq 10^9$。

解二

将红、蓝色分别视为 $+1$、-1，再对数轴进行差分。如果我们要求从左至右每两个端点的贡献不同，那么一定可以满足条件。

因此，将所有点排序，那么我们要求每两个端点贡献不同、每个线段两端贡献不同。可以证明这样连边一定是一个二分图，问题即为二分图染色划分为 1、-1。不存在无解情况。

时间复杂度 $O(n \log n)$。

强连通与双连通

强连通分量

极大的子图，使得其中任意两个结点都存在来回路径。

强连通与双连通

强连通分量

极大的子图，使得其中任意两个结点都存在来回路径。

Tarjan 算法

对图进行 DFS，求出一棵 DFS 树，在 DFS 开始时将点压栈，记录 dfn_u 表示 DFS 编号，low_u 表示 u 或与 u 子树内连边、仍在栈中的点的 dfn 最小值。

回溯时如果 $\mathrm{dfn}_u = \mathrm{low}_u$，则说明这是一个强连通分量，将栈中元素全部取出。

时间复杂度 $O(m)$。

强连通与双连通

强连通分量

极大的子图，使得其中任意两个结点都存在来回路径。

Tarjan 算法

对图进行 DFS，求出一棵 DFS 树，在 DFS 开始时将点压栈，记录 dfn_u 表示 DFS 编号，low_u 表示 u 或与 u 子树内连边、仍在栈中的点的 dfn 最小值。

回溯时如果 $\mathrm{dfn}_u = \mathrm{low}_u$，则说明这是一个强连通分量，将栈中元素全部取出。

时间复杂度 $O(m)$。

- 实际上，如果将 low 记录为所有子树可达的、仍在栈中的点的 dfn 最小值，算法依旧正确。

强连通与双连通

点双连通分量
: 极大的连通子图，使得删去其中任意结点后都仍连通。

割点
: 图上的一个结点，使得删去后图的连通块数增加。

边双连通分量
: 极大的连通子图，使得删去其中任意边后都仍连通。

割边（桥）
: 图上的一条边，使得删去后图的连通块数增加。

强连通与双连通

点双连通分量

极大的连通子图，使得删去其中任意结点后都仍连通。

割点

图上的一个结点，使得删去后图的连通块数增加。

边双连通分量

极大的连通子图，使得删去其中任意边后都仍连通。

割边（桥）

图上的一条边，使得删去后图的连通块数增加。

Tarjan 算法

与求强连通的 Tarjan 算法类似，如果一点满足存在一个儿子 v 使得 $\mathrm{low}_v \geq \mathrm{dfn}_u$，则 u 为割点（注意 DFS 根需要特判）；如果一条树边 $u \to v$ 满足 $\mathrm{low}_v > \mathrm{dfn}_u$，则这条边为割边。

缩点

强连通分量缩点

将一个强连通分量内的所有点合并为一个结点。缩点后的图是一张 DAG。

点双连通分量缩点

将一个点双连通分量内的所有点合并为一个结点，由于割点可能出现在多个点双连通分量中，因此割点还需另外建点。缩点后的图是一棵树。

边双连通分量缩点

将一个边双连通分量内的所有点合并为一个结点，新图的边即为原图的割边。缩点后的图是一棵树。

缩点

强连通分量缩点

　　将一个强连通分量内的所有点合并为一个结点。缩点后的图是一张 DAG。

点双连通分量缩点

　　将一个点双连通分量内的所有点合并为一个结点，由于割点可能出现在多个点双连通分量中，因此割点还需另外建点。缩点后的图是一棵树。

边双连通分量缩点

　　将一个边双连通分量内的所有点合并为一个结点，新图的边即为原图的割边。缩点后的图是一棵树。

圆方树

　　将原图的点作为圆点，每个点双连通分量建一个方点，每个圆点像所在点双连通分量对应的方点连边。

　　与一般点双连通分量缩点类似，但细节更易于处理。

[BZOJ 1093] 最大半连通子图

给定一张 n 个点、m 条边的有向图，求其点数最大子图的大小，使得其中任意两点 u, v 都有 $u \to v$ 或 $v \to u$ 存在路径。并求上述最大子图的个数，对读入的 x 取模。

$n \leq 10^5$，$m \leq 10^6$，$x \leq 10^8$。

[BZOJ 1093] 最大半连通子图

给定一张 n 个点、m 条边的有向图，求其点数最大子图的大小，使得其中任意两点 u, v 都有 $u \to v$ 或 $v \to u$ 存在路径。并求上述最大子图的个数，对读入的 x 取模。

$n \le 10^5$，$m \le 10^6$，$x \le 10^8$。

解

显然同一个强连通分量内的点一定同时在或不在子图内。将原图强连通缩点，答案即为 DAG 上点数和最大的路径。

时间复杂度 $O(m)$。

[CodeForces 894E] Ralph and Mushrooms

给定一张 n 个点、m 条边的有向图，每条边有边权 w_i。第 k 次经过一条边后，会使其边权减少 k，减少会累计，但最多减至 0。求从 s 点出发，走过的边权和的最大值。

$n, m \leq 10^6$。

[CodeForces 894E] Ralph and Mushrooms

给定一张 n 个点、m 条边的有向图，每条边有边权 w_i。第 k 次经过一条边后，会使其边权减少 k，减少会累计，但最多减至 0。求从 s 点出发，走过的边权和的最大值。

$n, m \le 10^6$。

解

在一个强连通分量内，如果其中一个点被经过，那么其中的所有边都会被反复经过，直至边权全部变为 0。因此每个强连通分量的权值可以计算，将原图强连通缩点，答案即为 DAG 上的点权和最大路径。

时间复杂度 $O(m)$。

[BZOJ 1123] BLO

给定一棵 n 个点、m 条边的无向图，分别求删去每个点后有多少不连通的点对。

$n \le 10^5$，$m \le 5 \times 10^5$。

解

对图建圆方树，两点间的路径必然经过某一点，当且仅当这两点在圆方树上的路径经过了该点。因此，对于圆方树上的每个圆点，考虑不在同一棵子树内的圆点对数即可。

时间复杂度 $O(m)$。

[BZOJ 1123] BLO

给定一棵 n 个点、m 条边的无向图，分别求删去每个点后有多少不连通的点对。

$n \leq 10^5$，$m \leq 5 \times 10^5$。

解

对图建圆方树，两点间的路径必然经过某一点，当且仅当这两点在圆方树上的路径经过了该点。因此，对于圆方树上的每个圆点，考虑不在同一棵子树内的圆点对数即可。

时间复杂度 $O(m)$。

实际上，这一信息也可以在 Tarjan 算法中顺便记录，不需要另外缩点建图。

[BZOJ 1718] Redundant Paths 分离的路径

给定一棵 n 个点、m 条边的无向图，需要加入一些的边，使得图边双连通，求边数的最小值。

$n \leq 5000$，$m \leq 10000$。

[BZOJ 1718] Redundant Paths 分离的路径

给定一棵 n 个点、m 条边的无向图，需要加入一些的边，使得图边双连通，求边数的最小值。

$n \leq 5000$，$m \leq 10000$。

解

先求出这个图的边双连通分量并缩点，每加入一条边至多能使缩点图中的 2 个叶子边双连通，因此答案至少为 $\lceil \frac{c}{2} \rceil$。实际上，总能调整出存在一种叶子的配对方案覆盖所有点，因此这就是答案。

时间复杂度 $O(m)$。

[LibreOJ 2587] 铁人两项

给定一张 n 个点、m 条边的无向图，需要选出三个点 s、c、f，使得存在一条从 s 经过 c 到 f 的简单路径。

$n \leq 10^5$，$m \leq 2 \times 10^5$。

[LibreOJ 2587] 铁人两项

给定一张 n 个点、m 条边的无向图，需要选出三个点 s、c、f，使得存在一条从 s 经过 c 到 f 的简单路径。

$n \le 10^5$，$m \le 2 \times 10^5$。

解

对图建出圆方树，在圆方树上统计答案。枚举一个方点作为 c，考虑各子树选出两个 s、f。由于一个点可能属于多个点双连通分量，对于圆点和方点需要分别处理。

时间复杂度 $O(m)$。

2-SAT

有 n 个变量 $x_i \in \{0,1\}$，另有 m 个限制，形如 $x_i = a$ 与 $x_j = b$ 不能同时成立。求一组合法的 x 或判断无解。

2-SAT

有 n 个变量 $x_i \in \{0,1\}$，另有 m 个限制，形如 $x_i = a$ 与 $x_j = b$ 不能同时成立。求一组合法的 x 或判断无解。

解

对于每个变量建立两个点 c_i 与 d_i，分别表示 $x_i = 0$ 与 $x_i = 1$。对于一个限制，设其对应的两个点分别为 u 和 v，则建边 $u \to \overline{v}$ 与 $v \to \overline{u}$，其中 $\overline{u}$ 表示与 u 对立的点。

问题等价于，在图中选取一些点，使得每组 c_i 与 d_i 有且仅有一个被选取，且如果某个点被选取，则它的所有后继点都被选取。

问题有解，当且仅当不存在 c_i 与 d_i 在同一强连通分量内。我们总选取 c_i、d_i 中拓扑序靠后的点（实现时即为 low 较小的点），由于建图的对称性，即为一组解。

时间复杂度 $O(m)$。

[CodeForces 568C] New Language

在某种语言中，字母分为元音和辅音两类，所有单词长度都为 n，并有 m 个限制，限制形如若第 p_1 个字母类型为 t_1，则第 p_2 个字母类型为 t_2。

给定一个长为 n 的字符串 S，求字典序不小于 S 的最小合法单词，或判断无解。

共 26 个字母，$n \le 200$，$m \le 4n(n-1)$。

[CodeForces 568C] New Language

在某种语言中，字母分为元音和辅音两类，所有单词长度都为 n，并有 m 个限制，限制形如若第 p_1 个字母类型为 t_1，则第 p_2 个字母类型为 t_2。

给定一个长为 n 的字符串 S，求字典序不小于 S 的最小合法单词，或判断无解。

共 26 个字母，$n \leq 200$，$m \leq 4n(n-1)$。

解

字典序问题可以逐位确定，即按照字典序顺序枚举每一位，判断是否存在符合条件的单词。

限制是一个 2-SAT 的形式，确定时只需 2-SAT 判定有无解即可。

时间复杂度 $O(nm)$。

[BZOJ 1997] Planar

给定一张 n 个点、m 条边的无向图，并给出图的一个哈密顿回路（恰好经过每个结点一次的简单回路），判断这是否是一个平面图（能否将这个图画在平面上，使得边仅在公共端点处相交）。

不超过 100 组数据，$n \leq 200$，$m \leq 10000$。

[BZOJ 1997] Planar

给定一张 n 个点、m 条边的无向图，并给出图的一个哈密顿回路（恰好经过每个结点一次的简单回路），判断这是否是一个平面图（能否将这个图画在平面上，使得边仅在公共端点处相交）。

不超过 100 组数据，$n \leq 200$，$m \leq 10000$。

- n 个点的平面图边数不超过 $3n-6$。

[BZOJ 1997] Planar

给定一张 n 个点、m 条边的无向图，并给出图的一个哈密顿回路（恰好经过每个结点一次的简单回路），判断这是否是一个平面图（能否将这个图画在平面上，使得边仅在公共端点处相交）。

不超过 100 组数据，$n \leq 200$，$m \leq 10000$。

- n 个点的平面图边数不超过 $3n-6$。

解

将哈密顿路径视为一个圆，那么对于两条圆上相交的弦，它们必定不在圆的同侧。问题转化为一个 2-SAT 问题，判定解即可。

时间复杂度 $O(m^2)$，由平面图性质剪枝可至 $O(n^2)$。

[UOJ 317] 游戏

你需要确定 n 个变量 $x_i \in \{\mathsf{a}, \mathsf{a}, \mathsf{a}\}$，对于每个变量，有至多一个限制 $x_i \neq y$。另有 m 个限制，形如若 $x_i = p$，则 $x_j = q$。求一组合法的方案或判断无解。

$n \leq 50000$，$m \leq 10^5$，无 $x_i \neq y$ 限制的变量不超过 8 个字母的字符串使得每个字母对都在这个字符串中出现。答案可能不存在。

[UOJ 317] 游戏

你需要确定 n 个变量 $x_i \in \{\mathsf{a}, \mathsf{a}, \mathsf{a}\}$，对于每个变量，有至多一个限制 $x_i \neq y$。另有 m 个限制，形如若 $x_i = p$，则 $x_j = q$。求一组合法的方案或判断无解。

$n \leq 50000$，$m \leq 10^5$，无 $x_i \neq y$ 限制的变量不超过 8 个字母的字符串使得每个字母对都在这个字符串中出现。答案可能不存在。

如

果每个点都有一个 $x_i \neq y$ 的限制，则问题就是 2-SAT 问题。枚举每个无限制的变量，要么 $x_i \neq \mathsf{a}$，要么 $x_i \neq \mathsf{b}$，然后 2-SAT 即可。

时间复杂度 $O(m2^c)$，其中 c 表示无限制的变量个数。

二分图匹配

给定给一张二分图，求边集的一个最大子集使得其中任意两条边不交。

二分图匹配

给定给一张二分图，求边集的一个最大子集使得其中任意两条边不交。

Hungary 算法

每次从一个左侧未匹配点开始，寻找一条匹配-未匹配、以未匹配点结尾的交替路，将这条路上的匹配反转。

时间复杂度 $O(nm)$。

二分图匹配

给定给一张二分图，求边集的一个最大子集使得其中任意两条边不交。

Hungary 算法

每次从一个左侧未匹配点开始，寻找一条匹配-未匹配、以未匹配点结尾的交替路，将这条路上的匹配反转。

时间复杂度 $O(nm)$。

Hall 定理

一张二分图存在满匹配，当且仅当对于一个点集的子集 S，有 $|S| \le |N(S)|$，其中 $N(S)$ 表示 S 相邻点的集合。

Hall 定理

一张二分图存在满匹配，当且仅当对于一个点集的子集 S，有 $|S| \leq |N(S)|$，其中 $N(S)$ 表示 S 相邻点的集合。

二分图的最小点覆盖与最大独立集

二分图的最小点覆盖等于最大匹配。
二分图的最大独立集等于顶点数减去最大匹配。

网络流

最大流

对于一张有向图，每条边有流量上界，除指定的源、汇点外，每个点的出入流量相等，求源点的出流量最大值。

网络流

最大流

　　对于一张有向图，每条边有流量上界，除指定的源、汇点外，每个点的出入流量相等，求源点的出流量最大值。

最小割

　　对于一张带边权的有向图，删除一些边使得源点到汇点不存在路径，并使删去的总边权最小。

网络流

最大流

对于一张有向图，每条边有流量上界，除指定的源、汇点外，每个点的出入流量相等，求源点的出流量最大值。

最小割

对于一张带边权的有向图，删除一些边使得源点到汇点不存在路径，并使删去的总边权最小。

最大流-最小割定理

一个网络的最大流等于最小割。

网络流

增广路算法

每次在残量网络上找到一条从源点到汇点、流量非 0 的路径作为增广路。

另，对于边 $u \to v$，我们新增一条反向边 $v \to u$，当有 f 的流量流过 $u \to v$ 时，我们给反向边的流量上界增加 f，用于反悔。

网络流

增广路算法

每次在残量网络上找到一条从源点到汇点、流量非 0 的路径作为增广路。

另，对于边 $u \to v$，我们新增一条反向边 $v \to u$，当有 f 的流量流过 $u \to v$ 时，我们给反向边的流量上界增加 f，用于反悔。

网络流

增广路算法

每次在残量网络上找到一条从源点到汇点、流量非 0 的路径作为增广路。

另，对于边 $u \to v$，我们新增一条反向边 $v \to u$，当有 f 的流量流过 $u \to v$ 时，我们给反向边的流量上界增加 f，用于反悔。

Edmond-Karp（EK）算法

每次 BFS 寻找一条增广路，增广后重新 BFS，直至没有增广路。

时间复杂度 $O(nm^2)$。

网络流

Dinic 算法

每次从汇点开始 BFS，再 DFS 寻找增广路，满足增广路上层数每次差 1；每次 DFS 可以增广多条路径，直至流量用尽后再次 BFS，直至没有增广路。

当前边优化：再每次 BFS 后，对于一个点，被访问过的出边不会再次被访问，应当直接跳过。

时间复杂度 $O(n^2m)$。

网络流

Dinic 算法

每次从汇点开始 BFS，再 DFS 寻找增广路，满足增广路上层数每次差 1；每次 DFS 可以增广多条路径，直至流量用尽后再次 BFS，直至没有增广路。

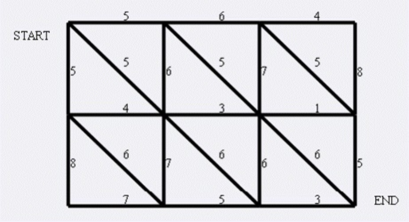
当前边优化：再每次 BFS 后，对于一个点，被访问过的出边不会再次被访问，应当直接跳过。

时间复杂度 $O(n^2m)$。

在解决二分图匹配问题时，时间复杂度 $O(m\sqrt{n})$。

[BZOJ 1001] 狼抓兔子

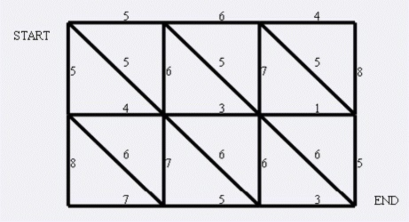
给定一张 $n \times m$ 的网格图，每个网格另有左上到右下的斜向道路，有边权，求左上角到右下角的最小割。



$n, m \leq 1000$。

[BZOJ 1001] 狼抓兔子

给定一张 $n \times m$ 的网格图，每个网格另有左上到右下的斜向道路，有边权，求左上角到右下角的最小割。



$n, m \le 1000$。

解

平面图最小割等于对偶图最短路，使用 Dijkstra 算法即可。时间复杂度 $O(nm\log(nm))$。

[HDU 6749] Mosquito

房间是个 $n \times m$ 的网格，一共有 k 个窗户，都在上下左右四条边上。在第 0 时刻，每个窗户对应的格子上都会出现若干只蚊子（给定）。

蚊子每个时刻可以往上下左右移动一格或者呆在原地不动。

假设这些蚊子都足够聪明，请问最少花费多少时刻，使得所有格子上都有至少一只蚊子？

不超过 10 组数据，$n, m \leq 1000$，$k \leq 6$。

[HDU 6749] Mosquito

房间是个 $n \times m$ 的网格，一共有 k 个窗户，都在上下左右四条边上。在第 0 时刻，每个窗户对应的格子上都会出现若干只蚊子（给定）。

蚊子每个时刻可以往上下左右移动一格或者呆在原地不动。

假设这些蚊子都足够聪明，请问最少花费多少时刻，使得所有格子上都有至少一只蚊子？

不超过 10 组数据，$n, m \leq 1000$，$k \leq 6$。

解

二分时间，问题变为，每个位置可以有某些窗户的蚊子到达，要求蚊子与窗户满匹配。

[HDU 6749] Mosquito

房间是个 $n \times m$ 的网格，一共有 k 个窗户，都在上下左右四条边上。在第 0 时刻，每个窗户对应的格子上都会出现若干只蚊子（给定）。

蚊子每个时刻可以往上下左右移动一格或者呆在原地不动。

假设这些蚊子都足够聪明，请问最少花费多少时刻，使得所有格子上都有至少一只蚊子？

不超过 10 组数据，$n, m \leq 1000$，$k \leq 6$。

解

二分时间，问题变为，每个位置可以有某些窗户的蚊子到达，要求蚊子与窗户满匹配。

实际上，情况不同的格子只有 $O(2^k)$ 种，与 k 个窗户上的蚊子匹配，网络流即可。时间复杂度 $O((nm + 2^{3k})k\log(n+m))$。

[HDU 6749] Mosquito

房间是个 $n \times m$ 的网格，一共有 k 个窗户，都在上下左右四条边上。在第 0 时刻，每个窗户对应的格子上都会出现若干只蚊子（给定）。

蚊子每个时刻可以往上下左右移动一格或者呆在原地不动。

假设这些蚊子都足够聪明，请问最少花费多少时刻，使得所有格子上都有至少一只蚊子？

不超过 10 组数据，$n, m \leq 1000$，$k \leq 6$。

解

二分时间，问题变为，每个位置可以有某些窗户的蚊子到达，要求蚊子与窗户满匹配。

实际上，情况不同的格子只有 $O(2^k)$ 种，与 k 个窗户上的蚊子匹配，网络流即可。时间复杂度 $O((nm + 2^{3k})k\log(n+m))$。

也可以使用 Hall 定理，枚举最终可用的窗户集合 S，对应的格子集合满足其可达窗户集合 $T \subseteq S$，判断即可。时间复杂度 $O((nm + 2^k)k\log(n+m))$

[BZOJ 3693] 圆桌会议

有 n 组人在一个长为 m 的圆桌上开会，每组 a_i 人都需要被安排在环上某个区间范围内的座位上。每个人只安排一个座位，每个座位至多安排一个人。求是否存在满足条件的方案。

不超过 10 组数据，$n \leq 10^5$，$m \leq 10^9$。

[BZOJ 3693] 圆桌会议

有 n 组人在一个长为 m 的圆桌上开会，每组 a_i 人都需要被安排在环上某个区间范围内的座位上。每个人只安排一个座位，每个座位至多安排一个人。求是否存在满足条件的方案。

不超过 10 组数据，$n \leq 10^5$，$m \leq 10^9$。

解

方案存在，当且仅当对于所有座位区间，选座区间完全被其包含的人数不超过区间大小。

[BZOJ 3693] 圆桌会议

有 n 组人在一个长为 m 的圆桌上开会，每组 a_i 人都需要被安排在环上某个区间范围内的座位上。每个人只安排一个座位，每个座位至多安排一个人。求是否存在满足条件的方案。

不超过 10 组数据，$n \le 10^5$，$m \le 10^9$。

解

方案存在，当且仅当对于所有座位区间，选座区间完全被其包含的人数不超过区间大小。

将环倍增，枚举区间右端点，对每个左端点用线段树维护长度与人数的差，求最值可以判断。注意还需要判断整个环。

时间复杂度 $O(n \log n)$。

[LibreOJ 6002] 最小路径覆盖

给定一张 n 个点、m 条边的有向无环图。使用尽量少条点不相交的路径覆盖这张图的所有顶点。

$n \le 200$，$m \le 6000$。

[LibreOJ 6002] 最小路径覆盖

给定一张 n 个点、m 条边的有向无环图。使用尽量少条点不相交的路径覆盖这张图的所有顶点。

$n \le 200$，$m \le 6000$。

解

将图的每个点拆成两个 u 和 u' 分别表示出、入。对于一条边 $u \to v$，实际连边为 $u \to v'$。由于若干条路径不交，每个点只对应一个后继（每个出点只对应一个入点），尽量地二分图匹配，匹配后剩余的连通块个数即为答案。

时间复杂度 $O(nm)$ 或 $O(m\sqrt{n})$。

[LibreOJ 6007] 方格取数

在一个有 $m \times n$ 个方格的棋盘中，每个方格中有一个正整数。

现要从方格中取数，使任意 2 个数所在方格没有公共边，且取出的数的总和最大。试设计一个满足要求的取数算法。

$n, m \leq 30$。

[LibreOJ 6007] 方格取数

在一个有 $m \times n$ 个方格的棋盘中，每个方格中有一个正整数。

现要从方格中取数，使任意 2 个数所在方格没有公共边，且取出的数的总和最大。试设计一个满足要求的取数算法。

$n, m \leq 30$。

解

注意到网格图是一个二分图，可以黑白染色。

构造最小割模型，源点向黑色点、白色点像汇点连边，边权为点的权值，相邻的黑色点像白色点连边，边权为 $+\infty$。

使用最大流算法计算即可，时间复杂度 $O((nm)^{1.5})$。

Dilworth 定理

链和反链

- 链：有限偏序集（DAG）的一个点集，使得任意两点间可比 (存在路径)，称点集大小为链的大小；
- 反链：有限偏序集（DAG）的一个点集，使得任意两点间不可比（不存在路径)，称点集大小为反链的大小；
- 覆盖：若干个点集，使得每个点都在其中恰好一个点集内，称点集个数为覆盖的大小。

Dilworth 定理

链和反链

- 链：有限偏序集（DAG）的一个点集，使得任意两点间可比(存在路径)，称点集大小为链的大小；
- 反链：有限偏序集（DAG）的一个点集，使得任意两点间不可比（不存在路径)，称点集大小为反链的大小；
- 覆盖：若干个点集，使得每个点都在其中恰好一个点集内，称点集个数为覆盖的大小。

Dilworth 定理

- 有限偏序集（DAG）的最小链覆盖大小等于最长反链长度；

Dilworth 定理

链和反链

- 链：有限偏序集（DAG）的一个点集，使得任意两点间可比(存在路径)，称点集大小为链的大小；
- 反链：有限偏序集（DAG）的一个点集，使得任意两点间不可比（不存在路径)，称点集大小为反链的大小；
- 覆盖：若干个点集，使得每个点都在其中恰好一个点集内，称点集个数为覆盖的大小。

Dilworth 定理

- 有限偏序集（DAG）的最小链覆盖大小等于最长反链长度；
- 有限偏序集（DAG）的最长链长度等于最小反链覆盖大小。

Dilworth 定理

有限偏序集（DAG）的最小链覆盖大小等于最长反链长度。

Dilworth 定理

有限偏序集（DAG）的最小链覆盖大小等于最长反链长度。

证明.

设 n 为 DAG 的点数，则当 $n \leq 1$ 时，显然成立。

设 S 为当前的 DAG，u 为其一个极大元，$S' = S \setminus \{u\}$，由归纳猜想，S 的最小链覆盖大小等于最长反链长度，设为 k。

Dilworth 定理

有限偏序集（DAG）的最小链覆盖大小等于最长反链长度。

证明.

设 n 为 DAG 的点数，则当 $n \leq 1$ 时，显然成立。

设 S 为当前的 DAG，u 为其一个极大元，$S' = S \setminus \{u\}$，由归纳猜想，S 的最小链覆盖大小等于最长反链长度，设为 k。

因此 S' 有最小链覆盖 $C_1, C_2, \ldots, C_k$，有最长反链 $A_1, A_2, \ldots, A_r$，其中 $|A_i| = k$，设 $P = \bigcup A_i$。

Dilworth 定理

有限偏序集（DAG）的最小链覆盖大小等于最长反链长度。

证明.

设 n 为 DAG 的点数，则当 $n \le 1$ 时，显然成立。

设 S 为当前的 DAG，u 为其一个极大元，$S' = S \setminus \{u\}$，由归纳猜想，S 的最小链覆盖大小等于最长反链长度，设为 k。

因此 S' 有最小链覆盖 $C_1, C_2, \ldots, C_k$，有最长反链 $A_1, A_2, \ldots, A_r$，其中 $|A_i| = k$，设 $P = \bigcup A_i$。

设 $x_i = \max\{C_i \cap P\}$，则可以证明 $\{x_i\}$ 是一条反链，再分两种情况：

Dilworth 定理

有限偏序集（DAG）的最小链覆盖大小等于最长反链长度。

证明.

设 n 为 DAG 的点数，则当 $n \leq 1$ 时，显然成立。

设 S 为当前的 DAG，u 为其一个极大元，$S' = S \setminus \{u\}$，由归纳猜想，S 的最小链覆盖大小等于最长反链长度，设为 k。

因此 S' 有最小链覆盖 $C_1, C_2, \ldots, C_k$，有最长反链 $A_1, A_2, \ldots, A_r$，其中 $|A_i| = k$，设 $P = \bigcup A_i$。

设 $x_i = \max\{C_i \cap P\}$，则可以证明 $\{x_i\}$ 是一条反链，再分两种情况：

- $\exists x_i \leq u$，设 $T = S' \setminus \{v \in C_i \mid v \leq x_i\}$，则 T 的最小链覆盖大小、最长反链长度为 $k-1$，因此 S 的最小链覆盖不超过 k、最长反链不小于 k；

Dilworth 定理

有限偏序集（DAG）的最小链覆盖大小等于最长反链长度。

证明.

设 n 为 DAG 的点数，则当 $n \leq 1$ 时，显然成立。

设 S 为当前的 DAG，u 为其一个极大元，$S' = S \setminus \{u\}$，由归纳猜想，S 的最小链覆盖大小等于最长反链长度，设为 k。

因此 S' 有最小链覆盖 $C_1, C_2, \ldots, C_k$，有最长反链 $A_1, A_2, \ldots, A_r$，其中 $|A_i| = k$，设 $P = \bigcup A_i$。

设 $x_i = \max\{C_i \cap P\}$，则可以证明 $\{x_i\}$ 是一条反链，再分两种情况：

- $\exists x_i \leq u$，设 $T = S' \setminus \{v \in C_i \mid v \leq x_i\}$，则 T 的最小链覆盖大小、最长反链长度为 $k-1$，因此 S 的最小链覆盖不超过 k、最长反链不小于 k；
- $\nexists x_i \leq u$，则 $\{x_i\} \cup \{u\}$ 为一条长为 $k+1$ 的反链，且最小链覆盖不超过 $k+1$。

综上，最小链覆盖不超过最长反链，而最小链覆盖显然不小于最长反链，两者相等。 □

[BZOJ 4160] Exclusive Access 2

给一张 n 个点、m 条边的无向图，请对其定向得到一张 DAG，使得其最长路最短。

$n \leq 15$，$m \leq 100$。

[BZOJ 4160] Exclusive Access 2

给一张 n 个点、m 条边的无向图，请对其定向得到一张 DAG，使得其最长路最短。

$n \leq 15$，$m \leq 100$。

解

由 Dilworth 定理，DAG 最长路长度等于其最小反链覆盖大小。

[BZOJ 4160] Exclusive Access 2

给一张 n 个点、m 条边的无向图，请对其定向得到一张 DAG，使得其最长路最短。

$n \leq 15$，$m \leq 100$。

解

由 Dilworth 定理，DAG 最长路长度等于其最小反链覆盖大小。

状压 DP 考虑其最小反链覆盖，，对于所有 T，若 T 中的点之间不存在边，则 T 可以作为一条反链。

时间复杂度 $O(m2^n + 3^n)$。