Домашна работа 1

Увод в теория на кодирането

Кристиян Стоименов
ф.н 3MI0400121, ФМИ

Април 2023

Задача 1

Да се съставят матрици на Адамар от ред 12 и ред 16 и да се обясни начина, по който са получени. От тях да се съставят оптималните нелинейни кодове с дължини 10, 11 и 12 и 14, 15 и 16, съответно.

Решение: За да съставим Адамарова матрица от ред 12, използваме метода на Пейли. Търсим квадратичните остатъци (mod 11) - то ни дава общо 12 класа остатъци. Необходимо е да проверим само числата в интервала $[1, \frac{p-1}{2}], p = 11$. Получаваме следните стойности:

- $1^2 = 1 < 11$
- $2^2 = 4 < 11$
- $3^2 = 9 < 11$
- $4^2 \equiv 5 \pmod{11}$
- $5^2 \equiv 3 \pmod{11}$

Следователно числата $1, 3, 4, 5, 9$ са *квадратични остатъци*, а $2, 6, 7, 8, 10$ - *неостатъци*. 0 не считаме нито за остатък, нито за неостатък. Използвайки следната дефиниция за характеристична функция,

$$\chi(i) = \begin{cases} 1 & \text{когато и е квадратичен остатък по } (mod\ p), \\ -1 & \text{когато не е квадратичен остатък по } (mod\ p), \\ 0 & \text{когато } p \mid i \end{cases}$$

пресмятаме $\chi(1) = \chi(3) = \chi(4) = \chi(5) = \chi(9) = 1$ и $\chi(2) = \chi(6) = \chi(7) = \chi(8) = \chi(10) = -1$. След това съставяме матрица $Q_{11\times 11} = (q_{ij}), q_{ij} = \chi(j - i)$:

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогава получаваме Адамарова матрица от ред 12 като вградим получената Q_{11} по следния начин:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathrm{Q}_{11} - E & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

За да съставим Адамарова матрица от ред 16, използваме метода на Силвестър. Знаем, че $A_1 = (1)$ е Адамарова и поради това, можем да конструираме $A_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_1 & \text{-}\mathrm{A}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Аналогично създаваме A_4, A_8 и A_{16}:

$$A_4 = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{A}_2 & \text{-}\mathrm{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_4 & \mathrm{A}_4 \\ \mathrm{A}_4 & \text{-}\mathrm{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{16} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_8 & \mathrm{A}_8 \\ \mathrm{A}_8 & \text{-}\mathrm{A}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

За да съставим оптималните нелинейни кодове с дължини 10, 11 и 12, използваме получената Адамарова матрица от ред 12. След като я нормализираме можем директно да изведем Адамаровите кодове $\mathscr{A}_{11}$, $\mathscr{B}_{10}$, $\mathscr{D}_{12}$:

Нормализирана матрицата A_{12} изглежда така: $B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{A}_{11}$ е (11, 12, 6) код и изглежда по следния начин: $\mathscr{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{D}_{12}$ е (12, 24, 6) код и изглежда по следния начин: $\mathscr{D}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{B}_{10}$ е $(10, 6, 6)$ код и изглежда по следния начин: $\mathscr{B}_{10} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1&0&1\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$.

За да съставим оптималните нелинейни кодове с дължини 14, 15 и 16, използваме получената Адамарова матрица от ред 16. След като я нормализираме можем директно да изведем Адамаровите кодове $\mathscr{A}_{15}$, $\mathscr{B}_{14}$, $\mathscr{D}_{16}$:

Нормализирана матрицата A_{16} изглежда така: $B_{16} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{A}_{15}$ е $(15, 16, 8)$ код и изглежда по следния начин: $\mathscr{A}_{15} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{B}_{14}$ е $(14, 8, 8)$ код и изглежда по следния начин: $\mathscr{B}_{10} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{D}_{12}$ е $(12, 24, 8)$ код и изглежда по следния начин: $\mathscr{D}_{12} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$