

Домашна работа 2

Увод в теория на кодирането

Кристиян Стоименов
ф.н 3MI0400121, ФМИ

Май 2023

Задача 1

Да се напише векторът, който съответства на булевата функция $f = 1 + v_3 + v_1v_2$

- ако f е функция на три променливи
- ако f е функция на четири променливи

Решение:

Ако f е функция на три променливи:

Откриваме стойностите за f като заместим v_1 , v_2 и v_3 в полинома, вземайки стойности от всеки един от редовете. Решението е написано на Таблица 1.

Стойност	v_1	v_2	v_3	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Таблица 1: Стойности на $f(v_1, v_2, v_3) = 1 + v_3 + v_1v_2$

Ако f е функция на четири променливи:

Тъй като v_4 не участва в полинома, то неговата стойност няма отражение върху функционалната стойност. Поради тази причина, няма нужда отново да смятаме $f(v_1, v_2, v_3, *)$. Решението е написано на Таблица 2.

Задача 2

Да се намери полинома на Жегалкин, съответстващ на f , зададена със Таблица 3.

Решение:

Стойност	v_1	v_2	v_3	v_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0

Стойност	x_1	x_2	x_3	x_4	f
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	0	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	1	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Таблица 2: Стойности на $f(v_1, v_2, v_3, v_4) = 1 + v_3 + v_1v_2$

Стойност	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0

Стойност	x_1	x_2	x_3	x_4	f
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Таблица 3: Функцията f , чието представяне чрез полином се търси в Задача .

Представяме функцията f като функция с един по-малко аргумент и други две функции f_0 и f_1 . Извършваме аналогични действия, докато не стигнем до функция на една променлива, чиято стойност можем да определим непосредствено - това са функциите f_{***} .

$$\begin{aligned}
 f &= (1 + x_1)f_0 + x_1f_1 & f_{000} &= 1 \\
 f_0 &= (1 + x_2)f_{00} + x_2f_{01} & f_{001} &= x_4 \\
 f_1 &= (1 + x_2)f_{10} + x_2f_{11} & f_{010} &= 0 \\
 f_{00} &= (1 + x_3)f_{000} + x_3f_{001} & f_{011} &= 0 \\
 f_{01} &= (1 + x_3)f_{010} + x_3f_{011} & f_{100} &= 1 + x_4 \\
 f_{10} &= (1 + x_3)f_{100} + x_3f_{101} & f_{101} &= 1 \\
 f_{11} &= (1 + x_3)f_{110} + x_3f_{111} & f_{110} &= x_4 \\
 & & f_{111} &= 1
 \end{aligned}$$

Сега "се връщаме нагоре за да получим полином за функцията f .

$$\begin{aligned}
f_{00} &= (1 + x_3)f_{000} + x_3f_{001} = (1 + x_3) + x_3x_4 = 1 + x_3x_4 + x_3 \\
f_{01} &= (1 + x_3)f_{010} + x_3f_{011} = (1 + x_3).0 + x_3.0 = 0 \\
f_{10} &= (1 + x_3)f_{100} + x_3f_{101} = (1 + x_3)(1 + x_4) + x_3 = 1 + x_3x_4 + x_4 \\
f_{11} &= (1 + x_3)f_{110} + x_3f_{111} = (1 + x_3)x_4 + x_3 = x_3x_4 + x_3 + x_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= (1 + x_2)f_{00} + x_2f_{01} = (1 + x_2)(1 + x_3x_4 + x_3) + x_2.0 = 1 + x_3x_4 + x_3 + x_2 + x_2x_3x_4 + x_2x_3 \\
f_1 &= (1 + x_2)f_{10} + x_2f_{11} = (1 + x_2)(1 + x_3x_4 + x_4) + x_2(x_3x_4 + x_3 + x_4) = 1 + x_3x_4 + x_2x_3 + x_4 + x_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= (1 + x_1)f_0 + x_1f_1 = (1 + x_1)(1 + x_3x_4 + x_3 + x_2 + x_2x_3x_4 + x_2x_3) + x_1(1 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_2 + x_4) = \\
&= 1 + x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_4 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_2 + x_3
\end{aligned}$$

Задача 3

Да се опишат параметрите на всички RM кодове на пет промеливи и да се посочи количеството грешки, които могат да поправят.

Решение:

Щом разглеждаме код на пет промеливи, то той ще съдържа всички двоични вектори с дължина $2^5 = 32$ (т. е $m = 5$). Също така най-високата възможна степен за едночлен, и респективно за полиноми, е 5. Тогава трябва да изследваме $RM(r, 5)$, където $0 \leq r \leq 5$.

Дължината на кодовите думи е фиксирана: 2^5 . При зададено r от посочения интервал размерността k пресмятаме като

$$k = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}$$

За минималното разстояние знаем, че се получава като $d = 2^{m-r}$. Количеството грешки, които открива кодът е $\leq 2^{m-r} - 1$, а количеството на тези, които поправя -

$$t \leq \lfloor \frac{2^{m-r} - 1}{2} \rfloor$$

Обобщено получаваме

Код	Параметри	Граница за t
$RM(0, 5)$	$[32, 1, 32]$	$t \leq 15$
$RM(1, 5)$	$[32, 6, 16]$	$t \leq 7$
$RM(2, 5)$	$[32, 16, 8]$	$t \leq 3$
$RM(3, 5)$	$[32, 26, 4]$	$t \leq 1$
$RM(4, 5)$	$[32, 31, 2]$	$t \leq 0$
$RM(5, 5)$	$[32, 32, 1]$	$t \leq 0$

Таблица 4: Описание на кодове $RM(r, 5)$, където $0 \leq r \leq 5$

Задача 4

Да се напише пораждащата матрица на кода $RM(1,4)$ и да се декодират следните вектори чрез декодера на Рид:

- $y = 1000010111100101$
- $z = 1001011001101001$
- $t = 1110111011101110$

Решение:

Размерността на кода е

$$k = \sum_{i=0}^1 \binom{4}{i} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} = 5,$$

а дължината на всеки вектор от него е

$$2^4 = 16.$$

В пораждащата матрица трябва да включим двоичните вектори, съответстващи на едночлени от степени 0 и 1 ($\leq r$, където $r = 1$).

	x_1	x_2	x_3	x_4	f
Степен 0	*	*	*	*	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	$f = x_1$
Степен 1	0	*	*	*	0
	1	*	*	*	1

Аналогично прилагаме и за $f = x_2$, $f = x_3$ и $f = x_4$, за да получим още четири вектора. Накрая, получените вектори подреждаме в матрица, за да получим пораждащата:

$$G = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{5 \times 16}$$

Декодираме получена дума y , търсейки изпратения информационен вектор $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Връзката между двете е чрез пораждащата матрица:

$$y = a.G = \begin{pmatrix} a_1, & a_1 + a_5, & a_1 + a_4, & a_1 + a_4 + a_5, \\ a_1 + a_3, & a_1 + a_3 + a_5, & a_1 + a_3 + a_4, & a_1 + a_3 + a_4 + a_5, \\ a_1 + a_2, & a_1 + a_2 + a_5, & a_1 + a_2 + a_4, & a_1 + a_2 + a_4 + a_5, \\ a_1 + a_2 + a_3, & a_1 + a_2 + a_3 + a_5, & a_1 + a_2 + a_3 + a_4, & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \end{pmatrix}$$

Ако полученият вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_{16})$, то можем да получим следните равенства:

$$y_1 = a_1$$

$$\begin{aligned}
y_9 &= a_1 + a_2 = y_1 + a_2 \Rightarrow a_2 = y_1 + y_9 \\
y_{10} &= a_1 + a_2 + a_5 = a_2 + (a_1 + a_5) = y_2 + a_2 \Rightarrow a_2 = y_2 + y_{10} \\
y_{11} &= a_1 + a_2 + a_4 = a_2 + (a_1 + a_4) = a_2 + y_3 \Rightarrow a_2 = y_3 + y_{11} \\
y_{12} &= a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = a_2 + (a_1 + a_4 + a_5) = a_2 + y_4 \Rightarrow a_2 = y_4 + y_{12} \\
y_{13} &= a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_3) = a_2 + y_5 \Rightarrow a_2 = y_5 + y_{13} \\
y_{14} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_5 = a_2 + (a_1 + a_3 + a_5) = a_2 + y_6 \Rightarrow a_2 = y_6 + y_{14} \\
y_{15} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + (a_1 + a_3 + a_4) = a_2 + y_7 \Rightarrow a_2 = y_7 + y_{15} \\
y_{16} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_2 + (a_1 + a_3 + a_4 + a_5) = a_2 + y_8 \Rightarrow a_2 = y_8 + y_{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_5 &= a_3 + a_1 = a_3 + y_1 \Rightarrow a_3 = y_1 + y_5 \\
y_6 &= a_3 + (a_1 + a_5) = a_3 + y_2 \Rightarrow a_3 = y_2 + y_6 \\
y_7 &= a_3 + (a_1 + a_4) = a_3 + y_3 \Rightarrow a_3 = y_3 + y_7 \\
y_8 &= a_3 + (a_1 + a_3 + a_5) = a_3 + y_4 \Rightarrow a_3 = y_4 + y_8 \\
y_{13} &= a_3 + (a_1 + a_2) = a_3 + y_9 \Rightarrow a_3 = y_9 + y_{13} \\
y_{14} &= a_3 + (a_1 + a_2 + a_5) = a_3 + y_{10} \Rightarrow a_3 = y_{10} + y_{14} \\
y_{15} &= a_3 + (a_1 + a_2 + a_4) = a_3 + y_{11} \Rightarrow a_3 = y_{11} + y_{15} \\
y_{16} &= a_3 + (a_1 + a_2 + a_4 + a_5) = a_3 + y_{12} \Rightarrow a_3 = y_{12} + y_{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= a_4 + a_1 = a_4 + y_1 \Rightarrow a_4 = y_1 + y_3 \\
y_4 &= a_4 + (a_1 + a_5) = a_4 + y_2 \Rightarrow a_4 = y_2 + y_4 \\
y_7 &= a_4 + (a_1 + a_3) = a_4 + y_5 \Rightarrow a_4 = y_5 + y_7 \\
y_8 &= a_4 + (a_1 + a_3 + a_5) = a_4 + y_6 \Rightarrow a_4 = y_6 + y_8 \\
y_{11} &= a_4 + (a_1 + a_2) = a_4 + y_9 \Rightarrow a_4 = y_9 + y_{11} \\
y_{12} &= a_4 + (a_1 + a_2 + a_5) = a_4 + y_{10} \Rightarrow a_4 = y_{10} + y_{12} \\
y_{15} &= a_4 + (a_1 + a_2 + a_3) = a_4 + y_{13} \Rightarrow a_4 = y_{13} + y_{15} \\
y_{16} &= a_4 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_5) = a_4 + y_{14} \Rightarrow a_4 = y_{14} + y_{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= a_5 + a_1 = a_5 + y_1 \Rightarrow a_5 = y_1 + y_2 \\
y_4 &= a_5 + (a_1 + a_4) = a_5 + y_3 \Rightarrow a_5 = y_3 + y_4 \\
y_6 &= a_5 + (a_1 + a_3) = a_5 + y_5 \Rightarrow a_5 = y_5 + y_6 \\
y_8 &= a_5 + (a_1 + a_3 + a_4) = a_5 + y_7 \Rightarrow a_5 = y_7 + y_8 \\
y_{10} &= a_5 + (a_1 + a_2) = a_5 + y_9 \Rightarrow a_5 = y_9 + y_{10} \\
y_{12} &= a_5 + (a_1 + a_2 + a_4) = a_5 + y_{11} \Rightarrow a_5 = y_{11} + y_{12} \\
y_{14} &= a_5 + (a_1 + a_2 + a_3) = a_5 + y_{13} \Rightarrow a_5 = y_{13} + y_{14} \\
y_{16} &= a_5 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = a_5 + y_{15} \Rightarrow a_5 = y_{15} + y_{16}
\end{aligned}$$

Обобщено:

$$a_1 = y_1$$

$$a_2 = y_1 + y_9 = y_2 + y_{10} = y_3 + y_{11} = y_4 + y_{12} = y_5 + y_{13} = y_6 + y_{14} = y_7 + y_{15} = y_8 + y_{16}$$

$$a_3 = y_1 + y_5 = y_2 + y_6 = y_3 + y_7 = y_4 + y_8 = y_9 + y_{13} = y_{10} + y_{14} = y_{11} + y_{15} = y_{12} + y_{16}$$

$$a_4 = y_1 + y_3 = y_2 + y_4 = y_5 + y_7 = y_6 + y_8 = y_9 + y_{11} = y_{10} + y_{12} = y_{13} + y_{15} = y_{14} + y_{16}$$

$$a_5 = y_1 + y_2 = y_3 + y_4 = y_5 + y_6 = y_7 + y_8 = y_9 + y_{10} = y_{11} + y_{12} = y_{13} + y_{14} = y_{15} + y_{16}$$

Нека получената кодова дума за декодиране е $y = (1000010111100101)$. Тогава пресмятаме всички възможни стойности за всеки един от битовете на информационния вектор, за да получим

Бит	Брой на "0"	Брой на "1"	Стойност
a_1	-	-	1
a_2	6	2	0
a_3	2	6	1
a_4	6	2	0
a_5	2	6	1

Таблица 5: Декодиране на $y = (1000010111100101)$

Окончателно получаваме, че думата y се декодира до 10101.

Нека сега получената кодова дума за декодиране е $z = (1001011001101001)$. Тогава пресмятаме по сходен начин

Бит	Брой на "0"	Брой на "1"	Стойност
a_1	-	-	1
a_2	0	8	1
a_3	0	8	1
a_4	0	8	0
a_5	0	8	1

Таблица 6: Декодиране на $z = (1001011001101001)$

Окончателно получаваме, че думата z се декодира до 11111.

Нека накрая получената кодова дума да бъде $t = (1110111011101110)$. Тогава пресмятаме по сходен начин

Бит	Брой на "0"	Брой на "1"	Стойност
a_1	-	-	1
a_2	8	0	0
a_3	8	0	0
a_4	4	4	-
a_5	4	4	-

Таблица 7: Декодиране на $t = (1110111011101110)$

Така можем да заключим, че t не се декодира недвусмислено.

Задача 5

Да се декодират следните вектори чрез постъпково мажоритарно декодиране, приложено върху $RM(1, 3)$ код:

- $y = (10111010)$
- $z = (10011001)$
- $t = (01110111)$

Решение:

При $RM(1, 3)$ се интересуваме от точките на афинната геометрия $AG(3, 2)$, които са $P_0 = (000)$, $P_1 = (001)$, $P_2 = (010)$, $P_3 = (011)$, $P_4 = (100)$, $P_5 = (101)$, $P_6 = (110)$, $P_7 = (111)$.

Нека разглеждаме получените вектори като характеристични вектори на подмножество от точки от афинната геометрия $AG(3, 2)$.

$$\begin{aligned}M_y &= \{P_0, P_2, P_3, P_4, P_6\} \subset AG(3, 2), \\M_z &= \{P_0, P_3, P_4, P_7\} \subset AG(3, 2), \\M_t &= \{P_1, P_2, P_3, P_5, P_6, P_7\} \subset AG(3, 2)\end{aligned}$$

Разглеждаме всички равнини (двумерни подпространства на $AG(3, 2)$) и тяхната четност при пресичане с тези подмножества от точки M като ги подреждаме в таблица.

Разглеждаме всички прави, зададени чрез две от точките P и техните четности, определени от четностите на равнините, в които се срещат. Представяме ги сходно на това равнините и техните четности.

Накрая разглеждаме и четностите на точките в съответните подмножества.

За изпратени кодови думи получаваме съответно

$$\begin{aligned}a_y &= (00010000), \\a_z &= (10011001), \\a_t &= ;, .\end{aligned}$$

Споменатите таблици се намират на следващата страница.

Равнина	M_y	M_z	M_t
P_0, P_1, P_2, P_3	1	0	1
P_0, P_1, P_4, P_5	0	0	0
P_0, P_1, P_6, P_7	0	0	1
P_0, P_2, P_4, P_6	0	0	0
P_0, P_2, P_5, P_7	0	0	1
P_0, P_3, P_4, P_7	1	0	0
P_0, P_3, P_5, P_6	1	0	1
P_1, P_2, P_4, P_7	0	0	1
P_1, P_2, P_5, P_6	0	0	0
P_1, P_3, P_4, P_6	1	0	1
P_1, P_3, P_5, P_7	1	0	0
P_2, P_3, P_4, P_5	1	0	1
P_2, P_3, P_6, P_7	1	0	0
P_4, P_5, P_6, P_7	0	0	1

Права	M_y	M_z	M_t
P_0, P_1	0	0	1
P_0, P_2	0	0	1
P_0, P_3	1	0	1
P_0, P_4	0	0	0
P_0, P_5	0	0	1
P_0, P_6	0	0	1
P_0, P_7	0	0	1
P_1, P_2	0	0	1
P_1, P_3	1	0	1
P_1, P_4	0	0	1
P_1, P_5	0	0	0
P_1, P_6	0	0	1
P_1, P_7	0	0	1
P_2, P_3	1	0	1
P_2, P_4	0	0	1
P_2, P_5	0	0	1
P_2, P_6	0	0	0
P_2, P_7	0	0	1
P_3, P_4	1	0	1
P_3, P_5	1	0	1
P_3, P_6	1	0	1
P_3, P_7	1	0	0
P_4, P_5	0	0	1
P_4, P_6	0	0	1
P_4, P_7	0	0	1
P_5, P_6	0	0	1
P_5, P_7	0	0	1
P_6, P_7	0	0	1

Точка	M_y	M_z	M_t
P_0	0	0	1
P_1	0	0	1
P_2	0	0	1
P_3	1	0	1
P_4	0	0	1
P_5	0	0	1
P_6	0	0	1
P_7	0	0	1

Таблица 8: Подпространства на $AG(3, 2)$ и техните четности спрямо множествата от точки зададени от подадените кодови вектори.