数据结构和算法
（Python描述）

郭 炜

微信公众号

微博：http://weibo.com/guoweiofpku

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄

图的遍历和搜索

图的概念

黄山

图的概念

图由顶点集合和边集合组成

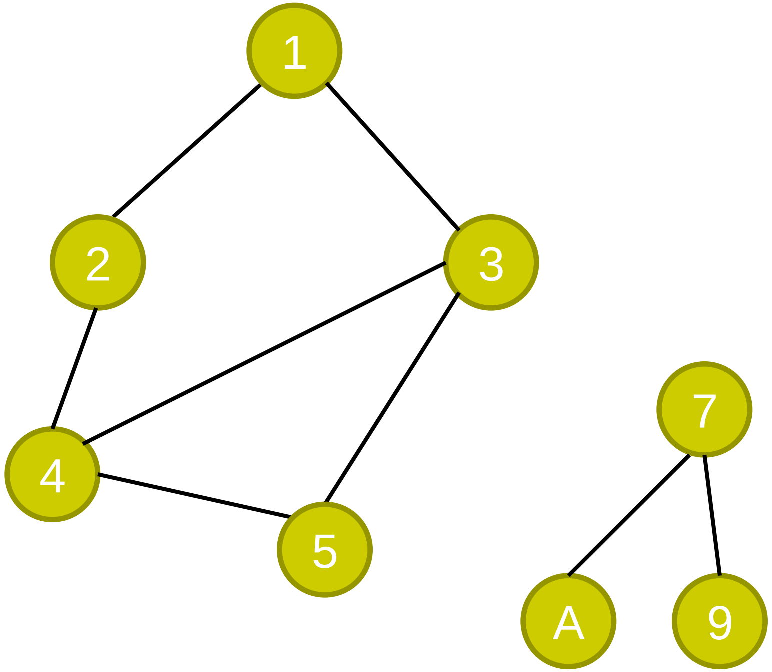
每条边连接两个不同顶点

有向图：边有方向(有起点和终点)
无向图：边没有方向

边只是逻辑上表示两个顶点有直接关系，边是直的还是弯的，边有没有交叉，都没有意义。

无向图两个顶点之间最多一条边
有向图两个顶点之间最多两条方向不同的边

无向图



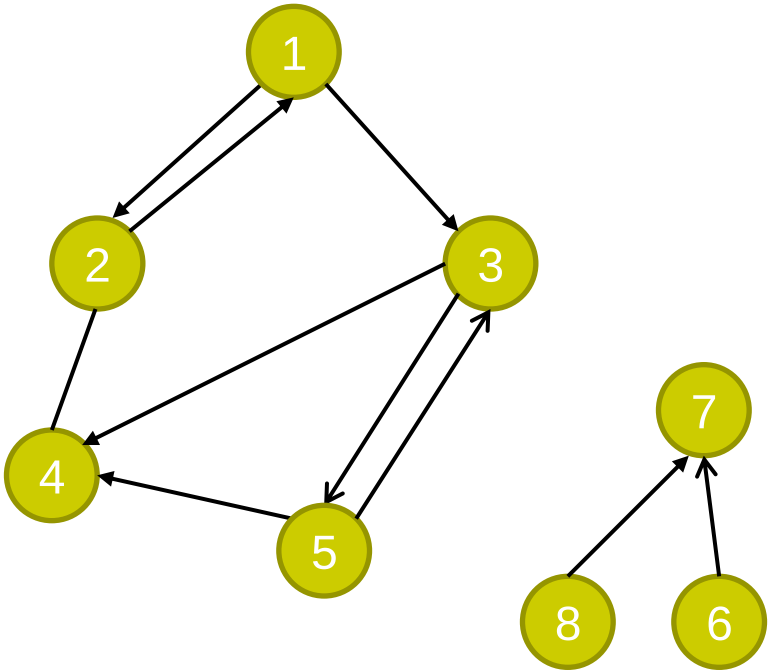
图的概念

无向图连接顶点u,v的边，记为(u,v)
有向图连接顶点u,v的边，记为<u,v>

无向图中边(u,v)存在，称u,v相邻,u,v互为邻点

有向图中边<u,v>存在，称v是u的邻点

有向图



图的相关概念

1) 顶点的度数：和顶点相连的边的数目。
2) 顶点的出度：有向图中，以该顶点作为起点的边的数目
3) 顶点的入度：有向图中，以该顶点作为终点的边的数目
4) 顶点的出边：有向图中，以该顶点为起点的边
5) 顶点的入边：有向图中，以该顶点为终点的边
6) 路径：对于无向图，如果存在顶点序列$V_{i0},V_{i1}V_{i2}.....V_{im}$,使得$(V_{i0},V_{i1})$,$(V_{i1},v_{i2})...(V_{im-1},V_{im})$都存在，则称（$V_{i0},V_{i1}...V_{im}$)是从$V_{i0}$到$V_{im}$的一条路径。（对于有向图，把()换成<>）

5）路径的长度：路径上的边的数目
6）回路（环）：起点和终点相同的路径
7) 简单路径：除了起点和终点可能相同外，其它顶点都不相同的路径

图的相关概念

8) 完全图:
    完全无向图：任意两个顶点都有边相连
    完全有向图：任意两个顶点都有两条方向相反的边

9) 连通：如果存在从顶点u到顶点v的路径，则称u到v连通，或u可达v。无向图中，u可达v,必然v可达u。有向图中，u可达v，并不能说明v可达u。
10) 连通无向图：图中任意两个顶点u和v互相可达。
11) 强连通有向图：图中任意两个顶点u和v互相可达。
12) 子图：从图中抽取部分或全部边和点构成的图
13) 连通分量（极大连通子图）：无向图的一个子图，是连通的，且再添加任何一些原图中的顶点和边，新子图都不再连通。

图的相关概念

14) 强连通分量：有向图的一个子图，是强连通的，且再添加任何一些原图中的顶点和边，新子图都不再强连通。

15) 带权图：边被赋予一个权值的图

16) 网络：带权无向连通图

图的性质

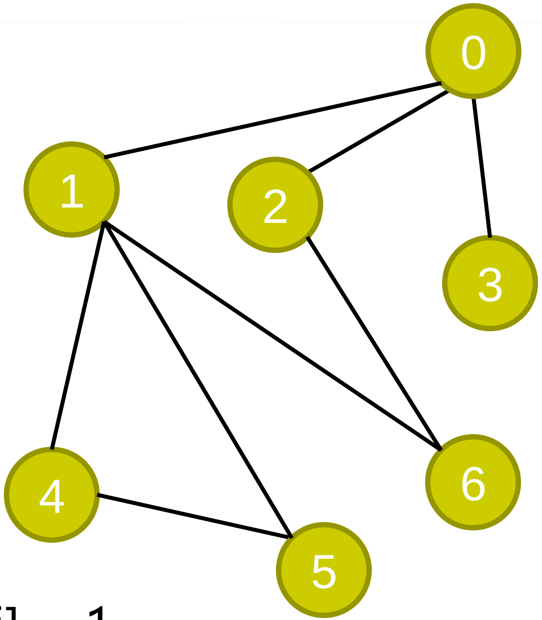
1. 图的边数等于顶点度数之和的一半
2. n个顶点的连通图至少有n-1条边
3. n个顶点的，无回路的连通图就是一棵树，有n-1条边

图的表示方法

云岗石窟

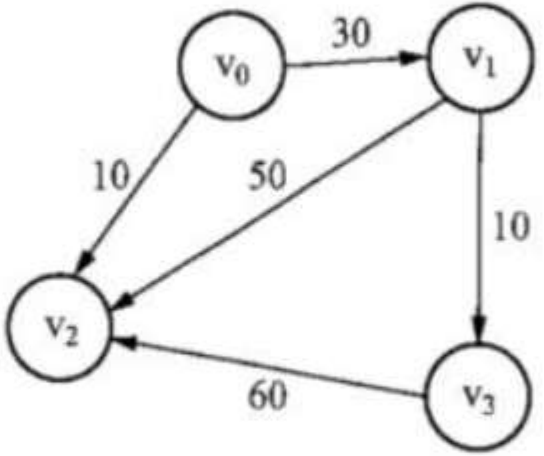
用邻接矩阵表示无向图

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



- G[i][j] = 1 ⇔ 点i和点j之间有边 ⇔ G[j][i] = 1
- G[i][j] = 0 ⇔ 点i和点j之间无边 ⇔ G[j][i] = 0或无穷大
- 矩阵是对称的。对角线元素根据需要设置成0或无穷大或其它值
- 如果是带权图，若(i,j)存在，可以将G[i][j]和G[j][i]设置为权值，(i,j)不存在，则G[i][j]和G[j][i]设为无穷大或0或其它需要的值

用邻接矩阵表示有向图



$$
\begin{pmatrix}
\infty & 30 & 10 & \infty \\
\infty & \infty & 50 & 10 \\
\infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 60 & \infty
\end{pmatrix}
$$

- G[i][j] = 1或权值 ⇔ 点i和点j之间有边
- G[i][j] = 0 或无穷大 ⇔ 点i和点j之间无边
- 矩阵未必是对称的。对角线元素根据需要设置成0或无穷大或其它值

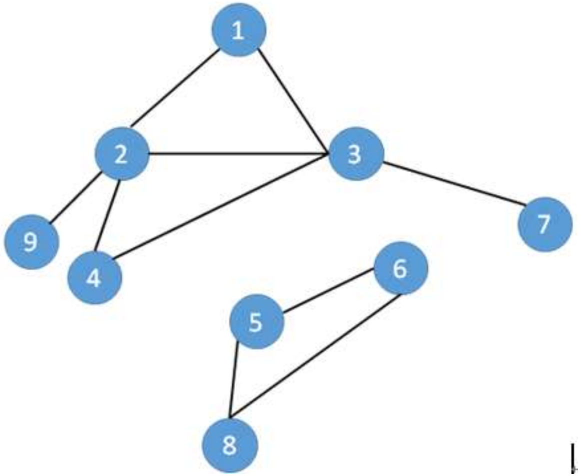
邻接矩阵表示法的适用场景

- n个顶点的图，需要一个有n^2个元素的矩阵,比较费空间
- 查找和一个顶点的邻点，需要O(n)时间
- 对于边的数目只有O(n)量级的稀疏图，邻接矩阵既浪费空间也浪费时间
- 适用于边的数目达到$O(n^2)$量级的稠密图

用邻接表表示图

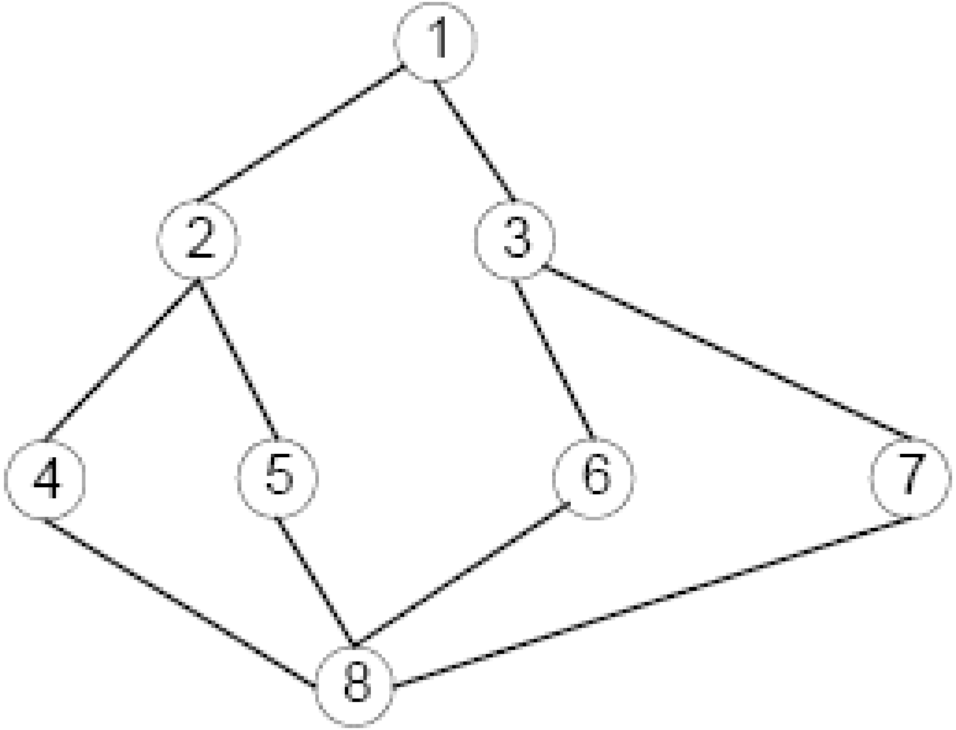
每个顶点V对应一个列表。对无向图，列表里存放所有和V相连的边；对有向图，列表里存放所有V的出边。边的信息包括邻点，边权值等。对稀疏图特别适用。

1	2	3		
2	1	4	9	3
3	1	4	7	2
4	2	3		
5	6	8		
6	5	8		
7	3			
8	5	6		
9	2			



图的遍历

深搜 vs. 广搜



若要遍历所有顶点：

- 深搜（能往前走就往前走)

1-2-4-8-5-6-3-7

- 广搜(按距离起点的距离，即最小边数从小到大遍历)

1-2-3-4-5-6-7-8

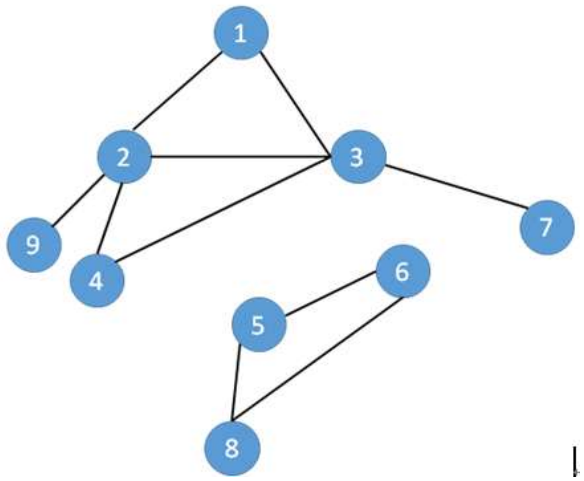
深度优先搜索(Depth-First-Search)

从起点出发，走过的点要做标记，发现有没走过的点，就随意挑一个往前走，走不了就回退，此种路径搜索策略就称为“深度优先搜索”，简称“深搜”。

其实称为“远度优先搜索”更容易理解些。因为这种策略能往前走一步就往前走一步，总是试图走得更远。所谓远近(或深度)，就是以距离起点的步数来衡量的。

图的深度优先遍历

```
def Dfs(V):
        将V标记为旧点
        对和V相邻的每个点 U:
                Dfs(U)

def main():
        将所有点都标记为新点
        while(在图中能找到新点k)
                Dfs(k)
```



图的深度优先遍历 --- 邻接表形式

```
def dfsTravel(G,op): #G是邻接表
    def dfs(v):
        visited[v] = True
        op(v)
        for u in G[v]:
            if not visited[u]:
                dfs(u)
    n = len(G)  # 顶点数目
    visited = [False for i in range(n)]
    for i in range(n):  # 顶点编号0到n-1
        if not visited[i]:
            dfs(i)
```

- 每个顶点看过一遍，每条边看过一遍（无向图两遍）复杂度O(E+V) E是边数，V是顶点数

图的深度优先遍历 --- 邻接矩阵形式

```
def dfsTravel2(G,op):  #G是邻接矩阵
    def dfs(v):  #从顶点v开始进行深度优先遍历
        visited[v] = True
        op(v)
        for i in range(n):
            if G[v][i] and not visited[i]:
                dfs(i)
    n = len(G)   # 顶点数目
    visited = [False for i in range(n)]
    for i in range(n):   # 顶点编号0到n-1
        if not visited[i]:
            dfs(i)
```

- 对每个顶点v要做一次dfs(v)，做一次dfs(v)时要O(V)时间查看它和另外所有顶点的关系，因此复杂度O(V^2) V是顶点数

图的深度优先遍历 --- 邻接表形式

➢ **非递归写法**

```
def dfsTravel3(G,op):#顶点编号从0开始，G是邻接表
    n = len(G)   # 顶点数目
    visited = [False for i in range(n)]
    for x in range(n):
        if not visited[x]:
            stack = [[x,0]] #0表示只看了0个邻点
            visited[x] = True
            while len(stack) > 0:
                nd = stack[-1] #nd[1]表示已经看过nd[1]个邻点
                v = nd[0]
                if nd[1] == 0:
                    op(v)
                if nd[1] == len(G[v]): #最后一个邻点已经看过
                    stack.pop()
```

➢ 每个顶点出栈一次。对栈顶顶点，查看它的所有边，因此复杂度O(V+E) V是顶点数

图的深度优先遍历 --- 邻接表形式

- 非递归写法

```
else: #对应if nd[1] == len(G[v]):
    for i in range(nd[1],len(G[v])):
        u = G[v][i]
        nd[1] += 1 #看过的邻点多了一个
        if not visited[u]:
            stack.append([u,0])
            visited[u] = True
            break
```

图的广度优先遍历

1）选一个没有访问过的顶点入队列,并标记其为访问过。如果找不到，遍历结束

2) 若队列不为空，取出队头顶点x，goto 3)。若队列为空，goto 1)

3) 找出x的所有未访问过的邻点，将它们标记为访问过，并入队列

4) goto 2)

因为图可能不连通（有向图），或不是强连通（无向图），因此队列为空时，可能还有顶点未曾访问过

图的广度优先遍历 --- 邻接表形式

```
def bfsTravel(G,op): #G是邻接表形式的图，op是访问操作
    import collections
    n = len(G) #顶点数目
    q = collections.deque()   #队列,即Open表
    visited = [False for i in range(n)]
    for i in range(n): #顶点编号0到n-1
        if not visited[i]:
            q.append(i)
            visited[i] = True
            while len(q) > 0:
                v = q.popleft() #弹出队头顶点
                op(v) #访问顶点v
                for e in G[v]: #G[v]是点v的边的列表,e是Edge对象
                    if not visited[e.v]: #e.v是边e的另一个顶点，还有一个是v
                        q.append(e.v)
                        visited[e.v] = True
```

- 每条边看过一遍或两遍（对无向图可能两遍），每个顶点看过一遍，因此复杂度O(E+V) E是边数，V是顶点数

图的广度优先遍历 --- 邻接表形式

```
class Edge:
        def __init__(self,v,w):
            self.v,self.w = v,w  #v是顶点，w是权值
```

图的广度优先遍历 --- 邻接矩阵形式

```
def bfsTravel2(G,op):
    import collections
    n = len(G) #顶点数目
    q = collections.deque()  #队列,即Open表
    visited = [False for i in range(n)]
    for x in range(n): #顶点编号0到n-1
        if not visited[x]:
            q.append(x)
            visited[x] = True
            while len(q) > 0:
                v = q.popleft()
                op(v) #访问顶点v
                for i in range(n):
                    if G[v][i]: #G[v][i]不为0说明有边(v,i)或<v,i>
                        if not visited[i]:
                            q.append(i)
                            visited[i] = True
```

- 每个顶点出队一次。对队头顶点，要O(V)时间查看它和另外所有顶点的关系，因此复杂度$O(V^2)$ V是顶点数

图的遍历的复杂度

用邻接矩阵存储图： $O(V^2)$

用邻接表存储图：$O(E+V)$

图的深度优先搜索

长城入海处：老龙头

在图上寻找路径(搜索)

在图上如何寻找从1到8的路径?

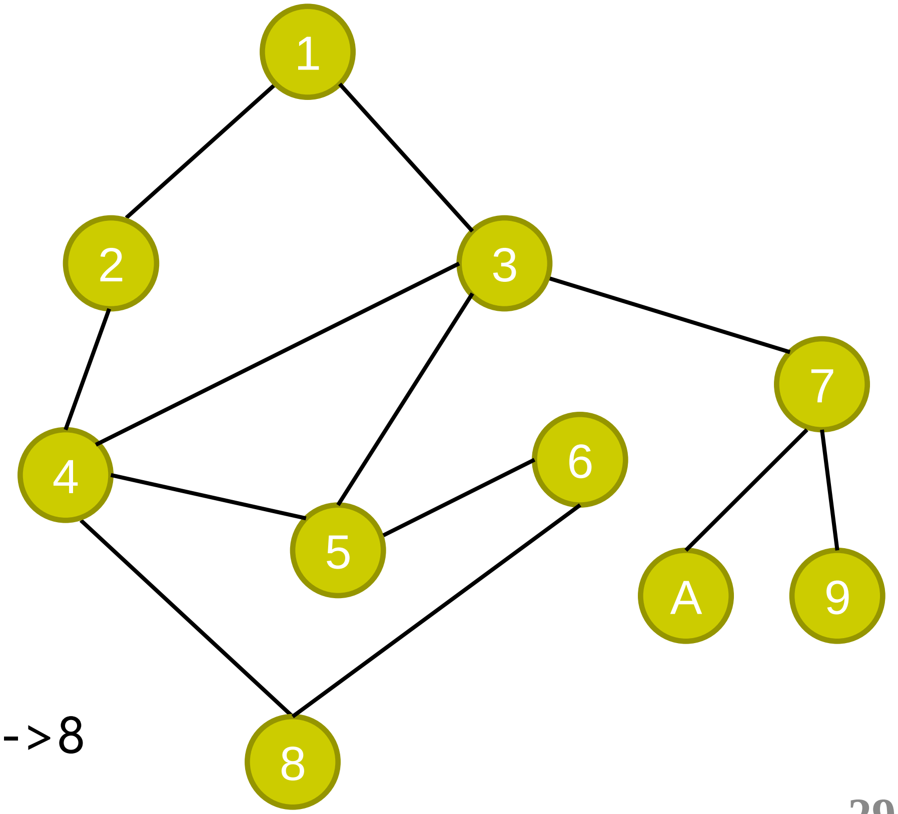
- 广度优先搜索:

1 2 3 4 8
找到的路径就是最短的

- 深度优先搜索

运气最好: 1->2->4->8
运气稍差: 1->2->4->5->6->8
运气坏:

1->3->7->9=>7->A=>7=>3->5->6->8
(双线箭头表示回退)



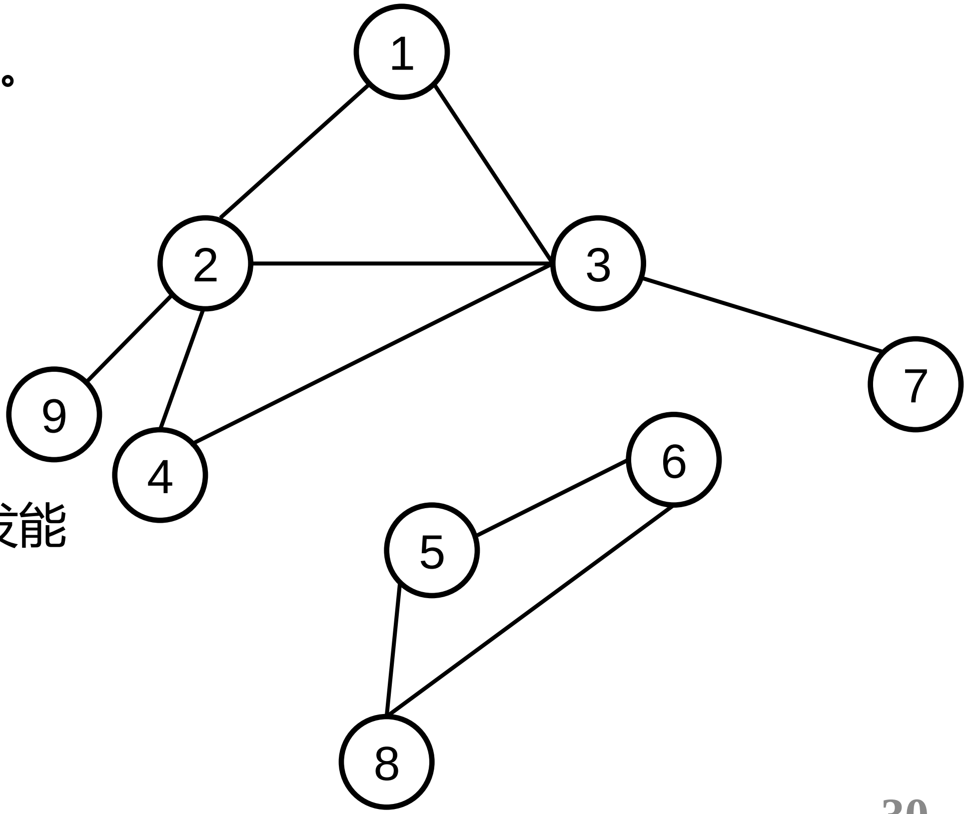
在图上寻找路径

不连通的图，无法从顶点1走到顶点8。

完整的尝试过程可能如下：
1->2->4->3->7=>3=>4=>2->9=>2=>1

结论：不存在从1到8的路径

得出这个结论之前，一定会把从1出发能走到的点全部都走过。



在图上寻找路径(深搜)

➢判断从V出发是否能走到终点:

```
def dfs(V):
        if  V为终点:
                return True
        将V标记为走过
        对每个V的没有走过的邻点U:
                if dfs(U) == True
                        return True
        return False
```

在图上寻找路径(深搜)

```
def main():
    将所有点都标记为没走过
    指定终点
    print(dfs(起点))
```

在图上寻找路径(深搜)

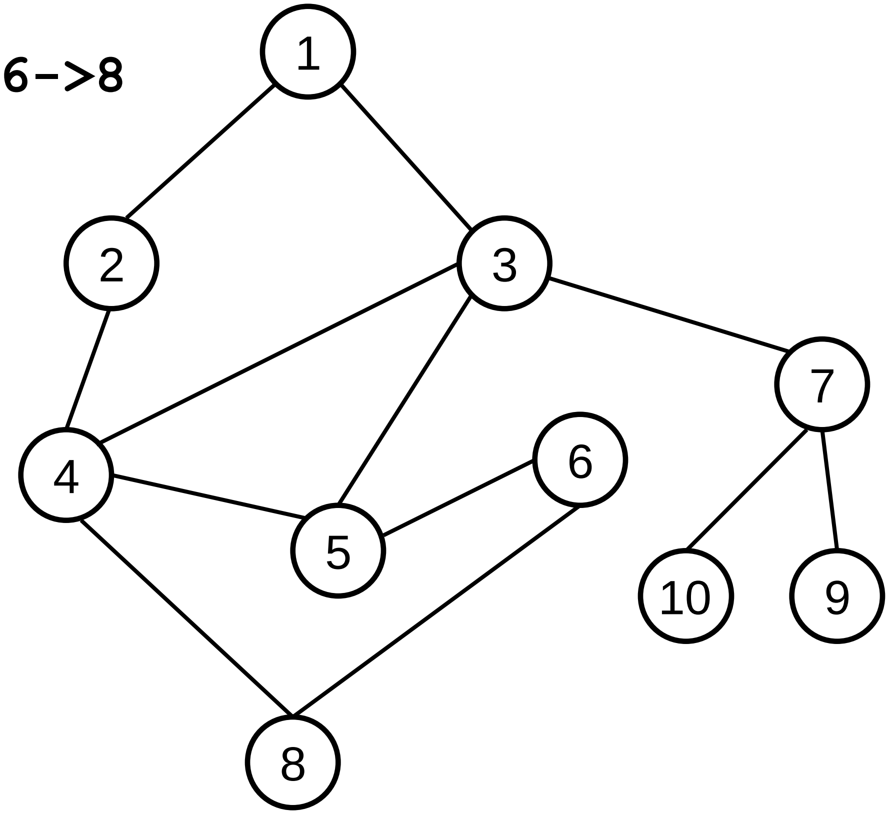
➢判断从V出发是否能走到终点,如果能，要记录所有路径：

```
path = []   #记录路径上的顶点
def dfs(V):  #寻找从V到终点的所有路径
        path.append(V)
        if V为终点:
                print(path)   #输出一条路径
                path.pop()    #从path中删除V
                return
        将V标记为走过
        对V的每个没走过的邻点U:
                dfs(U)
        path.pop()
        将v标记为没有走过
        return

将所有点都标记为没走过
指定终点
dfs(起点)
```

在图上寻找路径(深搜)

1->3->7->9=>7->10=>7=>3->5->6->8

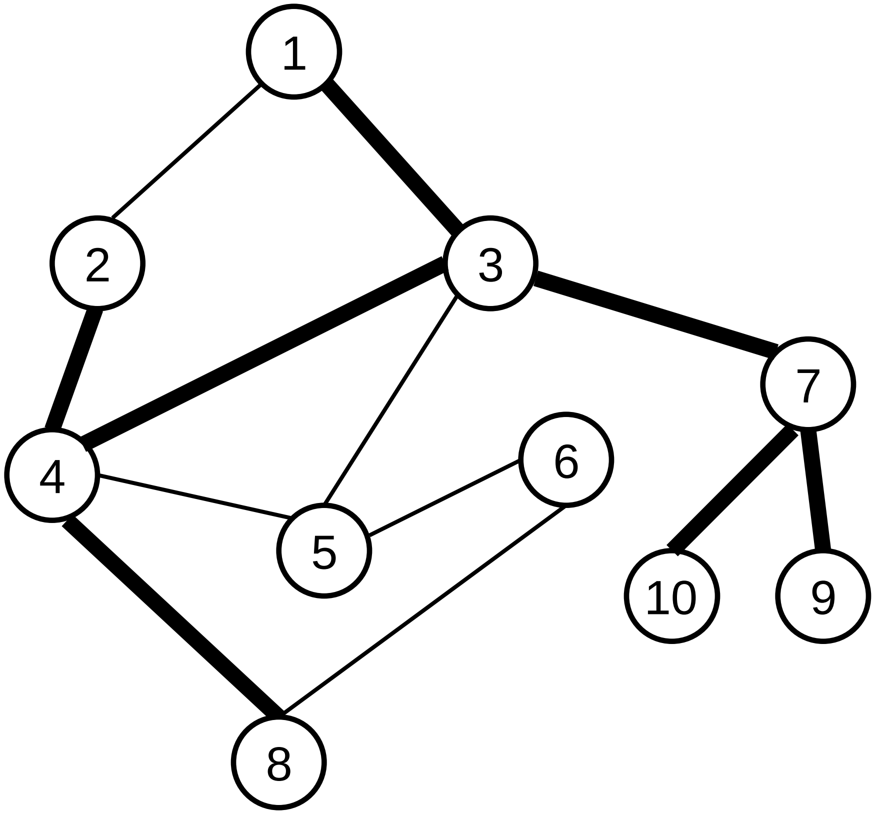
path: 1,3,5,6,8



在图上寻找路径(深搜)

1->3->7->9=>7->10=>7=>3->4->2=>4->8

path: 1,3,4,8



在图上寻找路径(深搜)

- 许多问题都能转换为在图上寻找路径

  状态对应顶点，状态A可以通过一步操作转换到状态B，则状态A到状态B就有边
  求如何将初始状态转换为目标状态，就是在图上找从初始状态到目标状态的路径

例如，给定4个数，要用加减乘除算出24

初始状态：4个数

目标状态：1个数，即24

状态转移：经过一次运算，减少两个原有的数，新增一个数(运算结果)

解决问题未必需要用邻接表或邻接矩阵建图

深搜寻找最优路径

美国黄石公园大棱镜温泉

深搜在图上寻找最优(步数最少)路径

```
bestPath = [0] * MAX_LEN #存放最优路径, MAX_LEN取顶点总数即可
minSteps = INFINITE    #最优路径步数
path = [0] * MAX_LEN   #正在探索的路径
def Dfs(V): #从V出发进行深搜
        global depth
        if V为终点:
                path[depth] = V
                if depth < minSteps:
                        minSteps = depth
                        拷贝path到bestPath
                return;
        if  V为旧点:
                return
        if depth >= minSteps:
                return //最优性剪枝
        将V标记为旧点
        path[depth]=V
        depth+=1
```

在图上寻找最优(步数最少)路径

```
        对和V相邻的每个顶点U:
                Dfs(U)
        将V恢复为新点
        depth-=1

def main():
        将所有点都标记为新点
        depth = 0
        Dfs(起点)
        if minSteps != INFINITE):
                for i in range(minSteps+1):
                        print(bestPath[i],end = ",")
```

例题：城堡问题

大连金石滩

例题：百练2815 城堡问题

- 右图是一个城堡的地形图。请你编写一个程序，计算城堡一共有多少房间，最大的房间有多大。城堡被分割成m×n(m≤50，n≤50)个方块，每个方块可以有0~4面墙。

```
    1   2   3   4   5   6   7
  #############################
1 #   |   #   |   #   |   |   #
  #####---#####---#---#####---#
2 #   #   |   #   #   #   #   #
  #---#####---#####---#####---#
3 #   |   |   #   #   #   #   #
  #---#########---#####---#---#
4 #   #   |   |   |   |   #   #
  #############################
             (图 1)

  #  = Wall
  |  = No wall
  -  = No wall
```

输入输出

- 输入
  - 程序从标准输入设备读入数据。
  - 第一行是两个整数，分别是南北向、东西向的方块数。
  - 在接下来的输入行里，每个方块用一个数字(0≤p≤50)描述。用一个数字表示方块周围的墙，1表示西墙，2表示北墙，4表示东墙，8表示南墙。每个方块用代表其周围墙的数字之和表示。城堡的内墙被计算两次，方块(1,1)的南墙同时也是方块(2,1)的北墙。
  - 输入的数据保证城堡至少有两个房间。
- 输出
  - 城堡的房间数、城堡中最大房间所包括的方块数。
  - 结果显示在标准输出设备上。

- 样例输入

4

7

11 6 11 6 3 10 6

7 9 6 13 5 15 5

1 10 12 7 13 7 5

13 11 10 8 10 12 13

- 样例输出

5

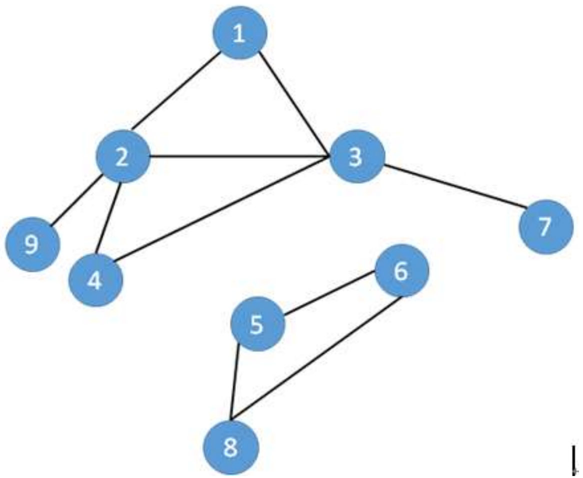
9

数据保证城堡
四周都是墙

```
    1   2   3   4   5   6   7
  #############################
1 #   |   #   |   #   |   |   #
  #####---#####---#---#####---#
2 #   #   |   #   #   #   #   #
  #---#####---#####---#####---#
3 #   |   |   #   #   #   #   #
  #---#########---#####---#---#
4 #   #   |   |   |   |   #   #
  #############################
             (图 1)

  #  = Wall
  |  = No wall
  -  = No wall
```

解题思路

- 把方块看作是顶点，相邻两个方块之间如果没有墙，则在方块之间连一条边，这样城堡就能转换成一个图。
- 求房间个数，实际上就是在求图中有多少个极大连通子图。
- 一个连通子图，往里头加任何一个图里的其他点，就会变得不连通，那么这个连通子图就是极大连通子图。（如：(8,5,6)）



解题思路

- 对每一个房间，深度优先搜索，从而给这个房间能够到达的所有位置染色。最后统计一共用了几种颜色，以及每种颜色的数量。
- 比如

1 1 2 2 3 3 3
1 1 1 2 3 4 3
1 1 1 5 3 5 3
1 5 5 5 5 5 3

- 从而一共有5个房间，最大的房间（1）占据9个格子

```
    1   2   3   4   5   6   7
  #############################
1 #   |   #   |   #   |   |   #
  #####---#####---#---#####---#
2 #   #   |   #   #   #   #   #
  #---#####---#####---#####---#
3 #   |   |   #   #   #   #   #
  #---#########---#####---#---#
4 #   #   |   |   |   |   #   #
  #############################
           (图 1)

  #  = Wall
  |  = No wall
  -  = No wall
```

```python
maxRoomArea = roomNum = roomArea = 0
def Dfs(i, k):
        global roomNum,roomArea
        if color[i][k]:
                return
        roomArea = roomArea + 1
        color[i][k] = roomNum
        if (rooms[i][k] & 1) == 0:  Dfs(i,k-1)   # 向西走
        if (rooms[i][k] & 2) == 0:  Dfs(i-1,k)   # 向北
        if (rooms[i][k] & 4) == 0:  Dfs(i,k+1)  # 向东
        if (rooms[i][k] & 8) == 0:  Dfs(i+1,k)  # 向南

RC = list( map( int, input().split() ) ) #输入格式和题目描述不一致
if len(RC) == 1:
        R = RC[0]
        C = int(input())
else:
        R, C = RC
```

```
rooms = [ [ ] ] #第0行没用
color = [ [ 0 for i in range(C+2)] for i in range(R+2) ]
for i in range(R):
        rooms.append( [0] + list( map( int, input().split() ) ))
for i in range(1,R+1):
        for k in range(1,C+1):
                if not color[i][k]:
                        roomNum +=  1
                        roomArea = 0
                        Dfs(i,k)
                        maxRoomArea = max(roomArea,maxRoomArea)
print( roomNum )
print( maxRoomArea )
```

复杂度：O(R*C)

例题：踩方格

阳朔遇龙河

例题：百练4982 踩方格

有一个方格矩阵，矩阵边界在无穷远处。我们做如下假设：

a.每走一步时，只能从当前方格移动一格，走到某个相邻的方格上；
b. 走过的格子立即塌陷无法再走第二次；
c. 只能向北、东、西三个方向走；

请问：如果允许在方格矩阵上走n步(n<=20)，共有多少种不同的方案。
2种走法只要有一步不一样，即被认为是不同的方案。

例题：百练4982 踩方格

思路：

递归
从 (i,j) 出发，走n步的方案数，等于以下三项之和：

从(i+1,j)出发，走n-1步的方案数。前提：(i+1,j)还没走过
从(i,j+1)出发，走n-1步的方案数。前提：(i,j+1)还没走过
从(i,j-1)出发，走n-1步的方案数。前提：(i,j-1)还没走过

```python
visited = [ [ 0 for i in range(50) ] for i in range(30) ]
def ways( i, j, n):
        if n == 0:
                return 1
        visited[i][j] = 1
        num = 0
        if not visited[i][j-1]:
                num+= ways(i,j-1,n-1)
        if not visited[i][j+1]:
                num+= ways(i,j+1,n-1)
        if not visited[i+1][j]:
                num+= ways(i+1,j,n-1)
        visited[i][j] = 0
        return num

n = int( input() )
print( ways(0,25,n) )
```

	i,j,n	
i-1,j-1,n	i-1,j,n+1	i-1,j+1,n

例题：算 24

例题：算24

给出4个小于10个正整数，你可以使用加减乘除4种运算以及括号把这4个数连接起来得到一个表达式。现在的问题是，是否存在一种方式使得得到的表达式的结果等于24。

样例输入

5 5 5 1
1 1 4 2
0 0 0 0

样例输出

YES
NO

例题：算24

思路：

先做一步，即拿两个数来算以下，剩下的问题就变成了3个数算24

```python
import math
EPS = 1e-6
def isZero( x ):
    return math.fabs(x) <= EPS
def count24( a , n ): #用列表a里面的头n个元素算24，返回能否成功
    if n == 1:
        if isZero( a[0] - 24 ):
            return True
        else:
            return False
    b = [ float() for i in range(5) ]
    for i in range( n-1 ):
        for j in range( i+1 , n ): #选 a[i]和a[j]算一下
            m = 0
            for k in range(n): #把a[i],a[j]以外的数放到b开头
                if k != i and k != j:
                    b[m] = a[k]
                    m = m+1
```

```
            b[m] = a[i] + a[j]
            if count24(b , m+1):
                return True
            b[m] = a[i] - a[j]
            if count24(b, m + 1):
                return True
            b[m] = a[j] - a[i]
            if count24(b, m + 1):
                return True
            b[m] = a[i] * a[j]
            if count24(b, m + 1):
                return True
            if not isZero(a[j]):
                b[m] = a[i] / a[j]
                if (count24(b, m+1)): return True
            if not isZero(a[i]):
                b[m] = a[j] / a[i]
                if (count24(b, m + 1)):
                    return True
    return False
```

```python
#main
while True:
    a = input().split()
    a = [ int(c) for c in a ]
    if isZero( a[0] ):
        break
    if count24( a , 4 ):
        print( "YES" )
    else:
        print( "NO" )
```

例题:Roads

美国黄石公园

ROADS (POJ1724)

N个城市，编号1到N。城市间有R条单向道路。
每条道路连接两个城市，有长度和过路费两个属性。
Bob只有K块钱，他想从城市1走到城市N。问最短共需要走多长的路。如果到不了N，输出-1

2<=N<=100
0<=K<=10000
1<=R<=10000
每条路的长度 L, 1 <= L <= 100
每条路的过路费T , 0 <= T <= 100

输入：
K
N
R
s_1 e_1 L_1 T_1
s_1 e_2 L_2 T_2
...
s_R e_R L_R T_R
s e是路起点和终点

解题思路

从城市 1开始深度优先遍历整个图，找到所有能过到达 N 的走法，选一个最优的。

解题思路

从城市 1开始深度优先遍历整个图，找到所有能过到达 N 的走法，
选一个最优的。

最优性剪枝：

1) 如果当前已经找到的最优路径长度为L ,那么在继续搜索的过程中，总长度已经大于等于L的走法，就可以直接放弃，不用走到底了

解题思路

从城市 1开始深度优先遍历整个图，找到所有能到达 N 的走法，
选一个最优的。

最优性剪枝：

1) 如果当前已经找到的最优路径长度为L ,那么在继续搜索的过程中，总长度已经大于等于L的走法，就可以直接放弃，不用走到底了

保存中间计算结果用于最优性剪枝：

2) 用midL[k][m] 表示：走到城市k时总过路费为m的条件下，最优路径的长度。若在后续的搜索中，再次走到k时，如果总路费恰好为m，且此时的路径长度已经不小于midL[k][m],则不必再走下去了。

解题思路

另一种通用的最优性剪枝思想 ---保存中间计算结果用于最优性剪枝：

2） 如果到达某个状态A时，发现前面曾经也到达过A，且前面那次到达A所花代价更少，则剪枝。这要求保存到达状态A的到目前为止的最少代价。

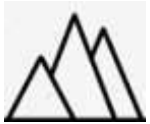
用midL[k][m] 表示：走到城市k时总过路费为m的条件下，最优路径的长度。若在后续的搜索中，再次走到k时，如果总路费恰好为m，且此时的路径长度已经不小于midL[k][m],则不必再走下去了。

```
MX = 110
INF = 1 << 30
class Road:
    def __init__(self,d,L,t):
        self.d,self.L,self.t = d,L,t

cityMap = [[] for i in range(MX)] #邻接表。cityMap[i]是从点i有路连到的城市集合
minLen = INF  #当前找到的最优路径的长度
totalLen = 0   #正在走的路径的长度
totalCost = 0 #正在走的路径的花销
visited = [0] * MX  #城市是否已经走过的标记
minL = [[INF for j in range(10100)] for i in range(MX)]
#minL[i][j]表示从1到i点的，花销为j的最短路的长度
```

```
def Dfs(s): #从 s开始向N行走
    global N,minLen,totalLen,totalCost,cityMap,K
    if s == N :
        minLen = min(minLen,totalLen)
        return
    for i in range( len(cityMap[s])):
        d =  cityMap[s][i].d  #s 有路连到d
        if  visited[d] == 0:
            cost = totalCost +  cityMap[s][i].t
            if cost > K:
                continue
            if totalLen+cityMap[s][i].L >= minLen or \
                 totalLen + cityMap[s][i].L >= minL[d][cost]:
                continue
            totalLen += cityMap[s][i].L
            totalCost +=  cityMap[s][i].t
            minL[d][cost] = totalLen
            visited[d] = 1
            Dfs(d)
```

```
            visited[d] = 0
            totalCost -=  cityMap[s][i].t
            totalLen -= cityMap[s][i].L

#main
K  = int(input())
N = int(input())
R = int(input())
for i in range(R):
    r = Road(0,0,0)
    s,r.d,r.L,r.t = map(int,input().split())
    if s != r.d:
        cityMap[s].append(r)
totalLen = totalCost = 0
visited[1] = 1
Dfs(1)
if minLen < INF:
    print(minLen)
else:
    print(-1)
```

例题:生日蛋糕



美国黄石公园

生日蛋糕（POJ1190）

要制作一个体积为N π 的M层生日蛋糕，每层都是一个圆柱体。
设从下往上数第i(1 <= i <= M)层蛋糕是半径为Ri, 高度为Hi的圆柱。当i < M时，要求Ri > Ri+1且Hi > Hi+1。

由于要在蛋糕上抹奶油，为尽可能节约经费，我们希望蛋糕外表面（最下一层的下底面除外）的面积Q最小。

令Q = Sπ

请编程对给出的N和M，找出蛋糕的制作方案（适当的Ri和Hi的值），使S最小。

(除Q外，以上所有数据皆为正整数)

解题思路

- 深度优先搜索，枚举什么?

解题思路

- 深度优先搜索，枚举什么?

  枚举每一层可能的高度和半径。

- 如何确定搜索范围?

解题思路

- 深度优先搜索，枚举什么?

  枚举每一层可能的高度和半径。

- 如何确定搜索范围?

  底层蛋糕的最大可能半径和最大可能高度

- 搜索顺序，哪些地方体现搜索顺序?

解题思路

- 深度优先搜索，枚举什么?
  枚举每一层可能的高度和半径。
- 如何确定搜索范围?
  底层蛋糕的最大可能半径和最大可能高度
- 搜索顺序，哪些地方体现搜索顺序?
  从底层往上搭蛋糕，而不是从顶层往下搭
  在同一层进行尝试的时候，半径和高度都是从大到小试
- 如何剪枝?

剪枝

●剪枝1：搭建过程中发现已建好的面积已经不小于目前求得的最优表面积，或者预见到搭完后面积一定会不小于目前最优表面积,则停止搭建（最优性剪枝）

剪枝

●剪枝1：搭建过程中发现已建好的面积已经不小于目前求得的最优表面积，或者预见到搭完后面积一定会不小于目前最优表面积,则停止搭建（最优性剪枝）

●剪枝2：搭建过程中预见到再往上搭，高度已经无法安排，或者半径已经无法安排，则停止搭建(可行性剪枝)

剪枝

●剪枝1：搭建过程中发现已建好的面积已经不小于目前求得的最优表面积，或者预见到搭完后面积一定会不小于目前最优表面积,则停止搭建（最优性剪枝）

●剪枝2：搭建过程中预见到再往上搭，高度已经无法安排，或者半径已经无法安排，则停止搭建(可行性剪枝)

●剪枝3：搭建过程中发现还没搭的那些层的体积，一定会超过还缺的体积，则停止搭建(可行性剪枝)

剪枝

●剪枝1：搭建过程中发现已建好的面积已经不小于目前求得的最优表面积，或者预见到搭完后面积一定会不小于目前最优表面积,则停止搭建（最优性剪枝）

●剪枝2：搭建过程中预见到再往上搭，高度已经无法安排，或者半径已经无法安排，则停止搭建(可行性剪枝)

●剪枝3：搭建过程中发现还没搭的那些层的体积，一定会超过还缺的体积，则停止搭建(可行性剪枝)

●剪枝4：搭建过程中发现还没搭的那些层的体积，最大也到不了还缺的体积，则停止搭建(可行性剪枝)

```python
import math
minArea = 1 << 30 #最优表面积
area = 0   #正在搭建中的蛋糕的表面积
minV = [0]*30 # minV[n]表示n层蛋糕最少的体积
minA = [0]*30 # minA[n]表示n层蛋糕的最少侧表面积
def MaxVforNRH(n,r,h):
#求在n层蛋糕，底层最大半径r，最高高度h的情况下，能凑出来的最大体积
    v = 0
    for i in range(n):
        v += (r - i ) *(r-i) * (h-i)
    return v
def Dfs(v, n, r, h):
#要用n层去凑体积v,最底层半径不能超过r,高度不能超过h
#求出最小表面积放入 minArea
    global minArea,area,M
    if n == 0:
        if v != 0: return
        else:
            minArea = min(minArea,area)
            return
```

```
if v <= 0:
    return
if minV[n] > v: #剪枝3
    return
if area + minA[n] >= minArea: #剪枝1
    return
if h < n or r < n: #剪枝2
    return

if MaxVforNRH(n,r,h) < v: #剪枝4
#这个剪枝最强!
    return
#for rr in range(n,r+1): 这种写法比从大到小慢5倍
for rr in range(r,n-1,-1):
    if n == M : #底面积
        area = rr * rr
    for hh in range(h,n-1,-1):
        area += 2 * rr * hh
        Dfs(v-rr*rr*hh,n-1,rr-1,hh-1)
        area -= 2 * rr * hh
```

```
#main
N = int(input())
M = int(input())  #M层蛋糕，体积N
minV[0] = minA[0] = 0
for  i in range(1,M+1):
    minV[i] = minV[i-1] + i * i * i
    minA[i] =  minA[i-1] + 2 * i * i
if  minV[M] > N:
    print(0)
else:
    maxH = int((N - minV[M-1])/(M*M)) + 1 #底层最大高度
    #最底层体积不超过 (N-minV[M-1]),且半径至少M
    maxR = int(math.sqrt((N-minV[M-1])/M)) + 1 #底层高度至少M
    area = 0
    minArea = 1 << 30
    Dfs( N,M,maxR,maxH)
    if  minArea == 1 << 30:
        print(0)
    else:
        print(minArea)
```

还有什么可以改进

还有什么可以改进

1） 用数组存放 **MaxVforNRH(n,r,h)** 的计算结果，避免重复计算

还有什么可以改进

1) 用数组存放 **MaxVforNRH(n,r,h)** 的计算结果，避免重复计算

2)

```
    for rr in range(r,n-1,-1):
        if n == M : #底面积
            area = rr * rr
        for hh in range(h,n-1,-1):
            area += 2 * rr * hh
            Dfs(v-rr*rr*hh,n-1,rr-1,hh-1)
```

#加上对本次**Dfs**失败原因的判断。如果是因为剩余体积不够大而失败，那么就用不着试下一个高度，直接**break**；或者由小到大枚举 **h**……

```
            area -= 2 * rr * hh
```

广度优先搜索
例题: 抓住那头牛

美国黄石公园

抓住那头牛(百练习4001)

农夫知道一头牛的位置，想要抓住它。农夫和牛都位于数轴上，农夫起始位于点N(0<=N<=100000)，牛位于点K(0<=K<=100000)。农夫有两种移动方式：

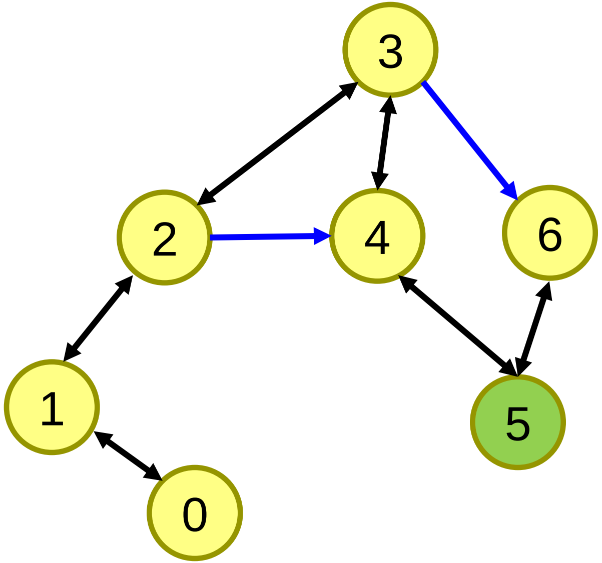
1、从X移动到X-1或X+1，每次移动花费一分钟
2、从X移动到2*X，每次移动花费一分钟

假设牛没有意识到农夫的行动，站在原地不动。农夫最少要花多少时间才能抓住牛？

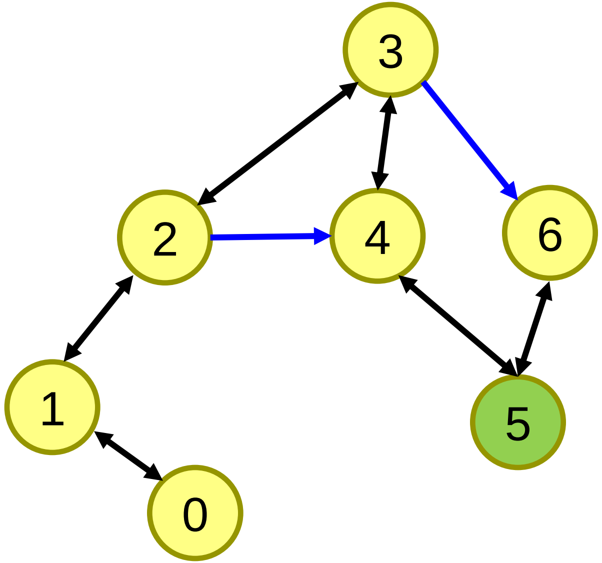
假设农夫起始位于点3，牛位于5

N=3,K=5，最右边是6。

如何搜索到一条走到5的路径?

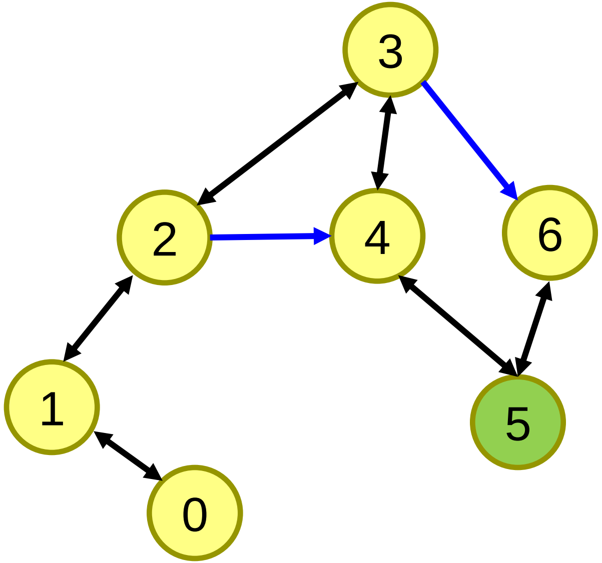


假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



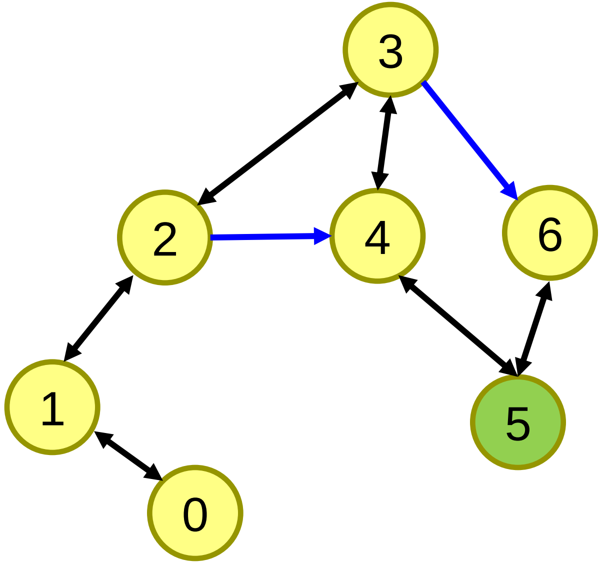
策略1）深度优先搜索：从起点出发，随机挑一个方向，能往前走就往前走(扩展），走不动了则回溯。不能走已经走过的点(要判重）。

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径?



运气好的话：
3->4->5
或
3->6->5
问题解决！

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？

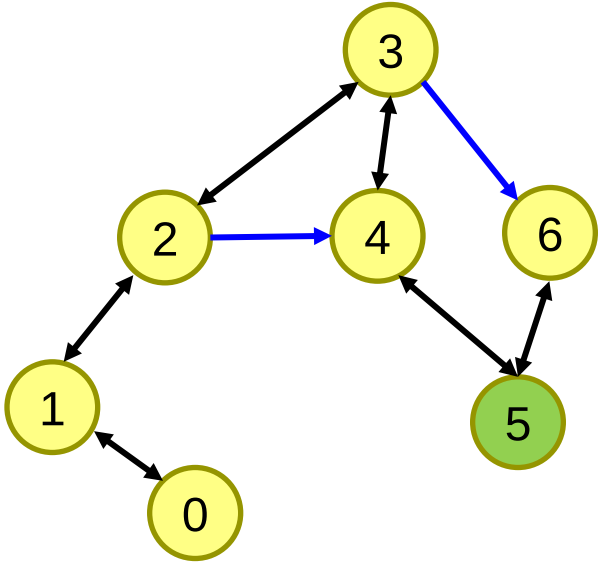


运气不太好的话：
3->2->4->5
运气最坏的话：
3->2->1->0->4->5

要想求最优(短）解，则要遍历所有走法。可以用各种手段优化，比如，若已经找到路径长度为n的解，则所有长度大于n的走法就不必尝试。

运算过程中需要存储路径上的顶点，数量较少。
用栈存顶点。

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径?

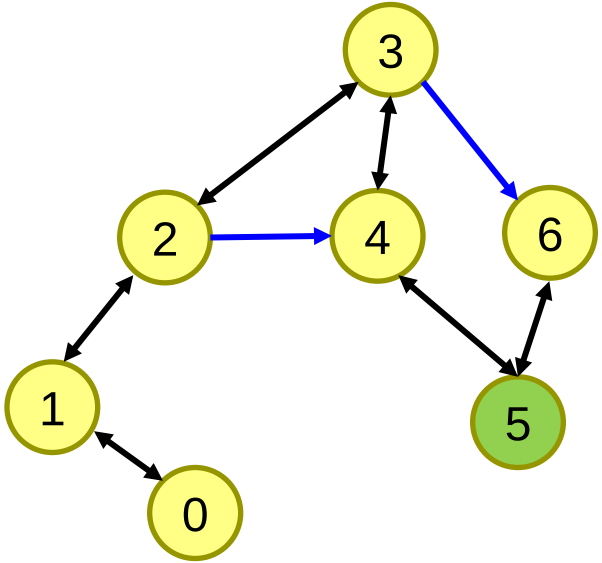


策略2）广度优先搜索:

给顶点分层。起点是第0层。从起点最少需n步就能到达的点属于第n层。

第1层：2,4,6
第2层：1,5
第3层：0

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？

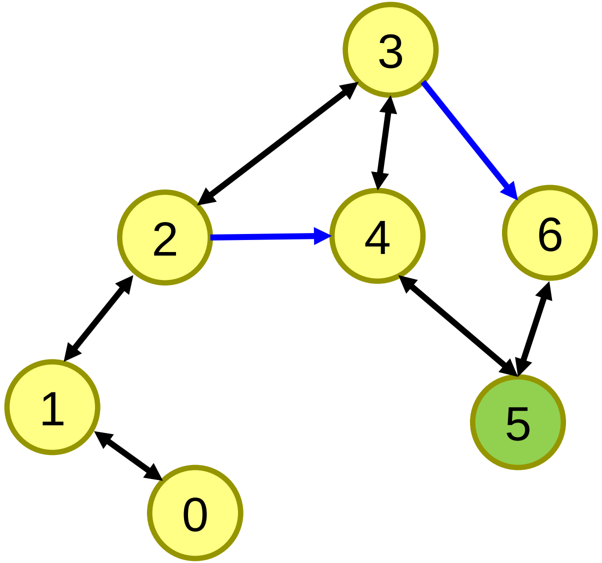


策略2）广度优先搜索：

给顶点分层。起点是第0层。从起点最少需n步就能到达的点属于第n层。

依层次顺序，从小到大扩展顶点。把层次低的点全部扩展出来后，才会扩展层次高的点。

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



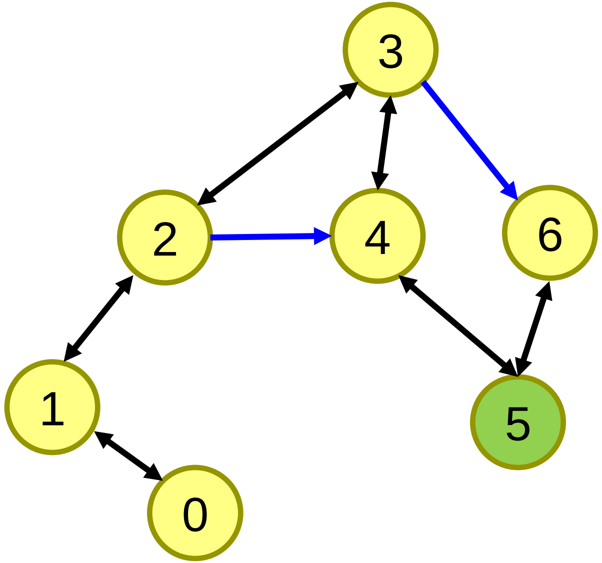
策略2）广度优先搜索：

搜索过程（顶点扩展过程）：

3
2 4 6
1 5

问题解决。
扩展时，不能扩展出已经走过的顶点(要判重）。

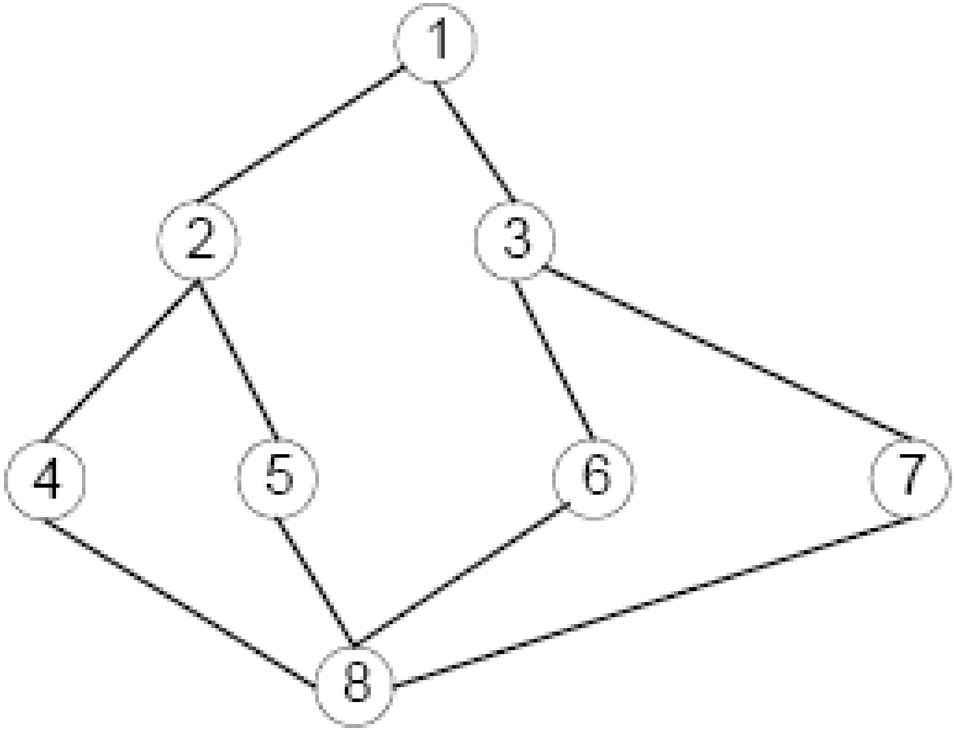
假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径?



策略2）广度优先搜索:

可确保找到最优解，但是因扩展出来的顶点较多，且多数顶点都需要保存，因此需要的存储空间较大。用队列存顶点。

深搜 vs. 广搜



若要遍历所有顶点：

- 深搜

1-2-4-8-5-6-3-7

- 广搜

1-2-3-4-5-6-7-8

广搜算法

□广度优先搜索算法如下： （用QUEUE）

(1) 把初始顶点S0放入Open表中；

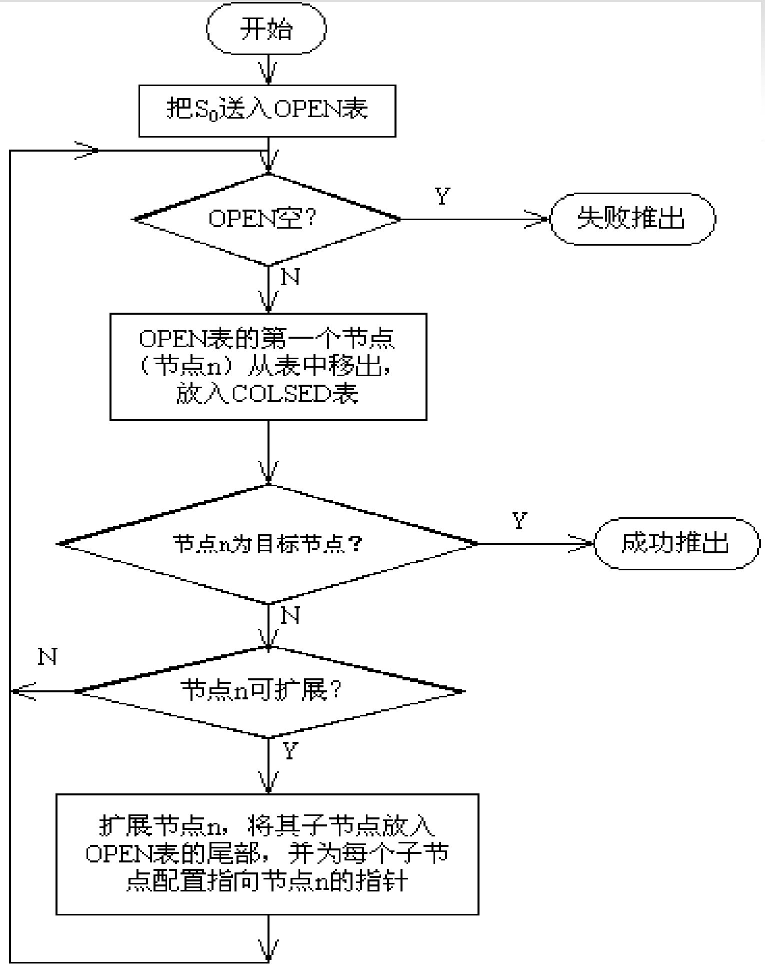
(2) 如果Open表为空，则问题无解，失败退出；

(3) 把Open表的第一个顶点取出放入Closed表，并记该顶点为n；

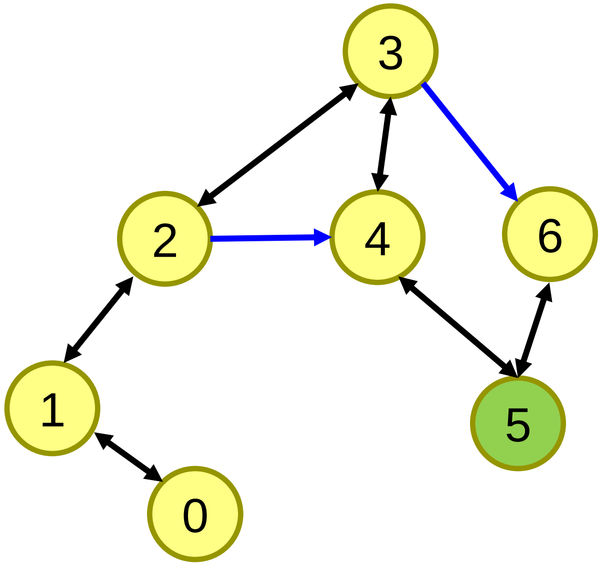
(4) 考察顶点n是否为目标顶点。若是，则得到问题的解，成功退出；

(5) 若顶点n不可扩展，则转第(2)步；

(6) 扩展顶点n，将其不在Closed表和Open表中的子顶点(判重）放入Open表的尾部，并为每一个子顶点设置指向父顶点的指针(或记录顶点的层次），然后转第(2)步。



假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



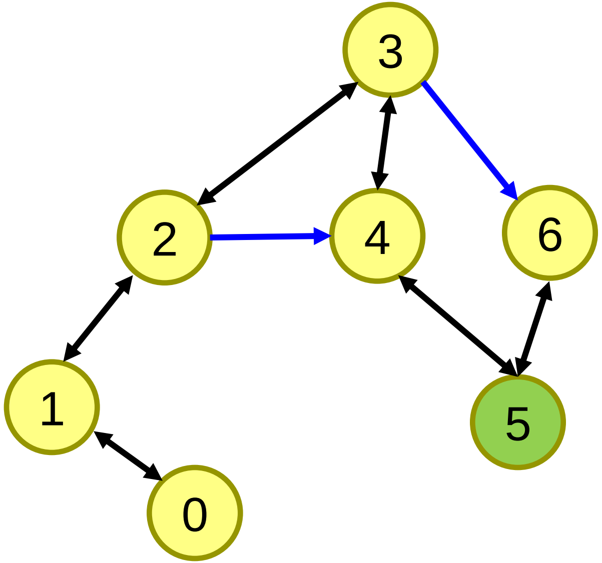
广度优先搜索队列变化过程：

Closed

3

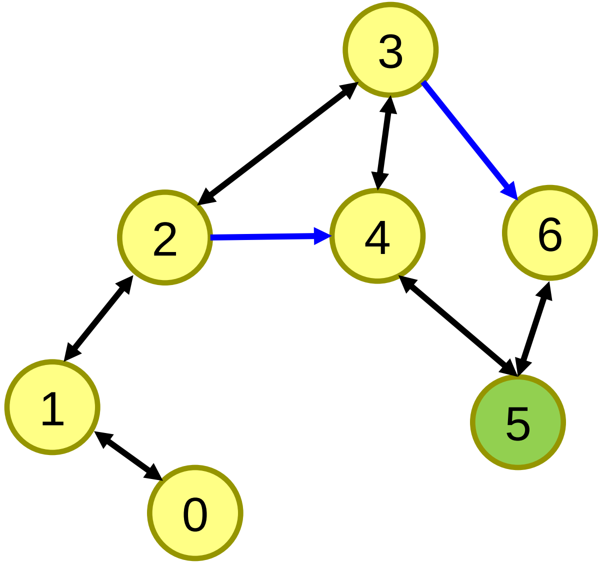
Open

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



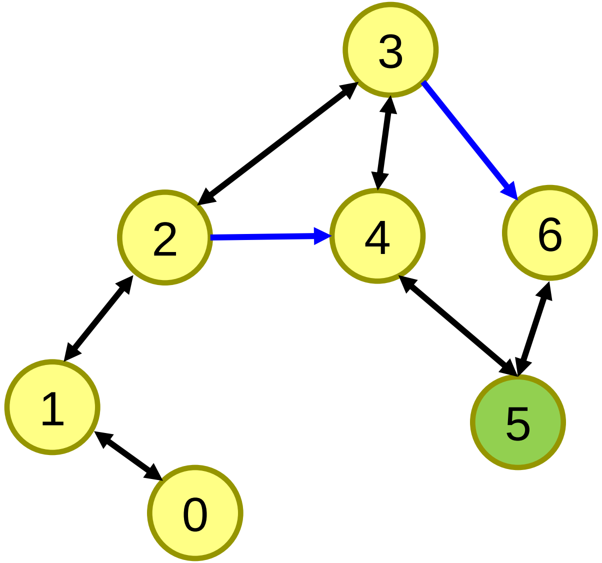
广度优先搜索队列变化过程：

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径?

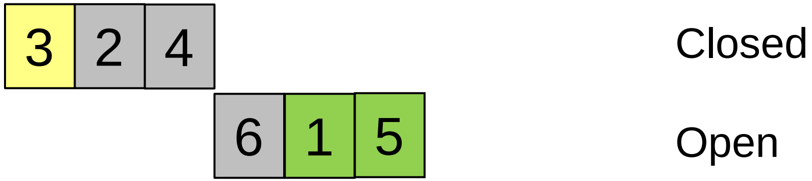


广度优先搜索队列变化过程:

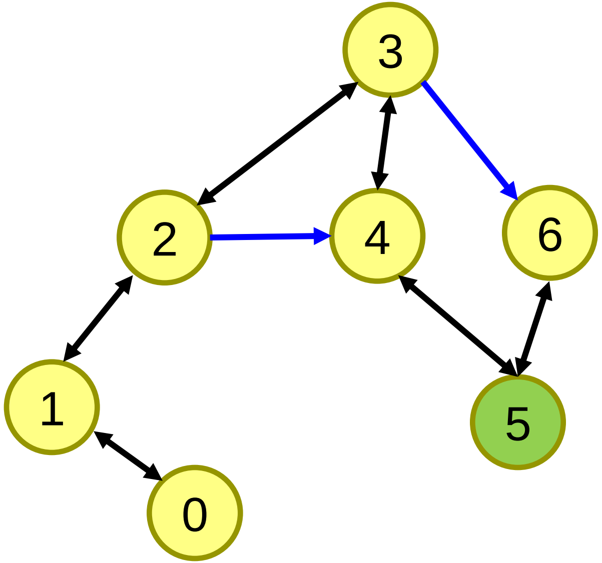
假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径?



广度优先搜索队列变化过程:



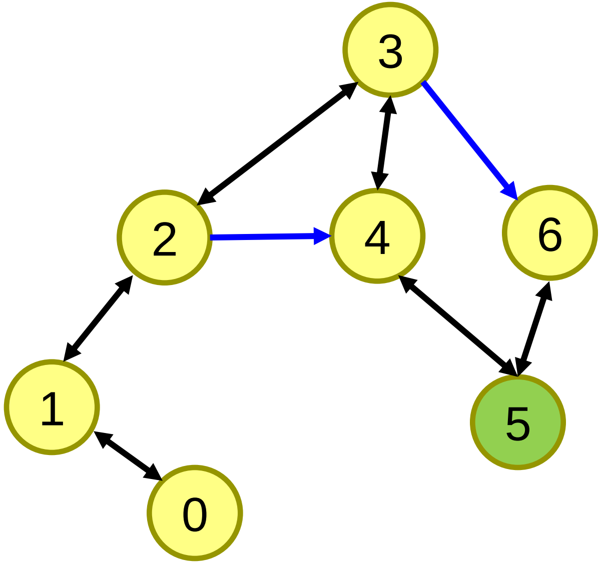
假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径?



广度优先搜索队列变化过程:

3	2	4	6			Closed
				1	5	Open

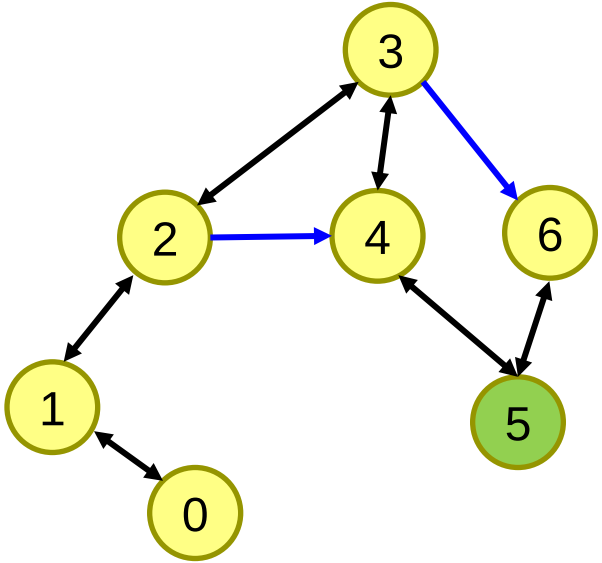
假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径?



广度优先搜索队列变化过程：

3	2	4	6	1			Closed
				5	0		Open

假设农夫起始位于点3，牛位于5
N=3,K=5，最右边是6。
如何搜索到一条走到5的路径？



广度优先搜索队列变化过程：

3	2	4	6	1	5		Closed
						0	Open

目标顶点5出队列，问题解决！

#poj3278 Catch That Cow

```
import collections
class step:
    def __init__(self,x,steps):
        self.x = x        #位置
        self.steps = steps    #到达x所需的步数
MAXN = 100000
N,K = map(int,input().split())
q = collections.deque()   #队列,即Open表
visited = [False] * (MAXN+10)
q.append(step(N,0))
visited[N] = True
```

```
while len(q) > 0:
    s = q.popleft()
    if s.x == K:   #找到目标
        print(s.steps)
        break
    else:
        if s.x - 1 >= 0 and not visited[s.x-1]:
            q.append(step(s.x-1,s.steps+1))
            visited[s.x-1] = 1
        if s.x + 1 <= MAXN and not visited[s.x+1]:
            q.append(step(s.x+1,s.steps+1))
            visited[s.x+1] = 1
        if s.x * 2 <= MAXN and not visited[s.x*2]:
            q.append(step(s.x*2,s.steps+1))
            visited[s.x*2]  = 1
```

广度优先搜索
例题: 迷宫问题

美国黄石公园

迷宫问题 (百练4127)

定义一个矩阵：

0 1 0 0 0
0 1 0 1 0
0 0 0 0 0
0 1 1 1 0
0 0 0 1 0

它表示一个迷宫，其中的1表示墙壁，0表示可以走的路，只能横着走或竖着走，不能斜着走，要求编程序找出从左上角到右下角的最短路线。

迷宫问题

基础广搜。先将起始位置入队列

每次从队列拿出一个元素，扩展其相邻的4个元素入队列(要用二维标志列表判重），直到队头元素为终点为止。队列里的元素记录了指向父顶点（上一步）的指针

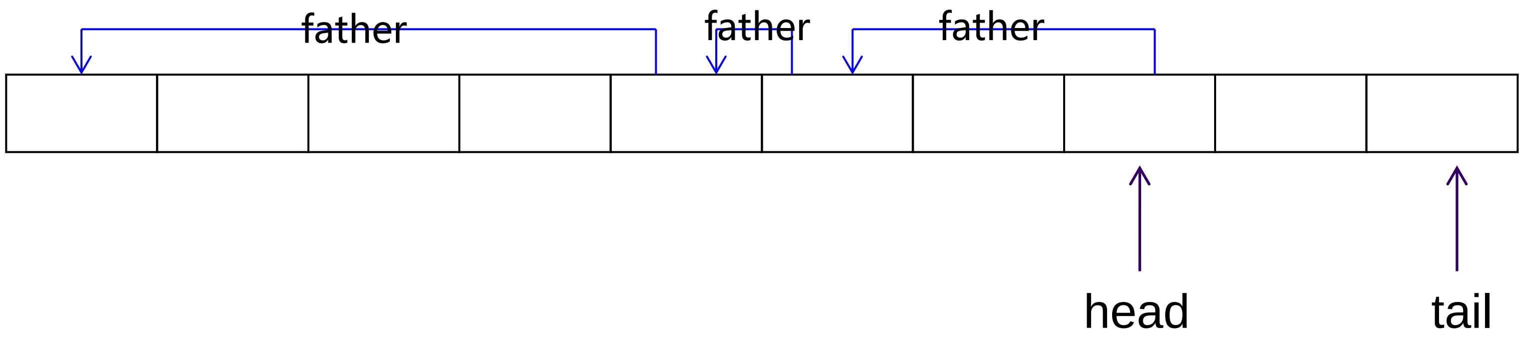
队列元素：(r,c,father)

r,c: 顶点的坐标
father： 父顶点在队列中的下标(从a走到b,则a是b的父顶点)

判重的二维列表：flags[i][j]表示 (i,j)那个位置是否走过，即是否入过队列

迷宫问题

- 队列不能用collections.deque，要自己写。用一个足够大的列表实现，维护一个队头指针和队尾指针
- 足够大：能放下所有顶点



当队头元素为目标时，沿father指针链取出行走过程中的每个顶点的倒序

广度优先搜索
例题: 鸣人和佐助

美国黄石公园

鸣人和佐助(百练6044)

已知一张地图（以二维矩阵的形式表示）以及佐助和鸣人的位置。地图上的每个位置都可以走到，只不过有些位置上有大蛇丸的手下(#)，需要先打败大蛇丸的手下才能到这些位置。

鸣人有一定数量的查克拉，每一个单位的查克拉可以打败一个大蛇丸的手下。假设鸣人可以往上下左右四个方向移动，每移动一个距离需要花费1个单位时间，打败大蛇丸的手下不需要时间。如果鸣人查克拉消耗完了，则只可以走到没有大蛇丸手下的位置，不可以再移动到有大蛇丸手下的位置。

佐助在此期间不移动，大蛇丸的手下也不移动。请问，鸣人要追上佐助最少需要花费多少时间?

```
4 4 1
#@##
**##
###+
****
```

鸣人和佐助

状态定义为：

（r,c,k），鸣人所在的行，列和查克拉数量

如果队头顶点扩展出来的顶点是有大蛇手下的顶点，则其 k 值比队头的k要减掉 1。如果队头顶点的查克拉数量为0,则不能扩展出有大蛇手下的顶点。

```
4 4 1
#@##
**##
###+
****
```

求钥匙的鸣人

不再有大蛇丸的手下。

但是佐助被关在一个格子里，需要依次集齐k种钥匙才能打开格子里的门门救出他。

K种钥匙散落在迷宫里。有的格子里放有一把钥匙。一个格子最多放一把钥匙。走到放钥匙的格子，即得到钥匙。

鸣人最少要走多少步才能救出佐助。

求钥匙的鸣人

状态：

（r,c,keys）： 鸣人的行，列，已经拥有的钥匙种数

目标状态 (x,y,K)（x,y)是佐助呆的地方

如果队头顶点扩展出来的顶点上面有不曾拥有的某种钥匙，则该顶点的 keys比队头顶点的 keys要加1

迷宫问题变形一(百练4980, 拯救行动)

鸣人要从迷宫中的起点 r走到终点a, 去营救困在那里的佐助。迷宫中各个字符代表道路（@）、墙壁（#）、和守卫（x）。

能向上下左右四个方向走。不能走到墙壁。每走一步需要花费1分钟

行走过程中一旦遇到守卫，必须杀死守卫才能继续前进。 杀死一个守卫需要花费额外的1分钟

求到达目的地最少用时

```
#@######@
#@a#@@r@
#@@#x@@@
@@#@@#@#
#@@@##@@
@#@@@@@@
@@@@@@@@
```

迷宫问题变形一（百练4980，拯救行动）

解法一：

●队列里放以下元素：

(r,c,kill,t)

(r,c)是坐标
t是走到(r,c)花的时间
kill表示是否杀死过守卫

迷宫问题变形一（百练4980, 拯救行动）

- 若(r,c)处没有守卫，则进入(r,c)时的状态是 (r,c,1,t),可以扩展出 (r+1,c,?,t+1), (r-1,c, ?,t+1), (r,c+1, ?,t+1), (r,c-1, ?,t+1)

如果有守卫, ? 就是0,否则就是1

迷宫问题变形一(百练4980, 拯救行动)

- 若(r,c)处没有守卫，则进入(r,c)时的状态是 (r,c,1,t),可以扩展出 (r+1,c,?,t+1), (r-1,c, ?,t+1), (r,c+1, ?,t+1), (r,c-1, ?,t+1)

  如果有守卫, ? 就是0,否则就是1

- 若(r,c)处有守卫，则进入(r,c)时的状态是 (r,c,0,t)只能扩展出 (r,c,1,t+1)

迷宫问题变形一(百练4980, 拯救行动)

判重数组:

```
int flag[M][N][2];
```

flag[r][c][0]表示在坐标(r,c)，尚未杀死守卫的情况
flag[r][c][1]表示在坐标(r,c)，已经杀死守卫的情况

迷宫问题变形一（百练4980，拯救行动）

解法二：

队列里放以下结构：

(r,c,steps)

将‘x’（大蛇丸）对应的结点放入队列时，直接将其steps多加1

队列是优先队列才行，steps最小的在队头

广搜一定要确保步数少的先于步数多的出队列！！！

```
2
7 8
#@#####@
#@a#@@r@
#@@#x@@@
@@#@@#@#
#@@@##@@
@#@@@@@@
@@@@@@@@
```

最倒霉的鸣人(百练8436)

要从迷宫中的起点 r走到终点a, 迷宫中各个字符代表道路（@）、墙壁（#）、和守卫（x），放有钥匙的道路 (1--9，表示有9种钥匙)

行走过程中一旦遇到守卫，必须杀死守卫才能继续前进。 杀死一个守卫需要花费额外1分钟。最多5个守卫。

走到终点时，必须要每种钥匙至少有一把才算完成任务。钥匙不全，也可以经过终点。

想拿第k种钥匙，必须手里已经有第k-1种钥匙。拿不了钥匙，也可以经过放钥匙的地方

求完成任务最少用时

```
#@######@
#@a#@@r@
#@@#x@@@
@@#@@#1#
#@@2##@@
@#@@5@@@
@@@@@@@@
```

```
(r,c, keys,
      fighted,      //守卫是否打过
      steps,
      layout)       //守卫的局面(哪些被杀，哪些还没被杀)
```

flags[100][100][10][33][2]; //判重，也可以用set存放扩展过德状态（用元组表示）来判重

flags[r][c][k][x][f] 对应的状态是:

在位置(r,c)，手里有k把钥匙，在位置(r,c)是否打过首卫的情况是f，守卫的局面是x

一共只有5个守卫，他们被杀或没被杀的情况一共有32种,可以用5个bit表示