数据结构和算法
（Python描述）

郭 炜

微信公众号

微博：http://weibo.com/guoweiofpku

学会程序和算法，走遍天下都不怕！

讲义照片均为郭炜拍摄

二叉树

二叉树概念及性质

黄山

二叉树的定义

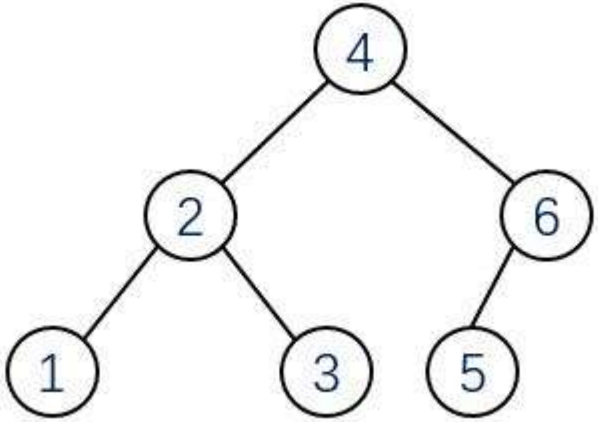
1) 二叉树是有限个元素的集合。

2) 空集合是一个二叉树，称为空二叉树。

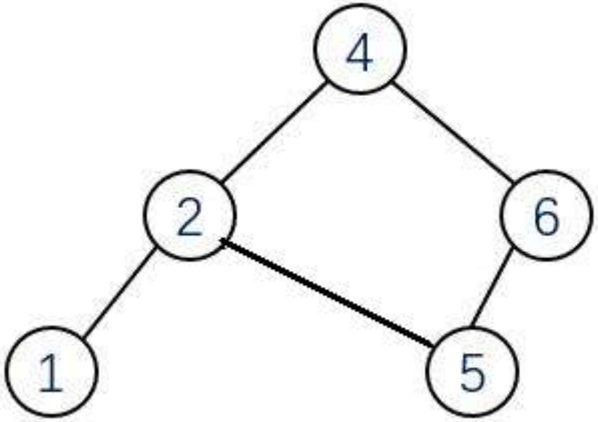
3) 一个元素(称其为“根”或“根结点”)，加上一个被称为“左子树”的二叉树，和一个被称为“右子树”的二叉树，就能形成一个新的二叉树。要求根、左子树和右子树三者没有公共元素。

二叉树的定义

二叉树

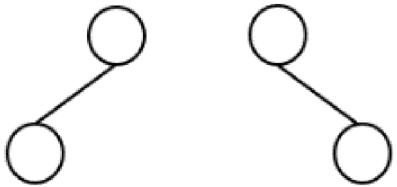


非二叉树，因不满足没有公共结点条件

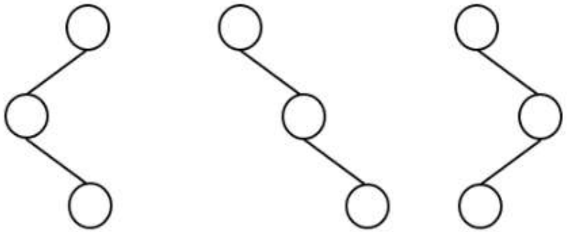


二叉树的定义

- 二叉树的左右子树是有区别的
- 以下是两棵不同的二叉树:



- 以下是三棵不同的二叉树:



二叉树的相关概念

- 二叉树的的元素称为“结点”。结点由三部分组成：数据、左子结点指针、右子结点指针。
- 结点的度(degree)：结点的非空子树数目。也可以说是结点的子结点数目。
- 叶结点(leaf node)：度为0的结点。
- 分支结点：度不为0的结点。即除叶子以外的其他结点。也叫内部结点。
- 兄弟结点(sibling)：父结点相同的两个结点，互为兄弟结点。
- 结点的层次(level)：树根是第0层的。如果一个结点是第n层的，则其子结点就是第n+1层的。
- 结点的深度(depth)：即结点的层次。

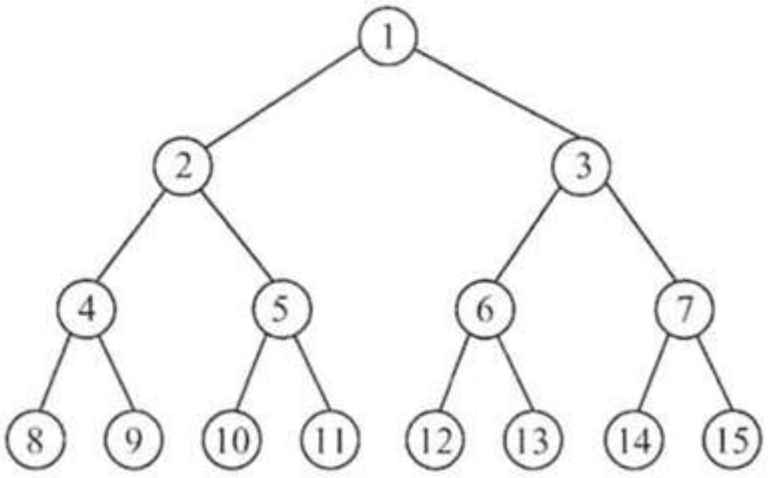
二叉树的相关概念

- 祖先(ancestor):
  1) 父结点是子结点的祖先
  2) 若a是b的祖先，b是c的祖先，则a是c的祖先。
- 子孙(descendant)：也叫后代。若结点a是结点b的祖先，则结点b就是结点a的后代。
- 边：若a是b的父结点，则对子<a,b>就是a到b的边。在图上表现为连接父结点和子结点之间的线段。
- 二叉树的高度(height)：二叉树的高度就是结点的最大层次数。只有一个结点的二叉树，高度是0。结点一共有n层，高度就是n-1。

二叉树相关的概念

- 完美二叉树(perfect binary tree)

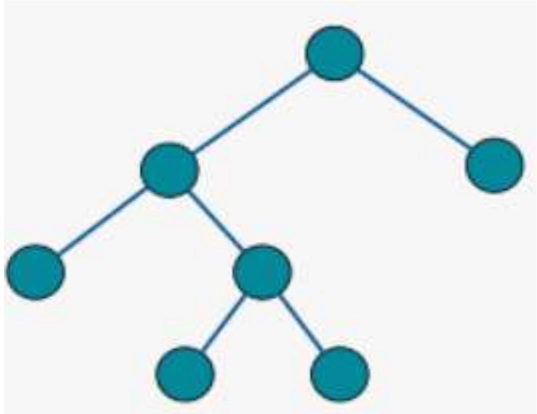
每一层结点数目都达到最大。即第i层有2^i个结点。高为h的完美二叉树，有$2^{h+1}-1$个结点



二叉树相关的概念

- 满二叉树（full binary tree)

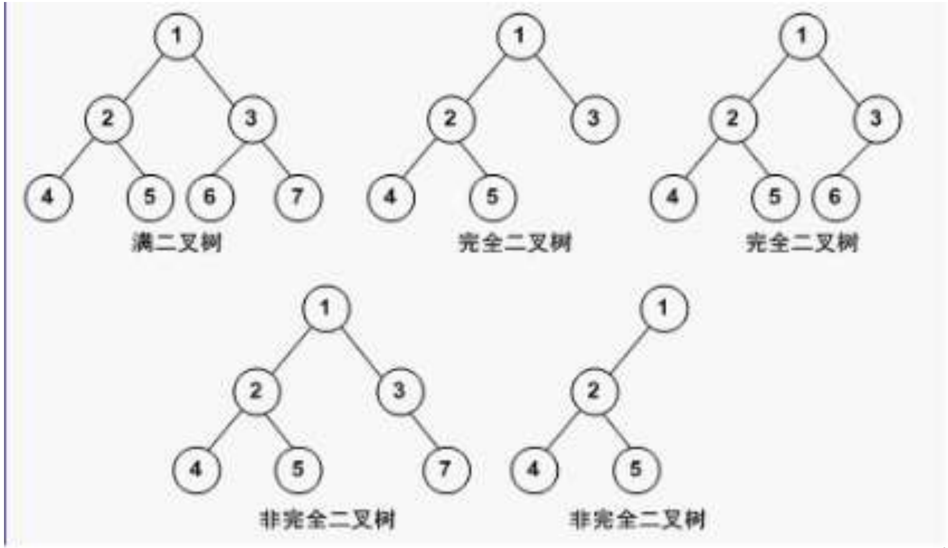
没有1度结点的二叉树



二叉树相关的概念

➢ 完全二叉树(complete binary tree)

除最后一层外，其余层的结点数目均达到最大。而且，最后一层结点若不满，则缺的结点定是在最右边的连续若干个



二叉树的性质

福建宁德三都澳鱼排

二叉树的性质

- 1) 第i层最个多2^i个结点
- 2) 高为h的二叉树结点总数最多2^{h+1}-1
- 3) 结点数为n的树，边的数目为n-1
- 4) n个结点的非空二叉树至少有$\lceil \log_2(n+1) \rceil$层结点，即高度至少为$\lceil \log_2(n+1) \rceil - 1$
- 5) 在任意一棵二叉树中，若叶子结点的个数为n0，度为2的结点个数为n2，则n0=n2+1。
- 6) 非空满二叉树叶结点数目等于分支结点数目加1。
- 7) 非空二叉树中的空子树数目等于其结点数目加1。

完全二叉树的性质

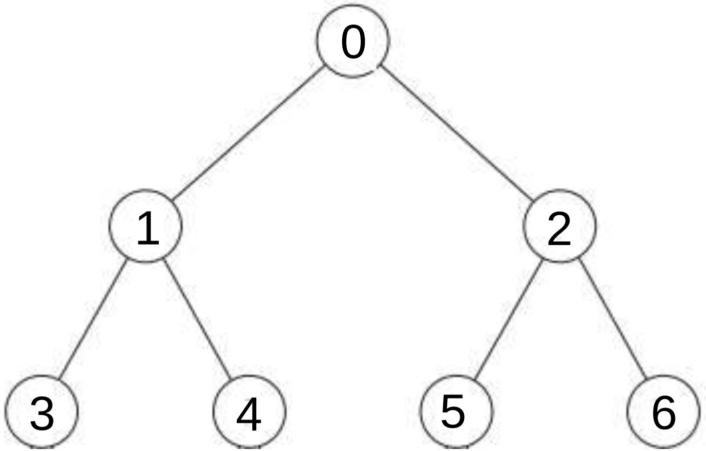
- 1) 完全二叉树中的1度结点数目为0个或1个
- 2) 有n个结点的完全二叉树有$\lfloor (n+1)/2 \rfloor$个叶结点。
- 3) 有n个叶结点的完全二叉树有2n或2n-1个结点(两种都可以构建)
- 4) 有n个结点的非空完全二叉树的高度为$\lceil \log_2(n+1) \rceil-1$。即：

有n个结点的非空完全二叉树共有$\lceil \log2(n+1) \rceil$层结点。

完全二叉树的性质

- 完全二叉树

  可以用列表存放完全二叉树的结点，不需要左右子结点指针。下标为i的结点的左子结点下标是2*i+1,右子结点是2*i+2 (根下标为0)。下标为i的元素，其父结点的下标就是(i-1)//2



二叉树的实现

山西应县木塔

二叉树的实现方法

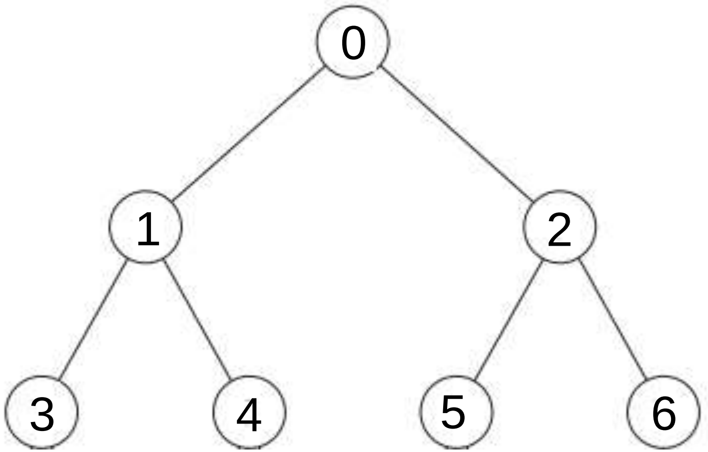
```
class BinaryTree:
        def __init__(self,data,left = None,right = None):
                self.data,self.left,self.right = data,left,right
        def addLeft(self,tree): #tree是一个二叉树
                self.left = tree
        def addRight(self,tree): #tree是一个二叉树
                self.right = tree
```

二叉树的列表实现方法

- 二叉树是一个三个元素的列表X
- X[0]是根结点的数据，X[1]是左子树，X[2]是右子树。如果没有左子树，X[1]就是空表[]，如果没有右子树，X[2]就是空表。
- 叶子结点为：[data,[],[]]

二叉树的列表实现方法

```
[0,
      [1,
         [3,[],[]],
         [4,[],[]] ],
      [2,
         [5,[],[]],
         [6,[],[]] ]
]
```



即： [0, [1, [3, [], []], [4, [], []]], [2, [5, [], []], [6, [], []]]]

二叉树的列表实现方法

```
class BinaryTree:
        def __init__(self,data,left = [],right = []):
                self.treeList = [data,left,right]
        def addLeft(self,tree):
                self.treeList[1] = tree.treeList
        def addRight(self,tree):
                self.treeList[2] = tree.treeList
```

二叉树的遍历

日本奈良东大寺

二叉树的遍历

- 广度优先遍历：使用队列，按层遍历

- 深度优先遍历：编写递归函数

  前序遍历过程：1)访问根结点 2)前序遍历左子树 3)前序遍历右子树。

  中序遍历过程：1)中序遍历左子树 2)访问根结点 3)中序遍历右子树。

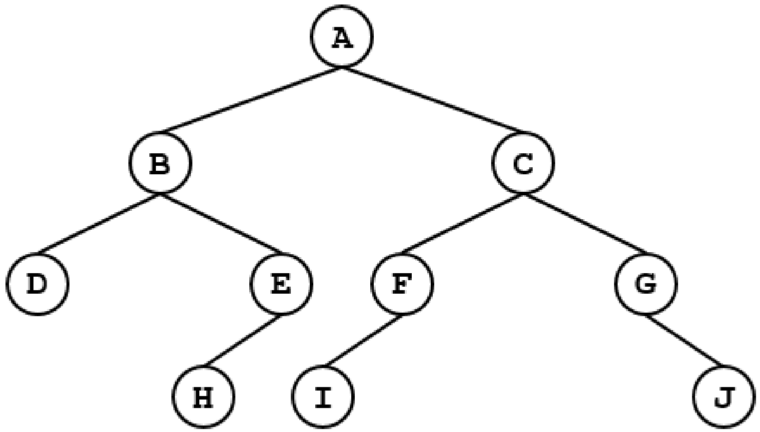
  后序遍历过程：1)后序遍历左子树 2)后序遍历右子树 3)访问根结点。

  “访问”指的是对结点进行某种具体操作，比如输出其值、修改其值等。

- 遍历只需要访问每个结点一次，因此复杂度O(n)。n是总结点数目。

二叉树的遍历

- 前序遍历访问序列：ABDEHCFIGJ
- 中序遍历访问序列：DBHEAIFCGJ
- 后续遍历访问序列：DHEBIFJGCA
- 按层遍历访问序列：ABCDEFGHIJ



二叉树的遍历

```
class BinaryTree:
    def __init__(self,data,left = None,right = None):
        self.data,self.left,self.right = data,left,right
    def addLeft(self,tree): #tree是一个二叉树
        self.left = tree
    def addRight(self,tree): #tree是一个二叉树
        self.right = tree
    def preorderTraversal(self, op): #前序遍历,op是函数，表示操作
        op(self)            #访问根结点
        if self.left:       #左子树不为空
            self.left.preorderTraversal(op)  #遍历左子树
        if self.right:
            self.right.preorderTraversal(op)  #遍历右子树
```

二叉树的遍历


```
def inorderTraversal(self, op):  #中序遍历
    if self.left:
        self.left.inorderTraversal( op)
    op(self)
    if self.right:
        self.right.inorderTraversal(op)
def postorderTraversal(self, op):  #后序遍历
    if self.left:
        self.left.postorderTraversal(op)
    if self.right:
        self.right.postorderTraversal(op)
    op(self)
```

二叉树的遍历


```
def bfsTraversal(self,op): #按层次遍历
    import collections
    dq = collections.deque()
    dq.append(self)
    while len(dq) > 0:
        nd = dq.popleft()
        op(nd)
        if nd.left:
            dq.append(nd.left)
        if nd.right:
            dq.append(nd.right)
```

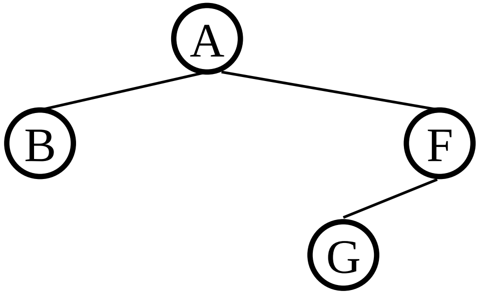
- **用法:**

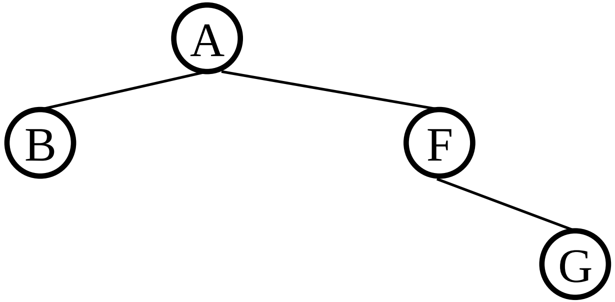
```
tree.preorderTraversal(lambda x: print(x.data,end=""))
tree.preorderTraversal(lambda x: x.data+=100)
```

遍历序列和二叉树

1. 仅凭一种遍历序列(前序、后序、中序)，不能确定二叉树的样子

2. 给出一棵二叉树的前序遍历序列，和后序遍历序列，依然不能确定这棵树的样子





上面两棵二叉树有相同前序序列和中序序列

遍历序列和二叉树

给出一棵二叉树的中序遍历序列，再加上前序序列，或后序序列，就可以确定树的样子

由前序序列和中序序列构造二叉树，假设序列分别为于列表P和列表Q

1） P[0]是树的树根

2）找到树根P[0]在中序序列中的位置X，并将中序序列以树根为界分为左子树的中序序列Q[:X]和右子树的中序序列Q[X+1:]

3）P[1:X+1]是左子树的前序序列，P[X+1:]是右子树的前序序列，递归建两棵子树

例题：文本二叉树

文本二叉树就是由若干行文本来表示的一棵二叉树。其定义如下:

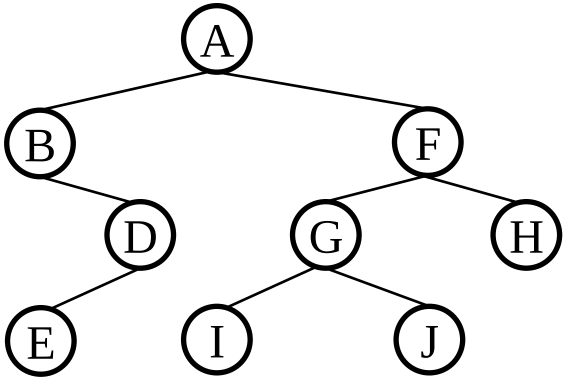
1) 每一行代表一个结点，每个结点是一个英文字母。
2) 每个结点的父结点，就是它上方，离它最近的，比它往左偏移了一个制表符的那个结点。没有父结点的结点，是树根。
3) 如果一个结点的左子树为空，则在其下面的一行用一个缩进了一个制表符的0表示其有空的左子树；若右子树为空，则右子树无须表示。若右子树不为空，则表示完左子树后再表示右子树。

给定一个文本二叉树，求其前序、中序、后序遍历序列。

例题：文本二叉树

样例输入：

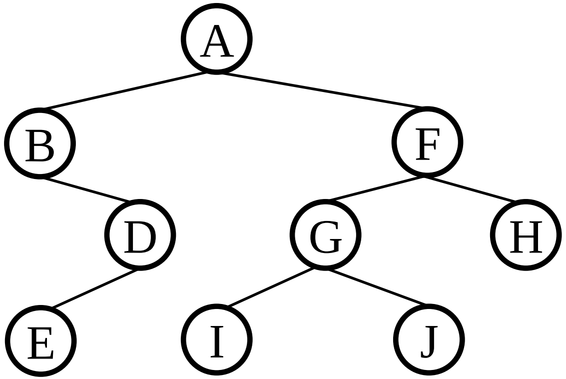
```
A
    B
        0
        D
            E
    F
        G
            I
            J
        H
```



例题：文本二叉树

样例输出：

ABDEFGIJH
BEDAIGJFH
EDBIJGHFA



例题：文本二叉树

```
class BinaryTree:
    ....... 与前同，略
def buildTree(nodes):
    nodesPtr = 0   #正要看nodes里的第几个元素
    def build(level):
        #读取nodesPtr指向的那一个元素，并建立以其为根的子树，该根的层次是level。
        nonlocal nodesPtr
        tree = BinaryTree(nodes[nodesPtr][1])  #建根结点
        nodesPtr += 1 #看下一个元素
        if nodesPtr < len(nodes) and nodes[nodesPtr][0] == level + 1:
            if nodes[nodesPtr][1] != '0':
                tree.addLeft(build(level + 1))
            else:   #没有左子树
                nodesPtr += 1
```

例题：文本二叉树

```
        if nodesPtr < len(nodes) and nodes[nodesPtr][0] == level + 1:
            tree.addRight(build(level + 1))
        return tree
    return build(0)
#build会推进nodesPtr到文本中所建的子树的下一行的位置
nodes = [] #nodes元素为（缩进，数据），例如：[(0, 'A'), (1, 'B'), ......]
                #每个元素代表一个结点，缩进即结点的层次
while True:
    try:
        s = input().rstrip()
        nodes.append((len(s)-1,s.strip()))
    except:
        break
```

例题：文本二叉树

```
tree = buildTree(nodes)
tree.preorderTraversal(lambda x:print(x.data,end=""))
print()
tree.inorderTraversal(lambda x:print(x.data,end=""))
print()
tree.postorderTraversal(lambda x:print(x.data,end=""))
```

非递归遍历二叉树

二叉树的非递归前序遍历

```
class BinaryTree:
    def __init__(self,data,left = None,right = None):
        self.data,self.left,self.right = data,left,right
    def preorderTraversal(self,op):
        stack = [self]
        while len(stack) > 0:
            node = stack.pop()
            op(node)
            if node.right:
                stack.append(node.right)#先入栈的后访问，所以右子结点先入栈
            if node.left:
                stack.append(node.left)   #后入栈的先访问，所以左子结点后入栈
```

二叉树的非递归中序遍历

用法:

```
tree.inorderTravel(lambda x:
            print(x.data,end=""))
```

```
def inorderTravel(self,op):
    stack = [[self,0]] #0表示self的左子树还没有遍历过
    while len(stack) > 0:
        node = stack[-1]
        if node[0] == None: #node[0]是子树根结点
            stack.pop()
            continue
        if node[1] == 0: #左子树还没有遍历过
            stack.append([node[0].left,0])
            node[1] = 1 #表示node下次再出现在栈顶时左子树已经遍历过
        elif node[1] == 1: #左子树已经遍历过
            op(node[0])
            stack.pop()
            stack.append([node[0].right, 0])
```

二叉树的应用

日本京都清水寺

实例：表达式树

前序遍历得到前缀表达式：

\- + 3 * 2 9 / 6 4

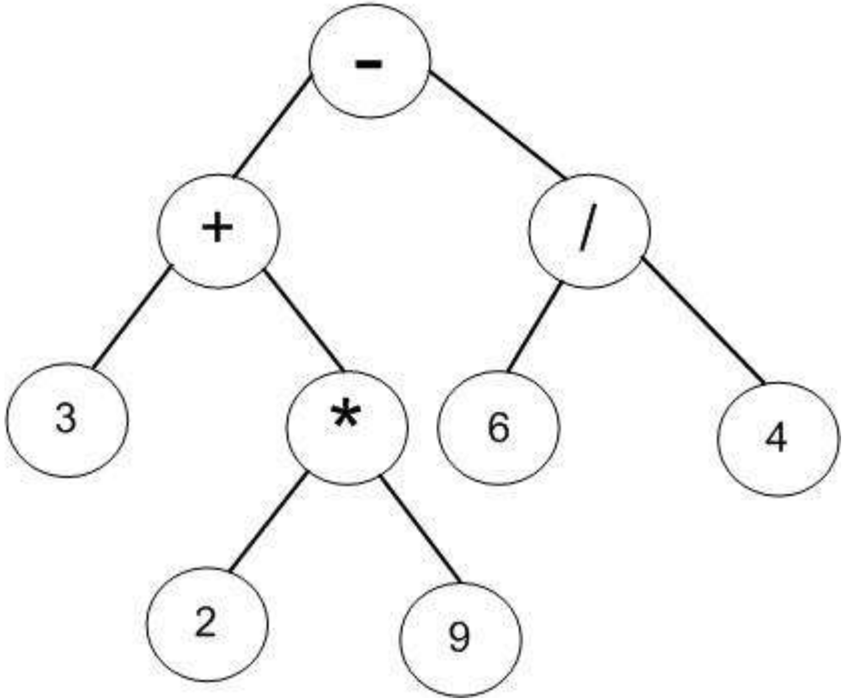
后序遍历得到后缀表达式：

3 2 9 * + 6 4 / -

中序遍历得到运算符中置表达式：

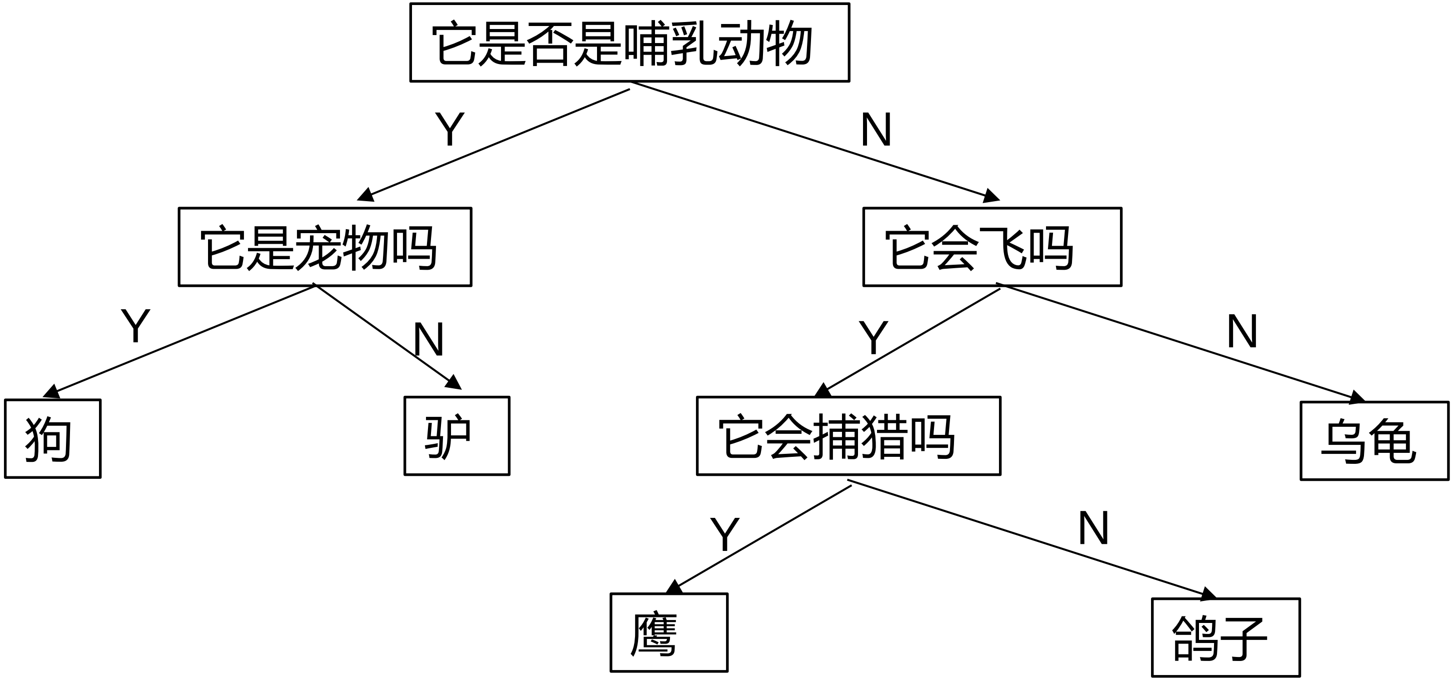
3 + 2 * 9 – 6 / 4

必要的时候要添加括号



实例：动物分类问答知识树

一个存储了狗、驴、鹰、乌龟、鸽子五种动物的系统，用户想好一个动物，系统提问，用户回答是或否，系统猜出用户想的动物。



哈夫曼树
(最优二叉树)

木兰围场泰丰湖

最优二叉树

给定n个结点，结点i有权值W_i。要求构造一棵二叉树，叶子结点为给定的结点，且

$$\mathrm{WPL} = \sum_{i=1}^{n} W_i \times L_i$$

最小。Li 是结点i到树根的路径的长度。WPL: Weighted Path Length of Tree

最优二叉树也叫哈夫曼树

最优二叉树的构造

1) 开始n个结点位于集合S

2) 从S中取走两个权值最小的结点n1和n2，构造一棵二叉树，树根为结点r，r的两个子结点是n1和n2，且$W_r=W_{n1}+W_{n2}$，并将r加入S

3) 重复2）,直到S中只有一个结点，最优二叉树就构造完毕，根就是S中的唯一结点

证明较麻烦，略

显然，最优二叉树不唯一

哈夫曼编码树

需要对信息中用到的每个字符进行编码。

定长编码方案：每个字符编码的比特数都相同。比如ASCII编码方案。

A 000	C 010	E 100	G 110
B 001	D 011	F 101	H 111

BACADAEAFABBAAAGAH

被编码为以下54个bits:

001000010000011000100000101000001001000000000110000111

哈夫曼编码树

熵编码方案： 使用频率高的字符，给予较短编码，使用频率低的字符，给予较长编码，如哈夫曼编码。

A 0	C 1010	E 1100	G 1110
B 100	D 1011	F 1101	H 1111

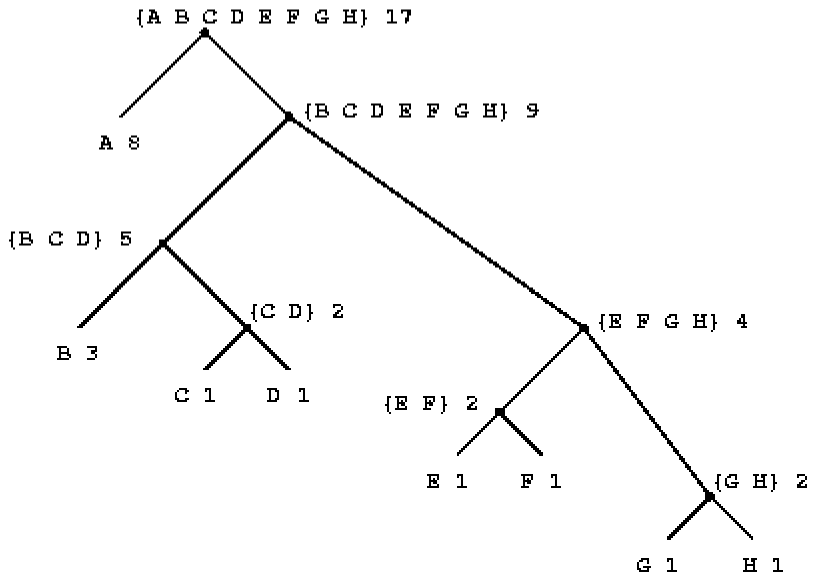
BACADAEAFABBAAAGAH

被编码为以下42个bits:

100010100101101100011010100100000111001111

哈夫曼编码树

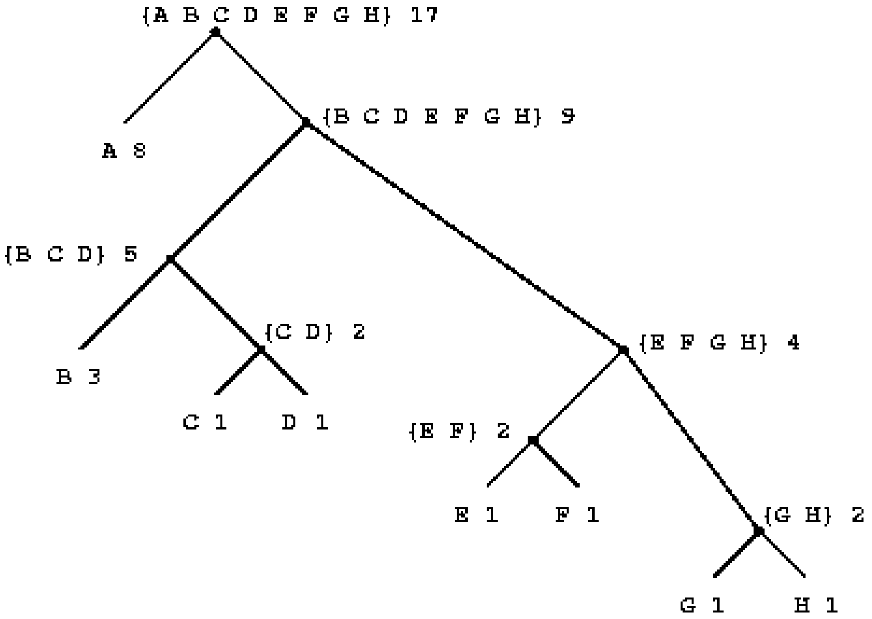
使用可变长编码，需要解决的问题是：如何区分一个编码是一个字符的完整编码，还是另一个字符的编码的前缀。解决办法之一就是采用前缀编码：任何一个字符的编码，都不会是其他字符编码的前缀。



哈夫曼编码树：

- 二叉树
- 叶子代表字符，且每个叶子结点有个权值，权值即该字符的出现频率
- 非叶子结点里存放着以它为根的子树中的所有字符，以及这些字符的权值之和
- 权值仅用来建树，对于字符串的解码和编码没有用处

哈夫曼编码树

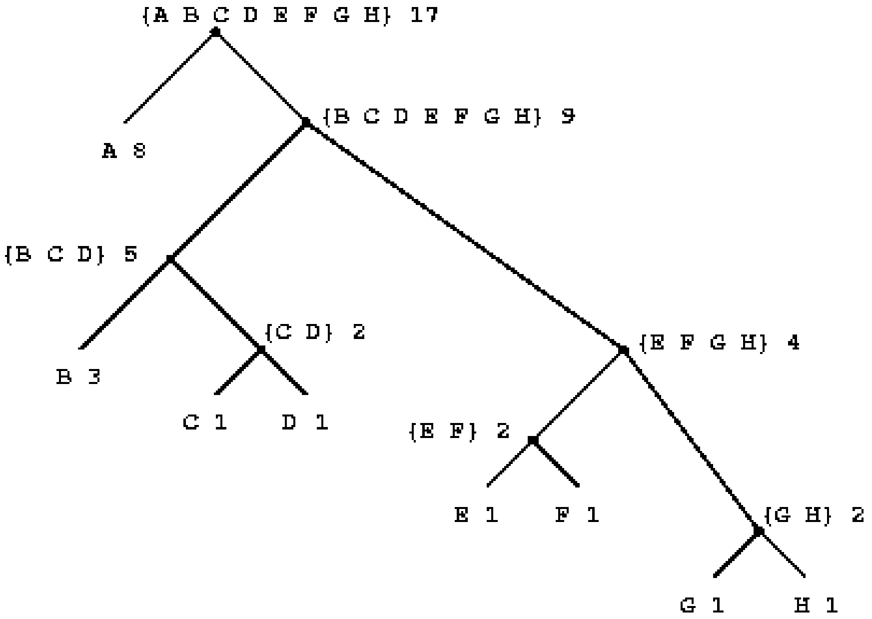


字符的编码过程：

从树根开始，每次往包含该字符的子树走。往左子树走，则编码加上比特1，往右子树走，则编码加上比特0

A 0
B 100
C 1010
G 1110
H 1111

哈夫曼编码树



字符串编码的解码过程：

从树根开始，在字符串编码中碰到一个0，就往左子树走，碰到1，就往右子树走。走到叶子，即解码出一个字符。然后回到树根重复前面的过程。

10001010
BAC

哈夫曼编码树的构造

基本思想：使用频率越高的字符，离树根越近。构造过程和最优二叉树一样

过程：

1．**开始时，若有n个字符，则就有n个结点。每个结点的权值就是字符的频率，每个结点的字符集就是一个字符。**

2．**取出权值最小的两个结点，合并为一棵子树。子树的树根的权值为两个结点的权值之和，字符集为两个结点字符集之并。在结点集合中删除取出的两个结点，加入新生成的树根。**

3．**如果结点集合中只有一个结点，则建树结束。否则，goto 2**

哈夫曼编码树的构造

```
Initial leaves
{(A 8) (B 3) (C 1) (D 1) (E 1) (F 1) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) (E 1) (F 1) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F} 2) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F} 2) ({G H} 2)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F G H} 4)}Merge
{(A 8) ({B C D} 5) ({E F G H} 4)} Merge
{(A 8) ({B C D E F G H} 9)}Final merge
{({A B C D E F G H} 17)}
```

哈夫曼编码树不唯一

如何快速地在结点集合取出权值最小的两个结点？不要O(n)的笨办法。
用"堆"，可以做到O(log(n))

最优二叉树例题

黄石大峡谷

Fence Repair

一块长木板，要切割成长度为L_1,L_2...L_n的n块板子。每切一刀的费用，等于被切的那块板子的长度。求最少费用。

Fence Repair

思路:

考虑等价的切割的逆过程，即用n块板子去粘接成最终的长板子。每粘接一次的费用等于粘成的木板长度。

将粘接过程中产生的每个木板，包括最终长木板，都看作一个结点。则粘接的过程可以描述成一棵树的建立过程。将n1,n2粘接成R ，就相当于建一棵以R为根， n1,n2为子结点的二叉树。最终长板就是最终二叉树的树根。

建树完成后，设n_i到根的路径长度为L_i，则其参加了次L_i粘接,贡献了费用$L_i \times W_i$。要使总费用最小就是 WPL = $\sum_{i=1}^{n} W_i \times Li$ 最小，即最优二叉树问题。