

## 1 Turingmaschinen

### Aufgabe 1.1 Klausur 2012

Gebe eine 1-Band-Turingmaschine  $M$  an, die die Funktion  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ y, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

berechnet.

*Zur Erinnerung:* Die Zahl  $n$  wird durch das Unärwort  $0^{n+1}$  dargestellt.

### Aufgabe 1.2 Klausur 2014

Gebe eine 2-Band-Turingmaschine  $M$  an, die die durch  $f(w) = 0^{\#_0(w)}1^{\#_1(w)}$  gegebene Funktion  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  berechnet.

### Aufgabe 1.3 Klausur 2015

Gebe einen totalen (deterministischen) 2-Band-Turingakzeptor  $M$  an, der die Sprache  $L = \{w2w : w \in \{0, 1\}^*\}$  (über dem Alphabet  $\{0, 1, 2\}$ ) erkennt.

### Aufgabe 1.4 Blatt 13, 2015

Gebe eine 1-Band-Turingmaschine  $M$  an, welche die Menge

$$A = \{w \in \{0, 1\}^* : \#_0(w) \text{ gerade}\}$$

erkennt.

### Aufgabe 1.5

Gebe eine 3-Band-Turingmaschine  $M$  an, die die Funktion  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$f(x, y) = x \cdot y$$

berechnet.

## 2 Registermaschinen

### Aufgabe 2.1 Klausur 2015

Die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sei durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } x \text{ gerade} \end{cases}$$

definiert. Gebe einen Registeroperator  $P$  an, der  $f$  konservativ berechnet.

### Lösung 2.1

$$P \equiv [s_1 a_2 a_3]_1 [s_2 a_1]_2 [s_1 s_1 a_2 a_2]_1 [s_3 s_2 a_1]_3$$

### Aufgabe 2.2 *Nachklausur 2015*

Gebe einen konservativen Registeroperator an, der die Gleichheitsrelation erkennt, d.h. die Funktion

$$c_=(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$$

berechnet.

### Lösung 2.2

Es gilt

$$x = y \Leftrightarrow (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) = 0.$$

Diese Darstellung liegt dem folgenden Registeroperator zur Berechnung von  $c_=(x, y)$  zugrunde:

$$P \equiv T_{1 \rightarrow 4, 3} T_{1 \rightarrow 6, 3} T_{2 \rightarrow 5, 3} T_{2 \rightarrow 7, 3} [s_4 s_7]_7 [s_5 s_6]_6 [a_4 s_5]_5 a_3 [s_3 s_4]_4$$

### Aufgabe 2.3 *Blatt 13, 2015*

Gebe eine Registermaschine  $R$  an, welche die Funktion  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{falls } x \text{ durch drei teilbar} \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.

## 3 Primitiv rekursive Funktionen

### Aufgabe 3.1

Zeige nur unter Verwendung der Definition der primitiv rekursiven Funktionen, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind:

(a)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(b)  $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $g(x, y) = 2^x + 2^y$  (*Nachklausur 2015*)

Du darfst verwenden, dass die Addition  $add(x, y) = x + y$  primitiv rekursiv ist.

*Hinweis:* Zeige zunächst, dass die Funktion  $\hat{f}(x) = 2^x$  primitiv rekursiv ist.

(c)  $h : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $h(x, y, z) = 3x + z$

**Aufgabe 3.2** Nachklausur 2013

Eine natürliche Zahl heißt *Mersenne-Primzahl*, falls sie von der Form  $2^n - 1$  (für ein  $n \in \mathbb{N}$ ) und eine Primzahl ist.

Zeige, dass die Menge

$$M = \{x : x \text{ ist Mersenne-Primzahl}\}$$

primitiv rekursiv ist.

Du darfst dabei neben der Definition der primitiv rekursiven Funktionen die aus der Vorlesung bekannten Abschlusseigenschaften sowie die primitive Rekursivität der Multiplikation  $\cdot$ , der modifizierten Subtraktion  $\dot{-}$ , der Potenzfunktion  $n \mapsto 2^n$  und der Gleichheitsrelation verwenden.

**Lösung 3.2**

Es gilt

$$x \in M \Leftrightarrow (x \neq 0 \ \& \ x \neq 1 \ \& \ \exists y < x (x = 2^y \dot{-} 1) \ \& \ (\forall m < x (\forall n < x (n \cdot m \neq x))).$$

Da die primitiv rekursiven Mengen gegen explizite Definitionen, gegen beschränkte Quantoren und gegen die aussagenlogischen Junktoren abgeschlossen sind und aufgrund der primitiven Rekursivität der oben genannten Funktionen ist  $M$  damit primitiv rekursiv.

**Aufgabe 3.3** Blatt 13, 2015

Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$  gegeben durch

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(x+1) &= \begin{cases} f(x) + 1, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ f(x) + 2, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeige, dass  $f$  primitiv rekursiv ist.

**Lösung 3.3**

Wegen

$$\begin{aligned} c_{\text{ungerade}}(0) &= 0 \\ c_{\text{ungerade}}(x+1) &= 1 \dot{-} f(x) \end{aligned}$$

ist die charakteristische Funktion der ungeraden Zahlen primitiv rekursiv. Wegen

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(x+1) &= f(x) + c_{\text{ungerade}}(x) + 1 \end{aligned}$$

ist dann auch  $f$  primitiv rekursiv.

**Aufgabe 3.4** *Klausur 2009*

Die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sei durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } \sqrt{x} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeige, dass  $f$  primitiv rekursiv ist. (Du darfst hierbei alle Ergebnisse über die primitiv rekursiven Funktionen aus der Vorlesung verwenden.)

**Lösung 3.4**

Wegen

$$f(x) = \mu y \leq x (y \cdot y = x),$$

der Abgeschlossenheit von  $F(\text{PRIM})$  gegen den beschränkten  $\mu$ -Operator und weil die Multiplikation primitiv rekursiv ist, ist  $f$  primitiv rekursiv.

**Aufgabe 3.5** *Klausur 2009*

Die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sei primitiv rekursiv und  $g(n)$  sei die Funktion, die die Anzahl der geraden Nullstellen von  $f$  strikt unterhalb von  $n$  berechnet, d.h.

$$g(n) = |\{m : m < n \ \& \ m \text{ gerade} \ \& \ f(m) = 0\}|.$$

Zeige, dass  $g$  ebenfalls primitiv rekursiv ist. (Du darfst hierbei alle Ergebnisse über die primitiv rekursiven Funktionen aus der Vorlesung verwenden.)

**Lösung 3.5**

Wegen

$$g(0) = 0$$
$$g(n+1) = \begin{cases} g(n) + \overline{sg}(f(n)), & \text{falls } \exists m \leq n \ (m + m = n) \\ g(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

ist  $g$  primitiv rekursiv.

## 4 Rekursiv aufzählbare Mengen

**Aufgabe 4.1**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe deine Antworten und gebe für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an.

- (a) Jede unendliche rekursive Menge enthält eine nichtrekursive Teilmenge.
- (b) Für zwei rekursiv aufzählbare Mengen  $A$  und  $B$  ist auch  $A \setminus B$  rekursiv aufzählbar.

- (c) Seien  $A$  und  $B$  zwei disjunkte rekursiv aufzählbare Mengen, sodass  $A \cup B$  rekursiv ist. Dann sind auch  $A$  und  $B$  rekursiv.
- (d) Sind sowohl  $A$  als auch  $\overline{A}$  rekursiv aufzählbar, so gilt  $A =_m \overline{A}$ .

*Hinweis:* Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

#### Lösung 4.1

- (a) Wahr. Für  $A \subseteq \mathbb{N}$  unendlich ist die Potenzmenge  $\mathcal{P}(A)$ , d.h. die Menge der Teilmengen von  $A$ , überabzählbar. Die Klasse der rekursiven Mengen ist allerdings abzählbar.
- (b) Falsch. Zum Beispiel sind  $A = \mathbb{N}$  und  $B = K$  laut Vorlesung rekursiv aufzählbar. Allerdings ist  $A \setminus B = \overline{K}$  nicht rekursiv aufzählbar, da sonst nach dem Komplementlemma  $K$  rekursiv wäre.
- (c) Wahr. Um  $x \in A$  zu entscheiden, prüfen wir zunächst, ob  $x$  in  $A \cup B$  liegt. Ist dies der Fall, zählen wir gleichzeitig  $A$  und  $B$  auf. Da  $x \in A \cup B$  und  $A \cap B = \emptyset$  gilt, liegt  $x$  in genau einer der Mengen  $A$  und  $B$ . Falls  $x$  vom Aufzählungsverfahren für  $A$  aufgezählt wird, liegt  $x$  in  $A$ . Wird  $x$  von dem für  $B$  aufgezählt, nicht. Einer dieser Fälle tritt immer ein.
- (d) Falsch. Dies gilt nur, falls  $A \neq \emptyset, \mathbb{N}$ : Sind  $A$  und  $\overline{A}$  rekursiv aufzählbar, so sind  $A$  und  $\overline{A}$  nach dem Komplementlemma rekursiv. Laut Vorlesung sind alle rekursiven Mengen ungleich  $\emptyset, \mathbb{N}$   $m$ -äquivalent, was leicht einzusehen ist.  
Gilt aber zum Beispiel  $A = \emptyset$ , so ist  $\overline{A} = \mathbb{N}$ . Allerdings gilt  $\mathbb{N} \not\leq_m \emptyset$ : Aus  $\mathbb{N} \leq_m \emptyset$  via  $f$ , also  $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(x) \in \emptyset$ , folgt  $f(x) \notin \mathbb{N}$  für alle  $x \in \mathbb{N}$ , was ein Widerspruch zur Rekursivität von  $f$  ist.

#### Aufgabe 4.2

Die symmetrische Differenz zweier Mengen  $A$  und  $B$  ist

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Zeige:

- (a) Ist  $A \triangle B$  endlich und  $A, B \neq \emptyset, \mathbb{N}$ , so gilt  $A =_m B$ .  
*Bemerkung:* Für  $A \triangle B$  endlich schreibt man auch  $A =^* B$ .
- (b) Die symmetrische Differenz zweier rekursiv aufzählbarer Mengen ist nicht notwendig rekursiv aufzählbar.

- (c) Seien  $A$  und  $B$  rekursiv aufzählbar. Wenn  $A \triangle B$  rekursiv ist, dann sind auch  $A \setminus B$  und  $B \setminus A$  rekursiv.

*Hinweis:* Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

**Lösung 4.2**

- (a) Ist  $A \triangle B$  endlich, so sind auch  $A \setminus B$  und  $B \setminus A$  endlich. Sei  $A \setminus B = \{x_1, \dots, x_n\}$  und  $B \setminus A = \{y_1, \dots, y_m\}$ . Dann gilt  $A \leq_m B$  via  $f$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \bar{b}, & \text{falls } x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ b, & \text{falls } x \in \{y_1, \dots, y_m\} \\ x, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $b \in B$  und  $\bar{b} \notin B$  gilt.  $f$  ist rekursiv, weil endliche Mengen rekursiv sind.  $B \leq_m A$  analog.

- (b)  $K$  und  $\mathbb{N}$  sind rekursiv aufzählbar, aber  $K \triangle \mathbb{N} = \bar{K}$  ist nicht rekursiv aufzählbar.
- (c) Um  $x \in A \setminus B$  zu entscheiden, prüfe zunächst, ob  $x \in A \triangle B$  gilt. Ist dies der Fall, so zählen wir gleichzeitig  $A$  und  $B$  auf, bis  $x$  auftaucht. Da  $x$  in  $A \triangle B$  liegt, muss  $x$  in einer der beiden Mengen liegen. Gilt  $x \in B$ , so liegt  $x$  in  $A \setminus B$ . Ansonsten nicht.

**Aufgabe 4.3**

Zeige mithilfe der Diagonalisierungsmethode, dass die Menge

$$K' = \{e \in \mathbb{N} : \varphi(e, x) \downarrow \text{ für alle } x \leq e\}$$

nicht rekursiv ist.

**Lösung 4.3**

Angenommen,  $K'$  sei rekursiv. Dann ist die durch

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x, x) + 1, & \text{falls } x \in K' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  rekursiv, da  $f$  durch eine (nach Annahme) rekursive Fallunterscheidung definiert ist. Also existiert ein  $e \in \mathbb{N}$  mit  $\varphi_e = f$ .  $f$  ist total, also gilt  $f(x) \downarrow$  für alle  $x \leq e$ , deshalb  $e \in K'$  und somit

$$\varphi_e(e) = f(e) = \varphi(e, e) + 1.$$

Dies ist ein Widerspruch. Deshalb kann  $K'$  nicht rekursiv sein.

**Aufgabe 4.4** *Klausur 2015*

Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle rekursiv aufzählbaren Mengen  $A_0, A_1, A_2$  ist die zugehörige Menge

$$B = \{x : x \text{ ist Element von mindestens zwei der Mengen } A_0, A_1, A_2\}$$

wiederum rekursiv aufzählbar.

- (b) Für alle rekursiv aufzählbaren Mengen  $A_0, A_1, A_2$  ist die zugehörige Menge

$$C = \{x : x \text{ ist Element von höchstens zwei der Mengen } A_0, A_1, A_2\}$$

wiederum rekursiv aufzählbar.

Du darfst hierbei alle Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden, nicht aber die Church-Turing-These.

**Aufgabe 4.5** *Blatt 13, 2015*

- (a) Zeige, dass für eine Menge  $A \subseteq \mathbb{N}$  folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i)  $A$  ist rekursiv.
- (ii)  $A$  und  $\bar{A}$  sind rekursiv aufzählbar.
- (iii)  $A$  ist leer oder der Wertebereich einer schwach monotonen, rekursiven Funktion. Hierbei heißt  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  *schwach monoton*, falls für alle  $x \leq y$  folgt dass  $g(x) \leq g(y)$ .
- (iv)  $A$  ist endlich oder der Wertebereich einer streng monotonen, rekursiven Funktion. Hierbei heißt  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  *streng monoton*, falls für alle  $x < y$  folgt, dass  $g(x) < g(y)$ .

- (b) Zeige:

- (i) Ist  $A \subseteq \mathbb{N}$  unendlich und rekursiv aufzählbar, so ist  $A$  der Wertebereich einer totalen, injektiven, rekursiven Funktion.
- (ii) Ist  $A \subseteq \mathbb{N}$  unendlich und rekursiv aufzählbar, so enthält  $A$  eine unendliche, rekursive Teilmenge  $B$ .

**Lösung 4.5**

- (a) Wir zeigen dies per Ringschluss:

- (i) $\Rightarrow$ (iv) Wir definieren

$$\begin{aligned} g(0) &= \mu x(x \in A) \\ g(y+1) &= \mu x(x > g(y) \ \& \ x \in A). \end{aligned}$$

Weil  $A$  rekursiv und nicht endlich ist, ist  $g$  rekursiv. Offensichtlich ist  $g$  streng monoton und  $\text{Wb}(g) = A$ .

- (iv)⇒(iii) Falls  $A$  nicht endlich ist, genügt die Funktion  $g$  aus (iv) unseren Anforderungen. Ist  $A$  endlich, aber nicht leer, so definieren wir

$$g(m) = \begin{cases} x_m, & \text{falls } m \leq n \\ x_n, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $A = \{x_0, \dots, x_n\}$  mit  $x_0 < \dots < x_n$  gelten soll. Dann ist  $g$  rekursiv, da  $g$  über endlich viele rekursive Fallunterscheidungen definiert ist.

- (iii)⇒(ii) Wegen  $A = \text{Wb}(g)$  ist  $A$  rekursiv aufzählbar. Falls  $A$  endlich ist, ist  $A$  rekursiv und somit  $\overline{A}$  rekursiv aufzählbar. Ansonsten ist  $\overline{A}$  wegen

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} : \exists y (g(y) > x \ \& \ \forall y' < y (g(y') \neq x))\}$$

die Projektion einer rekursiven Menge und somit rekursiv aufzählbar.

- (ii)⇒(i) Siehe Vorlesung.
- (b) (i) Folgt direkt aus (a), da jede streng monotone Funktion injektiv ist.
- (ii) Da  $A$  nicht leer ist, ist  $A$  der Wertebereich einer total rekursiven Funktion  $f$ . Dann ist die rekursive Funktion  $g$  mit

$$g(0) = f(0)$$
$$g(y+1) = \begin{cases} f(y+1), & \text{falls } f(y+1) \geq f(y) \\ f(y), & \text{sonst} \end{cases}$$

schwach monoton und deshalb ist nach (a) die Menge  $B = \text{Wb}(g)$  rekursiv. Offensichtlich gilt  $\text{Wb}(g) \subseteq \text{Wb}(f) = A$  und weil  $A$  unendlich ist, gibt es für jedes  $y$  ein  $y'$  mit  $f(y') > g(y)$ , also auch  $g(y') > g(y)$ .

#### **Aufgabe 4.6** Klausur 2009

Zeige, dass es zu jeder rekursiv aufzählbaren Menge  $A \subseteq \mathbb{N}$  eine 1-stellige partiell rekursive Funktion  $\psi$  gibt, sodass  $A$  sowohl Definitionsbereich als auch Wertebereich von  $\psi$  ist:  $A = \text{Db}(\psi) = \text{Wb}(\psi)$ .

#### **Lösung 4.6**

Da  $A$  rekursiv aufzählbar ist, gibt es eine 1-stellige partiell rekursive Funktion  $\theta$ , deren Definitionsbereich  $A$  ist:  $A = \text{Db}(\theta)$ . Definiere die partiell rekursive Funktion  $\psi$  durch

$$\psi(x) = 0 \cdot \theta(x) + x.$$

Dann gilt  $A = \text{Db}(\theta) = \text{Db}(\psi) = \text{Wb}(\psi)$ .



**Aufgabe 4.7** *Klausur 2009*

Es sei  $A \subseteq \mathbb{N}$  unendlich und  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  total rekursiv. Weiter sei  $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$  das Bild und  $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$  das Urbild von  $A$  bzgl.  $f$ . Welche der folgenden Aussagen gelten stets? Begründe deine Antworten! Gebe gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

- (i) Ist  $A$  nicht rekursiv, so ist auch das Bild  $f(A)$  von  $A$  nicht rekursiv.
- (ii) Ist  $A$  nicht rekursiv und  $f$  injektiv, so ist auch  $f(A)$  nicht rekursiv.
- (iii) Ist  $A$  rekursiv aufzählbar, so ist auch  $f(A)$  rekursiv aufzählbar.
- (iv) Ist  $A$  rekursiv, so ist auch  $f(A)$  rekursiv.
- (v) Ist  $A$  rekursiv, so ist auch  $f^{-1}(A)$  rekursiv.

**Lösung 4.7**

- (i) Falsch. Sei  $A$  nicht rekursiv. Dann ist für  $f(x) = 0$  konstant  $f(A) = \{0\}$  und damit rekursiv.
- (ii) Wahr. Da  $f$  injektiv ist, gilt  $A \leq_m f(A)$  via  $f$ , denn

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$$

und

$$x \notin A \Rightarrow f(x') \neq f(x) \quad \forall x' \Rightarrow f(x) \notin f(A).$$

- (iii) Wahr. Gilt  $A = \text{Wb}(\psi)$  für eine partiell rekursive Funktion  $\psi$ , so ist  $f(A) = \text{Wb}(f \circ \psi)$ .
- (iv) Falsch. Das Halteproblem  $K$  ist rekursiv aufzählbar. Also gibt es eine total rekursive Funktion  $f$  mit  $\text{Wb}(f) = K$ . Dann ist  $f(\mathbb{N}) = K$  nicht rekursiv.
- (v) Wahr. Ist  $A = \text{Db}(\psi)$  für eine partiell rekursive Funktion  $\psi$ , so ist  $f^{-1}(A) = \text{Db}(\psi \circ f)$ .

## 5 Reduktionsmethode

**Aufgabe 5.1** Nachklausur 2012

(a) Zeige, dass die Mengen

$$A = \{\langle x, y \rangle : \varphi_x(y) \downarrow \text{ und } \varphi_y(x) \downarrow\}$$

und

$$B = \{\langle x, y \rangle : \varphi_x(y) \uparrow \text{ oder } \varphi_y(x) \uparrow\}$$

nicht rekursiv sind.

(b) Sind  $A$  und  $B$  rekursiv aufzählbar?

**Lösung 5.1**

(a) Es gilt  $K_d \leq_m A$  via  $f(x) = \langle x, x \rangle$  da

$$x \in K_d \Leftrightarrow \varphi_x(x) \downarrow \Leftrightarrow \varphi_x(x) \downarrow \ \& \ \varphi_x(x) \downarrow \Leftrightarrow f(x) = \langle x, x \rangle \in A$$

Da das diagonale Halteproblem nicht rekursiv ist, ist also nach dem Reduktionslemma auch  $A$  nicht rekursiv. Da  $B = \overline{A}$  und die rekursiven Mengen gegen Komplement abgeschlossen sind, ist somit auch  $B$  nicht rekursiv.

(b)  $A$  ist als Definitionsbereich der partiell rekursiven Funktion

$$\psi(\langle x, y \rangle) = \varphi(x, y) + \varphi(y, x)$$

rekursiv aufzählbar. Da eine Menge rekursiv ist, falls die Menge selbst und ihr Komplement rekursiv aufzählbar sind, kann also  $B$  nicht rekursiv aufzählbar sein.

**Aufgabe 5.2**

Seien FIN und INF die Indizes der endlichen bzw. unendlichen rekursiv aufzählbaren Mengen:

$$\text{FIN} = \{e \in \mathbb{N} : W_e \text{ ist endlich}\}$$

$$\text{INF} = \{e \in \mathbb{N} : W_e \text{ ist unendlich}\}$$

Sei TOT die Menge der Indizes aller rekursiven Funktionen:

$$\text{TOT} = \{e \in \mathbb{N} : W_e = \mathbb{N}\}$$

*Hinweis:* Wie in der Vorlesung definiert, ist  $W_e$  der Definitionsbereich der  $e$ -ten partiell rekursiven Funktion, also  $W_e = \text{Db}(\varphi_e) = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_e(x) \downarrow\}$ .

(a) Zeige, dass die Menge  $\text{FIN} \oplus \text{INF} = \{2e : e \in \text{FIN}\} \cup \{2e+1 : e \in \text{INF}\}$  nicht rekursiv aufzählbar ist.

- (b) Zeige, dass das Komplement von TOT auf FIN many-one-reduzierbar ist, also dass  $\overline{\text{TOT}} \leq_m \text{FIN}$  gilt.
- (c) Zeige, dass FIN nicht rekursiv aufzählbar ist.  
*Hinweis:* Entweder zeigst du dies direkt, oder du zeigst durch geeignete  $m$ -Reduzierung, dass  $\overline{\text{TOT}}$  nicht rekursiv aufzählbar ist.

### Lösung 5.2

- (a) FIN und INF sind als nichttriviale Indexmengen nach dem Satz von Rice nicht rekursiv. Da aber  $\text{FIN} = \overline{\text{INF}}$  gilt, muss nach dem Komplementlemma zumindest eine der Mengen nicht rekursiv aufzählbar sein. Aus  $\text{FIN} \leq_m \text{FIN} \oplus \text{INF}$  und  $\text{INF} \leq_m \text{FIN} \oplus \text{INF}$  folgern wir mithilfe der Abgeschlossenheit der rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen  $m$ -Reduzierung, dass  $\text{FIN} \oplus \text{INF}$  nicht rekursiv aufzählbar ist.

- (b) Definiere die zweistellige partiell rekursive Funktion  $\psi$  durch

$$\psi(e, x) = \sum_{n=0}^x \varphi_e(n).$$

Dann gibt es, da  $\varphi$  eine Gödelnummerierung ist, eine rekursive Übersetzungsfunktion  $f$  von  $\psi$  nach  $\varphi$ , d.h.  $\psi(e, x) = \varphi_{f(e)}(x)$  für alle  $x \in \mathbb{N}$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} e \in \overline{\text{TOT}} &\Rightarrow e \notin \text{TOT} \\ &\Rightarrow \varphi_e(x_0) \uparrow \text{ für ein } x_0 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \psi_e(x) \uparrow \text{ für alle } x \geq x_0 \\ &\Rightarrow W_{f(e)} = \text{Db}(\varphi_{f(e)}) = \text{Db}(\psi_e) \text{ ist endlich} \\ &\Rightarrow f(e) \in \text{FIN} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e \notin \overline{\text{TOT}} &\Rightarrow e \in \text{TOT} \\ &\Rightarrow \varphi_e(x) \downarrow \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \psi_e(x) \downarrow \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow W_{f(e)} = \text{Db}(\varphi_{f(e)}) = \text{Db}(\psi_e) = \mathbb{N} \text{ ist unendlich} \\ &\Rightarrow f(e) \in \text{INF} = \overline{\text{FIN}}, \end{aligned}$$

d.h.  $e \in \overline{\text{TOT}} \Leftrightarrow f(e) \in \text{FIN}$  und deshalb  $\overline{\text{TOT}} \leq_m \text{FIN}$  via  $f$ .

- (c) Es genügt, zu zeigen, dass  $\overline{\text{TOT}}$  nicht rekursiv aufzählbar ist, denn dann folgt aus der Abgeschlossenheit der rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen  $m$ -Reduzierung, dass FIN nicht rekursiv aufzählbar ist. Definiere also die zweistellige partiell rekursive Funktion  $\theta$  durch

$$\theta(e, x) = \varphi_e(e).$$

Dann gibt es, da  $\varphi$  eine Gödelnummerierung ist, eine rekursive Übersetzungsfunktion  $g$  von  $\theta$  nach  $\varphi$ , d.h.  $\theta(e, x) = \varphi_{g(e)}(x)$  für alle  $e, x \in \mathbb{N}$ . Somit gilt

$$e \in K_d \Leftrightarrow \varphi_e(e) \downarrow \Leftrightarrow \theta_e \text{ total} \Leftrightarrow \varphi_{g(e)} \text{ total} \Leftrightarrow g(e) \in \text{TOT},$$

d.h.  $K_d \leq_m \text{TOT}$  bzw.  $\overline{K_d} \leq_m \overline{\text{TOT}}$  via  $g$ . Aufgrund der Transitivität von  $\leq_m$  folgt  $\overline{K_d} \leq_m \text{FIN}$ . Also wäre mit FIN auch  $\overline{K_d}$  rekursiv aufzählbar, da die rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen  $\leq_m$  abgeschlossen sind. Dies ergäbe allerdings einen Widerspruch, denn dann wären  $K_d$  (laut Vorlesung) und  $\overline{K_d}$  (nach Annahme) rekursiv aufzählbar und somit wäre  $K_d$  rekursiv.

### Aufgabe 5.3 Klausur 2012

Sei

$$\text{Id} = \{e \in \mathbb{N} : \forall n (\varphi_e(n) = n)\}.$$

- (a) Zeige, dass das Halteproblem  $m$ -reduzierbar auf Id ist, das heißt, dass  $K \leq_m \text{Id}$  gilt.  
(b) Gebe für die folgenden Aussagen jeweils an, ob sie wahr oder falsch sind. Begründe deine Antworten!
- (i) Id ist rekursiv.
  - (ii)  $\overline{\text{Id}}$  ist rekursiv.
  - (iii)  $\overline{\text{Id}}$  ist rekursiv aufzählbar.

### Lösung 5.3

- (a) Definiere die zweistellige partiell rekursive Funktion  $\psi$  durch

$$\psi(\langle e, x \rangle, y) = 0 \cdot \varphi_e(x) + y.$$

Dann gibt es, da  $\varphi$  eine Gödelnummerierung ist, eine rekursive Übersetzungsfunktion  $f$  von  $\psi$  nach  $\varphi$ , d.h.  $\psi(\langle e, x \rangle, y) = \varphi_{f(\langle e, x \rangle)}(y)$  für alle  $e, x, y \in \mathbb{N}$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} \langle e, x \rangle \in K &\Leftrightarrow \varphi_e(x) \downarrow \\ &\Leftrightarrow \psi(\langle e, x \rangle, y) = y \text{ für alle } y \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \varphi_{f(\langle e, x \rangle)}(y) = y \text{ für alle } y \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(\langle e, x \rangle) \in \text{Id}, \end{aligned}$$

d.h.  $K \leq_m \text{Id}$  via  $f$ .

- (b) (i) Falsch. Id ist als nichttriviale Indexmenge nach dem Satz von Rice nicht rekursiv. Alternativ kann man argumentieren, dass  $K$  nicht rekursiv ist und somit nach dem Reduktionslemma Id auch nicht.
- (ii) Falsch. Eine Menge ist genau dann rekursiv, wenn ihr Komplement rekursiv ist.
- (iii) Falsch. Aus  $K \leq_m \text{Id}$  via  $f$  folgt  $\bar{K} \leq_m \bar{\text{Id}}$  via  $f$ . Also wäre mit  $\bar{\text{Id}}$  auch  $\bar{K}$  rekursiv aufzählbar, da die rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen  $\leq_m$  abgeschlossen sind. Dies ergäbe allerdings einen Widerspruch, denn dann wären  $K$  (laut Vorlesung) und  $\bar{K}$  (nach Annahme) rekursiv aufzählbar und somit wäre  $K$  rekursiv.

**Aufgabe 5.4** Blatt 13, 2015

- (a) Sei  $W_e = \text{Db}(\varphi_e)$  die  $e$ -te rekursiv aufzählbare Menge und  $W = \{e \in \mathbb{N} : 0, 1 \in W_e\}$ . Zeige  $K_d \leq_m W$ , indem du eine rekursive Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  angibst mit

$$\forall e : e \in K_d \Leftrightarrow f(e) \in W$$

Ist  $W$  rekursiv aufzählbar?

- (b) Folgere aus (a), dass  $W$  vollständig für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen ist.
- (c) Sei nun  $I = \{e \in \mathbb{N} : W_e \text{ ist nichttriviale Indexmenge}\}$ . Ist  $I$  eine Indexmenge? Ist sie nichttrivial?
- (d) Wahr oder falsch? Begründe deine Antwort und gebe gegebenenfalls Gegenbeispiele an!
- (i) Ist  $B$  rekursiv aufzählbar und  $A \leq_m B$ , so ist auch  $A$  rekursiv aufzählbar.
- (ii) Man kann den kleinsten Index einer partiell rekursiven Funktion bestimmen. Genauer: Die Funktion  $\min$ , die jedem Index  $e$  die kleinste Zahl  $e'$  mit  $\varphi_e = \varphi_{e'}$  zuordnet, ist rekursiv
- (iii) Es gibt eine abzählbare Klasse  $C$ , die keine vollständige Menge besitzt.

**Lösung 5.4**

- (a) Wir definieren

$$\psi(e, x) = \varphi(e, e)$$

und erhalten eine Übersetzungsfunktion  $f$  von  $\psi$  nach  $\varphi$ , d.h.  $\psi(e, x) = \varphi_{f(e)}(x)$  für alle  $x \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$e \in K_d \Rightarrow \psi_e \text{ total} \Rightarrow \varphi_{f(e)} \text{ total} \Rightarrow W_{f(e)} = \mathbb{N} \Rightarrow f(e) \in W$$

und

$$e \notin K_d \Rightarrow \psi_e(x) \uparrow \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi_{f(e)}(x) \uparrow \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow W_{f(e)} = \emptyset \Rightarrow f(e) \notin W$$

und somit  $K_d \leq_m W$  via  $f$ .

Wegen

$$W = \{e \in \mathbb{N} : \exists s (\varphi_e(0) \text{ und } \varphi_e(1) \text{ terminieren in } \leq s \text{ Schritten})\}$$

ist  $W$  die Projektion einer rekursiven Menge und somit rekursiv aufzählbar.

- (b)  $W$  ist wegen der Härte von  $K_d$  und der Transitivität von  $\leq_m$  auch hart und somit, da rekursiv aufzählbar, vollständig.
- (c) Gilt  $\varphi_e = \varphi_{e'}$ , so folgt  $W_e = W_{e'}$ . Deshalb ist  $W_e$  genau dann nichttrivial, wenn  $W_{e'}$  nichttrivial ist, und somit ist  $I$  eine Indexmenge.  $I$  ist nichttrivial, weil jeder Index der nirgends definierten Funktion nicht in  $I$  liegt, die Indizes aller rekursiven Funktionen allerdings schon.
- (d) (i) Wahr. Die rekursiv aufzählbaren Mengen sind nach unten gegen  $\leq_m$  abgeschlossen.  
(ii) Falsch. Ansonsten wären alle Indexmengen rekursiv, denn

$$e \in \text{Ind}(\varphi_{e_0}) \Leftrightarrow \min(e) = e_0,$$

also  $\text{Ind}(\varphi_{e_0}) \leq_m \{e_0\}$  via  $\min$ , wobei  $e_0$  der minimale Index von  $\varphi_{e_0}$  ist.

- (iii) Wahr. Siehe Blatt 10, Aufgabe 1.

### Aufgabe 5.5 Klausur 2009

- (a) Zeige, dass die Menge

$$A = \{e : W_e \not\subseteq \{0, \dots, e\}\}$$

$m$ -hart für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen ist.

*Hinweis:* Du kannst hierbei die Vollständigkeit der in der Vorlesung eingeführten Varianten des Halteproblems voraussetzen.

- (b) Ist die Menge  $A$  sogar  $m$ -vollständig für die Klasse der r.a. Mengen? Begründe deine Antwort!

**Lösung 5.5**

- (a) Aufgrund der Transitivität von  $\leq_m$  ist  $A$  schon hart, falls  $K_d \leq_m A$  gilt. Wir definieren deshalb die partiell rekursive Funktion  $\psi$  durch

$$\psi(e, x) = \varphi(e, e).$$

Dann gibt es eine rekursive Übersetzungsfunktion  $f$  mit  $\psi_e = \varphi_{f(e)}$  für alle  $e \in \mathbb{N}$ . Somit gilt

$$e \in K_d \Rightarrow \psi_e \text{ total} \Rightarrow \varphi_{f(e)} \text{ total} \Rightarrow W_{f(e)} = \mathbb{N} \Rightarrow f(e) \in A$$

und

$$e \notin K_d \Rightarrow \psi_e(x) \uparrow \forall x \Rightarrow \varphi_{f(e)}(x) \uparrow \forall x \Rightarrow W_{f(e)} = \emptyset \Rightarrow f(e) \notin A$$

und somit  $K_d \leq_m A$  via  $f$ .

- (b) Wegen

$$A = \{e: \exists \langle x, s \rangle (x > e \ \& \ \varphi_e(x) \text{ terminiert in } \leq s \text{ Schritten})\}$$

ist  $A$  die Projektion einer rekursiven Menge und damit rekursiv aufzählbar.

**Aufgabe 5.6** Klausur 2009

- (a) Zeige, dass die Menge

$$A = \{e: |W_e| \geq 2\}$$

$m$ -hart für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen ist.

*Hinweis:* Du kannst hierbei die Vollständigkeit der in der Vorlesung eingeführten Varianten des Halteproblems voraussetzen.

- (b) Ist die Menge  $A$  sogar  $m$ -vollständig für die Klasse der r.a. Mengen? Begründe deine Antwort!

**Lösung 5.6**

- (a) Aufgrund der Transitivität von  $\leq_m$  ist  $A$  schon hart, falls  $K_d \leq_m A$  gilt. Wir definieren deshalb die partiell rekursive Funktion  $\psi$  durch

$$\psi(e, x) = \varphi(e, e).$$

Dann gibt es eine rekursive Übersetzungsfunktion  $f$  mit  $\psi_e = \varphi_{f(e)}$  für alle  $e \in \mathbb{N}$ . Somit gilt

$$e \in K_d \Rightarrow \psi_e \text{ total} \Rightarrow \varphi_{f(e)} \text{ total} \Rightarrow W_{f(e)} = \mathbb{N} \Rightarrow f(e) \in A$$

und

$$e \notin K_d \Rightarrow \psi_e(x) \uparrow \forall x \Rightarrow \varphi_{f(e)}(x) \uparrow \forall x \Rightarrow W_{f(e)} = \emptyset \Rightarrow f(e) \notin A$$

und somit  $K_d \leq_m A$  via  $f$ .

(b) Wegen

$$A = \{e: \exists \langle x_1, x_2, s \rangle (x_1 \neq x_2 \ \& \ \varphi_e(x_1), \varphi_e(x_2) \text{ terminieren in } \leq s \text{ Schritten})\}$$

ist  $A$  die Projektion einer rekursiven Menge und damit rekursiv aufzählbar.

## 6 Formale Sprachen

### Aufgabe 6.1

Zeige, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

$$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^*: \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \quad (\text{Klausur 2014})$$

$$L_2 = \{a^n b^{2n} c^{3n} : n \geq 1\} \quad (\text{Klausur 2015})$$

$$L_3 = \{0^{n^2} : n \geq 0\} \quad (\text{Nachklausur 2015})$$

### Aufgabe 6.2

Wahr oder falsch?

- (a) Die Sprache  $L_1 = \{vw : v, w \in \{0, 1\}^*, |v| = |w|\}$  ist regulär.
- (b) Die Sprache  $L_2 = \{w_0 \circ \dots \circ w_n : n \in \mathbb{N}, |w_k| = k \ \forall k \in \mathbb{N}\}$  ist kontextfrei.
- (c) Sei  $L \subseteq \{0, 1\}^*$  eine Sprache mit  $|L| = n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $L$  regulär.

### Lösung 6.2

- (a) Wahr.  $L_1$  wird von der Grammatik  $G = (\{S, T\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit den Regeln

$$P = \{S \rightarrow 0T \mid 1T \mid \lambda, T \rightarrow 0S \mid 1S\}$$

erzeugt, denn

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* : |w| = 2n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

- (b) Falsch. **TODO:** Pumpinglemma anwenden
- (c) Wahr.  $L$  wird von der regulären Grammatik  $G = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit den Regeln

$$P = \{S \rightarrow w : w \in L\}$$

erzeugt. Dabei ist  $P$  wegen  $|P| = |L| = n$  endlich.



### Aufgabe 6.3

Zeige, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : w = \text{Bin}(n) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

der Binärzahlen regulär ist.

### Lösung 6.3

$L$  wird von der Grammatik  $G = (\{S, A\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit den Regeln

$$P = \{S \rightarrow 0 \mid 1A, A \rightarrow 0A \mid 1A \mid \lambda\}$$

ezeugt, denn

$$L = \{0\} \cup \{1w : w \in \{0,1\}^*\}.$$

### Aufgabe 6.4

Sei  $L$  die Sprache über dem Alphabet  $\{a, b, c\}$ , die genau die Wörter enthält, in denen das Teilwort  $abc$  genau einmal vorkommt.

- (a) Gebe eine rechtslineare Grammatik an, die  $L$  erzeugt.
- (b) Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der  $L$  erkennt.

### Lösung 6.4

(a)  $L$  wird von der Grammatik  $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit den Regeln

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow aA \mid bS \mid cS, \\ & A \rightarrow aA \mid bB \mid cS, \\ & B \rightarrow aA \mid bS \mid cC, \\ & C \rightarrow aD \mid bC \mid cC \mid \lambda, \\ & D \rightarrow aD \mid bE \mid cC \mid \lambda, \\ & E \rightarrow aD \mid bC \mid \lambda \} \end{aligned}$$

erzeugt

- (b) **TODO.**

**Aufgabe 6.5**

Sei  $L$  die reguläre Sprache

$$L = \{w \in \{0, 1, 2\}^* : \#_0(w) = 0 \text{ oder } \#_1(w) = 0 \text{ oder } \#_2(w) = 0\}.$$

Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der  $L$  erkennt.

**Lösung 6.5**

Zunächst beobachtet man, dass

$$L = \{0, 1\}^* \cup \{0, 2\}^* \cup \{1, 2\}^*$$

gilt.

**TODO**

**Aufgabe 6.6** *Klausur 2012*

Es sei  $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, P, S)$  die kontextfreie Grammatik mit der Regelmenge

$$P = \{S \rightarrow XY, X \rightarrow ZXb \mid \lambda, Y \rightarrow bY \mid b, Z \rightarrow a \mid \lambda\}.$$

- (a) Gebe die von  $G$  erzeugte Sprache  $L(G)$  an.
- (b) Gebe ein Wort  $w \in L(G)$  minimaler Länge an, das mehr als einen Herleitungsbaum besitzt, und zeichne zwei verschiedene zugehörigen Herleitungsbäume.
- (c) Gebe eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform an, die  $L(G)$  erzeugt.