1 Maschinen

1.1 Turingmaschinen

Aufgabe 1.1 *??*
Gebe eine 1-Band-Turingmaschine M an, die die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ y, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

berechnet.
Zur Erinnerung: Die Zahl n wird durch das Unärwort 0^{n+1} dargestellt.

Aufgabe 1.2 *??*
Gebe eine 2-Band-Turingmaschine M an, die die durch $f(w) = 0^{\#_0(w)}1^{\#_1(w)}$ gegebene Funktion $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$ berechnet.

Aufgabe 1.3 *??*
Gebe einen totalen (deterministischen) 2-Band-Turingakzeptor M an, der die Sprache $L = \{w2w : w \in \{0, 1\}^*\}$ (über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$) erkennt.

1.2 Registermaschinen

Aufgabe 1.4

TODO: Registermaschinen und -operatoren

2 Funktionen

Aufgabe 2.1
Zeige nur unter Verwendung der Definition der primitiv rekursiven Funktionen, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(b) $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $g(x, y) = 2^x + 2^y$ *(Nachklausur 2015)*
Du darfst verwenden, dass die Addition $add(x, y) = x + y$ primitiv rekursiv ist.
Hinweis: Zeige zunächst, dass die Funktion $\hat{f}(x) = 2^x$ primitiv rekursiv ist.

(c) $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(x, y, z) = 3x + z$

Aufgabe 2.2 *??*
Eine natürliche Zahl heißt *Mersenne-Primzahl*, falls sie von der Form $2^n - 1$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) und eine Primzahl ist.
Zeige, dass die Menge

$$M = \{x \colon x \text{ ist Mersenne-Primzahl}\}$$

primitiv rekursiv ist.
Du darfst dabei neben der Definition der primitiv rekursiven Funktionen die aus der Vorlesung bekannten Abschlusseigenschaften sowie die primitive Rekursivität der Multiplikation $\cdot$, der modifizierten Subtraktion $\dot{-}$, der Potenzfunktion $n \mapsto 2^n$ und der Gleichheitsrelation verwenden.

Lösung 2.2
Es gilt

$$x \in M \Leftrightarrow (x \neq 0 \;\&\; x \neq 1 \;\&\; \exists y < x(x = 2^y \dot{-} 1) \;\&\; (\forall m < x(\forall n < x(n \cdot m \neq x))).$$

Da die primitiv rekursiven Mengen gegen explizite Definitionen, gegen beschränkte Quantoren und gegen die aussagenlogischen Junktoren abgeschlossen sind und aufgrund der primitiven Rekursivität der oben genannten Funktionen ist M damit primitiv rekursiv.

3 Mengen

Aufgabe 3.1 *??*
(a) Zeige, dass die Mengen

$$A = \{\langle x, y\rangle \colon \varphi_x(y)\downarrow \text{ und } \varphi_y(x)\downarrow\}$$

und

$$B = \{\langle x, y\rangle \colon \varphi_x(y)\uparrow \text{ oder } \varphi_y(x)\uparrow\}$$

nicht rekursiv sind.

(b) Sind A und B rekursiv aufzählbar?

Lösung 3.1
(a) Es gilt $K_d \leq_m A$ via $f(x) = \langle x, x\rangle$ da

$$x \in K_d \Leftrightarrow \varphi_x(x)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_x(x)\downarrow \;\&\; \varphi_x(x)\downarrow \Leftrightarrow f(x) = \langle x, x\rangle \in A$$

Da das diagonale Halteproblem nicht rekursiv ist, ist also nach dem Reduktionslemma auch A nicht rekursiv. Da $B = \overline{A}$ und die rekursiven Mengen gegen Komplement abgeschlossen sind, ist somit auch B nicht rekursiv.

(b) Aufgrund des Reduktionslemmas können nicht beide Mengen rekursiv aufzählbar sein. A ist als Definitionsbereich der partiell rekursiven Funktion

$$\psi(\langle x, y \rangle) = \varphi(x, y) + \varphi(y, x)$$

rekursiv aufzählbar. Da eine Menge rekursiv ist, falls die Menge selbst und ihr Komplement rekursiv aufzählbar sind, kann also B nicht rekursiv aufzählbar sein.

Aufgabe 3.2
Die symmetrische Differenz zweier Mengen A und B ist

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Zeige:

(a) Ist $A \triangle B$ endlich, so gilt $A =_m B$.

(b) Die symmetrische Differenz zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen ist nicht notwendig rekursiv aufzählbar.

(c) Seien A und B rekursiv aufzählbar. Wenn $A \triangle B$ rekursiv ist, dann sind auch $A \setminus B$ und $B \setminus A$ rekursiv.

Hinweis: Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

Aufgabe 3.3
Seien FIN und INF die Indizes der endlichen bzw. unendlichen rekursiv aufzählbaren Mengen:

$$\begin{aligned} \mathrm{FIN} &= \{e \colon W_e \text{ ist endlich}\} \\ \mathrm{INF} &= \{e \colon W_e \text{ ist unendlich}\} \end{aligned}$$

Sei TOT die Menge der Indizes aller rekursiven Funktionen:

$$\mathrm{TOT} = \{e \colon W_e = \mathbb{N}\}$$

(a) Zeige, dass die Menge $\mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF} = \{2e \colon e \in \mathrm{FIN}\} \cup \{2e+1 \colon e \in \mathrm{INF}\}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

(b) Zeige, dass das Komplement von TOT auf FIN many-one-reduzierbar ist, also dass $\overline{\mathrm{TOT}} \leq_m \mathrm{FIN}$ gilt.

(c) Zeige, dass FIN nicht rekursiv aufzählbar ist.
Hinweis: Man kann durch geeignete m-Reduzierung zeigen, dass $\overline{\mathrm{TOT}}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

Lösung 3.3

(a) FIN und INF sind als nichttriviale Indexmengen nach dem Satz von Rice nicht rekusiv. Da aber $\mathrm{FIN} = \overline{\mathrm{INF}}$ gilt, muss nach dem Komplementlemma zumindest eine der Mengen nicht rekursiv aufzählbar sein. Aus $\mathrm{FIN} \leq_m \mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF}$ und $\mathrm{INF} \leq_m \mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF}$ folgern wir mithilfe der Abgeschlossenheit der rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen m-Reduzierung, dass $\mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF}$ nicht rekusiv aufzählbar ist.

(b) **TODO**

(c) **TODO**

Aufgabe 3.4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe deine Antworten und gebe für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede unendliche rekursive Menge enthält eine nichtrekursive Teilmenge.

(b) Für zwei rekursiv aufzählbare Mengen A und B ist auch $A \setminus B$ rekursiv aufzählbar.

(c) Seien A und B zwei disjunkte rekursiv aufzählbare Mengen, sodass $A \cup B$ rekursiv ist. Dann sind auch A und B rekursiv.

(d) Sind sowohl A als auch $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar, so gilt $A =_m \overline{A}$.

Hinweis: Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

Lösung 3.4

(a) Wahr. Für $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$, d.h. die Menge der Teilmengen von A, überabzählbar. Die Klasse der rekursiven Mengen ist allerdings abzählbar.

(b) Falsch.

(c) Wahr.

(d) Wahr.

Aufgabe 3.5 *??*
Sei
$$\mathrm{Id} = \{e \in \mathbb{N} \colon \forall n \ (\varphi_e(n) = n)\}.$$

(a) Zeige, dass das Halteproblem m-reduzierbar auf Id ist, das heißt, dass $K \leq_m \mathrm{Id}$ gilt.

(b) Gebe für die folgenden Aussagen jeweils an, ob sie wahr oder falsch sind. Begründe deine Antworten!

(i) Id ist rekursiv.

(ii) $\overline{\mathrm{Id}}$ ist rekursiv.

(iii) $\overline{\mathrm{Id}}$ ist rekursiv aufzählbar.

Lösung 3.5
(a) Definiere die zweistellige partiell rekursive Funktion ψ durch
$$\psi(\langle e, x\rangle, y) = 0 \cdot \varphi_e(x) + y.$$
Dann gibt es, da φ eine Gödelnummerierung ist, eine rekursive Übersetzungsfunktion f von ψ nach φ, d.h. $\psi(\langle e, x\rangle, y) = \varphi_{f(\langle e,x\rangle)}(y)$ für alle $y \in \mathbb{N}$. Somit gilt
$$\begin{aligned}\langle e, x\rangle \in K &\Leftrightarrow \varphi_e(x) \downarrow \\ &\Leftrightarrow \psi(\langle e, x\rangle, y) = y \text{ für alle } y \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \varphi_{f(\langle e,x\rangle)}(y) = y \text{ für alle } y \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(\langle e, x\rangle) \in \mathrm{Id},\end{aligned}$$
d.h. $K \leq_m \mathrm{Id}$ via f.

(b) (i) Falsch. Id ist als nichttriviale Indexmenge nach dem Satz von Rice nicht rekursiv. Alternativ kann man argumentieren, dass K nicht rekursiv ist und somit nach dem Reduktionslemma Id auch nicht.

(ii) Falsch. Eine Menge ist genau dann rekursiv, wenn ihr Komplement rekursiv ist.

(iii) Aus $K \leq_m \mathrm{Id}$ via f folgt $\overline{K} \leq_m \overline{\mathrm{Id}}$ via f. Also wäre mit $\overline{\mathrm{Id}}$ auch $\overline{K}$ rekursiv aufzählbar, da die rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen $\leq_m$ abgeschlossen sind. Dies ergäbe allerdings einen Widerspruch, denn dann wären K und $\overline{K}$ rekusriv aufzählbar und somit K rekursiv.

4 Formale Sprachen

Aufgabe 4.1
Zeige, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

$$L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \colon \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \qquad \textit{(Klausur 2014)}$$
$$L_2 = \{a^n b^{2n} c^{3n} \colon n \geq 1\} \qquad \textit{(Klausur 2015)}$$
$$L_3 = \{0^{n^2} \colon n \geq 0\} \qquad \textit{(Nachklausur 2015)}$$

Aufgabe 4.2
Wahr oder falsch?

(a) Die Sprache $L_1 = \{vw \colon v, w \in \{0,1\}^*, |v| = |w|\}$ ist regulär.

(b) Die Sprache $L_2 = \{w_0 \circ \ldots \circ w_n \colon n \in \mathbb{N}, |w_k| = k \ \forall k \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei.

(c) Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine Sprache mit $|L| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist L regulär.

Lösung 4.2
(a) Wahr. L_1 wird von der Grammatik $G = (\{S,T\}, \{0,1\}, P, S)$ mit den Regeln

$$P = \{S \to 0T \mid 1T \mid \lambda,\ T \to 0S \mid 1S\}$$

erzeugt, denn

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \colon |w| = 2n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Falsch. **TODO**: Pumpinglemma anwenden

(c) Wahr. Jede endliche Sprache ist regulär, denn jede endliche Sprache ist entscheidbar.

Aufgabe 4.3
Zeige, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \colon w = Bin(n) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

der Binärzahlen regulär ist.

Lösung 4.3
L wird von der Grammatik $G = (\{S, A\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit den Regeln

$$P = \{S \to 0 \mid 1A,\ A \to 0A \mid 1A \mid \lambda\}$$

ezeugt, denn

$$L = \{0\} \cup \{1w \colon w \in \{0, 1\}^*\}.$$

Aufgabe 4.4
Sei L die Sprache über dem Alphabet $\{a, b, c\}$, die genau die Wörter enthält, in denen das Teilwort abc genau einmal vorkommt.

(a) Gebe eine rechtslineare Grammatik an, die L erzeugt.

(b) Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der L erkennt.

Lösung 4.4
(a) L wird von der Grammatik $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den Regeln

$$\begin{aligned} P = \{S &\to aA \mid bS \mid cS, \\ A &\to aA \mid bB \mid cS, \\ B &\to aA \mid bS \mid cC, \\ C &\to aD \mid bC \mid cC \mid \lambda, \\ D &\to aD \mid bE \mid cC \mid \lambda, \\ E &\to aD \mid bC \mid \lambda\} \end{aligned}$$

erzeugt.

Aufgabe 4.5
Sei L die reguläre Sprache

$$L = \{w \in \{0, 1, 2\}^* \colon \#_0(w) = 0 \text{ oder } \#_1(w) = 0 \text{ oder } \#_2(w) = 0\}).$$

Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der L erkennt.