1 Turingmaschinen

Aufgabe 1.1 *Klausur 2012*
Gebe eine 1-Band-Turingmaschine M an, die die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ y, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

berechnet.
Zur Erinnerung: Die Zahl n wird durch das Unärwort 0^{n+1} dargestellt.

Aufgabe 1.2 *Klausur 2014*
Gebe eine 2-Band-Turingmaschine M an, die die durch $f(w) = 0^{\#_0(w)}1^{\#_1(w)}$ gegebene Funktion $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$ berechnet.

Aufgabe 1.3 *Klausur 2015*
Gebe einen totalen (deterministischen) 2-Band-Turingakzeptor M an, der die Sprache $L = \{w2w : w \in \{0, 1\}^*\}$ (über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$) erkennt.

Aufgabe 1.4 *Blatt 13, 2015*
Gebe eine 1-Band-Turingmaschine M an, welche die Menge

$$A = \{w \in \{0, 1\}^* : \#_0(w) \text{ gerade}\}$$

erkennt.

Aufgabe 1.5
Gebe 3-Band-Turingmaschine M an, die die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y) = x \cdot y$$

berechnet.

2 Registermaschinen

Aufgabe 2.1 *Klausur 2015*
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } x \text{ gerade} \end{cases}$$

definiert. Gebe einen Registeroperator P an, der f konservativ berechnet.

Aufgabe 2.2 *Nachklausur 2015*
Gebe einen konservativen Registeroperator an, der die Gleichheitsrelation erkennt, d.h. die Funktion
$$c_=(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y$$
berechnet.

Aufgabe 2.3 *Blatt 13, 2015*
Gebe eine Registermaschine R an, welche die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{falls } x \text{ durch drei teilbar} \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$$
berechnet.

3 Primitiv rekursive Funktionen

Aufgabe 3.1
Zeige nur unter Verwendung der Definition der primitiv rekursiven Funktionen, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(b) $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $g(x,y) = 2^x + 2^y$ *(Nachklausur 2015)*
Du darfst verwenden, dass die Addition $add(x,y) = x + y$ primitiv rekursiv ist.
Hinweis: Zeige zunächst, dass die Funktion $\hat{f}(x) = 2^x$ primitiv rekursiv ist.

(c) $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(x,y,z) = 3x + z$

Aufgabe 3.2 *Nachklausur 2013*
Eine natürliche Zahl heißt *Mersenne-Primzahl*, falls sie von der Form $2^n - 1$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) und eine Primzahl ist.
Zeige, dass die Menge
$$M = \{x \colon x \text{ ist Mersenne-Primzahl}\}$$
primitiv rekursiv ist.
Du darfst dabei neben der Definition der primitiv rekursiven Funktionen die aus der Vorlesung bekannten Abschlusseigenschaften sowie die primitive Rekursivität der Multiplikation $\cdot$, der modifizierten Subtraktion $\dot{-}$, der Potenzfunktion $n \mapsto 2^n$ und der Gleichheitsrelation verwenden.

Aufgabe 3.3 *Blatt 13, 2015*
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ gegeben durch

$$f(0) = 0$$
$$f(x+1) = \begin{cases} f(x)+1, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ f(x)+2, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

Zeige, dass f primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 3.4 *Klausur 2009*
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } \sqrt{x} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeige, dass f primitiv rekursiv ist. (Du darfst hierbei alle Ergebnisse über die primitiv rekursiven Funktionen aus der Vorlesung verwenden.)

Aufgabe 3.5 *Klausur 2009*
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei primitiv rekursiv und $g(n)$ sei die Funktion, die die Anzahl der geraden Nullstellen von f strikt unterhalb von n berechnet, d.h.

$$g(n) = |\{m\colon m < n \ \& \ m \text{ gerade } \& \ f(m) = 0\}|.$$

Zeige, dass g ebenfalls primitiv rekursiv ist. (Du darfst hierbei alle Ergebnisse über die primitiv rekursiven Funktionen aus der Vorlesung verwenden.)

4 Rekursiv aufzählbare Mengen

Aufgabe 4.1
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe deine Antworten und gebe für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede unendliche rekursive Menge enthält eine nichtrekursive Teilmenge.

(b) Für zwei rekursiv aufzählbare Mengen A und B ist auch $A \setminus B$ rekursiv aufzählbar.

(c) Seien A und B zwei disjunkte rekursiv aufzählbare Mengen, sodass $A \cup B$ rekursiv ist. Dann sind auch A und B rekursiv.

(d) Sind sowohl A als auch $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar, so gilt $A =_m \overline{A}$.

Hinweis: Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

Aufgabe 4.2
Die symmetrische Differenz zweier Mengen A und B ist

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Zeige:

(a) Ist $A \triangle B$ endlich, so gilt $A =_m B$.

(b) Die symmetrische Differenz zweier rekursiv aufzählbarer Mengen ist nicht notwendig rekursiv aufzählbar.

(c) Seien A und B rekursiv aufzählbar. Wenn $A \triangle B$ rekursiv ist, dann sind auch $A \setminus B$ und $B \setminus A$ rekursiv.

Hinweis: Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

Aufgabe 4.3
Zeige mithilfe der Diagonalisierungsmethode, dass die Menge

$$K' = \{e \in \mathbb{N} \colon \varphi(e, x) \downarrow \text{ für alle } x \leq e\}$$

nicht rekursiv ist.

Aufgabe 4.4 *Klausur 2015*
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) Für alle rekursiv aufzählbaren Mengen A_0, A_1, A_2 ist die zugehörige Menge

$$B = \{x \colon x \text{ ist Element von } \textit{mindestens} \text{ zwei der Mengen } A_0, A_1, A_2\}$$

wiederum rekursiv aufzählbar.

(b) Für alle rekursiv aufzählbaren Mengen A_0, A_1, A_2 ist die zugehörige Menge

$$C = \{x \colon x \text{ ist Element von } \textit{höchstens} \text{ zwei der Mengen } A_0, A_1, A_2\}$$

wiederum rekursiv aufzählbar.

Du darfst hierbei alle Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden, nicht aber die Church-Turing-These.

Aufgabe 4.5 *Blatt 13, 2015*
(a) Zeige, dass für eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ folgende Aussagen äquivalent sind:
   (i) A ist rekursiv.
   (ii) A und $\overline{A}$ sind rekursiv aufzählbar.
   (iii) A ist leer oder der Wertebereich einer schwach monotonen, rekursiven Funktion. Hierbei heißt $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *schwach monoton*, falls für alle $x \leq y$ folgt dass $g(x) \leq g(y)$.
   (iv) A ist endlich oder der Wertebereich einer streng monotonen, rekursiven Funktion. Hierbei heißt $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *streng monoton*, falls für alle $x < y$ folgt, dass $g(x) < g(y)$.

(b) Zeige:
   (i) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich und rekursiv aufzählbar, so ist A der Wertebereich einer totalen, injektiven, rekursiven Funktion.
   (ii) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich und rekursiv aufzählbar, so enthält A eine unendliche, rekursive Teilmenge B.

Aufgabe 4.6 *Klausur 2009*
Zeige, dass es zu jeder rekursiv aufzählbaren Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ eine 1-stellige partiell rekursive Funktion ψ gibt, sodass A sowohl Definitionsbereich als auch Wertebereich von ψ ist: $A = Db(\psi) = Wb(\psi)$.

Aufgabe 4.7 *Klausur 2009*
Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total rekursiv. Weiter sei $f(A) = \{f(x) \colon x \in A\}$ das Bild und $f^{-1}(A) = \{x \colon f(x) \in A\}$ das Urbild von A bzgl. f. Welche der folgenden Aussagen gelten stets? Begründe deine Antworten! Gebe gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

(i) Ist A nicht rekursiv, so ist auch das Bild $f(A)$ von A nicht rekursiv.

(ii) Ist A nicht rekursiv und f injektiv, so ist auch $f(A)$ nicht rekursiv.

(iii) Ist A rekursiv aufzählbar, so ist auch $f(A)$ rekursiv aufzählbar.

(iv) Ist A rekursiv, so ist auch $f(A)$ rekursiv.

(v) Ist A rekursiv, so ist auch $f^{-1}(A)$ rekursiv.

5 Reduktionsmethode

Aufgabe 5.1 *Nachklausur 2012*
(a) Zeige, dass die Mengen

$$A = \{\langle x, y\rangle \colon \varphi_x(y)\downarrow \text{ und } \varphi_y(x)\downarrow\}$$

und

$$B = \{\langle x, y\rangle \colon \varphi_x(y)\uparrow \text{ oder } \varphi_y(x)\uparrow\}$$

nicht rekursiv sind.

(b) Sind A und B rekursiv aufzählbar?

Aufgabe 5.2
Seien FIN und INF die Indizes der endlichen bzw. unendlichen rekursiv aufzählbaren Mengen:

$$\begin{aligned}\mathrm{FIN} &= \{e \in \mathbb{N}\colon W_e \text{ ist endlich}\}\\ \mathrm{INF} &= \{e \in \mathbb{N}\colon W_e \text{ ist unendlich}\}\end{aligned}$$

Sei TOT die Menge der Indizes aller rekursiven Funktionen:

$$\mathrm{TOT} = \{e \in \mathbb{N}\colon W_e = \mathbb{N}\}$$

Hinweis: Wie in der Vorlesung definiert, ist W_e der Definitionsbereich der e-ten partiell rekursiven Funktion, also $W_e = Db(\varphi_e) = \{x \in \mathbb{N}\colon \varphi_e(x)\downarrow\}$.

(a) Zeige, dass die Menge $\mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF} = \{2e\colon e \in \mathrm{FIN}\} \cup \{2e+1\colon e \in \mathrm{INF}\}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

(b) Zeige, dass das Komplement von TOT auf FIN many-one-reduzierbar ist, also dass $\overline{\mathrm{TOT}} \leq_m \mathrm{FIN}$ gilt.

(c) Zeige, dass FIN nicht rekursiv aufzählbar ist.
Hinweis: Entweder zeigst du dies direkt, oder du zeigst durch geeignete m-Reduzierung, dass $\overline{\mathrm{TOT}}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 5.3 *Klausur 2012*
Sei

$$\mathrm{Id} = \{e \in \mathbb{N}\colon \forall n\ (\varphi_e(n) = n)\}.$$

(a) Zeige, dass das Halteproblem m-reduzierbar auf Id ist, das heißt, dass $K \leq_m \mathrm{Id}$ gilt.

(b) Gebe für die folgenden Aussagen jeweils an, ob sie wahr oder falsch sind. Begründe deine Antworten!

  (i) Id ist rekursiv.

  (ii) $\overline{\mathrm{Id}}$ ist rekursiv.

  (iii) $\overline{\mathrm{Id}}$ ist rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 5.4 *Blatt 13, 2015*

(a) Sei $W_e = Db(\varphi_e)$ die e-te rekursiv aufzählbare Menge und $W = \{e \in \mathbb{N} \colon 0, 1 \in W_e\}$. Zeige $K_d \leq_m W$, indem du eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ angibst mit

$$\forall e \colon e \in K_d \Leftrightarrow f(e) \in W$$

Ist W rekursiv aufzählbar?

(b) Folgere aus (a), dass W vollständig für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen ist.

(c) Sei nun $I = \{e \in \mathbb{N} \colon W_e \text{ ist nichttriviale Indexmenge}\}$. Ist I eine Idexmenge? Ist sie nichttrivial?

(d) Wahr oder falsch? Begründe deine Antwort und gebe gegebenenfalls Gegenbeispiele an!

(i) Ist B rekursiv aufzählbar und $A \leq_m B$, so ist auch A rekursiv aufzählbar.

(ii) Man kann den kleinsten Index einer partiell rekursiven Funktion bestimmen. Genauer: Die Funktion min, die jedem Index e die kleinste Zahl e' mit $\varphi_e = \varphi_{e'}$ zuordnet, ist rekursiv

(iii) Es gibt eine abzählbare Klasse C, die keine vollständige Menge besitzt.

Aufgabe 5.5 *Klausur 2009*

(a) Zeige, dass die Menge

$$A = \{e \colon W_e \not\subseteq \{0, \dots, e\}\}$$

m-hart für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen ist.

Hinweis: Du kannst hierbei die Vollständigkeit der in der Vorlesung eingeführten Varianten des Halteproblems voraussetzen.

(b) Ist die Menge A sogar m-vollständig für die Klasse der r.a. Mengen? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 5.6 *Klausur 2009*

(a) Zeige, dass die Menge

$$A = \{e \colon |W_e| \geq 2\}$$

m-hart für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen ist.

Hinweis: Du kannst hierbei die Vollständigkeit der in der Vorlesung eingeführten Varianten des Halteproblems voraussetzen.

(b) Ist die Menge A sogar m-vollständig für die Klasse der r.a. Mengen? Begründe deine Antwort!

6 Formale Sprachen

Aufgabe 6.1
Zeige, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

$$L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \colon \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \qquad \textit{(Klausur 2014)}$$
$$L_2 = \{a^n b^{2n} c^{3n} \colon n \geq 1\} \qquad \textit{(Klausur 2015)}$$
$$L_3 = \{0^{n^2} \colon n \geq 0\} \qquad \textit{(Nachklausur 2015)}$$

Aufgabe 6.2
Wahr oder falsch?

(a) Die Sprache $L_1 = \{vw \colon v, w \in \{0,1\}^*, |v| = |w|\}$ ist regulär.

(b) Die Sprache $L_2 = \{w_0 \circ \ldots \circ w_n \colon n \in \mathbb{N}, |w_k| = k\ \forall k \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei.

(c) Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine Sprache mit $|L| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist L regulär.

Aufgabe 6.3
Zeige, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \colon w = Bin(n) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

der Binärzahlen regulär ist.

Aufgabe 6.4
Sei L die Sprache über dem Alphabet $\{a,b,c\}$, die genau die Wörter enthält, in denen das Teilwort *abc* genau einmal vorkommt.

(a) Gebe eine rechtslineare Grammatik an, die L erzeugt.

(b) Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der L erkennt.

Aufgabe 6.5
Sei L die reguläre Sprache

$$L = \{w \in \{0,1,2\}^* \colon \#_0(w) = 0 \text{ oder } \#_1(w) = 0 \text{ oder } \#_2(w) = 0\}.$$

Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der L erkennt.

Aufgabe 6.6 *Klausur 2012*
Es sei $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, P, S)$ die kontextfreie Grammatik mit der Regelmenge

$$P = \{S \to XY,\ X \to ZXb \mid \lambda,\ Y \to bY \mid b,\ Z \to a \mid \lambda\}.$$

(a) Gebe die von G erzeugte Sprache $L(G)$ an.

(b) Gebe ein Wort $w \in L(G)$ minimaler Länge an, das mehr als einen Herleitungsbaum besitzt, und zeichne zwei verschiedene zugehörigen Herleitungsbäume.

(c) Gebe eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform an, die $L(G)$ erzeugt.