Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Lineare Algebra I
Wintersemester 2015/16

Robert Schütz

11. Februar 2016

1 Gruppen, Körper, etc.

Aufgabe 1 Sei $(G, e, \circ)$ eine Gruppe mit $|G| < \infty$ und für jedes $g \in G \setminus \{e\}$ gelte $g \neq g^{-1}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\varphi : G \to G, g \mapsto g^2 = g \circ g$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn G abelsch ist.

(b) Wenn G abelsch ist, dann ist die Abbildung φ bijektiv.

Aufgabe 2 Sei G eine Gruppe mit $n := |G| < \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$, die Automorphismen von G, isomorph zu einer Untergruppe der S_n sind.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass für einen Gruppenisomorphismus $\varphi : G \to G'$ und eine Untergruppe $H \subseteq G$ gilt, dass auch $\varphi(H) \subseteq G'$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe 3 Sei K ein Körper mit $|K| < \infty$ und $\psi \in \mathrm{End}(K)$. Zeigen Sie, dass ψ bijektiv ist.

2 Lineare Abbildungen

Aufgabe 1 Seien U, V, W endl.-dim. Vektorräume, $\varphi : U \to V$ ein VR-Monomorphismus und $\psi : V \to W$ ein VR-Epimorphismus, sodass $\mathrm{Kern}(\psi) = \mathrm{Bild}(\varphi)$.
Zeigen Sie, dass $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$ gilt.

Aufgabe 2 Es seien K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\underline{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und $g \in \mathrm{Aut}(V)$ ein Automorphismus von V.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{C} := (g(b_1), \ldots, g(b_n))$ auch eine Basis von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Darstellungsmatrizen $\mathrm{Mat}^{\underline{B}}_{\underline{B}}(g)$ und $\mathrm{Mat}^{\underline{C}}_{\underline{C}}(g)$ gleich sind.

3 Darstellungsmatrizen

Aufgabe 1 Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$A \text{ ist ähnlich zu } \mathbb{1}_n \text{ oder zu } (-1)\cdot \mathbb{1}_n \Leftrightarrow A^2 = \mathbb{1}_n$$

Aufgabe 2 Seien K ein Körper, V und W endlich-dim. K-Vektorräume, $\underline{B}$ eine Basis von V, $\underline{C}$ eine Basis von W. Seien $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $B \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ Matrizen mit $m > n$. Seien $f : V \to W$ und $g : W \to V$ lineare Abbildungen, sodass $\mathrm{Mat}^{\underline{C}}_{\underline{B}}(f) = A$ und $\mathrm{Mat}^{\underline{B}}_{\underline{C}}(g) = B$ gelten. Welche Aussagen stimmen?

(a) f ist ein Isomorphismus.

(b) f ist nicht surjektiv.

(c) Man kann V und W so wählen, dass g ein Endomorphismus ist.

(d) f ist kein Monomorphismus.

(e) g ist nicht injektiv.

(f) g ist kein Epimorphismus.

4 Dualraum

Definition Seien V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$, $T \subseteq V^* = \mathrm{Lin}(V,K)$ Teilmengen.

$$\mathrm{Ann}(S) := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \ \forall v \in S\} \subseteq V^*$$

$$\mathrm{Null}(T) := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0 \ \forall \varphi \in T\} \subseteq V$$

Aufgabe 1 Sei V ein Vektorraum, $T \subseteq V^*$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Null}(T) = V \Leftrightarrow T \subseteq \{0_{V^*}\}$$

Aufgabe 2 Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Sei S eine Basis von U und $S \,\dot\cup\, T$ eine Basis von V.
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $f^* : W^* \to V^*$ mit $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$ die duale Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Ann}(U) = \mathrm{L}(T^*)$, wobei T^* die duale Basis zu T ist.
Hinweis: Sie dürfen hier annehmen, dass V endlich-dimensional ist, allerdings ist das nicht notwendig.

(b) Ist V endlich-dimensional, so gilt $\dim \mathrm{Ann}(U) = \dim V - \dim U$.

(c) $\mathrm{Kern}(f^*) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Bild}(f))$.

5 Eigenwerte

Aufgabe 1 Sei K ein Körper, V ein endlich-dim. K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Besitzt φ keinen Eigenwert, so ist φ ein Automorphismus.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, was für Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume gilt.

Aufgabe 2 Sei $\mathbb{F}_5$ der Körper mit 5 Elementen, V ein 4-dimensionaler $\mathbb{F}_5$-Vektorraum und $\underline{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von V. Sei die lineare Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch $f(b_1) = b_2$, $f(b_2) = f(b_3)$, $f(b_3) = f(b_4)$ und $f(b_4) = f(b_1)$

(a) Geben Sie $\mathrm{Mat}_{\underline{B}}^{\underline{B}}(f)$ an und berechnen Sie das charakteristische Polynom von f. (Die Koeffizienten liegen in $\mathbb{F}_5$!)

(b) Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist, und geben Sie eine Diagonalmatrix an, die Darstellungsmatrix von f bezüglich einer Basis von Eigenvektoren ist.

(c) Bestimmen Sie den Eigenraum von f zum Eigenwert $\overline{-1}$

6 Euklidische Vektorräume

Aufgabe 1 Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sei $U = \mathrm{L}(x_1, x_2, x_3)$ die lineare Hülle ebenjener Vektoren.

(a) Zeigen Sie, dass $\{x_1, x_2, x_3\}$ eine Basis von U ist.

(b) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarproduktes.

Aufgabe 2 Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt mit zugehöriger Norm $\| \cdot \|$.

(a) Zeigen Sie:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(b) Sei $x \perp y$. Zeigen Sie den Satz des Pythagoras:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$$