1 Turingmaschinen

Aufgabe 1.1 *Klausur 2012*
Gebe eine 1-Band-Turingmaschine M an, die die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ y, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

berechnet.
Zur Erinnerung: Die Zahl n wird durch das Unärwort 0^{n+1} dargestellt.

Aufgabe 1.2 *Klausur 2014*
Gebe eine 2-Band-Turingmaschine M an, die die durch $f(w) = 0^{\#_0(w)}1^{\#_1(w)}$ gegebene Funktion $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$ berechnet.

Aufgabe 1.3 *Klausur 2015*
Gebe einen totalen (deterministischen) 2-Band-Turingakzeptor M an, der die Sprache $L = \{w2w \colon w \in \{0, 1\}^*\}$ (über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$) erkennt.

Aufgabe 1.4 *Blatt 13, 2015*
Gebe eine 1-Band-Turingmaschine M an, welche die Menge

$$A = \{w \in \{0, 1\}^* \colon \#_0(w) \text{ gerade}\}$$

erkennt.

Aufgabe 1.5
Gebe eine 3-Band-Turingmaschine M an, die die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y) = x \cdot y$$

berechnet.

2 Registermaschinen

Aufgabe 2.1 *Klausur 2015*
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } x \text{ gerade} \end{cases}$$

definiert. Gebe einen Registeroperator P an, der f konservativ berechnet.

Lösung 2.1

$$P \equiv [s_1 a_2 a_3]_1 [s_2 a_1]_2 [s_1 s_1 a_2 a_2]_1 [s_3 s_2 a_1]_3$$

Aufgabe 2.2 *Nachklausur 2015*
Gebe einen konservativen Registeroperator an, der die Gleichheitsrelation erkennt, d.h. die Funktion

$$c_=(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$$

berechnet.

Lösung 2.2
Es gilt

$$x = y \Leftrightarrow (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) = 0.$$

Diese Darstellung liegt dem folgenden Registeroperator zur Berechnung von $c_=(x, y)$ zugrunde:

$$P \equiv T_{1\to 4,3} T_{1\to 6,3} T_{2\to 5,3} T_{2\to 7,3} [s_4 s_7]_7 [s_5 s_6]_6 [a_4 s_5]_5 a_3 [s_3 s_4]_4$$

Aufgabe 2.3 *Blatt 13, 2015*
Gebe eine Registermaschine R an, welche die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{falls } x \text{ durch drei teilbar} \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.

3 Primitiv rekursive Funktionen

Aufgabe 3.1
Zeige nur unter Verwendung der Definition der primitiv rekursiven Funktionen, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(b) $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $g(x, y) = 2^x + 2^y$ *(Nachklausur 2015)*
Du darfst verwenden, dass die Addition $add(x, y) = x + y$ primitiv rekursiv ist.
Hinweis: Zeige zunächst, dass die Funktion $\hat{f}(x) = 2^x$ primitiv rekursiv ist.

(c) $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(x, y, z) = 3x + z$

Aufgabe 3.2 *Nachklausur 2013*
Eine natürliche Zahl heißt *Mersenne-Primzahl*, falls sie von der Form $2^n - 1$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) und eine Primzahl ist.
Zeige, dass die Menge

$$M = \{x\colon x \text{ ist Mersenne-Primzahl}\}$$

primitiv rekursiv ist.
Du darfst dabei neben der Definition der primitiv rekursiven Funktionen die aus der Vorlesung bekannten Abschlusseigenschaften sowie die primitive Rekursivität der Multiplikation $\cdot$, der modifizierten Subtraktion $\dot{-}$, der Potenzfunktion $n \mapsto 2^n$ und der Gleichheitsrelation verwenden.

Lösung 3.2
Es gilt

$$x \in M \Leftrightarrow (x \neq 0 \;\&\; x \neq 1 \;\&\; \exists y < x(x = 2^y \dot{-} 1) \;\&\; (\forall m < x(\forall n < x(n \cdot m \neq x))).$$

Da die primitiv rekursiven Mengen gegen explizite Definitionen, gegen beschränkte Quantoren und gegen die aussagenlogischen Junktoren abgeschlossen sind und aufgrund der primitiven Rekursivität der oben genannten Funktionen ist M damit primitiv rekursiv.

Aufgabe 3.3 *Blatt 13, 2015*
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ gegeben durch

$$f(0) = 0$$
$$f(x+1) = \begin{cases} f(x) + 1, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ f(x) + 2, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

Zeige, dass f primitiv rekursiv ist.

Lösung 3.3
Wegen

$$c_{\text{ungerade}}(0) = 0$$
$$c_{\text{ungerade}}(x+1) = 1 \dot{-} f(x)$$

ist die charakteristische Funktion der ungeraden Zahlen primitiv rekursiv. Wegen

$$f(0) = 0$$
$$f(x+1) = f(x) + c_{ungerade}(x) + 1$$

ist dann auch f primitiv rekursiv.

Aufgabe 3.4 _Klausur 2009_
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } \sqrt{x} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeige, dass f primitiv rekursiv ist. (Du darfst hierbei alle Ergebnisse über die primitiv rekursiven Funktionen aus der Vorlesung verwenden.)

Lösung 3.4
Wegen

$$f(x) = \mu y \leq x(y \cdot y = x),$$

der Abgeschlossenheit von F(PRIM) gegen den beschränkten μ-Operator und weil die Multiplikation primitiv rekursiv ist, ist f primitiv rekursiv.

Aufgabe 3.5 _Klausur 2009_
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei primitiv rekursiv und $g(n)$ sei die Funktion, die die Anzahl der geraden Nullstellen von f strikt unterhalb von n berechnet, d.h.

$$g(n) = |\{m\colon m < n \ \&\ m \text{ gerade } \&\ f(m) = 0\}|.$$

Zeige, dass g ebenfalls primitiv rekursiv ist. (Du darfst hierbei alle Ergebnisse über die primitiv rekursiven Funktionen aus der Vorlesung verwenden.)

Lösung 3.5
Wegen

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(n+1) &= \begin{cases} g(n) + \overline{sg}(f(n)), & \text{falls } \exists m \leq n \ (m + m = n) \\ g(n) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

ist g primitiv rekursiv.

4 Rekursiv aufzählbare Mengen

Aufgabe 4.1
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe deine Antworten und gebe für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede unendliche rekursive Menge enthält eine nichtrekursive Teilmenge.

(b) Für zwei rekursiv aufzählbare Mengen A und B ist auch $A \setminus B$ rekursiv aufzählbar.

(c) Seien A und B zwei disjunkte rekursiv aufzählbare Mengen, sodass $A \cup B$ rekursiv ist. Dann sind auch A und B rekursiv.

(d) Sind sowohl A als auch $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar, so gilt $A =_m \overline{A}$.

Hinweis: Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

Lösung 4.1

(a) Wahr. Für $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$, d.h. die Menge der Teilmengen von A, überabzählbar. Die Klasse der rekursiven Mengen ist allerdings abzählbar.

(b) Falsch. Zum Beispiel sind $A = \mathbb{N}$ und $B = K$ laut Vorlesung rekursiv aufzählbar. Allerdings ist $A \setminus B = \overline{K}$ nicht rekursiv aufzählbar, da sonst nach dem Komplementlemma K rekursiv wäre.

(c) Wahr. Um $x \in A$ zu entscheiden, prüfen wir zunächst, ob x in $A \cup B$ liegt. Ist dies der Fall, zählen wir gleichzeitig A und B auf. Da $x \in A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$ gilt, liegt x in genau einer der Mengen A und B. Falls x vom Aufzählungsverfahren für A aufgezählt wird, liegt x in A. Wird x von dem für B aufgezählt, nicht. Einer dieser Fälle tritt immer ein.

(d) Falsch. Dies gilt nur, falls $A \neq \emptyset, \mathbb{N}$: Sind A und $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar, so sind A und $\overline{A}$ nach dem Komplementlemma rekursiv. Laut Vorlesung sind alle rekursiven Mengen ungleich $\emptyset, \mathbb{N}$ m-äquivalent, was leicht einzusehen ist.
Gilt aber zum Beispiel $A = \emptyset$, so ist $\overline{A} = \mathbb{N}$. Allerdings gilt $\mathbb{N} \not\leq_m \emptyset$: Aus $\mathbb{N} \leq_m \emptyset$ via f, also $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(x) \in \emptyset$, folgt $f(x) \notin \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch zur Rekursivität von f ist.

Aufgabe 4.2

Die symmetrische Differenz zweier Mengen A und B ist

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Zeige:

(a) Ist $A \triangle B$ endlich und $A, B \neq \emptyset, \mathbb{N}$, so gilt $A =_m B$.

Bemerkung: Für $A \triangle B$ endlich schreibt man auch $A =^* B$.

(b) Die symmetrische Differenz zweier rekursiv aufzählbarer Mengen ist nicht notwendig rekursiv aufzählbar.

(c) Seien A und B rekursiv aufzählbar. Wenn $A \triangle B$ rekursiv ist, dann sind auch $A \setminus B$ und $B \setminus A$ rekursiv.

Hinweis: Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

Lösung 4.2

(a) Ist $A \triangle B$ endlich, so sind auch $A \setminus B$ und $B \setminus A$ endlich. Sei $A \setminus B = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $B \setminus A = \{y_1, \dots, y_m\}$. Dann gilt $A \leq_m B$ via f mit

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{falls } x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ \bar{b}, & \text{falls } x \in \{y_1, \dots, y_m\} \\ x, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $b \in B$ und $\bar{b} \notin B$ beliebig gewählt seien. f ist rekursiv, weil endliche Mengen rekursiv sind. $B \leq_m A$ analog.

(b) K und $\mathbb{N}$ sind rekursiv aufzählbar, aber $K \triangle \mathbb{N} = \overline{K}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

(c) Um $x \in A \setminus B$ zu entscheiden, prüfe zunächst, ob $x \in A \triangle B$ gilt. Ist dies der Fall, so zählen wir gleichzeitig A und B auf, bis x auftaucht. Da x in $A \triangle B$ liegt, muss x in einer der beiden Mengen liegen. Gilt $x \in B$, so liegt x in $A \setminus B$. Ansonsten nicht.

Aufgabe 4.3

Zeige mithilfe der Diagonalisierungsmethode, dass die Menge

$$K' = \{e \in \mathbb{N} \colon \varphi(e, x) \downarrow \text{ für alle } x \leq e\}$$

nicht rekursiv ist.

Lösung 4.3

Angenommen, K' sei rekursiv. Dann ist die durch

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x, x) + 1, & \text{falls } x \in K' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv, da f durch eine (nach Annahme) rekursive Fallunterscheidung definiert ist. Also existiert ein $e \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_e = f$. f ist total, also gilt $f(x) \downarrow$ für alle $x \leq e$, deshalb $e \in K'$ und somit

$$\varphi_e(e) = f(e) = \varphi(e, e) + 1.$$

Dies ist ein Widerspruch. Deshalb kann K' nicht rekursiv sein.

Aufgabe 4.4 *Klausur 2015*
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) Für alle rekursiv aufzählbaren Mengen A_0, A_1, A_2 ist die zugehörige Menge

$$B = \{x\colon x \text{ ist Element von } \textit{mindestens} \text{ zwei der Mengen } A_0, A_1, A_2\}$$

wiederum rekursiv aufzählbar.

(b) Für alle rekursiv aufzählbaren Mengen A_0, A_1, A_2 ist die zugehörige Menge

$$C = \{x\colon x \text{ ist Element von } \textit{höchstens} \text{ zwei der Mengen } A_0, A_1, A_2\}$$

wiederum rekursiv aufzählbar.

Du darfst hierbei alle Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden, nicht aber die Church-Turing-These.

Aufgabe 4.5 *Blatt 13, 2015*

(a) Zeige, dass für eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ folgende Aussagen äquivalent sind:
   (i) A ist rekursiv.
   (ii) A und $\overline{A}$ sind rekursiv aufzählbar.
   (iii) A ist leer oder der Wertebereich einer schwach monotonen, rekursiven Funktion. Hierbei heißt $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *schwach monoton*, falls für alle $x \le y$ folgt dass $g(x) \le g(y)$.
   (iv) A ist endlich oder der Wertebereich einer streng monotonen, rekursiven Funktion. Hierbei heißt $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *streng monoton*, falls für alle $x < y$ folgt, dass $g(x) < g(y)$.

(b) Zeige:
   (i) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich und rekursiv aufzählbar, so ist A der Wertebereich einer totalen, injektiven, rekursiven Funktion.
   (ii) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich und rekursiv aufzählbar, so enthält A eine unendliche, rekursive Teilmenge B.

Lösung 4.5

(a) Wir zeigen dies per Ringschluss:

(i)⇒(iv) Wir definieren

$$\begin{aligned} g(0) &= \mu x(x \in A) \\ g(y+1) &= \mu x(x > g(y) \;\&\; x \in A). \end{aligned}$$

Weil A rekursiv und nicht endlich ist, ist g rekursiv. Offensichtlich ist g streng monoton und $\mathrm{Wb}(g) = A$.

(iv)⇒(iii) Falls A nicht endlich ist, genügt die Funktion g aus (iv) unseren Anforderungen. Ist A endlich, aber nicht leer, so definieren wir

$$g(m) = \begin{cases} x_m, & \text{falls } m \leq n \\ x_n, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $A = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $x_0 < \ldots < x_n$ gelten soll. Dann ist g rekursiv, da g über endlich viele rekursive Fallunterscheidungen definiert ist.

(iii)⇒(ii) Wegen $A = \mathrm{Wb}(g)$ ist A rekursiv aufzählbar. Falls A endlich ist, ist A rekursiv und somit $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar. Ansonsten ist $\overline{A}$ wegen

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} \colon \exists y\ (g(y) > x\ \&\ \forall y' < y\ (g(y') \neq x)\}$$

die Projektion einer rekursiven Menge und somit rekursiv aufzählbar.

(ii)⇒(i) Folgt aus dem Komplementlemma.

(b) (i) Sei $A = \mathrm{Wb}(f)$ für eine rekursive Funktion f. Dann ist die durch

$$g(0) = f(0)$$
$$g(x+1) = f(\mu y(\forall z \leq x\ (g(z) \neq f(y))))$$

definierte Funktion g rekursiv, da die rekursiven Prädikate gegen beschränkte Quantoren abgeschlossen sind und aufgrund der Unendlichkeit von A solch ein minimales y immer existiert. Offensichtlich gilt $\mathrm{Wb}(g) = A$ und wegen der Bedingung $g(z) \neq f(y)$ ist g injektiv.

(ii) Da A nicht leer ist, ist A der Wertebereich einer total rekursiven Funktion f. Dann ist die rekursive Funktion g mit

$$g(0) = f(0)$$
$$g(y+1) = \begin{cases} f(y+1), & \text{falls } f(y+1) \geq f(y) \\ f(y), & \text{sonst} \end{cases}$$

schwach monoton und deshalb ist nach (a) die Menge $B = \mathrm{Wb}(g)$ rekursiv. Offensichtlich gilt $\mathrm{Wb}(g) \subseteq \mathrm{Wb}(f) = A$ und weil A unendlich ist, gibt es für jedes y ein y' mit $f(y') > g(y)$, also auch $g(y') > g(y)$.

Aufgabe 4.6 *Klausur 2009*

Zeige, dass es zu jeder rekursiv aufzählbaren Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ eine 1-stellige partiell rekursive Funktion ψ gibt, sodass A sowohl Definitionsbereich als auch Wertebereich von ψ ist: $A = \mathrm{Db}(\psi) = \mathrm{Wb}(\psi)$.

Lösung 4.6
Da A rekursiv aufzählbar ist, gibt es eine 1-stellige partiell rekursive Funktion θ, deren Definitionsbereich A ist: $A = \mathrm{Db}(\theta)$. Definiere die partiell rekursive Funktion ψ durch

$$\psi(x) = 0 \cdot \theta(x) + x.$$

Dann gilt $A = \mathrm{Db}(\theta) = \mathrm{Db}(\psi) = \mathrm{Wb}(\psi)$.

Aufgabe 4.7 *Klausur 2009*
Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total rekursiv. Weiter sei $f(A) = \{f(x) \colon x \in A\}$ das Bild und $f^{-1}(A) = \{x \colon f(x) \in A\}$ das Urbild von A bzgl. f. Welche der folgenden Aussagen gelten stets? Begründe deine Antworten! Gebe gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

(i) Ist A nicht rekursiv, so ist auch das Bild $f(A)$ von A nicht rekursiv.

(ii) Ist A nicht rekursiv und f injektiv, so ist auch $f(A)$ nicht rekursiv.

(iii) Ist A rekursiv aufzählbar, so ist auch $f(A)$ rekursiv aufzählbar.

(iv) Ist A rekursiv, so ist auch $f(A)$ rekursiv.

(v) Ist A rekursiv, so ist auch $f^{-1}(A)$ rekursiv.

Lösung 4.7

(i) Falsch. Sei A nicht rekursiv. Dann ist für $f(x) = 0$ konstant $f(A) = \{0\}$ und damit rekursiv.

(ii) Wahr. Da f injektiv ist, gilt $A \leq_m f(A)$ via f, denn

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in A$$

und

$$x \notin A \Rightarrow f(x') \neq f(x)\ \forall x' \Rightarrow f(x) \notin f(A).$$

(iii) Wahr. Gilt $A = \mathrm{Wb}(\psi)$ für eine partiell rekursive Funktion ψ, so ist $f(A) = \mathrm{Wb}(f \circ \psi)$.

(iv) Falsch. Das Halteproblem K ist rekursiv aufzählbar. Also gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\mathrm{Wb}(f) = K$. Dann ist $f(\mathbb{N}) = K$ nicht rekursiv.

(v) Wahr. Da A rekursiv ist, ist auch die charakteristische Funkrion c_A rekursiv. Wegen $x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$ ist $c_{f^{-1}(A)} = c_A \circ f$ und somit $c_{f^{-1}(A)}$ auch rekursiv.

5 Reduktionsmethode

Aufgabe 5.1 *Nachklausur 2012*

(a) Zeige, dass die Mengen

$$A = \{\langle x, y\rangle \colon \varphi_x(y)\downarrow \text{ und } \varphi_y(x)\downarrow\}$$

und

$$B = \{\langle x, y\rangle \colon \varphi_x(y)\uparrow \text{ oder } \varphi_y(x)\uparrow\}$$

nicht rekursiv sind.

(b) Sind A und B rekursiv aufzählbar?

Lösung 5.1

(a) Es gilt $K_d \leq_m A$ via $f(x) = \langle x, x\rangle$ da

$$x \in K_d \Leftrightarrow \varphi_x(x)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_x(x)\downarrow \;\&\; \varphi_x(x)\downarrow \Leftrightarrow f(x) = \langle x, x\rangle \in A$$

Da das diagonale Halteproblem nicht rekursiv ist, ist also nach dem Reduktionslemma auch A nicht rekursiv. Da $B = \overline{A}$ und die rekursiven Mengen gegen Komplement abgeschlossen sind, ist somit auch B nicht rekursiv.

(b) A ist als Definitionsbereich der partiell rekursiven Funktion

$$\psi(\langle x, y\rangle) = \varphi(x, y) + \varphi(y, x)$$

rekursiv aufzählbar. Da eine Menge rekursiv ist, falls die Menge selbst und ihr Komplement rekursiv aufzählbar sind, kann also B nicht rekursiv aufzählbar sein.

Aufgabe 5.2

Seien FIN und INF die Indizes der endlichen bzw. unendlichen rekursiv aufzählbaren Mengen:

$$\mathrm{FIN} = \{e \in \mathbb{N} \colon W_e \text{ ist endlich}\}$$
$$\mathrm{INF} = \{e \in \mathbb{N} \colon W_e \text{ ist unendlich}\}$$

Sei TOT die Menge der Indizes aller rekursiven Funktionen:

$$\mathrm{TOT} = \{e \in \mathbb{N} \colon W_e = \mathbb{N}\}$$

Hinweis: Wie in der Vorlesung definiert, ist W_e der Definitionsbereich der e-ten partiell rekursiven Funktion, also $W_e = \mathrm{Db}(\varphi_e) = \{x \in \mathbb{N} \colon \varphi_e(x)\downarrow\}$.

(a) Zeige, dass die Menge $\mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF} = \{2e\colon e \in \mathrm{FIN}\} \cup \{2e+1\colon e \in \mathrm{INF}\}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

(b) Zeige, dass das Komplement von TOT auf FIN many-one-reduzierbar ist, also dass $\overline{\mathrm{TOT}} \leq_m \mathrm{FIN}$ gilt.

(c) Zeige, dass FIN nicht rekursiv aufzählbar ist.
Hinweis: Entweder zeigst du dies direkt, oder du zeigst durch geeignete m-Reduzierung, dass $\overline{\mathrm{TOT}}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

Lösung 5.2

(a) FIN und INF sind als nichttriviale Indexmengen nach dem Satz von Rice nicht rekusiv. Da aber $\mathrm{FIN} = \overline{\mathrm{INF}}$ gilt, muss nach dem Komplementlemma zumindest eine der Mengen nicht rekursiv aufzählbar sein. Aus $\mathrm{FIN} \leq_m \mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF}$ und $\mathrm{INF} \leq_m \mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF}$ folgern wir mithilfe der Abgeschlossenheit der rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen m-Reduzierung, dass $\mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF}$ nicht rekusiv aufzählbar ist.

(b) Definiere die zweistellige partiell rekursive Funktion ψ durch

$$\psi(e, x) = \sum_{n=0}^{x} \varphi_e(n).$$

Dann gibt es, da φ eine Gödelnummerierung ist, eine rekursive Übersetzungsfunktion f von ψ nach φ, d.h. $\psi(e, x) = \varphi_{f(e)}(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} e \in \overline{\mathrm{TOT}} &\Rightarrow e \notin \mathrm{TOT} \\ &\Rightarrow \varphi_e(x_0) \uparrow \text{ für ein } x_0 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \psi_e(x) \uparrow \text{ für alle } x \geq x_0 \\ &\Rightarrow W_{f(e)} = \mathrm{Db}(\varphi_{f(e)}) = \mathrm{Db}(\psi_e) \text{ ist endlich} \\ &\Rightarrow f(e) \in \mathrm{FIN} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e \notin \overline{\mathrm{TOT}} &\Rightarrow e \in \mathrm{TOT} \\ &\Rightarrow \varphi_e(x) \downarrow \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \psi_e(x) \downarrow \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow W_{f(e)} = \mathrm{Db}(\varphi_{f(e)}) = \mathrm{Db}(\psi_e) = \mathbb{N} \text{ ist unendlich} \\ &\Rightarrow f(e) \in \mathrm{INF} = \overline{\mathrm{FIN}}, \end{aligned}$$

d.h. $e \in \overline{\mathrm{TOT}} \Leftrightarrow f(e) \in \mathrm{FIN}$ und deshalb $\overline{\mathrm{TOT}} \leq_m \mathrm{FIN}$ via f.

(c) Es genügt, zu zeigen, dass $\overline{\text{TOT}}$ nicht rekursiv aufzählbar ist, denn dann folgt aus der Abgeschlossenheit der rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen m-Reduzierung, dass FIN nicht rekursiv aufzählbar ist. Definiere also die zweistellige partiell rekursive Funktion θ durch

$$\theta(e,x) = \varphi_e(e).$$

Dann gibt es, da φ eine Gödelnummerierung ist, eine rekursive Übersetzungsfunktion g von θ nach φ, d.h. $\theta(e,x) = \varphi_{g(e)}(x)$ für alle $e, x \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$e \in K_d \Leftrightarrow \varphi_e(e) \downarrow \Leftrightarrow \theta_e \text{ total} \Leftrightarrow \varphi_{g(e)} \text{ total} \Leftrightarrow g(e) \in \text{TOT},$$

d.h. $K_d \leq_m \text{TOT}$ bzw. $\overline{K_d} \leq_m \overline{\text{TOT}}$ via g. Aufgrund der Transitivität von $\leq_m$ folgt $\overline{K_d} \leq_m \text{FIN}$. Also wäre mit FIN auch $\overline{K_d}$ rekursiv aufzählbar, da die rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen $\leq_m$ abgeschlossen sind. Dies ergäbe allerdings einen Widerspruch, denn dann wären K_d (laut Vorlesung) und $\overline{K_d}$ (nach Annahme) rekursiv aufzählbar und somit wäre K_d rekursiv.

Aufgabe 5.3 *Klausur 2012*

Sei

$$\text{Id} = \{e \in \mathbb{N} \colon \forall n \ (\varphi_e(n) = n)\}.$$

(a) Zeige, dass das Halteproblem m-reduzierbar auf Id ist, das heißt, dass $K \leq_m \text{Id}$ gilt.

(b) Gebe für die folgenden Aussagen jeweils an, ob sie wahr oder falsch sind. Begründe deine Antworten!

   (i) Id ist rekursiv.

   (ii) $\overline{\text{Id}}$ ist rekursiv.

   (iii) $\overline{\text{Id}}$ ist rekursiv aufzählbar.

Lösung 5.3

(a) Definiere die zweistellige partiell rekursive Funktion ψ durch

$$\psi(\langle e,x\rangle, y) = 0 \cdot \varphi_e(x) + y.$$

Dann gibt es, da φ eine Gödelnummerierung ist, eine rekursive Übersetzungsfunktion f von ψ nach φ, d.h. $\psi(\langle e,x\rangle, y) = \varphi_{f(\langle e,x\rangle)}(y)$ für alle $e, x, y \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\langle e,x\rangle \in K &\Leftrightarrow \varphi_e(x) \downarrow \\ &\Leftrightarrow \psi(\langle e,x\rangle, y) = y \text{ für alle } y \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \varphi_{f(\langle e,x\rangle)}(y) = y \text{ für alle } y \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(\langle e,x\rangle) \in \text{Id},\end{aligned}$$

d.h. $K \leq_m \text{Id}$ via f.

(b) (i) Falsch. Id ist als nichttriviale Indexmenge nach dem Satz von Rice nicht rekursiv. Alternativ kann man argumentieren, dass K nicht rekursiv ist und somit nach dem Reduktionslemma Id auch nicht.

(ii) Falsch. Eine Menge ist genau dann rekursiv, wenn ihr Komplement rekursiv ist.

(iii) Falsch. Aus $K \leq_m \mathrm{Id}$ via f folgt $\overline{K} \leq_m \overline{\mathrm{Id}}$ via f. Also wäre mit $\overline{\mathrm{Id}}$ auch $\overline{K}$ rekursiv aufzählbar, da die rekursiv aufzählbaren Mengen nach unten gegen $\leq_m$ abgeschlossen sind. Dies ergäbe allerdings einen Widerspruch, denn dann wären K (laut Votlesung) und $\overline{K}$ (nach Annahme) rekursiv aufzählbar und somit wäre K rekursiv.

Aufgabe 5.4 _Blatt 13, 2015_

(a) Sei $W_e = \mathrm{Db}(\varphi_e)$ die e-te rekursiv aufzählbare Menge und $W = \{e \in \mathbb{N}\colon 0, 1 \in W_e\}$. Zeige $K_d \leq_m W$, indem du eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ angibst mit

$$\forall e\colon e \in K_d \Leftrightarrow f(e) \in W$$

Ist W rekursiv aufzählbar?

(b) Folgere aus (a), dass W vollständig für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen ist.

(c) Sei nun $I = \{e \in \mathbb{N}\colon W_e \text{ ist nichttriviale Indexmenge}\}$. Ist I eine Idexmenge? Ist sie nichttrivial?

(d) Wahr oder falsch? Begründe deine Antwort und gebe gegebenenfalls Gegenbeispiele an!

(i) Ist B rekursiv aufzählbar und $A \leq_m B$, so ist auch A rekursiv aufzählbar.

(ii) Man kann den kleinsten Index einer partiell rekursiven Funktion bestimmen. Genauer: Die Funktion min, die jedem Index e die kleinste Zahl e' mit $\varphi_e = \varphi_{e'}$ zuordnet, ist rekursiv

(iii) Es gibt eine abzählbare Klasse C, die keine vollständige Menge besitzt.

Lösung 5.4

(a) Wir definieren

$$\psi(e, x) = \varphi(e, e)$$

und erhalten eine Übersetzungsfunktion f von ψ nach φ, d.h. $\psi(e, x) = \varphi_{f(e)}(x)$ für alle $e, x \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$e \in K_d \Rightarrow \psi_e \text{ total} \Rightarrow \varphi_{f(e)} \text{ total} \Rightarrow W_{f(e)} = \mathbb{N} \Rightarrow f(e) \in W$$

und

$$e \notin K_d \Rightarrow \psi_e(x) \uparrow \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi_{f(e)}(x) \uparrow \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow W_{f(e)} = \emptyset \Rightarrow f(e) \notin W$$

und somit $K_d \leq_m W$ via f.

Wegen

$$W = \{e \in \mathbb{N} \colon \exists s\ (\varphi_e(0) \text{ und } \varphi_e(1) \text{ terminieren in } \leq s \text{ Schritten}\}$$

ist W die Projektion einer rekursiven Menge und somit rekursiv aufzählbar.

(b) W ist wegen der Härte von K_d und der Transitivität von $\leq_m$ auch hart und somit, da rekursiv aufzählbar, vollständig.

(c) Gilt $\varphi_e = \varphi_{e'}$, so folgt $W_e = W_{e'}$. Deshalb ist W_e genau dann nichttrivial, wenn $W_{e'}$ nichttrivial ist, und somit ist I eine Indexmenge. $I \neq \mathbb{N}$, denn $e \notin I$ für $W_e = \emptyset$. $I \neq \emptyset$, denn $M = \{e \in \mathbb{N} \colon W_e \neq \emptyset\}$ ist eine nichttriviale Indexmenge. Wegen

$$M = \{e \in \mathbb{N} \colon \exists \langle x, s \rangle\ (\varphi_e(x) \text{ terminiert in } \leq s \text{ Schritten})\}$$

ist M rekursiv aufzählbar. Deshalb existiert ein $e \in \mathbb{N}$ mit $W_e = M$. Für dieses e gilt $e \in I$. Also ist I nichttrivial.

(d) (i) Wahr. Die rekursiv aufzählbaren Mengen sind nach unten gegen $\leq_m$ abgeschlossen.

(ii) Falsch. Ansonsten wären alle Indexmengen rekursiv, denn

$$e \in \operatorname{Ind}(\varphi_{e_0}) \Leftrightarrow min(e) = e_0,$$

also $\operatorname{Ind}(\varphi_{e_0}) \leq_m \{e_0\}$ via min, wobei e_0 der minimale Index von φ_{e_0} ist.

(iii) Wahr. Siehe Blatt 10, Aufgabe 1.

Aufgabe 5.5 *Klausur 2009*

(a) Zeige, dass die Menge

$$A = \{e \colon W_e \not\subseteq \{0, \dots, e\}\}$$

m-hart für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen ist.

Hinweis: Du kannst hierbei die Vollständigkeit der in der Vorlesung eingeführten Varianten des Halteproblems voraussetzen.

(b) Ist die Menge A sogar m-vollständig für die Klasse der r.a. Mengen? Begründe deine Antwort!

Lösung 5.5

(a) Aufgrund der Transitivität von $\leq_m$ ist A schon hart, falls $K_d \leq_m A$ gilt. Wir definieren deshalb die partiell rekursive Funktion ψ durch

$$\psi(e, x) = \varphi(e, e).$$

Dann gibt es eine rekursive Übersetzungsfunktion f mit $\psi_e = \varphi_{f(e)}$ für alle $e \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$e \in K_d \Rightarrow \psi_e \text{ total} \Rightarrow \varphi_{f(e)} \text{ total} \Rightarrow W_{f(e)} = \mathbb{N} \Rightarrow f(e) \in A$$

und

$$e \notin K_d \Rightarrow \psi_e(x) \uparrow \forall x \Rightarrow \varphi_{f(e)}(x) \uparrow \forall x \Rightarrow W_{f(e)} = \emptyset \Rightarrow f(e) \notin A$$

und somit $K_d \leq_m A$ via f.

(b) Wegen

$$A = \{e \colon \exists \langle x, s\rangle \ (x > e \ \& \ \varphi_e(x) \text{ terminiert in } \leq s \text{ Schritten})\}$$

ist A die Projektion einer rekursiven Menge und damit rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 5.6 *Klausur 2009*

(a) Zeige, dass die Menge

$$A = \{e \colon |W_e| \geq 2\}$$

m-hart für die Klasse der rekursiv aufzählbaren Mengen ist.

Hinweis: Du kannst hierbei die Vollständigkeit der in der Vorlesung eingeführten Varianten des Halteproblems voraussetzen.

(b) Ist die Menge A sogar m-vollständig für die Klasse der r.a. Mengen? Begründe deine Antwort!

Lösung 5.6

(a) Aufgrund der Transitivität von $\leq_m$ ist A schon hart, falls $K_d \leq_m A$ gilt. Wir definieren deshalb die partiell rekursive Funktion ψ durch

$$\psi(e, x) = \varphi(e, e).$$

Dann gibt es eine rekursive Übersetzungsfunktion f mit $\psi_e = \varphi_{f(e)}$ für alle $e \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$e \in K_d \Rightarrow \psi_e \text{ total} \Rightarrow \varphi_{f(e)} \text{ total} \Rightarrow W_{f(e)} = \mathbb{N} \Rightarrow f(e) \in A$$

und

$$e \notin K_d \Rightarrow \psi_e(x) \uparrow \forall x \Rightarrow \varphi_{f(e)}(x) \uparrow \forall x \Rightarrow W_{f(e)} = \emptyset \Rightarrow f(e) \notin A$$

und somit $K_d \leq_m A$ via f.

(b) Wegen

$$A = \{e \colon \exists\langle x_1, x_2, s\rangle\ (x_1 \neq x_2\ \&\ \varphi_e(x_1), \varphi_e(x_2) \text{ terminieren in} \leq s \text{ Schritten})\}$$

ist A die Projektion einer rekursiven Menge und damit rekursiv aufzählbar.

6 Formale Sprachen

Aufgabe 6.1
Zeige, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

$$L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \colon \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \qquad \textit{(Klausur 2014)}$$
$$L_2 = \{a^n b^{2n} c^{3n} \colon n \geq 1\} \qquad \textit{(Klausur 2015)}$$
$$L_3 = \{0^{n^2} \colon n \geq 0\} \qquad \textit{(Nachklausur 2015)}$$

Aufgabe 6.2
Wahr oder falsch?

(a) Die Sprache $L_1 = \{vw \colon v, w \in \{0,1\}^*, |v| = |w|\}$ ist regulär.

(b) Die Sprache $L_2 = \{w_0 \circ \ldots \circ w_n \colon n \in \mathbb{N}, w_k \in \{0,1\}^k\ \forall k \in \{0, \ldots, n\}\}$ ist kontextfrei.

(c) Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine Sprache mit $|L| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist L regulär.

Lösung 6.2
(a) Wahr. L_1 wird von der Grammatik $G = (\{S,T\}, \{0,1\}, P, S)$ mit den Regeln

$$P = \{S \to 0T \mid 1T \mid \lambda,\ T \to 0S \mid 1S\}$$

erzeugt, denn
$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \colon |w| = 2n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Falsch. Angenommen, L_2 sei kontextfrei. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ gemäß dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen. Sei $z = \lambda \circ 0 \circ 00 \circ \ldots \circ 0^p \in L_2$. Wegen $|z| \geq p$ gibt es dann eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit
   (i) $vx \neq \lambda$
   (ii) $|vwx| < p$
   (iii) $uv^nwx^ny \in L_2\ \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt wegen (i) und (ii), dass

$$\sum_{k=0}^{p-1} k = |z| - p < |uwy| < |z| = \sum_{k=0}^{p} k,$$

weshalb uwx nicht in L_2 liegen kann. Dies ist allerdings ein Widerspruch zu Aussage (iii) des Pumpinglemmas.

(c) Wahr. L wird von der rechtslinearen Grammatik $G = (\{S\}, \{0,1\}, P, S)$ mit den Regeln

$$P = \{S \to w \colon w \in L\}$$

erzeugt. Dabei ist P wegen $|P| = |L| = n$ endlich.

Aufgabe 6.3
Zeige, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \colon w = Bin(n) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

der Binärzahlen regulär ist.

Lösung 6.3
L wird von der Grammatik $G = (\{S, A\}, \{0,1\}, P, S)$ mit den Regeln

$$P = \{S \to 0 \mid 1A,\ A \to 0A \mid 1A \mid \lambda\}$$

ezeugt, denn

$$L = \{0\} \cup \{1w \colon w \in \{0,1\}^*\}.$$

Aufgabe 6.4
Sei L die Sprache über dem Alphabet $\{a, b, c\}$, die genau die Wörter enthält, in denen das Teilwort abc genau einmal vorkommt.

(a) Gebe eine rechtslineare Grammatik an, die L erzeugt.

(b) Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der L erkennt.

Lösung 6.4

(a) L wird von der Grammatik $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den Regeln

$$\begin{aligned} P = \{&S \to aA \mid bS \mid cS, \\ &A \to aA \mid bB \mid cS, \\ &B \to aA \mid bS \mid cC, \\ &C \to aD \mid bC \mid cC \mid \lambda, \\ &D \to aD \mid bE \mid cC \mid \lambda, \\ &E \to aD \mid bC \mid \lambda\} \end{aligned}$$

erzeugt

(b) **TODO**.

Aufgabe 6.5

Sei L die reguläre Sprache

$$L = \{w \in \{0, 1, 2\}^* \colon \#_0(w) = 0 \text{ oder } \#_1(w) = 0 \text{ oder } \#_2(w) = 0\}.$$

Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der L erkennt.

Lösung 6.5

Zunächst beobachtet man, dass

$$L = \{0, 1\}^* \cup \{0, 2\}^* \cup \{1, 2\}^*$$

gilt.
TODO

Aufgabe 6.6 *Klausur 2012*

Es sei $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, P, S)$ die kontextfreie Grammatik mit der Regelmenge

$$P = \{S \to XY,\ X \to ZXb \mid \lambda,\ Y \to bY \mid b,\ Z \to a \mid \lambda\}.$$

(a) Gebe die von G erzeugte Sprache $L(G)$ an.

(b) Gebe ein Wort $w \in L(G)$ minimaler Länge an, das mehr als einen Herleitungsbaum besitzt, und zeichne zwei verschiedene zugehörigen Herleitungsbäume.

(c) Gebe eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform an, die $L(G)$ erzeugt.