# 1 Maschinen

## 1.1 Turingmaschinen

**Aufgabe 1.1** _Klausur 2012_
Gebe eine 1-Band-Turingmaschine $M$ an, die die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ y, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

berechnet.
_Zur Erinnerung_: Die Zahl $n$ wird durch das Unärwort $0^{n+1}$ dargestellt.

**Aufgabe 1.2** _Klausur 2014_
Gebe eine 2-Band-Turingmaschine $M$ an, die die durch $f(w) = 0^{\#_0(w)}1^{\#_1(w)}$ gegebene Funktion $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$ berechnet.

**Aufgabe 1.3** _Klausur 2015_
Gebe einen totalen (deterministischen) 2-Band-Turingakzeptor $M$ an, der die Sprache $L = \{w2w \colon w \in \{0, 1\}^*\}$ (über dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$) erkennt.

## 1.2 Registermaschinen

**Aufgabe 1.4** _Klausur 2015_
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } x \text{ gerade} \end{cases}$$

definiert. Gebe einen Registeroperator $P$ an, der $f$ konservativ berechnet.

**Aufgabe 1.5** _Nachklausur 2015_
Gebe einen konservativen Registeroperator an, der die Gleichheitsrelation erkennt, d.h. die Funktion

$$c_=(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$$

berechnet.

# 2 Funktionen

**Aufgabe 2.1**
Zeige nur unter Verwendung der Definition der primitiv rekursiven Funktionen, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(b) $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $g(x, y) = 2^x + 2^y$ *(Nachklausur 2015)*
Du darfst verwenden, dass die Addition $add(x, y) = x + y$ primitiv rekursiv ist.
*Hinweis*: Zeige zunächst, dass die Funktion $\hat{f}(x) = 2^x$ primitiv rekursiv ist.

(c) $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(x, y, z) = 3x + z$

**Aufgabe 2.2** *Nachklausur 2013*
Eine natürliche Zahl heißt *Mersenne-Primzahl*, falls sie von der Form $2^n - 1$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) und eine Primzahl ist.
Zeige, dass die Menge

$$M = \{x \colon x \text{ ist Mersenne-Primzahl}\}$$

primitiv rekursiv ist.
Du darfst dabei neben der Definition der primitiv rekursiven Funktionen die aus der Vorlesung bekannten Abschlusseigenschaften sowie die primitive Rekursivität der Multiplikation $\cdot$, der modifizierten Subtraktion $\dot{-}$, der Potenzfunktion $n \mapsto 2^n$ und der Gleichheitsrelation verwenden.

# 3 Mengen

## 3.1 Rekursiv aufzählbare Mengen

**Aufgabe 3.1**
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe deine Antworten und gebe für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede unendliche rekursive Menge enthält eine nichtrekursive Teilmenge.

(b) Für zwei rekursiv aufzählbare Mengen $A$ und $B$ ist auch $A \setminus B$ rekursiv aufzählbar.

(c) Seien $A$ und $B$ zwei disjunkte rekursiv aufzählbare Mengen, sodass $A \cup B$ rekursiv ist. Dann sind auch $A$ und $B$ rekursiv.

(d) Sind sowohl $A$ als auch $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar, so gilt $A =_m \overline{A}$.

*Hinweis*: Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

**Aufgabe 3.2**
Die symmetrische Differenz zweier Mengen $A$ und $B$ ist

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Zeige:

(a) Ist $A \triangle B$ endlich, so gilt $A =_m B$.

(b) Die symmetrische Differenz zweier rekursiv aufzählbarer Sprachen ist nicht notwendig rekursiv aufzählbar.

(c) Seien $A$ und $B$ rekursiv aufzählbar. Wenn $A \triangle B$ rekursiv ist, dann sind auch $A \setminus B$ und $B \setminus A$ rekursiv.

*Hinweis*: Du darfst alle Resultate der Vorlesung inklusive der Church-Turing-These verwenden.

## 3.2 Reduktionsmethode

**Aufgabe 3.3** *Nachklausur 2012*

(a) Zeige, dass die Mengen

$$A = \{\langle x, y\rangle \colon \varphi_x(y)\downarrow \text{ und } \varphi_y(x)\downarrow\}$$

und

$$B = \{\langle x, y\rangle \colon \varphi_x(y)\uparrow \text{ oder } \varphi_y(x)\uparrow\}$$

nicht rekursiv sind.

(b) Sind $A$ und $B$ rekursiv aufzählbar?

**Aufgabe 3.4**
Seien FIN und INF die Indizes der endlichen bzw. unendlichen rekursiv aufzählbaren Mengen:

$$\text{FIN} = \{e \in \mathbb{N} \colon W_e \text{ ist endlich}\}$$
$$\text{INF} = \{e \in \mathbb{N} \colon W_e \text{ ist unendlich}\}$$

Sei TOT die Menge der Indizes aller rekursiven Funktionen:

$$\text{TOT} = \{e \in \mathbb{N} \colon W_e = \mathbb{N}\}$$

*Hinweis*: Wie in der Vorlesung definiert, ist $W_e$ der Definitionsbereich der $e$-ten partiell rekursiven Funktion, also $W_e = Db(\varphi_e) = \{x \in \mathbb{N} \colon \varphi_e(x)\downarrow\}$.

(a) Zeige, dass die Menge $\mathrm{FIN} \oplus \mathrm{INF} = \{2e \colon e \in \mathrm{FIN}\} \cup \{2e+1 \colon e \in \mathrm{INF}\}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

(b) Zeige, dass das Komplement von TOT auf FIN many-one-reduzierbar ist, also dass $\overline{\mathrm{TOT}} \leq_m \mathrm{FIN}$ gilt.

(c) Zeige, dass FIN nicht rekursiv aufzählbar ist.
*Hinweis*: Entweder zeigst du dies direkt, oder du zeigst durch geeignete $m$-Reduzierung, dass $\overline{\mathrm{TOT}}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

**Aufgabe 3.5** *Klausur 2012*
Sei

$$\mathrm{Id} = \{e \in \mathbb{N} \colon \forall n \; (\varphi_e(n) = n)\}.$$

(a) Zeige, dass das Halteproblem $m$-reduzierbar auf Id ist, das heißt, dass $K \leq_m \mathrm{Id}$ gilt.

(b) Gebe für die folgenden Aussagen jeweils an, ob sie wahr oder falsch sind. Begründe deine Antworten!
   (i) Id ist rekursiv.
   (ii) $\overline{\mathrm{Id}}$ ist rekursiv.
   (iii) $\overline{\mathrm{Id}}$ ist rekursiv aufzählbar.

# 4 Formale Sprachen

**Aufgabe 4.1**
Zeige, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

$$L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \colon \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \qquad \textit{(Klausur 2014)}$$
$$L_2 = \{a^n b^{2n} c^{3n} \colon n \geq 1\} \qquad \textit{(Klausur 2015)}$$
$$L_3 = \{0^{n^2} \colon n \geq 0\} \qquad \textit{(Nachklausur 2015)}$$

**Aufgabe 4.2**
Wahr oder falsch?

(a) Die Sprache $L_1 = \{vw \colon v, w \in \{0,1\}^*, |v| = |w|\}$ ist regulär.

(b) Die Sprache $L_2 = \{w_0 \circ \ldots \circ w_n \colon n \in \mathbb{N}, |w_k| = k \; \forall k \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei.

(c) Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine Sprache mit $|L| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $L$ regulär.

**Aufgabe 4.3**
Zeige, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \colon w = Bin(n) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

der Binärzahlen regulär ist.

**Aufgabe 4.4**
Sei $L$ die Sprache über dem Alphabet $\{a, b, c\}$, die genau die Wörter enthält, in denen das Teilwort $abc$ genau einmal vorkommt.

(a) Gebe eine rechtslineare Grammatik an, die $L$ erzeugt.

(b) Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der $L$ erkennt.

**Aufgabe 4.5**
Sei $L$ die reguläre Sprache

$$L = \{w \in \{0,1,2\}^* \colon \#_0(w) = 0 \text{ oder } \#_1(w) = 0 \text{ oder } \#_2(w) = 0\}).$$

Gebe einen deterministischen endlichen Automaten an, der $L$ erkennt.