

אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה: מדעי הטבע
מחלקה: מדעי המחשב

שם הקורס: אלגוריתמים כלכליים

קוד הקורס: 2-7062310 קבוצה 1

שם המרצה: אראל סגל-הלוי

שנה _____ ה'תש"ף סמסטר _____ א _____ מועד _____ א

תאריך בחינה: 20/2/2020

משך הבחינה: 3 שעות

בבחינה חמש שאלות. מותר לענות על כולן.

- סכום הנקודות בכל השאלות הוא 120. מי שיקבל מעל 120 – ציונו יהיה 100.

יש לענות במחברת הבחינה.

- אין צורך להעתיק את השאלון למחברת - השאלון יתפרסם בגיטהאב של הקורס לאחר הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש: דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4). אפשר לכתוב משני צדי הדף.

הנחיות לפתרון שאלות תיכנות:

- מותר לכתוב קוד בשפת פייתון, Java או C++ לפי בחירתכם.
- מותר לכתוב גם בפסאודו-קוד, בתנאי שהקוד מדויק ומפורט באותה רמה של שפת-תיכנות.
- יש לתעד את הקוד ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם לא נבחנים על התחביר של השפה אלא על האלגוריתם. העיקר שאוכל להבין מה עשיתם.

הנחיות כלליות:

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלה כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסויימות), הניחו את ההנחות שנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלה.

בהצלחה!!

שאלה 1 [20 נק']. קבוצת רכישה

שלושה שותפים מקימים קבוצת-רכישה ובונים יחד בניין עם 3 דירות. עלות הבנייה: 90.

ערכי הדירות בעיני השותפים הם:

| דירת גג | דירה אמצעית | דירת קרקע | |
|---------|-------------|-----------|-----|
| 0 | 40 | 50 | עמי |
| 50 | 10 | 30 | תמי |
| 50 | 30 | 10 | רמי |

א [10 נק']. תארו אלגוריתם המחליט איזו שותף יקבל איזו דירה, וכמה כסף ישלם. הדרישות:

- 1. השותפים לא יקנאו זה בזה;
- 2. כל שותף יקבל בדיוק דירה אחת;
- 3. סכום התשלומים של כל הדיירים יהיה שווה בדיוק לעלות הבניה.

ב [10 נק']. תארו בפירוט את אופן הרצת האלגוריתם על הדוגמה, כולל כל חישובי הביניים. הראו שהתוצאה (בדוגמה זו) אכן מקיימת את הדרישות.

שאלה 2 [30 נק'] תוכנית למציאת שיפור פארטו

השאלה עוסקת בבעייה של חלוקת משאבים רציפים ללא כסף בין שני שותפים. הטבלה הבאה מייצגת את הערך שכל אחד/ת מהשחקנים מייחס לכל אחד מהמשאבים (באלפי ש"ח):

| נפט | עץ | פלדה | |
|-----|----|------|---|
| עמי | 2 | 4 | 6 |
| תמי | 9 | 7 | 5 |

א [10 נק']. נתונה חלוקה שבה עמי מקבל x אחוז מהנפט, y אחוז מהעץ ו- z אחוז מהפלדה, ותמי מקבלת את כל השאר. כתבו ביטויים עבור הערך של עמי ועבור הערך של תמי, כפונקציה של x, y, z . עבור איזה ערכים של x, y, z , סכום הערכים הוא מקסימלי?

ב [10 נק']. כתבו תוכנית בפייתון עם cvxpy (או בפסאודו-קוד מפורט ומדויק) המחשבת ערכים x, y, z המייצגים חלוקת משאבים, כך ש:

- החלוקה יעילה פארטו;
- החלוקה ללא קנאה.

כותרת הפונקציה:

```
def find_pareto_optimal_envy_free():...
```

הפונקציה צריכה להדפיס למסך את החלוקה החדשה, למשל:

The Pareto-optimal-envy-free allocation is: $x=0.2, y=0.3, z=0.4$

הערה: יש לכתוב קוד כללי, שאפשר להתאים בקלות למטריצות עם ערכים שונים.

ג [10 נק']. כתבו תוכנית בפייתון עם cvxpy (או בפסאודו-קוד מפורט ומדויק) המקבלת כקלט ערכים x_0, y_0, z_0 המייצגים חלוקה קיימת (שאינה יעילה פארטו), ומחזירה כפלט ערכים חדשים x, y, z המייצגים חלוקה חדשה עם התכונות הבאות:

- החלוקה החדשה יעילה פארטו;
- החלוקה החדשה היא שיפור פארטו של החלוקה הקיימת.

(אין דרישה שהחלוקה החדשה תהיה ללא קנאה). כותרת הפונקציה:

```
def find_pareto_improvement (x0: float, y0: float, z0: float):...
```

הפונקציה צריכה להדפיס למסך את החלוקה החדשה, למשל:

The Pareto-improvement is: $x=0.3, y=0.5, z=0.7$

שאלה 3 [20 נק']. שוק מכוניות יד שניה

נבחרתם לנהל שוק למכוניות יד שניה. לשוק מגיעים מוכרים וקונים. כל מוכר מגיע עם מכונית אחת, וכל קונה רוצה לקנות מכונית אחת. לצורך השאלה נניח שכל המכוניות זהות, אבל כל מוכר וקונה מייחס ערך שונה למכונית: לכל מוכר ולכל קונה ישנו מספר המתאר את הערך שהוא מייחס למכונית (באלפי ש"ח). המוכרים והקונים הם קוואזי-ליניאריים. עליכם להחליט מי יקנה וכמה כסף ישלם, מי ימכור וכמה כסף יקבל. המטרה שלכם היא למקסם את הרווחה החברתית – סכום הערכים של כל המשתתפים.

א [10 נק']. נניח שערכי הקונים והמוכרים ידועים לכם, והם:

- יש שמונה קונים, והערכים שלהם הם: 19, 5, 15, 7, 11, 3, 1, 9.
- יש שמונה מוכרים, והערכים שלהם הם: 12, 14, 4, 2, 16, 18, 8, 6.

כמו כן, נניח שאתם חייבים לקבוע מחיר אחד למכונית.

מהו המסחר האופטימלי? מי קונה, מי מוכר, ומהו המחיר למכונית? נמקו והסבירו את אופן החישוב.

ב [10 נק']. תארו אלגוריתם עם התכונות הבאות:

- לכל קונה ולכל מוכר כדאי להגיד את הערך האמיתי שלהם למכונית;
- אין גירעון – סכום הכסף שמשלמים הקונים גדול או שווה מסכום הכסף שמקבלים המוכרים;
- המסחר הוא אופטימלי עד כדי עסקה אחת (עושים לכל היותר עסקה אחת פחות מהמסחר האופטימלי). הוכיחו שהאלגוריתם אכן מקיים תכונות אלה. הדגימו את האלגוריתם על המספרים של סעיף א.

שאלה 4 [20 נק'] . שיבוץ מתמחים למרכזים רפואיים

בפקולטה לרפואה ישנם n סטודנטים שסיימו הרגע את לימודיהם, והם צריכים להתמחות במרכזים רפואיים. לצורך השאלה ישנם שלושה מרכזים רפואיים: רמב"ם, הדסה ואיכילוב. בכל מרכז רפואי ישנם n מקומות למתמחים. לכל מתמחה יש יחס העדפה חזק על המרכזים הרפואיים, ולכל מרכז רפואי יש יחס העדפה חזק על המתמחים. א [10 נק'] . הגדירו במדויק את המושג "שיבוץ יציב" במצב המתואר בשאלה. ב [10 נק'] . הוכיחו, שבמצב המתואר בשאלה, ישנו שיבוץ יציב אחד ויחיד. תארו אלגוריתם המוצא שידוך זה בזמן $O(n)$.

שאלה 5 [30 נק']. ניהול הוגן של ועד הבית

אתם גרים בבניין עם 60 דיירים, ונבחרתם פה אחד לתפקיד יו"ר ועד הבית. מייד כשנכנסתם לתפקיד גיליתם שיש הרבה משימות לטפל בהן, וכל משימה לוקחת הרבה זמן:

- **א.** לדאוג לסיווד הגג – 5 שעות;
- **ב.** לבנות ארגז לחתולים המבקרים בבניין – 2 שעות;
- **ג.** לגלות למה אנחנו משלמים כל-כך הרבה כסף על "צריכת מים משותפת" – 20 שעות.
- **ד.** לבנות מעלית לבניין – 10 שעות;

יש הרבה משימות לטפל בהן, אבל אין לכם זמן לטפל בכולן - אתם יכולים להשקיע בסך-הכל 30 שעות בחודש בענייני ועד הבית. עליכם למצוא אלגוריתם שיעזור לכם להחליט באיזה משימות לטפל.

לכל אחד מהדיירים יש דעה אחרת בשאלה מה הן המשימות החשובות ביותר, לפי הטבלה הבאה:

| הדיירים (לפי מס' דירה): | 1 עד 10 | 11 עד 15 | 16 עד 30 | 31 עד 40 | 41 עד 45 | 46 עד 60 |
|--------------------------------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| המשימות החשובות בעיניהם: | א+ג | ב+ג | א+ג+ד | ג | ד | א+ד |

א [10 נק']. תארו אלגוריתם שיחליט עבורכם באיזה משימות להשקיע, כך שהתוצאה תהיה פרופורציונלית לכל תת-קבוצה של k דיירים. הדגימו את פעולת האלגוריתם על הטבלה למעלה והראו שהתוצאה אכן פרופורציונלית.

ב [10 נק']. האם תוצאת האלגוריתם שתיארתם בסעיף א יעילה פארטו (במקרה הפרטי)?
האם האלגוריתם תמיד יעיל פארטו (במקרה הכללי)?

ג [10 נק']. בבניין יש 6 קומות, בכל קומה 10 דיירים. עלות בניית מעלית בגובה k קומות היא $100k$. בהנחה שהחלטנו לבנות מעלית בגובה 6 קומות, כמה צריך לשלם כל דייר לפי עקרונות ההגינות של שאפלי? הסבירו את החישוב.

שאלה 6. מענק נקודות

אם שמכם הופיע באחד או יותר מקבצי הפתרונות שפורסמו בגיטהאב של הקורס, אנא ציינו את מספרי המטלות והשאלות. כל שאלה שבה שמכם הופיע, מזכה אתכם בתוספת של נקודה לציון הבחינה.