

אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה : מדעי הטבע
מחלקה : מדעי המחשב

אלגוריתמים כלכליים – פתרון

קוד הקורס : 2-7062310 קבוצה 1
שם המרצה : אריאל סגל-הלוי
שנה _____ ה'תשפ"ב סמסטר _____ א _____ מועד _____ א
תאריך בחינה : ח' שבט ה'תשפ"ב 10/1/2022
משך הבחינה : 2.5 שעות = 150 דקות

שאלה 1. מכרז קומבינטורי [22 נק']

עמי ותמי משתתפים במכרז קומבינטורי על שלושה חפצים שונים : א, ב, ג. כזכור, מכרז קומבינטורי הוא מכרז שבו כל משתתף יכול להציע מחיר לכל תת-קבוצה של חפצים. ערכי המשתתפים נתונים בטבלה הבאה :

תמי	עמי	
0	0	קבוצה ריקה
6	3	א
8	1	ב
7	8	ג
8	4	א,ב
1	1	א,ג
1	2	ב,ג
10	9	א,ב,ג

א. מה יעשה מכרז VCG במצב זה – מי יקבל כל חפץ, וכמה ישלם?

ב. האם האלגוריתם, במקרה המסויים הזה (עם המספרים שבטבלה) מעודד-השתתפות? הוכיחו את תשובתכם ע"י חישוב מספרי.

ג. נניח שעמי שוקל לשקר ולהגיד שהערך שלו לקבוצה א,ב הוא 10 (במקום 4). הראו לעמי, שזה לא משתלם לו, ושעדיף לו להגיד את האמת (ע"י חישוב תוצאת האלגוריתם במקרה זה והשוואה לסעיף א).

פתרון :

יש שמונה חלוקות אפשריות של החפצים. צריך לחשב את סכום הערכים בכל אחת :

הקבוצה שעמי מקבל	הקבוצה שתמי מקבלת	סכום הערכים
קבוצה ריקה	א, ב, ג	$10=0+10$

א	ב, ג	$4=3+1$
ב	א, ג	$2=1+1$
ג	א, ב	$16=8+8$
א, ב	ג	$11=4+7$
א, ג	ב	$9=1+8$
ב, ג	א	$8=2+6$
א, ב, ג	קבוצה ריקה	$9=0+9$

החלוקה הנבחרת היא: עמי מקבל ג, תמי מקבלת א+ב [תשובה נכונה: 2. הסבר נכון: 3].

אם עמי לא נמצא, אז החלוקה הנבחרת היא: תמי מקבלת הכל. הערך שלה הוא 10. בחלוקה הנבחרת הערך שלה הוא 8. לכן עמי משלם 2.

אם תמי לא נמצאת, אז עמי מקבל הכל. הערך שלו הוא 9, בחלוקה הנבחרת הערך שלו הוא 8. לכן תמי משלמת 1. [תשובה נכונה: 4. הסבר נכון: 5]

ב. אלגוריתם מעודד-השתתפות הוא אלגוריתם המבטיח, שמצבו של כל שחקן אחרי הביצוע טוב לפחות כמו לפני הביצוע. במקרה שלנו, המשמעות היא שהתועלת של כל שחקן (ערך פחות מחיר) היא לפחות 0. נחשב את התועלות של שני השחקנים:

- עמי: ערך 8, תשלום 2, תועלת 6.
- תמי: ערך 8, תשלום 1, תועלת 7.

התועלת של שניהם חיובית, ולכן האלגוריתם מעודד השתתפות במקרה זה.

[תשובה נכונה: 3. הסבר נכון: 5]

ג. אם עמי משקר ואומר 10, אז סכום הערכים הגדול ביותר מתקבל עבור החלוקה א, ב, ג (סכום ערכים 17). הערך של תמי הוא 7. כשעמי לא נמצא, כאמור, הערך של תמי הוא 10. לכן עמי משלם 3. התועלת שלו היא הערך האמיתי שלו פחות 3, שזה 4 פחות 3 = 1. לעומת זאת, בחלוקה של סעיף א, התועלת של עמי היא 8 פחות 2 = 6.

שאלה 2. מיזוג הצעות תקציב עם שני אזרחים [22 נק']

עמי ותמי רוצים להחליט על חלוקת התקציב המשפחתי שלהם. התקציב הכולל שלהם הוא 100. יש להם ארבעה סעיפים בתקציב: אוכל, בגדים, חשמל, נסיעות.

- עמי רוצה לחלק את התקציב באופן הבא: 0, 20, 50, 30.
- תמי רוצה לחלק את התקציב באופן הבא: 20, 0, 40, 20.
- [הערה: היתה טעות בשאלה – סכום הערכים של תמי קטן מ-100. זה לא אמור להשפיע על הפתרון].

א. מהו התקציב המתקבל ע"י אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות?

ב. התקציב שהתקבל בסעיף א (אם פתרתי נכון) מקיים את התכונה הבאה: הסכום המוקצב לכל סעיף נמצא בין הערך של עמי לבין הערך של תמי (כולל). הוכיחו שהתכונה הזאת תתקיים בכל מקרה, גם אם התקציבים המוצעים ע"י עמי ותמי יהיו שונים. כלומר: האלגוריתם הנ"ל תמיד יקציב, לכל סעיף, סכום כלשהו שנמצא בין הערך של עמי לבין הערך של תמי (כולל) לאותו סעיף.

פתרון:

א. כיוון שיש רק $n=2$ "אזרחים" במדינה, דרושה רק פונקציה אחת, שהערך שלה הוא:
 $\min(100, 100t) = 100t$.
צריך למצוא t כך שסכום החציונים הוא בדיוק 100. חישוב החציון תלוי בתחום שבו נמצא הערך $100t$.

אם $100t$ בין 0 ל-20, אז החציונים הם: 20, 40, $100t$, $100t$. הסכום הוא:

$$200t + 60$$

הסכום 100 מתקבל עבור $t=0.2$, כאשר $100t=20$, שהוא אכן בתחום הנ"ל.
לכן התקציב המתקבל הוא: 20, 20, 40, 20.

[תשובה נכונה: 5. הסבר נכון: 6].

ב. התקציב בכל אחד מהסעיפים הוא חציון בין שלושה ערכים: הערך של עמי, הערך של תמי, וההצבעה הקבועה $100t$. כלומר:

- אם $100t$ הוא הקטן ביותר, אז הוא לא החציון - וייבחר הערך של עמי או הערך של תמי.
 - אם $100t$ הוא הגדול ביותר, אז הוא לא החציון - וייבחר הערך של עמי או הערך של תמי.
 - אם $100t$ הוא בין שני הערכים, אז הוא החציון.
- בכל המקרים, התקציב שייבחר הוא הערך של עמי, או הערך של תמי, או ערך כלשהו ביניהם.

[הוכחה מלאה: 11].

שאלה 3. חיפוש מעגלי-החלפה בפייתון [22 נק']

א. כיתבו פונקציה בפייתון המוצאת מעגל בגרף החלפת בתים. כותרת הפונקציה:

```
def find_trading_cycle(preferences: List[List[int]]) -> List[int]:
```

הניחו שבתחילת הפונקציה, כל אדם i גר בבית i . הפרמטר `preferences` מתאר את ההעדפות של בעלי-הבתים (מניחים שההעדפות חזקות – אין אדישות). לכל i , הוקטור `preferences[i]` מתאר את סדר ההעדפות של אדם i . למשל, אם:

```
preferences[11] = [15, 13, 11, 7, 8, ...]
```

המשמעות היא, שאדם מספר 11 הכי רוצה את בית 15, אחריו את בית 13, אחריו את בית 11 (הבית הנוכחי שלו), וכו'..

הפונקציה מחזירה וקטור המתאר את המעגל, למשל אם מוחזר הוקטור:

```
[11, 15, 17, 11]
```

המשמעות היא, שאדם 11 מקבל את בית 15, אדם 15 מקבל את בית 17, ואדם 17 מקבל את בית 11.

ב. הדגימו את פעולת האלגוריתם שלכם על הקלט הבא:

```
[[2, 0, 3, 1], [3, 1, 2, 0], [3, 2, 0, 1], [0, 1, 2, 3]]
```

פתרון:

א. יש שתי דרכים: אפשר לבנות גרף של `networkx` ואז להפעיל פונקציה למציאת מעגלים,

או למצוא ישירות מעגל כפי שהוסבר בכיתה ע"י מעבר על החיצים בגרף. ראו פתרון מטלה 12.

[תשובה נכונה: 5 נק'. הסבר נכון: 6 נק'].

ב. נדגים את הדרך השנייה. מתחילים שרירותית מצומת כלשהו, נניח אדם 0. יש קשת אחת היוצאת ממנו, ומצביעה לבית 2, ומשם לאדם 2. יש קשת אחת היוצאת ממנו, ומצביעה לבית 3, ומשם לאדם 3. יש קשת אחת היוצאת ממנו, ומצביעה לבית 0, ומשם לאדם 0.

כבר ביקרנו בצומת של אדם 0, ולכן מצאנו מעגל. המעגל הוא

```
[0, 2, 3, 0].
```

[תשובה נכונה: 5 נק'. הסבר נכון: 6 נק'].

פתרון שאלה 4. מציאת חלוקה אגליטרית [22 נק']

עמי ותמי רוצים לחלק ביניהם משאבים רציפים: 100 יחידות עץ, 100 יחידות ברזל, ו-100 יחידות נפט.

הערכים שהם מייחסים ליחידה אחת של כל משאב הן:

- עמי: עץ=70, ברזל=30, נפט=20.
- תמי: עץ=10, ברזל=50, נפט=60.

א. כיתבו קוד המוצא חלוקה אגליטרית של המשאבים בין עמי לתמי. ציינו במחברת הבחינה את הקוד שיש לכתוב בקוים הריקים 1, 2, 3. נמקו את תשובתכם – הסבירו מדוע הפתרון שלכם אכן מוצא חלוקה אגליטרית.

ב. נתונות שלוש חלוקות אפשריות:

- עמי מקבל 100 עצים, 50 ברזל, 0 נפט. תמי מקבלת את השאר.
 - עמי מקבל 50 עצים, 50 ברזל, 50 נפט. תמי מקבלת את השאר.
 - עמי מקבל 0 עצים, 50 ברזל, 100 נפט. תמי מקבלת את השאר.
- מבין החלוקות הנ"ל, אחת מהן היא אגליטרית. מהי? הוכיחו (ע"י חישובים מספריים) ששתי החלוקות האחרות אינן אגליטריות.

פתרון:

א.

```
import cvxpy

wood_to_ami = cvxpy.Variable() # How many units of wood are given to Ami.
iron_to_ami = cvxpy.Variable() # How many units of iron are given to Ami.
oil_to_ami = cvxpy.Variable() # How many units of oil are given to Ami.

### 1
utility_ami = wood_to_ami*70 + iron_to_ami*30 + oil_to_ami*20
utility_tami = (100-wood_to_ami)*10 + (100-iron_to_ami)*50 + (100-
oil_to_ami)*60
min_utility = cvxpy.Variable()

prob = cvxpy.Problem(
    ### 2
    cvxpy.Maximize(min_utility),
```

```

constraints = [
    ### 3
    0 <= wood to ami, wood to ami <= 100,
    0 <= iron to ami, iron to ami <= 100,
    0 <= oil to ami, oil to ami <= 100,
    min utility<=utility ami,
    min utility<=utility tami
]
)
prob.solve()
print("Given to Ami: ", wood_to_ami.value, iron_to_ami.value,
oil_to_ami.value)

```

הפתרון מוצא חלוקה אגליטרית כי הוא ממקסם את התועלת הקטנה ביותר – המשתנה `min_utility`, תחת האילוצים שמדובר בחלוקה תקינה (עמי מקבל בין 0 ל-100 מכל משאב), וכן שהמשתנה `min_utility` אכן מייצג את התועלת הקטנה ביותר (התועלת של עמי והתועלת של תמי גדולות ממנו).

[5+5+5 נק'].

ב. צריך לחשב את התועלת המינימלית בכל אחת מהחלוקות, ולבחור את החלוקה עם התועלת המינימלית הגבוהה ביותר:

- עמי מקבל 100 עצים, 50 ברזל, 0 נפט – התועלת של עמי היא 8500 ושל תמי גם 8500; המינימום=8500.
 - עמי מקבל 50 עצים, 50 ברזל, 50 נפט – התועלת של עמי היא 6000 ושל תמי גם 6000; המינימום=6000.
 - עמי מקבל 0 עצים, 50 ברזל, 100 נפט -- התועלת של עמי היא 3500 ושל תמי גם 3500; המינימום=3500.
- המינימום גבוה ביותר בחלוקה הראשונה, ולכן רק היא יכולה להיות חלוקה אגליטרית.

[תשובה נכונה: 3 נק'. הסבר נכון: 4 נק'].