אוניברסיטת בר-אילן
פקולטה: מדעי הטבע
מחלקה: מדעי המחשב

שם הקורס: אלגוריתמים כלכליים

שם המרצה: אראל סגל-הלוי
שנה ______ה'תש"ף_______ סמסטר ___א___ מועד __א__
תאריך בחינה:___7/2/2020____
משך הבחינה: 3 שעות

בבחינה חמש שאלות. מותר לענות על כולן.

- סכום הנקודות בכל השאלות הוא 120. מי שיקבל מעל 120 – ציונו יהיה 100.

יש לענות במחברת הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש: דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4). אפשר לכתוב משני צדי הדף.

הנחיות לפתרון שאלות תיכנות:

- מותר לכתוב קוד בשפת פייתון, Java או C++ לפי בחירתכם.
- מותר לכתוב גם בפסאודו-קוד, בתנאי שהקוד מדוייק ומפורט באותה רמה של שפת-תיכנות.
- יש לתעד את הקוד ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם לא נבחנים על התחביר של השפה אלא על האלגוריתם. העיקר שאוכל להבין מה עשיתם.

הנחיות כלליות:

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלה כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסויימות), הניחו את ההנחות שנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלה.

בהצלחה!!

שאלה 1 [30 נק']. חלוקה הוגנת של מגרש טניס

במגרש הטניס השכונתי יכולים לשחק בו-זמנית עד 4 שחקנים (שני זוגות). אבל בשכונה יש יותר מ-4 שחקנים. לכל שחקן יש העדפות שונות לגבי הזמן שבו הוא מעדיף לשחק. ההעדפות של כל שחקן נתונות ע"י פונקציית ערך, המייחסת ערך מספרי כלשהו לכל פרק-זמן; הערך מייצג את רמת ההנאה של השחקן מכך שהוא משתתף במשחק באותו פרק-זמן. הערך הוא תמיד חיובי (שחקנים תמיד מעדיפים לשחק יותר).

המשימה שלכם היא למצוא חלוקה הוגנת של הזמן שבו המגרש פתוח, בין כל השחקנים בשכונה.

א [10 נק']. נניח שיש 8 שחקנים בסה"כ. תארו אלגוריתם המחלק את השחקנים לשתי קבוצות של 4, ומחלק את הזמן שבו המגרש פתוח לשני מקטעי-זמן רציפים, ומחליט איזו קבוצה תשחק בכל פרק-זמן, כך שאף שחקן לא יקנא בשחקנים של הקבוצה השניה. הדגימו את פעולת האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

ב [10 נק']. נניח שיש 4n שחקנים בסה"כ. תארו אלגוריתם המקציב לכל שחקן פרק-זמן רציף מסויים שבו הוא משחק, כך שרמת ההנאה של השחקן היא לפחות 1 חלקי n מרמת ההנאה שלו אילו היה משחק כל הזמן. הדגימו את פעולת האלגוריתם על n=3 או n=4 לבחירתכם. הוכיחו את נכונות האלגוריתם לכל n.

ג [10 נק'; רשות]. נניח שיש 4n שחקנים בסה"כ. הוכיחו שתמיד קיימת חלוקה המקציבה לכל שחקן פרק-זמן רציף מסויים שבו הוא משחק, כך שבכל רגע נתון יש 4 שחקנים על המגרש, ואף שחקן לא מקנא בשחקנים אחרים.

פתרון:

א.

* כל שחקן בוחר זמן t כך שבעיניו, הזמן מפתיחת המגרש עד t שקול לזמן מ-t עד סגירת המגרש.

* מסדרים את הזמנים t שבחרו השחקנים בסדר עולה. בוחרים את 4 הזמנים הקטנים יותר ושמים אותם בקבוצה אחת, ו-4 הזמנים הגדולים יותר בקבוצה השניה.

* מחלקים את זמן הפתיחה לשניים בין ה-t הרביעי לבין ה-t החמישי. הקבוצה של הזמנים הקטנים תשחק בחצי הראשון, והקבוצה של הזמנים הגדולים תשחק בחצי השני.

הוכחת נכונות: כל שחקן משחק בזמן שמבחינתו הוא לפחות ½ מהסה"כ, ולכן לא מקנא באף שחקן אחר.

ב. יש הרבה אפשרויות. הנה דוגמה לאלגוריתם המסתמך על "המפחית האחרון":

* אם n=1, נשארו ארבעה שחקנים – הם מקבלים את כל הזמן שנשאר. אחרת:

* כל שחקן בוחר זמן t כך שבעיניו, ערך הזמן מפתיחת המגרש עד t שווה ל n/1 מערך הזמן הכולל (מהפתיחה עד הסגירה).

* מסדרים את הזמנים t שבחרו השחקנים בסדר עולה. בוחרים את 4 הזמנים הקטנים יותר, שמים אותם בקבוצה אחת, ונותנים להם לשחק בפרק-הזמן שמהפתיחה עד הזמן הרביעי.

* נשארו 4*(n-1) שחקנים; מחלקים ביניהם את הזמן שנשאר באופן רקורסיבי.

הוכחת נכונות: באינדוקציה. הצעד הראשון מטפל בבסיס n=1. נניח שערך הזמן כולו הוא n. ארבעת השחקנים הראשונים מקבלים זמן ששווה בעיניהם לפחות 1. השחקנים הנשארים מעריכים את הזמן שחולק כ-1 לכל היותר, ולכן הזמן שנשאר שווה בעיניהם לפחות n-1. לכן לפי הנחת האינדוקציה כל אחד מקבל זמן ששווה בעיניו לפחות 1.

ג. פתרון מלא אפשר לקרוא כאן: https://arxiv.org/abs/2001.03327

סטודנט אחד מצא פתרון חלקי, המתאים למצב שבו המגרש פתוח 24 שעות ביממה:

- ניצור עוגה באורך של 24*4 שעות.
- נמצא חלוקה ללא קנאה בין 4n השחקנים הבודדים (למדנו בשיעור שתמיד קיימת חלוקה כזאת).
- נתרגם אותה לחלוקה של ה-24 שעות בכל יום ויום בין רביעיות.
- לדוגמה, נניח שיש 8 שחקנים, ונקודות החיתוך הן: 0 – 10 – 20 – 30 – 40 – 50 – 60 – 72 – 96 . אז השחקן הראשון ישחק בין 0 ל-10:00, השני בין 10:00 ל 20:00, השלישי בין 20:00 לבין 0:00 ובין 0:00 לבין 6:00, הרביעי בין 6:00 לבין 16:00, וכן הלאה...
- עכשיו כל שחקן משחק פרק-זמן רציף, בכל רגע יש 4 שחקנים על המגרש (לא דווקא בקבוצות קבועות), ואף שחקן לא מקנא באחרים.

זה פתרון חלקי, כי אם המגרש לא פתוח 24 שעות ביממה, אז חלק מהשחקנים יקבלו פרק-זמן לא רציף (נניח שעתיים בסוף היום ועוד שעתיים בתחילת היום הבא וכד').

שאלה 2 [30 נק']. אלגוריתם אמיתי לחלוקה הוגנת ויעילה

השאלה עוסקת בבעיה של חלוקת משאבים רציפים ללא כסף.

סעיפים א, ב מתייחסים לאלגוריתם המחלק את המשאבים באופן שממקסם את מכפלת הערכים.

א [10 נק']. הוכיחו, שכאשר יש רק משאב אחד, האלגוריתם מגלה-אמת (לכל מספר של שחקנים).

ב [10 נק']. הוכיחו, שכאשר יש שני משאבים או יותר, האלגוריתם אינו מגלה-אמת. הסבירו בפירוט את כל החישובים.

סעיף ג מתייחס לאלגוריתם חלוקה חדש.

ג [10 נק'; רשות]. נתון אלגוריתם חלוקה חדש:

1. מצא את החלוקה הממקסמת את *מכפלת* ערכי השחקנים; נסמן חלוקה זו ב-X.
2. לכל שחקן i:
   - מצא את החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי השחקנים האחרים (כש-i לא משתתף); נסמן חלוקה זו ב-y_i.
   - חשב את היחס בין מכפלת ערכי השחקנים האחרים בחלוקה X למכפלת ערכי השחקנים בחלוקה y_i; נסמן יחס זה ב r_i.
3. תן לכל שחקן i, אחוז r_i מכל משאב שהוא מקבל בחלוקה X.

נדגים את האלגוריתם על בעיה עם 2 שחקנים ו-3 משאבים. ערכי השחקנים למשאבים נתונים בטבלה:

	עץ	**פלדה**	**נפט**
עמי	4	3	2
תמי	6	7	8

החלוקה X (הממקסמת את מכפלת הערכים) היא:

- עמי מקבל את כל העץ ו-40% מהפלדה (ערך = 5.2).
- תמי מקבלת את כל הנפט ו-60% מהפלדה (ערך = 12.2).

בלי עמי, המכפלה של השחקנים האחרים היא פשוט הערך של תמי = 21. לכן היחס r עבור עמי הוא 12.2/21 = 0.581.

בלי תמי, המכפלה של השחקנים האחרים היא פשוט הערך של עמי = 9. לכן היחס r עבור תמי הוא 5.2/9 = 0.578.

לכן החלוקה הסופית היא:

- עמי מקבל 58.1% מהעץ,   ועוד 0.581*40% שהם כ 23% מהפלדה.

- תמי מקבלת 57.8% מהנפט, ועוד 0.578*60% שהם כ 35% מהפלדה.
- שאר המשאבים (בערך 42% מהעץ והנפט, ו32% מהפלדה) נשארים לא מחולקים, או נתרמים לצדקה.

עד כאן הדוגמה. ועכשיו השאלה:

הוכיחו שהאלגוריתם הנ"ל הוא מגלה-אמת, לכל מספר של שחקנים ומשאבים.

פתרון:

א. כפי שהוכחנו בשיעור, האלגוריתם הממקסם את מכפלת הערכים תמיד מחזיר חלוקה ללא קנאה. אם יש רק משאב אחד, אז החלוקה ללא קנאה *היחידה* היא החלוקה שבה כל שחקן מקבל כמות שווה מהמשאב (n/1). מכאן שהחלוקה לא תלויה בערכים שאומרים השחקנים. לכן האלגוריתם מגלה אמת.

- **שימו לב**: היו סטודנטים שכתבו שהשאלה טריביאלית כי מכפלה של מספר אחד היא המספר עצמו. זו לא סיבה נכונה. לדוגמה, האלגוריתם הממקסם את *סכום* הערכים אינו מגלה-אמת – לכל שחקן כדאי להגיד מספר גבוה ככל האפשר.

ב. נוכיח ע"י דוגמה. נניח שהערכים האמיתיים הם:

	עץ	פלדה
עמי	2	2
תמי	0	4

בחלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים, עמי מקבל את כל העץ. נניח שהוא מקבל x פלדה. אז מכפלת הערכים היא:

$(2x+2)*4(1-x) = 8(1+x)(1-x) = 8*(1-x^2)$

המקסימום מתקבל עבור $x=0$. כלומר תמי מקבלת את כל הפלדה. הערך של עמי הוא 2 ושל תמי 4.

עכשיו נניח שעמי משקר ואומר שהפלדה שווה עבורו 4. הוא עדיין מקבל את כל העץ, ועכשיו מכפלת הערכים היא:

$(4x+2)*4(1-x) = 8(2x+1)(1-x) = 8*(1+x-2x^2)$.

גוזרים ומשווים לאפס ומקבלים שהמקסימום הוא $x=1/4$. כלומר עכשיו עמי מקבל את כל העץ ו-1/4 מהפלדה והערך שלו גדול יותר.

ג. ההוכחה דומה להוכחה של משפט VCG שלמדנו בשיעור, רק במקום סכום משתמשים במכפלה.

הערך הכולל של כל שחקן i שווה למכפלה של הגורמים הבאים:

- הערך שהוא מקבל בחלוקה X, כפול -
- הערך ששאר השחקנים מקבלים בחלוקה X, חלקי -
- הערך ששאר השחקנים מקבלים בחלוקה Yi.

זה שווה למכפלה הבאה:

- הערך של כל השחקנים במכפלה X, חלקי -
- גורם כלשהו שאינו תלוי כלל בהכרזה של שחקן i.

לכן, השחקן ממקסם את הערך שלו כאשר הוא ממקסם את מכפלת הערכים של כל השחקנים במכפלה X. וזה בדיוק מה שהאלגוריתם עושה כשהשחקן דובר אמת.

שאלה 3 [20 נק']. נוסעים ונהגים

שמונה נוסעים עומדים באותה תחנה ורוצים להגיע לאותו מקום. כל אחד מהם מייחס ערך אחר (בשקלים) לנסיעה: יש נוסעים שחשוב להם להגיע בדחיפות, ויש נוסעים שפחות ממהרים. הערך של נוסע שנשאר בתחנה הוא אפס. הערך של נוסע שנוסע ליעד הוא חיובי ו*אינו תלוי* בנהג שלוקח אותו.

שמונה נהגי מוניות מגיעים לאותה תחנה. כל אחד מהם מייחס עלות אחרת (בשקלים) לנסיעה: יש נהגים שהמונית שלהם מבזבזת הרבה דלק ו/או הזמן שלהם יקר, ויש נהגים שפחות ממהרים ו/או המונית שלהם יותר חסכונית. העלות של נהג שנשאר בתחנה היא אפס. העלות של נהג שנוסע ליעד היא חיובית, והיא *אינה תלויה* בנוסע שהוא לוקח.

עליכם להחליט אילו נהגים ונוסעים ייסעו, ואילו נהגים ונוסעים יישארו בתחנה.

א [10 נק']. נניח שערכי הנוסעים ועלויות הנהגים ידועים לכם, והם:

- ערכי הנוסעים: 19, 5, 15, 7, 11, 3, 1, 9.
- עלויות הנהגים: 6, 8, 18, 16, 2, 4, 14, 12.

חשבו התאמה בין נוסעים לנהגים, הממקסמת את הרווחה החברתית (= סכום הערכים של כל המשתתפים). הסבירו את אופן החישוב: איך החלטתם מי נוהג ומי נוסע ומדוע?

ב [10 נק']. נניח שערכי הנוסעים ועלויות הנהגים לא ידועים לכם. תארו אלגוריתם *אמיתי* הממקסם את סכום הערכים. הסבירו בפירוט איך מחליטים מי נוהג ומי נוסע, איך מחליטים כמה משלם כל נוסע וכמה מקבל כל נהג.

הדגימו את האלגוריתם על המספרים של סעיף א.

פתרון:

א. הבעיה דומה למכרז בשוק דו-צדדי. צריך לסדר את הנוסעים בסדר יורד ואת הנהגים בסדר עולה, ולהתאים נוסע לנהג כל עוד הערך של הנוסע גדול מהעלות של הנהג. במקרה שלנו, הערכים המסודרים הם:

- ערכי הנוסעים: **19, 15, 11, 9**, 7, 5, 3, 1.
- עלויות הנהגים: **2, 4, 6, 8**, 12, 14, 16, 18.

ארבעת הנוסעים הגבוהים (19, 15, 11, 9) נוסעים עם ארבעת הנהגים הנמוכים (2, 4, 6, 8) – לא משנה מי נוסע עם מי. הרווחה החברתית היא סכום ערכי הנוסעים (54) פחות סכום ערכי הנהגים (20) סה"כ 34.

כל זוג נוסף שנצרף, רק יקטין את סכום הערכים.

ב. נשתמש באלגוריתם **VCG**. נבחר את ההתאמה הממקסמת את סכום הערכים כמו בסעיף א. לכל נוסע ונהג, נחשב מה היה קורה בלעדיו ונחשב את **תשלומי וק"ג** כמו שלמדנו בכיתה. במקרה שלנו, התוצאה תהיה:

- כל נוסע משלם 8 – כי בלעדיו הנהג 8 לא היה צריך לנהוג.
- כל נהג מקבל 9 – כי בלעדיו הנוסע 9 לא היה נוסע.

שימו לב: כל נוסע שנבחר חייב לשלם את את אותו תשלום – אחרת זה לא יהיה אמיתי (אם נוסע יכול להיבחר עם תשלום נמוך יותר, הוא יעשה את זה). באותו אופן, כל נהג שנבחר חייב לקבל את אותו תשלום – אחרת זה לא יהיה אמיתי (אם נהג יכול להיבחר ולקבל תשלום גבוה יותר, הוא יעשה את זה).

שאלה 4 [20 נק']. תוכנית למיקסום רווח

נתונה המחלקה הבאה, המייצגת קונה פוטנציאלי במכרז על חפץ יחיד:

```
class Buyer:

     name: str

     lowest_value: float

     highest_value: float

     reported_value: float
```

לכל קונה, השדות lowest_value, highest_value מייצגים את ההתפלגות. הערך של כל קונה הוא משתנה אקראי הלקוח מהתפלגות אחידה בין lowest_value ל highest_value. השדה reported_value מייצג את הערך שדיווח הקונה עצמו. השדה name מייצג את שם הקונה, ונועד לצורך תצוגה בלבד.

עליכם לבצע מכרז אמיתי הממקסם את תוחלת הרווח של המוכר.

א [10 נק']. כתבו פונקציה (בפייתון או בשפה אחרת) לביצוע המכרז. כותרת הפונקציה:

```
def maximize_profit (buyers: List[Buyer]): …
```

הפונקציה צריכה לכתוב מי זוכה בחפץ, וכמה הוא משלם. לדוגמה:

```
Tami wins and pays 30
```

הערה: מותר לכם להוסיף שדות למחלקה Buyer אם זה עוזר לכם.

ב [10 נק']. הדגימו את פעולת הפונקציה שכתבתם על הקלט הבא. פרטו את כל שלבי החישוב.

```
buyers[0]:
     name: "Ami"
     lowest_value: 0
     highest_value: 20
     reported_value: 13

buyers[1]:
     name: "Tami"
     lowest_value: 10
     highest_value: 30
     reported_value: 14
```

פתרון:

א. צריך להפעיל את אלגוריתם **מאירסון** עם כלל-הבחירה **מיקסום סכום הערכים הוירטואליים**, ולחשב את **תשלומי הסף**.

```
def maximize_profit (buyers: List[Buyer]):
    ### נוסיף למחלקה Buyer שדה virtual_value, שערכו מחושב ע"פ הנוסחה שחישבנו במטלה: ###
    for b in buyers:
        b.virtual_value = 2*b.reported_value – b.highest_value
    ### נסדר את הקונים בסדר יורד של הערך הוירטואלי: ###
    sort(buyers, key=lambda b: b.virtual_value, reverse=True)
    ### הזוכה הוא הקונה עם הערך הוירטואלי הגדול ביותר, בתנאי שהוא מעל 0: ###
    if buyers[0].virtual_value < 0:
        print("No one wins!")
    else:
        ### הקונה הראשון זוכה. צריך לחשב את המחיר לפי הקונה השני: ###
        if buyers[1].virtual_value ≥ 0:
            ### ערך הסף הוא פתרון המשוואה 2v-highest_value = r: ###
            price = (buyers[1].virtual_value+
                     buyers[0].highest_value)/2
        else:
            ### ערך הסף הוא פתרון המשוואה 2v-highest_value = 0: ###
            price = (buyers[0].highest_value)/2
        print(buyers[0].name + " wins and pays "+str(price))
```

ב. הערכים הוירטואליים, לפי הנוסחה, הם: עמי = 6, תמי = -2. לכן עמי הוא קונה 0 ותמי היא קונה 1, ועמי זוכה.

כיוון שהערך הוירטואלי של תמי קטן מאפס, ערך הסף של עמי נקבע לפי פתרון המשוואה 2v-20=0, כלומר עמי משלם 10. הפלט הוא: **Ami wins** and pays **10**.

שאלה 5 [20 נק']. חלוקת עלויות

א [10 נק']. נתונה בעיה של חלוקת עלויות בין 4 אנשים, עם פרמטרים w, x, y, z, כאשר

w < x < y < z, וכן:

- העלות של הקבוצה הריקה היא 0;
- העלות של כל תת-קבוצה עם אדם אחד היא w;
- העלות של כל תת-קבוצה עם שני אנשים היא x;
- העלות של כל תת-קבוצה עם שלושה אנשים היא y;
- העלות של כל תת-קבוצה עם ארבעה אנשים היא z.

כתבו ביטוי לתשלום שכל אחד צריך לשלם לפי כלל שאפלי, כפונקציה של הפרמטרים w, x, y, z. נמקו.

ב [10 נק']. נתונה בעיה של חלוקת עלויות בין 4 אנשים, עם פרמטרים w, x, y, z, כאשר

w < x < y < z, וכן:

- העלות של הקבוצה הריקה היא 0;
- העלות של כל תת-קבוצה הכוללת את אדם מספר 1 היא z;
- העלות של כל תת-קבוצה הכוללת את אדם מספר 2 אבל לא את 1 היא y;
- העלות של כל תת-קבוצה הכוללת את אדם מספר 3 אבל לא את 1,2 היא x;
- העלות של תת-הקבוצה הכוללת רק את אדם מספר 4 היא w.

כתבו ביטוי לתשלום שכל אחד צריך לשלם לפי כלל שאפלי, כפונקציה של הפרמטרים w, x, y, z. נמקו.

פתרון:

א. בסעיף זה כל השחקנים הם סימטריים – העלות השולית של כל שחקן היא זהה. לכן לפי עקרון הסימטריה ערך שאפלי של כולם זהה. כיוון שהם צריכים לכסות את כל העלות של 4 אנשים, התשלום לכל שחקן הוא בדיוק **z/4**.

ב. בסעיף זה מבנה העלויות הוא זהה לבעיית מסלול-ההמראה כאשר עלויות הקטעים הן:

- קטע ראשון – w; כולם מתחלקים.
- קטע שני – x-w; מתחלק בין 1,2,3
- קטע שלישי: y-x; מתחלק בין 1,2
- קטע רביעי: z-y; רק 1 משלם.

סה"כ התשלומים הם (היה צריך לכתוב ביטוי נפרד לכל שחקן):

* אדם מספר 4 משלם **w/4**;

* אדם מספר 3 משלם **w/4 + (x-w)/3**;

* אדם מספר 2 משלם **w/4 + (x-w)/3 + (y-x)/2**;

* אדם מספר 1 משלם **w/4 + (x-w)/3 + (y-x)/2 + (z-y)**;