

אוניברסיטת אריאל בשומרון  
פקולטה : מדעי הטבע  
מחלקה : מדעי המחשב

## אלגוריתמים כלכליים

קוד הקורס : 2-7062310 קבוצה 1  
שם המרצה : אראל סגל-הלוי  
שנה \_\_\_\_\_ ה'תשפ"ג סמסטר \_\_\_\_\_ א \_\_\_\_\_ מועד \_\_\_\_\_ א \_\_\_\_\_  
תאריך בחינה : ט"ז שבט ה'תשפ"ג 7/2/2023  
משך הבחינה : 2.5 שעות = 150 דקות

בבחינה 4 שאלות. משקל כל שאלה 22 נקודות. ציוני המטלות והמענקים יתווספו לציון הבחינה.

יש לפתור את כל השאלות במחברת הבחינה.

• אין צורך להעתיק את השאלון למחברת - השאלון יתפרסם באתר הקורס לאחר הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש : דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4). אפשר לכתוב משני צדי הדף.

הנחיות כלליות :

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלה כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסויימות), הניחו את ההנחות הנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלה. הסבירו את ההנחות שלכם.

הנחיות לפתרון שאלות תיכנות :

- יש לתעד את הקוד, ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם נבחנים על האלגוריתמים – ולא על התחביר של שפת פייתון.
- אם אתם לא זוכרים פקודה מסויימת, תכתבו מה שאתם זוכרים, ותסבירו בעברית למה התכוונתם.
- אם אתם לא יודעים פייתון בכלל [לא מומלץ], מותר לכתוב בשפת-תיכנות אחרת כלשהי, בתנאי שהאלגוריתם יהיה נכון מפורט ומדוייק.

בהצלחה!!

## שאלה 0. כתיבה מסודרת [2 נק']

ייתנו 2 נקודות נוספות על כתיבה מסודרת:

- כל השאלות פתורות במחברת הבחינה לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד;
- הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשקשים ומחיקות.

## שאלה 0.5. מטלות

[שאלה זו מיועדת להוספת ציוני המטלות והמענקים. אין צורך לענות].

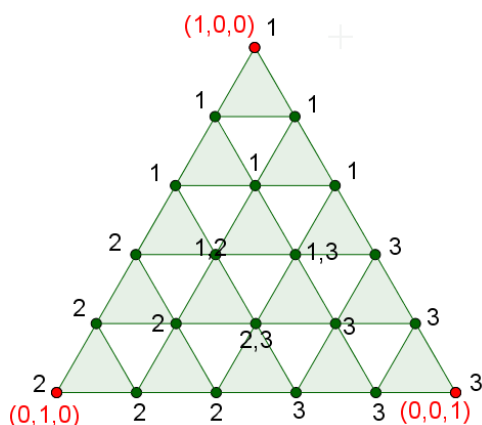
## שאלה 1. משולש החלוקות [22 נק']

נתונה עוגה חד-ממדית באורך 1. רוצים למצוא חלוקה רציפה וכמעט-ללא-קנאה בין שלושה אנשים, בעזרת אלגוריתם סימונס-סו.

שלושת האנשים מייחסים ערך **אחיד** לכל העוגה, כלומר, הערך של פרוסה באורך  $x$  הוא  $x$ .

א. רשמו את התוויות שיהיו על הקודקודים של משולש-החלוקות, שבו המרחק בין כל שני קודקודים סמוכים הוא 0.2. שימו לב: בחלק מהקודקודים יש כמה אפשרויות - רשמו את **כל** האפשרויות.

**פתרון** [תשובה נכונה: 6 נק', הסבר נכון: 6 נק']. כל קודקוד מייצג חלוקה, ובכל חלוקה, כל שחקן בוחר את הפרוסה הגדולה ביותר. בקודקוד העליון, ובקודקודים הסמוכים אליו, הפרוסה הגדולה ביותר היא הפרוסה הראשונה, ולכן התווית היא 1; בקודקוד השמאלי התחתון ובסמוכים אליו הפרוסה הגדולה ביותר היא הפרוסה השנייה, ולכן התווית היא 2; בקודקוד הימני התחתון ובסמוכים אליו הפרוסה הגדולה ביותר היא הפרוסה השלישית, ולכן התווית היא 3. בשלושה קודקודים פנימיים יש שתי אפשרויות. לדוגמה, הקודקוד המסומן ב 1,2 מתאים לחלוקה 0.2, 0.4, 0.4. שבה פרוסות 1,2 הן גדולות ביותר.



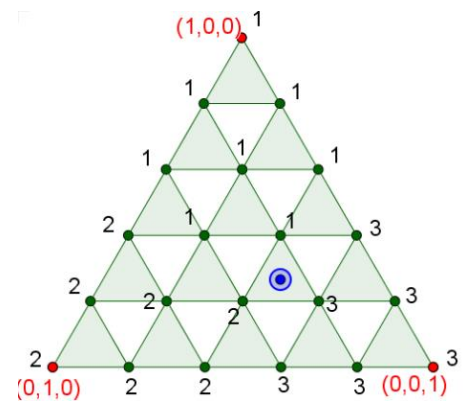
בסעיפים הבאים יש לבחור, עבור כל קודקוד עם כמה תוויות אפשריות, את התווית **הקטנה** ביותר.

ב. האם התיווי שהתקבל הוא תיווי ספרנר? הסבירו מדוע כן או מדוע לא.

**פתרון** [5 נק']: כן. על כל קודקוד ראשי יש תווית אחרת, ועל כל צלע בין שני קודקודים ראשיים יש רק תוויות שנמצאות על הקודקודים הראשיים: על הצלע בין 1 ל-2 מופיעות רק התוויות 1 ו-2, על הצלע בין 2 ל-3 מופיעות רק התוויות 2 ו-3, ועל הצלע בין 3 ל-1 מופיעות רק התוויות 3 ו-1.

ג. כמה משולשונים מגוונים יש? סמנו את כולם.

**פתרון** [5 נק']: אם בוחרים, בכל קודקוד שבו יש שתי אפשרויות, את האפשרות הקטנה ביותר, מתקבל התיווי הבא, ובו משולש מגוון אחד, המסומן בכחול:



## 2. חלוקה אגליטרית וקנאה [22 נק'].

מחלקים שלושה משאבים רציפים בין חמישה שחקנים. ערכי השחקנים נתונים בטבלה:

שמן	מים	קמח	
33	0	0	עמי:
22	11	0	תמי:
33	0	0	רמי:
0	16	15	חמי:
33	0	0	ימי:

א. חשבו חלוקה אגליטרית אחת כלשהי. הסבירו את שלבי החישוב. הוכיחו שזו אכן חלוקה אגליטרית.

**פתרון [11 נק']:** עמי, רמי וימי מייחסים ערך חיובי רק לשמן. לכן, הערך הגבוה ביותר שאפשר להבטיח לשלושתם יחד הוא 11 – אם מחלקים את כל השמן שווה בשווה לשלושתם. לכן, הערך האגליטרי הגבוה ביותר האפשרי הוא לכל היותר 11. לכן, אם נמצא חלוקה שבה כל השחקנים מקבלים ערך לפחות 11 – מצאנו חלוקה אגליטרית. אכן קיימת חלוקה כזאת: אפשר לתת את כל המים לתמי (והערך שלה יהיה 11), ואת כל הקמח לחמי (והערך שלו יהיה 15).

ב. הוכיחו, שבכל חלוקה אגליטרית (לא רק בחלוקה שחישבתם בסעיף א) יש קנאה. מי מקנא במי ומדוע?  
**פתרון [11 נק']:** בכל חלוקה אגליטרית, צריך לחלק את השמן שווה בשווה בין עמי רמי וימי כדי שיקבלו ערך 11; לא נשאר כל שמן לתמי, ולכן תמי חייבת לקבל את כל המים כדי שתקבל ערך 11; ולכן חמי מקבל רק את הקמח. חמי מקנא בתמי – כי חמי מעריך את הקמח שקיבל ב-15, ואת המים שקיבלה תמי ב-16.

### שאלה 3: מיזוג הצעות תקציב בין מפלגות

בכנסת ישראל החליטו לממש אלגוריתם למיזוג הצעות תקציב. שלוש מפלגות הציעו הצעות:

- מפלגה א רוצה להעביר את כל התקציב למשרד הביטחון.
- מפלגה ב רוצה לחלק את התקציב שווה בשווה בין משרד החינוך למשרד הפנים.
- מפלגה ג רוצה לחלק את התקציב שווה בשווה בין משרד החינוך למשרד הביטחון.

א. מהו התקציב המתקבל ע"י אלגוריתם החציון הפשוט?

**פתרון [7 נק']:** נסמן את התקציב הכולל באות C. הצבעות המפלגות הן:

- נושא: ביטחון, חינוך, פנים.
- מפלגה א: C, 0, 0.
- מפלגה ב: 0, C/2, C/2.
- מפלגה ג: 0, C/2, C/2.

החציון של תקציב הביטחון הוא C/2, של תקציב החינוך – C/2, ושל תקציב הפנים – 0. (במקרה זה יצא שסכום החציונים שווה בדיוק C; לא תמיד זה כך).

ב. מהו התקציב המתקבל ע"י אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות ליניאריות? פרטו לפחות שלושה שלבים בחיפוש הבינארי (לפחות שני ערכים לא מתאימים, והערך הנכון).

**פתרון [15 נק']:** אנחנו צריכים להוסיף שתי הצבעות קבועות. הצבעה קבועה i נקבעת לפי הפונקציה:

$$f_i(t) = C * \min(1, i*t)$$

עבור  $t=1/2$ , ההצבעות הקבועות הן C, C/2. החציונים הם:

- ביטחון – C/2. חינוך – C/2. פנים – C/2. הסכום גדול מהתקציב הכולל.

עבור  $t=1/4$ , ההצבעות הקבועות הן C/2, C/4. החציונים הם:

- ביטחון – C/2. חינוך – C/2. פנים – C/4. הסכום עדיין גדול מהתקציב הכולל.

עבור  $t=1/8$ , ההצבעות הקבועות הן C/4, C/8. החציונים הם:

- ביטחון – C/4. חינוך – C/4. פנים – C/8. הסכום קטן מהתקציב הכולל.

כאן אפשר לנחש מספר כלשהו בין 1/4 לבין 1/8. ננחש  $t=1/5$ , ההצבעות הקבועות הן 2C/5, C/5. החציונים הם:

- ביטחון – 2C/5. חינוך – 2C/5. פנים – C/5. הסכום שווה בדיוק לתקציב הכולל, ולכן זה התקציב שיוחזר.

## שאלה 4: חלוקת שכר דירה עם הטיה לטובת אחד הדיירים [22 נק']

נתונה בעיית חלוקת שכר דירה עם שלושה חדרים ושלושה דיירים. הערכות הדיירים הן:

- דייר א:  $a_1, a_2, a_3$
- דייר ב:  $b_1, b_2, b_3$
- דייר ג:  $c_1, c_2, c_3$

נתון, שההשמה היחידה הממקסמת את סכום הערכים היא: דייר א – חדר 1, דייר ב – חדר 2, דייר ג – חדר 3.

כתבו קוד בפייתון, המוצא חלוקת שכר דירה ללא קנאה. מבין כל החלוקות ללא קנאה, יש למצוא את החלוקה הטובה ביותר עבור דייר א (= החלוקה שבה התועלת של דייר א היא הגדולה ביותר). השלימו את הקוד הבא:

```
import cvxpy
TOTAL_RENT=1000

p1 = cvxpy.Variable() # price of room 1
p2 = cvxpy.Variable() # price of room 2
p3 = cvxpy.Variable() # price of room 3

problem = cvxpy.Problem(
    _____
    _____
    _____
    _____
    _____
    _____
)
problem.solve()
print(f"rents: 1={p1}, 2={p2}, 3={p3}")
```

הסבירו מדוע הקוד שלכם אכן פותר את הבעיה.

**פתרון:**

נגדיר פונקציית מטרה – מקסימום תועלת לשחקן 1:

```
objective = cvxpy.Maximize(a1-p1)
```

(לחלופין, כיוון שערך החדר  $a_1$  קבוע, אפשר גם לחפש מינימום מחיר לשחקן 1:  $\text{Minimize}(p_1)$ ).

בשורות הבאות יש לכתוב את האילוצים – סכום המחירים שווה לשכר הדירה הכולל, ואף שחקן לא מקנא:

```
constraints = [
    p1+p2+p3 = R,
    a1 - p1 ≥ a2 - p2,    a1 - p1 ≥ a3 - p3,
```

$$\begin{array}{ll} b_2 - p_2 \geq b_1 - p_1, & b_2 - p_2 \geq b_3 - p_3, \\ c_3 - p_3 \geq c_1 - p_1, & c_3 - p_3 \geq c_2 - p_2] \end{array}$$