אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה: מדעי הטבע
מחלקה: מדעי המחשב

שם הקורס: אלגוריתמים כלכליים

קוד הקורס: 7062310-2 קבוצה 1
שם המרצה: אראל סגל-הלוי
שנה ______ה'תש"ף_______ סמסטר ___א___ מועד __א__
תאריך בחינה:___20/2/2020____
משך הבחינה: 3 שעות

בבחינה חמש שאלות. מותר לענות על כולן.

- סכום הנקודות בכל השאלות הוא 120. מי שיקבל מעל 120 – ציונו יהיה 100.

יש לענות במחברת הבחינה.

- אין צורך להעתיק את השאלון למחברת - השאלון יתפרסם בגיטהאב של הקורס לאחר הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש: דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4). אפשר לכתוב משני צדי הדף.

הנחיות לפתרון שאלות תיכנות:

- מותר לכתוב קוד בשפת פייתון, Java או C++ לפי בחירתכם.
- מותר לכתוב גם בפסאודו-קוד, בתנאי שהקוד מדוייק ומפורט באותה רמה של שפת-תיכנות.
- יש לתעד את הקוד ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם לא נבחנים על התחביר של השפה אלא על האלגוריתם. העיקר שאוכל להבין מה עשיתם.

הנחיות כלליות:

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלה כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסויימות), הניחו את ההנחות שנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלה.

בהצלחה!!

שאלה 1 [20 נק']. קבוצת רכישה

שלושה שותפים מקימים קבוצת-רכישה ובונים יחד בניין עם 3 דירות. עלות הבנייה: 90.

ערכי הדירות בעיני השותפים הם:

	דירת קרקע	דירה אמצעית	דירת גג
עמי	50	40	0
תמי	30	10	50
רמי	10	30	50

א [10 נק']. תארו אלגוריתם המחליט איזו שותף יקבל איזו דירה, וכמה כסף ישלם. הדרישות:

1. השותפים לא יקנאו זה בזה;
2. כל שותף יקבל בדיוק דירה אחת;
3. סכום התשלומים של כל הדיירים יהיה שווה בדיוק לעלות הבניה.

ב [10 נק']. תארו בפירוט את אופן הרצת האלגוריתם על הדוגמה, כולל כל חישובי הביניים.
הראו שהתוצאה (בדוגמה זו) אכן מקיימת את הדרישות.

פתרון:

א. אפשר להשתמש באלגוריתם שלמדנו בהרצאה לחלוקת שכר-דירה ללא קנאה:

- מוצאים השמת דירות הממקסמת את סכום הערכים – ע"י אלגוריתם למציאת שידוך עם משקל מקסימלי. כפי שלמדנו בהרצאה, יש מימוש של אלגוריתם זה בפייתון, בספריה networkx. לשם כך יש לבנות גרף שבו הצמתים הם האנשים והבתים, יש קשת מכל אדם לכל בית, ומשקל הקשת הוא הערך שהאדם מייחס לבית. יש להפעיל על הגרף את הפונקציה `networkx.max_weight_matching`.
- מוצאים וקטור מחירים ללא קנאה – ע"י פתרון בעיית אופטימיזציה עם אילוצים. כפי שלמדנו בהרצאה, ניתן לפתור בעיה כזאת בעזרת הספריה cvxpy. לשם כך יש לכתוב בעיית אופטימיזציה בלי פונקציית מטרה (אפשר לקחת פונקציית-מטרה קבועה 0 למשל), שבה יש שלושה משתנים – משתנה לכל מחיר, והאילוצים הם: (א) סכום המחירים שווה בדיוק 90; (ב) עבור כל אחד מהשותפים, ההפרש (ערך – מחיר) עבור הדירה שהוא מקבל הוא גדול או שווה מההפרש (ערך – מחיר) עבור שתי הדירות האחרות. סה"כ 7 אילוצים.

ב. במקרה זה, ההשמה הממקסמת את סכום הערכים היא:

- **עמי** – קרקע, **תמי** – גג, **רמי** – אמצעית (סכום ערכים = 130).

כדי לחשב וקטור מחירים ללא קנאה (נניח x, y, z) צריך לפתור את הבעיה הבאה:

```
x+y+z = 90
50-x ≥ 40-y,   50-x ≥ 0-z                    // Ami
50-z ≥ 10-y,   50-z ≥ 30-x                   // Tami
30-y ≥ 10-x,   30-y ≥ 50-z                   // Rami
```

איך עושים את זה בזמן הבחינה? - אפשרות אחת היא לנחש פתרון: **עמי** – 30, **תמי** – 40, **רמי** – 20.

כדי לראות שהתוצאה ללא קנאה, נחשב את התועלת נטו (ערך פחות מחיר):

	דירת קרקע (30)	**דירה אמצעית (20)**	**דירת גג (40)**
עמי	**20**	20	-40
תמי	0	-10	**10**
רמי	-20	**10**	10

כל שותף מקבל דירה שהתועלת שלו עבורה היא גדולה ביותר (המספר הגדול ביותר בשורה), ולכן אין קנאה.

אפשרות אחרת לגמרי, והרבה יותר קלה לחישוב בלי מחשבון, היא להיזכר באלגוריתם שהמצאתם במטלה 3 שאלה 1 – אלגוריתם המסתמך על Selfridge-Conway:

- עמי מחלק את שכר-הדירה כך שכל הדירות שוות בעיניו: קרקע – 50, אמצעית – 40, גג – 0.
- עבור תמי, במחירים שעמי קבע, דירת הגג שווה הכי הרבה (+50) ובמקום שני דירת הקרקע (-20). לכן תמי מעלה את המחיר של דירת הגג ל 70 כך שדירת הגג ודירת הקרקע שוות בעיניה.
- עכשיו תור רמי. במחירים החדשים (50, 40, 70), **רמי** מעדיף את **הדירה האמצעית** והוא בוחר אותה.
- **תמי** אדישה בין שתי הדירות שנשארו, אבל היא חייבת לבחור את **דירת הגג** כי היא שינתה את המחיר שלה.
- **עמי** נשאר עם **דירת הקרקע**.

החלוקה עכשיו היא ללא קנאה, אבל נשאר לנו עודף של 70 שצריך לחלק שווה בשווה בין המשתתפים. כל אחד מקבל החזר של 70/3 = 23.33. בסה"כ התשלומים הם (בקירוב)

- עמי – קרקע – 26.66.
- תמי – גג – 46.66.
- רמי – אמצעית – 16.66.

שאלה 2 [30 נק']. תוכנית למציאת שיפור פארטו

השאלה עוסקת בבעייה של חלוקת משאבים רציפים ללא כסף בין שני שותפים.

הטבלה הבאה מייצגת את הערך שכל אחד/ת מהשחקנים מייחס לכל אחד מהמשאבים (באלפי ש"ח):

	נפט	**עץ**	**פלדה**
עמי	2	4	6
תמי	9	7	5

א [10 נק']. נתונה חלוקה שבה עמי מקבל x אחוז מהנפט, y אחוז מהעץ ו-z אחוז מהפלדה, ותמי מקבלת את כל השאר.
כתבו ביטויים עבור הערך של עמי ועבור הערך של תמי, כפונקציה של x, y, z.
עבור איזה ערכים של x, y, z, *סכום הערכים* הוא מקסימלי?

ב [10 נק']. כתבו תוכנית בפייתון עם cvxpy (או בפסאודו-קוד מפורט ומדוייק) המחשבת ערכים x, y, z המייצגים חלוקת משאבים, כך ש:

- החלוקה יעילה פארטו;
- החלוקה ללא קנאה.

כותרת הפונקציה:

```
def find_pareto_optimal_envy_free():...
```

הפונקציה צריכה להדפיס למסך את החלוקה החדשה, למשל:

```
The Pareto-optimal-envy-free allocation is: x=0.2, y=0.3, z=0.4
```

הערה: יש לכתוב קוד כללי, שאפשר להתאים בקלות למטריצות עם ערכים שונים.

ג [10 נק']. כתבו תוכנית בפייתון עם cvxpy (או בפסאודו-קוד מפורט ומדוייק) המקבלת כקלט ערכים x0, y0, z0 המייצגים חלוקה קיימת (שאינה יעילה פארטו), ומחזירה כפלט ערכים חדשים x, y, z המייצגים חלוקה חדשה עם התכונות הבאות:

- החלוקה החדשה יעילה פארטו;
- החלוקה החדשה היא *שיפור פארטו* של החלוקה הקיימת.

(אין דרישה שהחלוקה החדשה תהיה ללא קנאה). כותרת הפונקציה:

```
def find_pareto_improvement (x0: float, y0: float, z0: float):...
```

הפונקציה צריכה להדפיס למסך את החלוקה החדשה, למשל:

```
The Pareto-improvement is: x=0.3, y=0.5, z=0.7
```

פתרון:

א. הערך של עמי:

```
2x+4y+6z
```

הערך של תמי:

```
9(1-x)+7(1-y)+5(1-z)
```

סכום הערכים הוא הגדול ביותר כאשר כל משאב נמסר למי שהערך שלו עבורו הוא הגדול ביותר. במקרה זה:

```
x=0, y=0, z=1
```

ב. צריך למקסם את סכום הלוגריתמים תחת האילוץ שהערכים x, y, z הם בין אפס לאחד:

```
def find_pareto_optimal_envy_free():
     x, y, z = cvxpy.Variable(3)
     v_ami =  2*x + 4*y + 6*z
     v_tami = 9*(1-x) + 7*(1-y) + 5*(1-z)
     objective = cvxpy.log(v_ami) + cvxpy.log(v_tami)
     prob = cvxpy.Problem(objective,
          constraints = [x>=0, x<=1, y>=0, y<=1, z>=0, z<=1])
     prob.solve()
     print("The Pareto-optimal-envy-free allocation is: " +
          "x={}, y={}, z={}".format(x.value, y.value, z.value))
```

ג. אפשרות אחת היא למקסם את סכום הלוגריתמים תחת אילוץ נוסף של שיפור פארטו. התוספות מודגשות:

```
def find_pareto_improvement (x0: float, y0: float, z0: float):
     v0_ami  = 2*x0 + 4*y0 + 6*z0
     v0_tami = 2*(1-x0) + 4*(1-y0) + 6*(1-z0)
     x, y, z = cvxpy.Variable(3)
     v_ami =  2*x+4*y+6*z
     v_tami = 9*(1-x)+7*(1-y)+5*(1-z)
     objective = cvxpy.log(v_ami) + cvxpy.log(v_tami)
     prob = cvxpy.Problem(objective,
          constraints = [x>=0, x<=1, y>=0, y<=1, z>=0, z<=1,
          v_ami ≥ v0_ami, v_tami ≥ v0_tami ])
     prob.solve()
     print("The Pareto-improvement is: " +
          "x={}, y={}, z={}".format(x.value, y.value, z.value))
```

שאלה 3 [20 נק']. שוק מכוניות יד שניה

נבחרתם לנהל שוק למכוניות יד שניה. לשוק מגיעים מוכרים וקונים. כל מוכר מגיע עם מכונית אחת, וכל קונה רוצה לקנות מכונית אחת. לצורך השאלה נניח שכל המכוניות זהות, אבל כל מוכר וקונה מייחס ערך שונה למכונית: לכל מוכר ולכל קונה ישנו מספר המתאר את הערך שהוא מייחס למכונית (באלפי ש"ח). המוכרים והקונים הם קוואזי-ליניאריים.

עליכם להחליט מי יקנה וכמה כסף ישלם, מי ימכור וכמה כסף יקבל. המטרה שלכם היא למקסם את הרווחה החברתית – סכום הערכים של כל המשתתפים.

א [10 נק']. נניח שערכי הקונים והמוכרים ידועים לכם, והם:

- יש שמונה קונים, והערכים שלהם הם: 19, 5, 15, 7, 11, 3, 1, 9.
- יש שמונה מוכרים, והערכים שלהם הם: 6, 8, 18, 16, 2, 4, 14, 12.

כמו כן, נניח שאתם חייבים לקבוע מחיר אחד למכונית.

מהו המסחר האופטימלי? מי קונה, מי מוכר, ומהו המחיר למכונית? נמקו והסבירו את אופן החישוב.

ב [10 נק']. תארו אלגוריתם עם התכונות הבאות:

- לכל קונה ולכל מוכר כדאי להגיד את הערך האמיתי שלהם למכונית;
- אין גירעון – סכום הכסף שמשלמים הקונים גדול או שווה מסכום הכסף שמקבלים המוכרים;
- המסחר הוא אופטימלי עד כדי עסקה אחת (עושים לכל היותר עסקה אחת פחות מהמסחר האופטימלי).

הוכיחו שהאלגוריתם אכן מקיים תכונות אלה. הדגימו את האלגוריתם על המספרים של סעיף א.

פתרון:

א. הבעיה דומה למכרז בשוק דו-צדדי [מטלה 6 שאלה 1]. צריך לסדר את הקונים בסדר יורד ואת המוכרים בסדר עולה, ולהכניס למסחר זוגות תואמים כל עוד הערך של הקונה גדול מהערך של המוכר. במקרה שלנו, הערכים המסודרים הם:

- ערכי הקונים: **19, 15, 11, 9**, 7, 3, 1.
- ערכי המוכרים: **2, 4, 6, 8**, 12, 14, 16, 18.

ארבעת הקונים הגבוהים (19, 15, 11, 9) קונים מארבעת המוכרים הנמוכים (2, 4, 6, 8) – לא משנה מי קונה ממי.

כל זוג נוסף שנצרף, רק יקטין את סכום הערכים.

המחיר הוא כל מחיר שנמצא בין הקונה 9 למוכר 8, למשל 8.5.

ב. נשתמש באלגוריתם מאירסון עם כלל-הבחירה הבא:

- בחר את ההתאמה הממקסמת את סכום הערכים כמו בסעיף א;
- הורד את הזוג עם ההפרש הנמוך ביותר (בדוגמה למעלה, הזוג 8-9).

כל קונה משלם את ערך הסף שלו, שהוא הערך של הקונה שהורדנו (9); כל מוכר מקבל את ערך הסף שלו, שהוא ערך המוכר שהורדנו (8).

נכונות: מאירסון מגלה אמת - הוכחנו בהרצאה. אין גירעון – כי הקונה שהורדנו תמיד גבוה יותר מהמוכר שהורדנו (אחרת מלכתחילה לא היה נכנס למסחר האופטימלי).

שאלה 4 [20 נק']. שיבוץ מתמחים למרכזים רפואיים

בפקולטה לרפואה ישנם n סטודנטים שסיימו הרגע את לימודיהם, והם צריכים להתמחות במרכזים רפואיים.

לצורך השאלה ישנם שלושה מרכזים רפואיים: רמב"ם, הדסה ואיכילוב. בכל מרכז רפואי ישנם n מקומות למתמחים.

לכל מתמחה יש יחס העדפה חזק על המרכזים הרפואיים, ולכל מרכז רפואי יש יחס העדפה חזק על המתמחים.

א [10 נק']. הגדירו במדוייק את המושג "שיבוץ יציב" במצב המתואר בשאלה.

ב [10 נק']. הוכיחו, שבמצב המתואר בשאלה, ישנו שיבוץ יציב אחד ויחיד. תארו אלגוריתם המוצא שידוך זה בזמן O(n).

פתרון:

א. שיבוץ יציב = שיבוץ שאין בו זוגות מערערים, כאשר "זוג מערער" הוא זוג של מתמחה+מרכז שאינם משודכים, ועבורם:

- המתמחה מעדיף את המרכז ע"פ השיבוץ הנוכחי שלו;
- המרכז מעדיף את המתמחה ע"פ אחד המשובצים שלו, **או** קיים מקום פנוי במרכז.

[ההגדרה דומה למטלה 10 שאלה 1].

ב. במצב המתואר בשאלה, השיבוץ היציב היחיד הוא השיבוץ שבו כל מתמחה הולך למרכז הרפואי שהוא הכי רוצה (הראשון בסדר העדיפות שלו). *הוכחה:* נניח בה"כ שהסדר של עמי הוא: רמב"ם > הדסה > איכילוב. ונניח שבשידוך כלשהו, עמי לא מגיע לרמב"ם. אז ברמב"ם יש מקום פנוי והוא ישמח לקבל את עמי, וגם עמי ישמח לעבור לרמב"ם, ולכן השידוך לא יציב. מכאן שבכל שידוך יציב, עמי חייב להיות משובץ לרמב"ם. אותו הדבר נכון לגבי שאר המתמחים.

כדי למצוא את השידוך הזה, פשוט שואלים כל מתמחה איזה מרכז רפואי הוא הכי רוצה ושולחים אותו לשם. זמן הריצה O(n) כי מספר המרכזים הרפואיים הוא קבוע (3).

שאלה 5 [30 נק']. ניהול הוגן של ועד הבית

אתם גרים בבניין עם 60 דיירים, ונבחרתם פה אחד לתפקיד יו"ר ועד הבית. מייד כשנכנסתם לתפקיד גיליתם שיש הרבה משימות לטפל בהן, וכל משימה לוקחת הרבה זמן:

- **א.** לדאוג לסיוד הגג – 5 שעות;
- **ב.** לבנות ארגז לחתולים המבקרים בבניין – 2 שעות;
- **ג.** לגלות למה אנחנו משלמים כל-כך הרבה כסף על "צריכת מים משותפת" – 20 שעות.
- **ד.** לבנות מעלית לבניין – 10 שעות;

יש הרבה משימות לטפל בהן, אבל אין לכם זמן לטפל בכולן - אתם יכולים להשקיע בסך-הכל 30 שעות בחודש בענייני ועד הבית. עליכם למצוא אלגוריתם שיעזור לכם להחליט באיזה משימות לטפל.

לכל אחד מהדיירים יש דעה אחרת בשאלה מה הן המשימות החשובות ביותר, לפי הטבלה הבאה:

הדיירים (לפי מס' דירה):	1 עד 10	11 עד 15	16 עד 30	31 עד 40	41 עד 45	46 עד 60
המשימות החשובות בעיניהם:	א+ג	ב+ג	א+ג+ד	ג	ד	א+ד

א [10 נק']. תארו אלגוריתם שיחליט עבורכם באיזה משימות להשקיע, כך שהתוצאה תהיה פרופורציונלית לכל תת-קבוצה של k דיירים. הדגימו את פעולת האלגוריתם על הטבלה למעלה והראו שהתוצאה אכן פרופורציונלית.

ב [10 נק']. האם תוצאת האלגוריתם שתיארתם בסעיף א יעילה פארטו (במקרה הפרטי)?
האם האלגוריתם *תמיד* יעיל פארטו (במקרה הכללי)?

ג [10 נק']. בבניין יש 6 קומות, בכל קומה 10 דיירים. עלות בניית מעלית בגובה k קומות היא 100k. בהנחה שהחלטנו לבנות מעלית בגובה 6 קומות, כמה צריך לשלם כל דייר לפי עקרונות ההגינות של שאפלי? הסבירו את החישוב.

פתרון:

א. נשתמש באלגוריתם עזיז-לי-טלמון לתקצוב השתתפותי. התקציב כאן הוא 30 (שעות), ויש 60 דיירים, ולכן לכל דייר יש "זכות" על חצי שעה. צריך לסדר את כל 16 תת-הקבוצות של המשימות בסדר יורד של העלות:

- **אבגד, אגד, בגד** – יקר מדי (מעל 30).
- **גד** – יקר מדי – עולה 30 אבל יש רק 15 תומכים.
- **אבד, אבג** – יקר מדי – אין תומכים בכלל.
- **אג** – יקר מדי – עולה 25 אבל יש רק 25 תומכים (צריך 50)
- **בג** – יקר מדי – עולה 22 אבל יש רק 5 תומכים.

- **ג** – עולה 20 ויש בדיוק 40 תומכים (דירות 1-40) ולכן נכניס לתקציב! ונוציא את דיירים 1-40 מרשימת המקופחים.
- **אד** – עולה 15 אבל נשארו רק 15 תומכים מקופחים (צריך 30) ולכן זה יקר מדי.
- **א, ב** – יקר מדי;
- **ד** – עולה 10 ויש בדיוק 20 תומכים מקופחים (דירות 41-60) ולכן נכניס לתקציב.

בסה"כ יתבצעו משימות ג, ד.

ב. התוצאה בסעיף א יעילה פארטו, כי כל ה"תקציב" של 30 שעות מנוצל.
אבל בדרך-כלל, האלגוריתם לא יעיל פארטו; ראו פתרון למטלה 9 שאלה 3.

ג. הבעיה דומה לבעיית מסלול ההמראה, ולכן הפתרון דומה:

- הקומה השישית עולה 100, והעלות מתחלקת בין 10 הדיירים מהקומה השישית (לפי עקרון הסימטריה) – כל אחד משלם 10.
- הקומה החמישית עולה 100, והעלות מתחלקת בין 20 הדיירים מהקומות החמישית והשישית – כל אחד משלם 5.
- וכן הלאה.

בסה"כ, כל דייר בקומה השישית משלם : 10+10/2+10/3+10/4+10/5+10/6
כל דייר בקומה החמישית משלם: 10/2+10/3+10/4+10/5+10/6
וכן הלאה.