

אוניברסיטת בר-אילן
פקולטה: מדעי הטבע
מחלקה: מדעי המחשב

שם הקורס: אלגוריתמים כלכליים

שם המרצה: אראל סגל-הלוי
שנה _____ ה'תש"ף סמסטר _____ א _____ מועד _____ א
תאריך בחינה: 7/2/2020
משך הבחינה: 3 שעות

בבחינה חמש שאלות. מותר לענות על כולן.
• סכום הנקודות בכל השאלות הוא 120. מי שיקבל מעל 120 – ציונו יהיה 100.

יש לענות במחברת הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש: דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4). אפשר לכתוב משני צדי הדף.

הנחיות לפתרון שאלות תיכנות:

- מותר לכתוב קוד בשפת פייתון, Java או C++ לפי בחירתכם.
- מותר לכתוב גם בפסאודו-קוד, בתנאי שהקוד מדויק ומפורט באותה רמה של שפת-תיכנות.
- יש לתעד את הקוד ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם לא נבחנים על התחביר של השפה אלא על האלגוריתם. העיקר שאוכל להבין מה עשיתם.

הנחיות כלליות:

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלה כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסויימות), הניחו את ההנחות שנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלה.

בהצלחה!!

שאלה 1 [30 נק']. חלוקה הוגנת של מגרש טניס

במגרש הטניס השכונתי יכולים לשחק בו-זמנית עד 4 שחקנים (שני זוגות). אבל בשכונה יש יותר מ-4 שחקנים. לכל שחקן יש העדפות שונות לגבי הזמן שבו הוא מעדיף לשחק. ההעדפות של כל שחקן נתונות ע"י פונקציית ערך, המייחסת ערך מספרי כלשהו לכל פרק-זמן; הערך מייצג את רמת ההנאה של השחקן מכך שהוא משתתף במשחק באותו פרק-זמן. הערך הוא תמיד חיובי (שחקנים תמיד מעדיפים לשחק יותר).

המשימה שלכם היא למצוא חלוקה הוגנת של הזמן שבו המגרש פתוח, בין כל השחקנים בשכונה.

א [10 נק']. נניח שיש 8 שחקנים בסה"כ. תארו אלגוריתם המחלק את השחקנים לשתי קבוצות של 4, ומחלק את הזמן שבו המגרש פתוח לשני מקטעי-זמן רציפים, ומחליט איזו קבוצה תשחק בכל פרק-זמן, כך שאף שחקן לא יקנא בשחקנים של הקבוצה שניה. הדגימו את פעולת האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.

ב [10 נק']. נניח שיש $4n$ שחקנים בסה"כ. תארו אלגוריתם המקציב לכל שחקן פרק-זמן רציף מסויים שבו הוא משחק, כך שרמת ההנאה של השחקן היא לפחות 1 חלקי n מרמת ההנאה שלו אילו היה משחק כל הזמן. הדגימו את פעולת האלגוריתם על $n=3$ או $n=4$ לבחירתכם. הוכיחו את נכונות האלגוריתם לכל n .

ג [10 נק'; רשות]. נניח שיש $4n$ שחקנים בסה"כ. הוכיחו שתמיד קיימת חלוקה המקציבה לכל שחקן פרק-זמן רציף מסויים שבו הוא משחק, כך שבכל רגע נתון יש 4 שחקנים על המגרש, ואף שחקן לא מקנא בשחקנים אחרים.

שאלה 2 [30 נק'] אלגוריתם אמיתי לחלוקה הוגנת ויעילה

השאלה עוסקת בבעיה של חלוקת משאבים רציפים ללא כסף.

סעיפים א, ב מתייחסים לאלגוריתם המחלק את המשאבים באופן שממקסם את מכפלת הערכים.

א [10 נק'] הוכיחו, שכאשר יש רק משאב אחד, האלגוריתם מגלה-אמת (לכל מספר של שחקנים).

ב [10 נק'] הוכיחו, שכאשר יש שני משאבים או יותר, האלגוריתם אינו מגלה-אמת. הסבירו בפירוט את כל החישובים.

סעיף ג מתייחס לאלגוריתם חלוקה חדש.

ג [10 נק'; רשות]. נתון אלגוריתם חלוקה חדש:

- 1. מצא את החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי השחקנים; נסמן חלוקה זו ב- X .
- 2. לכל שחקן i :
 - מצא את החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי השחקנים האחרים (כש- i לא משתתף); נסמן חלוקה זו ב- y_i .
 - חשב את היחס בין מכפלת ערכי השחקנים האחרים בחלוקה X למכפלת ערכי השחקנים בחלוקה y_i ; נסמן יחס זה ב- r_i .
- 3. תן לכל שחקן i , אחוז r_i מכל משאב שהוא מקבל בחלוקה X .

נדגים את האלגוריתם על בעיה עם 2 שחקנים ו-3 משאבים. ערכי השחקנים למשאבים נתונים בטבלה:

נפט	פלדה	עץ	
2	3	4	עמי
8	7	6	תמי

החלוקה X (הממקסמת את מכפלת הערכים) היא:

- עמי מקבל את כל העץ ו-40% מהפלדה (ערך = 5.2).
 - תמי מקבלת את כל הנפט ו-60% מהפלדה (ערך = 12.2).
- בלי עמי, המכפלה של השחקנים האחרים היא פשוט הערך של תמי = 21. לכן היחס r עבור עמי הוא $0.581 = 12.2/21$.
- בלי תמי, המכפלה של השחקנים האחרים היא פשוט הערך של עמי = 9. לכן היחס r עבור תמי הוא $0.578 = 5.2/9$.
- לכן החלוקה הסופית היא:
- עמי מקבל 58.1% מהעץ, ועוד $0.581 \cdot 40\%$ שהם כ-23% מהפלדה.

- תמי מקבלת 57.8% מהנפט, ועוד $0.578 \cdot 60\%$ שהם כ 35% מהפלדה.
- שאר המשאבים (בערך 42% מהעץ והנפט, ו32% מהפלדה) נשארים לא מחולקים, או נתרמים לצדקה.

עד כאן הדוגמה. ועכשיו השאלה:

הוכיחו שהאלגוריתם הנ"ל הוא מגלה-אמת, לכל מספר של שחקנים ומשאבים.

שאלה 3 [20 נק']. נוסעים ונהגים

שמונה נוסעים עומדים באותה תחנה ורוצים להגיע לאותו מקום. כל אחד מהם מייחס ערך אחר (בשקלים) לנסיעה: יש נוסעים שחשוב להם להגיע בדחיפות, ויש נוסעים שפחות ממהירים. הערך של נוסע שנשאר בתחנה הוא אפס. הערך של נוסע שנוסע ליעד הוא חיובי ואינו תלוי בנהג שלוקח אותו.

שמונה נהגי מוניות מגיעים לאותה תחנה. כל אחד מהם מייחס עלות אחרת (בשקלים) לנסיעה: יש נהגים שהמונית שלהם מבזבזת הרבה דלק ו/או הזמן שלהם יקר, ויש נהגים שפחות ממהירים ו/או המונית שלהם יותר חסכונית. העלות של נהג שנשאר בתחנה היא אפס. העלות של נהג שנוסע ליעד היא חיובית, והיא אינה תלויה בנוסע שהוא לוקח.

עליכם להחליט אילו נהגים ונוסעים ישתתפו בנסיעה, ואילו נהגים ונוסעים יישארו בתחנה.

א [10 נק']. נניח שערכי הנוסעים ועלויות הנהגים ידועים לכם, והם:

- ערכי הנוסעים: 9, 1, 3, 11, 7, 15, 5, 19.
- עלויות הנהגים: 12, 14, 4, 2, 16, 18, 8, 6.

חשבו התאמה בין נוסעים לנהגים, הממקסמת את הרווחה החברתית (= סכום הערכים של כל המשתתפים). הסבירו את אופן החישוב: איך החלטתם מי נוהג ומי נוסע ומדוע?

ב [10 נק']. נניח שערכי הנוסעים ועלויות הנהגים לא ידועים לכם. תארו אלגוריתם אמיתי הממקסם את סכום הערכים. הסבירו בפירוט איך מחליטים מי נוהג ומי נוסע, איך מחליטים כמה משלם כל נוסע וכמה מקבל כל נהג. ממשו את האלגוריתם בפיתון (או בפסאודו-קוד מפורט ומדויק). הדגימו את האלגוריתם על המספרים של סעיף א.

שאלה 4 [20 נק']. תוכנית למיקסום רווח

נתונה המחלקה הבאה, המייצגת קונה פוטנציאלי במכרוז על חפץ יחיד:

```
class Buyer:
    name: str
    lowest_value: float
    highest_value: float
    reported_value: float
```

לכל קונה, השדות `lowest_value`, `highest_value` מייצגים את ההתפלגות. הערך של כל קונה הוא משתנה אקראי הלקוח מהתפלגות אחידה בין `lowest_value` ל `highest_value`. השדה `reported_value` מייצג את הערך שדיווח הקונה עצמו. השדה `name` מייצג את שם הקונה, ונועד לצורך תצוגה בלבד.

עליכם לבצע מכרוז אמיתי הממקסם את תוחלת הרווח של המוכר.

א [10 נק']. כתבו פונקציה (בפייתון או בשפה אחרת) לביצוע המכרוז. כותרת הפונקציה:

```
def maximize_profit (buyers: List[Buyer]): ...
```

הפונקציה צריכה לכתוב מי זוכה בחפץ, וכמה הוא משלם. לדוגמה:

```
Tami wins and pays 30
```

הערה: מותר לכם להוסיף שדות למחלקה `Buyer` אם זה עוזר לכם.

ב [10 נק']. הדגימו את פעולת הפונקציה שכתבתם על הקלט הבא. פרטו את כל שלבי החישוב.

```
buyers[0]:
    name: "Ami"
    lowest_value: 0
    highest_value: 20
    reported_value: 13

buyers[1]:
    name: "Tami"
    lowest_value: 10
    highest_value: 30
    reported_value: 14
```

שאלה 5 [20 נק']. חלוקת עלויות

א [10 נק']. נתונה בעיה של חלוקת עלויות בין 4 אנשים, עם פרמטרים w, x, y, z , כאשר

$$w < x < y < z, \text{ וכן:}$$

- העלות של הקבוצה הריקה היא 0;
- העלות של כל תת-קבוצה עם אדם אחד היא w ;
- העלות של כל תת-קבוצה עם שני אנשים היא x ;
- העלות של כל תת-קבוצה עם שלושה אנשים היא y ;
- העלות של כל תת-קבוצה עם ארבעה אנשים היא z .

כתבו ביטוי לתשלום שכל אחד צריך לשלם לפי כלל שאפלי, כפונקציה של הפרמטרים w, x, y, z . נמקו.

ב [10 נק']. נתונה בעיה של חלוקת עלויות בין 4 אנשים, עם פרמטרים w, x, y, z , כאשר

$$w < x < y < z, \text{ וכן:}$$

- העלות של הקבוצה הריקה היא 0;
- העלות של כל תת-קבוצה הכוללת את אדם מספר 1 היא z ;
- העלות של כל תת-קבוצה הכוללת את אדם מספר 2 אבל לא את 1 היא y ;
- העלות של כל תת-קבוצה הכוללת את אדם מספר 3 אבל לא את 1,2 היא x ;
- העלות של תת-הקבוצה הכוללת רק את אדם מספר 4 היא w .

כתבו ביטוי לתשלום שכל אחד צריך לשלם לפי כלל שאפלי, כפונקציה של הפרמטרים w, x, y, z . נמקו.

שאלה 6. מענק נקודות

אם שמכם הופיע באחד או יותר מקבצי הפתרונות שפורסמו בגיטהאב של הקורס, אנא ציינו את מספרי המטלות והשאלות. כל שאלה שבה שמכם הופיע, מזכה אתכם בתוספת של נקודה לציון הבחינה.