

אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה : מדעי הטבע
מחלקה : מדעי המחשב

אלגוריתמים כלכליים

קוד הקורס : 7062310-2 קבוצה 1
שם המרצה : אראל סגל-הלו
שנה _____ ה'תשפ"ד _____ סטודנט _____ א_____ מועד _____ א_____
תאריך בחינה : 5/2/2026 י"ח בשבט ה'תשפ"ו
משך הבחינה : 2.5 שעות = 150 דקוט

בחינה 4 שאלות, יש לפתרור את כולן. משקל כל שאלה 20 נקודות.

- זכאי הקלות מילואים יפתרו 3 שאלות בלבד ; משקל כל שאלה 28 נקודות. ציוני המטלות והמענקים יתווסף לציון הבחינה.

יינתנו 2 נקודות נוספת על כתיבה מסודרת, המוגדרת באופן הבא :

- כל השאלות פתרו במחברת הבחינה לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד ;
- הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשוקשים ומחיקות.

יש לפתרור את כל השאלות במחברת הבחינה.

- אין צורך להעתיק את השאלון למחברת - השאלון יתפרסם באתר הקורס לאחר הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש :

- מחשבון פשוט לחישובים מסוימים בלבד – ללא גրפים, תיכנות, אפליקציות או אינטרנט.
- דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4), כתוב מצד אחד בלבד.
- זכאי הקלות מילואים, וכן זכאי הקלת "דף-נוסחאות מורחב", רשותם לכתוב שני צדי הדף.

הנחיות כלליות :

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלת כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרו הנחות מסוימות), הניחו את ההנחות הנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלת. הסבירו את ההנחות שלכם.

הנחיות לפתרון שאלות תיקנות :

- יש לטעד את הקוד, ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם נבחנים על האלגוריתמים – ולא על התחריר של שפת פיתון.
- אם אתם לא זוכרים פקודה מסוימת, תכתבו מה שאתם זוכרים, ותסבירו בעברית למה הטענו אתכם.
- אם אתם לא יודעים פיתון בכלל [לא מומלץ], מותר לכתוב בשפת-תיקנות אחרות כלשהי, בתנאי שהאלגוריתם יהיה נכון מפורט ומדויק.

בצלחה!!

שאלה 0. כתיבה מסודרת

יינתנו 2 נקודות על כתיבה מסודרת:

- כל השאלות פתרוות במחברת הבחינה לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד;
- הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשוקשים ומחיקות.

שאלה 0.5. מטלות

[שאלה זו מיועדת להוספת ציוני המטלות והמענקים. אין צורך לענות].

שאלה 1: חלוקה יעילה וללא-קנאה בפייתון

* בכל מקרה יש להסביר בפירות מודיעין הקיים שכתבתם אכן מוצא חילוקה ייעילה-פארטו וללא-קנאה.

```

import cvxpy

def efficient_envy_free_allocation(valuation_matrix):
    """
    Compute a Pareto-efficient and envy-free allocation
    Example:
    >>> efficient_envy_free_allocation([[80, 19, 1], [79, 1, 20]])
    Agent #1 gets:
    0.51 of resource #1
    1.00 of resource #2
    0.00 of resource #3
    Agent #2 gets:
    0.49 of resource #1
    0.00 of resource #2
    1.00 of resource #3
    """
    num_of_agents = len(valuation_matrix)
    num_of_resources = len(valuation_matrix[0])

    # הדרת המשתנים
    input_variables_matrix = [cvxpy.Variable(num_of_resources) for row in valuation_matrix]

    # הדרת ביטויים המייצגים את התוצאות
    utilities = [
        _____א ]
    # הדרת פונקציית המטרה
    objective = _____ב

    # הדרת האילוצים
    constraints_1 = [(input_variables_matrix[i][j] <= 1) for j in range(num_of_resources)
                     for i in range(num_of_agents)]
    constraints_2 = _____ג
    constraints_3 = _____ד

```

```

פתרון הבעיה #
prob = cvxpy.Problem(objective, constraints_1+constraints_2+constraints_3)
prob.solve()

# הדפסת הפלט
for i, val in enumerate(input_variables_matrix):
    print(f"Agent #{i + 1} gets:")
    for j, v in enumerate(val.value):
        print(f"  {abs(v):.2f} of resource #{j + 1}")

```

פתרון: יש למצוא השמה הממקסמת את סכום הלוגריתמים של התוצאות, בהינתן האילוצים על החלוקה.

```

הגדרת ביטויים המיצינים את התוצאות #
utilities = [
    sum(input_variables_matrix[i][j]*valuation_matrix[i][j]
        for j in range(num_of_resources))
        for i in range(num_of_agents)
]

הגדרת פונקציית המטרה #
objective = cvxpy.Maximize(
    sum(cvxpy.log(u) for u in utilities)
)

הגדרת האילוצים #
constraints_1 = [(input_variables_matrix[i][j]<=1) for j in range(num_of_resources)
                 for i in range(num_of_agents)]
constraints_2 = [(input_variables_matrix[i][j]>=0) for j in range(num_of_resources)
                 for i in range(num_of_agents)]
constraints_3 = [(sum(input_variables_matrix[i][j] for i in range(num_of_agents))<=1)
                 for j in range(num_of_resources)]

```

פתרון לא נכון: מציאת השמה הממקסמת סכום ערכים תחת האילוץ שהחלוקת לא קnahme. חלוקה המתאפשרת לא בהכרח ייילה פארטו, כי האילוצים לא נשמרים תחת שיפור פארטו.

- נתתי עד 6 נקודות מתוך 10 (3 על ב + 3 על ג) למי שפתר **נכון** לפיה שיטה זו.

שאלה 2: קבוצת רכישה

- N אנשים הקיימו יחד קבוצת-רכישה ובנו יחד בניין ובו N דירות. הם רוצים לקבוע איזה דירה כל אחד יקבל, וכמה כל אחד ישלם. כמובן יש העדפות קוואזיליניאריות. האילוצים הם:
1. החלוקה צריכה להיות ללא קנאה.
 2. כל שחקן צריך לשולם סכום גדול או שווה אפס.
 3. כל שחקן צריך לקבל דירה אחת בדיקות.
 4. בכפוף לאיולוצים הקודמים, סכום התשלומים של השחקנים צריכים להיות קטן ככל האפשר.
- A. כתבו אלגוריתםיעיל המוצא השמה ותשלומים בהתאם לדרישות. הוכחו שהאלגוריתם שלו פותר את הבעיה.

פתרון:

צעד א. מצא השמה המקסמת סכום ערכיהם, ע"י חישוב שידוך משקל מקסימום בגרף דו-צדדי המתאים. [nymok: לפי משפט שהוכח בהרצאה, קיים תמחור שאיתו ההשמה ללא קנאה אם ורק אם ההשמה ממקסמת סכום ערכיהם].
5 נק'.

צעד ב. מצא את התשלומים בעזרת התוכנית הליניארית הבאה, כאשר $[i]_p$ הוא התשלום של שחקן i , $a[i]$ היא הדירה של שחקן i , ו- v היא מטריצת הערכים:

Minimize(sum[i=1..N] p[i])

Subject to:

$$\begin{aligned} p[i] &\geq 0 \quad \text{for all } i \text{ in } 1, \dots, N \\ v[i, a[i]] - p[i] &\geq v[i, a[j]] - p[j] \quad \text{for all } i, j \text{ in } 1, \dots, N \end{aligned}$$

איולוצי תשלומים גדולים או שווים אפס //
איולוצי חלוקה ללא קנאה //

פתרון לא נכון:

- אלגוריתם סימוננס-סו. כיוון שהשחקנים קוואזיליניארים, יש להשתמש בסימפלקס שיש בו גם תשלומים שליליים, ולכן לא מתקיים דרישת 2. נתני עד 7 נקודות למי שפתר נבען לפי שיטה זו.
- אלגוריתם וק"ג. לא ברור מדוע סכום התשלומים קטן ביותר. נתני עד 5 נקודות למי שפתר נבען לפי שיטה זו.

B. הדגימו את האלגוריתם שלו על הדוגמא הבא:

- דירה: א, ב, ג
- ערכיהם אברהם: 60, 80, 100
- ערכיהם בתיה: 75, 90, 70
- ערכיהם גدعון: 95, 70, 80

פתרון:

צעד א. מצא השמה המקסמת סכום ערכיהם: קל לראות שהשמה באלכסון ממקסמת סכום ערכיהם, כי כל שחקן מקבל את הדירה שהוא心仪的 – אברהם – א, ביתה – ב, גדעון – ג.

צעד ב. גם כshaaf אחד לא משלם שום דבר, כבר אין קנאה, כי כל אחד מקבל את הדירה שהוא心仪的 – גדעון. לכן הפתרון שבו סכום התשלומים קטן ביותר הוא $0 = \sum_i p[i]$.

שאלה 3: שיטת החלקים השווים – בינה מלאכותית

100 אזרחים מעוניינים לבחור בעיה בגודל 3 בשיטת החלקים השווים. אלה העדפות שלהם:

קבוצה 1 (40 בוחרים): תומכת במועמדים {A, B, C} :

קבוצה 2 (25 בוחרים): תומכת במועמדים {D, E} :

קבוצה 3 (20 בוחרים): תומכת במועמדים {A, F} :

קבוצה 4 (10 בוחרים): תומכת במועמדים {C, G} :

קבוצה 5 (5 בוחרים): תומכת במועמדים {E, F, G} :

ביקשתי מקלود לפתרור את הבעיה, אבל בתשובה שלו נפלו כמה טעויות.

א. מצאו את כל הטעויות.

ב. חשבו את הפתרון הנכון.

התשובה של קלוד [מעט ערוכה]

אני אשמה לחשב עבורך את הוועדה בעזרת שיטת החלקים השווים! אפרט לך את כל שלבי החישוב.

א. שלב הכנה

תקציב לכל בוחר : $100 \div 3 = 33.33$ (שליש מהתקציב הכללי)

עלות כל מקום בוועדה : $100 \div 3 = 33.33$

בוואו נספר כמה תומכים יש לכל מועמד:

מועמד	תומכים	קבוצות
A	60	(40+20)3, 1
B	40	קבוצה 1
C	50	(40+10)4, 1
D	25	קבוצה 2
E	30	(25+5)5, 2
F	25	(20+5)5, 3
G	15	(10+5)5, 4

סבב 1

עלות לבוחר ($33.33 \div$ מספר תומכים) :

• מועמד A : $33.33 \div 60 = 0.56$ ★ 33.33 הוזל ביותר!

• מועמד B : $33.33 \div 40 = 0.83$

- $33.33 \div 50 = 0.67$:C
- $33.33 \div 25 = 1.33$:D
- $33.33 \div 30 = 1.11$:E
- $33.33 \div 25 = 1.33$:F
- $33.33 \div 15 = 2.22$:G

A ✓

עדכון תקציבים:

- קבוצה 1 : $32.77 = 0.56 - 33.33$
- קבוצה 3 : $32.77 = 0.56 - 33.33$

סעיף 2

הוצאות לבוחר (מועדדים שנותרו):

- $33.33 \div 40 = 0.83$:B
- $33.33 \div 50 = 0.67$ ★ :C
- $33.33 \div 25 = 1.33$:D
- $33.33 \div 30 = 1.11$:E
- $33.33 \div 25 = 1.33$:F
- $33.33 \div 15 = 2.22$:G

C ✓

עדכון תקציבים:

- – קבוצה 1 : $32.77 = 0.67 - 33.33$
- **32.10** = 0.67
- **32.66** = $0.67 - 33.33$

סעיף 3

הוצאות לבוחר (מועדדים שנותרו):

- $33.33 \div 40 = 0.83$ ★ :B
- D: $33.33 \div 25 = 1.33$
- E: $33.33 \div 30 = 1.11$
- F: $33.33 \div 25 = 1.33$
- G: $33.33 \div 15 = 2.22$

B ✓

התוצאה הסופית

הוועדה שנבחרה : {A, B, C}

ניתוח:

- **קבוצה 1** (40 בוחרים) - מרווחים מאוד! כל 3 המועדדים שלהם נבחרו
- **קבוצה 2** (25 בוחרים) - לא קיבלו ייצוג (D, E, F לא נבחרו)
- **קבוצה 3** (20 בוחרים) - קיבלו את A
- **קבוצה 4** (10 בוחרים) - קיבלו את C
- **קבוצה 5** (5 בוחרים) - לא קיבלו ייצוג

למה זה קרה? קבוצה 1 היא הגדולה ביותר וכל המועדדים שלה זכו לתמיכה רחבה, מה שהוזיל את הוצאות לבוחר.

פתרון:

א. קלוד טעה בהישוב התקציב לכל בוחר (צריך להיות גודל הועודה חלקי מספר הבוחרים – כולם 0.03), וכן בהישוב העלות של כל מועמד (צריכה להיות 1). לכן גם התוצאה שהתקבל היא לא הוגנת בכלל: הקבוצה הגדולה ביותר בחרה את כל המועמדים, כי התקציב שלהם לא נגמר.

ב. הפתרון הנכון התקבל אחרי שהסבירתי לקלוד את הטעות שלו:

אתה צודק לחלוטין! אתקן את החישוב.

פתרון מתוקן - שיטת החלקים השווים

שלב הכנה

תקציב לכל בוחר: $3/100 = 0.03$

עלות כל מקום בוועדה 1 :

ספרת תומכים לכל מועמד (כמו קודם):

תומכים מועמד

- A 60
- B 40
- C 50
- D 25
- E 30
- F 25
- G 15

1 סבב

עלות לבוחר $\div (1 \div \text{מספר תומכים})$:

A: $1 \div 60 = 0.0167$ ★ •

B: $1 \div 40 = 0.025$ •

C: $1 \div 50 = 0.02$ •

D: $1 \div 25 = 0.04$ •

E: $1 \div 30 = 0.0333$ •

F: $1 \div 25 = 0.04$ •

$$G: 1 \div 15 = 0.0667 \quad \bullet$$

כולם מתחת לתקציב 0.03 ו-**C!** ($0.0167 < 0.03$ ו-**A**)

נבחר (A: הוזל מבין השניים)

עדכון תקציבים:

- קבוצה 1: $0.01330.0167 - 0.03 = 0.01330.0167 - 0.03$
 - קבוצה 3: $0.01330.0167 - 0.03 = 0.01330.0167 - 0.03$
-

סעיף 2

בודקים מי יכול להרשות לעצמו:

- () ציריך 40 בוחרים עם תקציב מלא של 0.03
 - קבוצה 1: יש רק 40 בוחרים עם תקציב **X** $0.0133 < 0.025$
 - C: $1 \div 50 = 0.02$
 - קבוצה 1: 40 בוחרים $\times 0.0133 = 0.532$
 - קבוצה 4: 10 בוחרים $\times 0.03 = 0.3$
 - סה"כ: **X** $0.832 < 1$
 - D: $1 \div 25 = 0.04$
 - קבוצה 2: 25 בוחרים $\times 0.03 = 0.75$
 - E: $1 \div 30 = 0.0333$
 - קבוצה 2: 25 בוחרים $\times 0.03 = 0.75$
 - קבוצה 5: 5 בוחרים $\times 0.03 = 0.15$
 - סה"כ: **X** $0.9 < 1$
 - F: $1 \div 25 = 0.04$
 - קבוצה 3: 20 בוחרים $\times 0.0133 = 0.266$
 - קבוצה 5: 5 בוחרים $\times 0.03 = 0.15$
 - סה"כ: **X** $0.416 < 1$
 - G: $1 \div 15 = 0.0667$
 - אף קבוצה לא יכולה להרשות **X**

אף מועמד לא יכול להיבחר !

התוצאה

הוועדה - {A}: רק חבר אחד במקום 3!

מה קרה? התקציב של 0.03 לבוחר נמור מדי. אחרי שקבוצות 1 ו-3 שלמו עברו, A לא נשאר להן מספיק התקציב למן מועמדים נוספים, והקבוצות האחרות קטנות מדי.

שאלה 4: שלושה שידוכים יציבים

[זכאי הקלות מילואים לא חייבם לפתור שאלה זו.]

נתונה בעיה של השמת 3 סטודנטים ל-3 מחלקות.

העדפות הסטודנטים:

- ראובן : ביולוגיה > גיאולוגיה > ארכיאולוגיה
- שמעון : גיאולוגיה > ארכיאולוגיה > ביולוגיה
- לוי : ארכיאולוגיה > ביולוגיה > גיאולוגיה

העדפות המחלקות:

- ארכיאולוגיה : ראובן > שמעון > לוי
- ביולוגיה : שמעון > לוי > ראובן
- גיאולוגיה : לוי > ראובן > שמעון

יש מקום אחד בכל מחלקה.

א. מצאו את השידוך הייציב המתקיים באלגוריתם "קבלה על תנאי" כשהסטודנטים מציעים. פרטו את שלבי החישוב.

ב. מצאו את השידוך הייציב המתקיים באלגוריתם "קבלה על תנאי" כשהמחלקות מציעות. פרטו את שלבי החישוב.

ג. מצאו שידוך יציב נוסף, שונה משני הקודמים. הוכחו בפירוט שהוא אכן יציב (ע"פ ההגדרה).

פתרונות:

א. כשהסטודנטים מציעים, ראובן הולך לביולוגיה, שמעון הולך לגיאולוגיה, ולוי הולך לארכיאולוגיה. אף מחלקה לא מקבלת יותר מסטודנט אחד, ולכן אף מחלקה לא דוחה אף סטודנט, והאלגוריתם מסתיים כאן.

ב. כשהמחלקות מציעות, ארכיאולוגיה מציעה לראובן, ביולוגיה לשמעון, וגיאולוגיה ללוו, והאלגוריתם מסתיים בזה.

פתרון לא נכון: יותר מסיבוב אחד. נתתי 2-1 נקודות מתוך 5 למי שפתר כך (בההתאם לרמת החساب)

ג. ראובן – גיאולוגיה, שמעון – ארכיאולוגיה, לוי – ביולוגיה.

כדי להוכיח שהשידוך יציב, נבדוק את כל ששת הזוגות הלא-משודכנים, ונראה שאין זוג מעורער:

- ראובן – ביולוגיה: המחלקה לא רוצה. ראובן – ארכיאולוגיה: ראובן לא רוצה.

- שמעון – גיאולוגיה: המחלוקת לא רוצחה. שמעון – ביולוגיה: שמעון לא רוצחה.
- לוי – ארכיאולוגיה: המחלוקת לא רוצחה. לוי – גיאולוגיה: לוי לא רוצחה.