

אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה: מדעי הטבע
מחלקה: מדעי המחשב

אלגוריתמים כלכליים - פתרון

קוד הקורס: 2-7062310 קבוצה 1

שם המרצה: אראל סגל-הלוי

שנה _____ ה'תש"ף סמסטר _____ א _____ מועד _____ ב

תאריך בחינה: ט' באדר ה'תש"ף 5/3/2020

משך הבחינה: 3 שעות

בבחינה חמש שאלות. מותר לענות על כולן.

- סכום הנקודות בכל השאלות הוא 120. מי שיקבל מעל 100 – ציונו יהיה 100.

יש לענות במחברת הבחינה.

- אין צורך להעתיק את השאלון למחברת - השאלון יתפרסם בגיטהאב של הקורס לאחר הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש: דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4). אפשר לכתוב משני צדי הדף.

הנחיות לפתרון שאלות תיכנות:

- מותר לכתוב קוד בשפת פייתון, Java או C++ לפי בחירתכם.
- מותר לכתוב גם בפסאודו-קוד, בתנאי שהקוד מדויק ומפורט באותה רמה של שפת-תיכנות.
- יש לתעד את הקוד ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם לא נבחנים על התחביר של השפה אלא על האלגוריתם. העיקר שאוכל להבין מה עשיתם.

הנחיות כלליות:

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלה כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסויימות), הניחו את ההנחות שנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלה.

בהצלחה!!

שאלה 1 [30 נק']: בחירת פרסומות לתחנת רדיו

אתם מנהלים תחנת רדיו שבה, בכל יום, מוקצבות בסה"כ 999 שניות לפירסומות.

לתחנה פונים n מפרסמים. לכל מפרסם i יש פרסומת באורך נתון וידוע x_i . אם הפרסומת של מפרסם i משודרת ברדיו, המפרסם מקבל ערך v_i ; הערכים האלה הם מידע פרטי של המפרסמים.

המטרה שלכם, כמנהלי התחנה, היא למקסם את סכום הערכים של המפרסמים, תחת האילוץ שסכום האורכים של הפירסומות הוא לכל היותר 999. במקביל, חשוב לכם לעודד את המפרסמים לגלות את הערכים האמיתיים שלהם לפירסומות.

א [15 נק']. נתון שמספר המפרסמים $n=10$. באיזה אלגוריתם תשתמשו? תארו בפירוט את שלבי האלגוריתם והסבירו מדוע הוא מתאים לפתרון הבעיה. הדגימו את האלגוריתם על הנתונים הבאים:

מפרסם א	מפרסם ב	מפרסם ג	מפרסם ד	
100	200	400	900	אורך הפרסומת בשניות
3	5	7	9	הערך למפרסם באלפי ש"ח

ב [15 נק']. נתון שמספר המפרסמים $n=500$. באיזה אלגוריתם תשתמשו? תארו בפירוט את שלבי האלגוריתם והסבירו מדוע הוא מתאים לפתרון הבעיה. הדגימו את האלגוריתם על הנתונים של סעיף א.

פתרון: כדי למקסם את סכום הערכים יש לפתור את בעיית התרמיל.

א. כיוון שמספר המפרסמים קטן, אפשר לפתור את בעיית התרמיל באופן מדויק ע"י בדיקת כל הצירופים. לכן אפשר להשתמש באלגוריתם VCG, שהוא אלגוריתם אמיתי המסתמך על מיקסום סכום הערכים.

בדוגמה הנתונה, סכום הערכים המקסימלי הוא $a+b+g=15$, ולכן נבחר את מפרסמים א, ב, ג. נחשב כמה כל אחד משלם:

• בלי א, נבחר את ב+ג (סכום =12); עם א, הסכום של האחרים הוא $b+g=12$. לכן א משלם 0.

• בלי ב, נבחר את א+ג (סכום =10); עם ב, הסכום של האחרים הוא $a+g=10$. לכן ב משלם 0.

• בלי ג, נבחר את ד (סכום =9); עם ג, הסכום של האחרים הוא $a+b=8$. לכן ג משלם 1.

ב. כיוון שמספר המפרסמים גדול, ובעיית התרמיל היא NP-קשה, אי אפשר לפתור אותה באופן מדויק ע"י בדיקת כל הצירופים. לכן נשתמש באלגוריתם קירוב-חצי שלמדנו בהרצאה, וכדי שיהיה אמיתי נשתמש במכרז מאירסון.

• **אלגוריתם חמדני א** מסדר את המפרסמים בסדר: ד-ג-ב-א (מהערך הגבוה לנמוך). הוא בוחר את ד בלבד, סכום=9.

- **אלגוריתם חמדני ב** מסדר את המפרסמים בסדר: א-ב-ג-ד (מהיחס ערך/אורך הגבוה לנמוך. היחס עבור א הוא $3/100$; מכאן והלאה האורך גדל לפחות פי 2, והערך גדל פחות מפי 2, ולכן ברור שהיחס יורד). הוא בוחר את $a+b+g$, סכום $=15$.

התוצאה של חמדני-ב גבוהה יותר ולכן נבחרים מפרסמים $a+b+g$. נחשב את ערך-הסף של כל אחד – עד לאן הם יכולים להוריד את הערך שלהם ועדיין להיבחר.

ראשית, ברור שאם כל אחד מהם יוריד את הערך שלו, חמדני-א לא ישתנה – הוא עדיין יבחר את ד.

שנית, חמדני-ב עדיין ישים את שני האחרים מהקבוצה $\{a, b, g\}$ לפני ד, ולכן גם חמדני ב עדיין לא יבחר את ד – הוא עדיין יבחר את $a+b+g$ [בהנחה שהאלגוריתם ממשיך לרוץ על כל השורה].

לכן, השינוי האפשרי היחיד הוא שהערך של $a+b+g$ יהיה נמוך מהערך של ד, ואז אלגוריתם הקירוב יבחר את התוצאה של חמדני-א. לכן:

- **ערך הסף של א** הוא 0, כי גם אם הערך שלו יהיה 0 – עדיין ייבחרו $b+g$.
 - **ערך הסף של ב** הוא 0, כי גם אם הערך שלו יהיה 0 – עדיין ייבחרו $a+g$.
 - **ערך הסף של ג** הוא 1 – כי אם הערך שלו יירד מתחת ל-1, הסכום של $a+b+g$ יהיה קטן מ-9 וייבחר ד.
- לסיכום, התשלומים במקרה זה זהים לתשלומים של VCG.

הערה: אם אלגוריתם חמדני-ב לא ממשיך לרוץ על כל השורה, אז ערכי הסף יהיו שונים – כי האלגוריתם יעצור ברגע שיגיע ל-ד (יחס ערך/אורך $=1/100$). לכן ערכי-הסף של א, ב, ג יהיו 1, 2, 4 בהתאמה.

שאלה 2 [30 נק']: החלפת כליות אמיתית

במדינה כלשהי ישנם שני מרכזים רפואיים המבצעים השתלת כליות. במצב הנוכחי, כל מרכז רפואי מבצע החלפת כליות רק בין זוגות (תורם+חולה) המגיעים אליו. משרד הבריאות של אותה מדינה פנה אליכם וביקש מכם להקים תוכנית החלפת כליות ארצית, שבה יתבצעו החלפות כליה גם בין זוגות ממרכזים שונים.

הערה: הטכנולוגיה הרפואית במדינה זו מאפשרת לבצע רק 4 ניתוחים במקביל (כלומר רק 2 תרומות במקביל).

א [10 נק']. תנו דוגמה הממחישה את חשיבות הקמת התוכנית הארצית. בפרט, תארו דוגמה שבה:

- בכל מרכז רפואי ישנם 4 זוגות של תורם+חולה ללא התאמה, ואפשר להציל רק 2 חולים ע"י החלפה פנימית;
- בעזרת התוכנית הארצית, אפשר להציל את כל 8 החולים.

פרטו את סוג-הדם של כל תורם וכל חולה בדוגמה, והסבירו מדוע בלי התוכנית אפשר להציל רק 2 חולים בכל מרכז ועם התוכנית אפשר להציל את כל החולים.

ב [10 נק']. בסעיף זה הניחו ששני המרכזים הרפואיים הם דוברי-אמת, ומוסרים את כל המידע שבידם מרצונם החופשי. תארו אלגוריתם המקבל קלט את הנתונים הרפואיים משני המרכזים, ומחליט איזה החלפת כליות לבצע, כך שהתוצאה תהיה יעילה פארטו. כיתבו מימוש של האלגוריתם בפייתון (בעזרת `networkx`) או בפסאודו-קוד מפורט ומדויק. הקלט לאלגוריתם הוא רשימת הזוגות (תורם+חולה) וסוג-הדם של כל אחד מהם. הדגימו על הדוגמה מסעיף א.

ג [10 נק']. בסעיף זה הניחו ששני המרכזים הרפואיים אינם בהכרח דוברי-אמת, אלא עלולים להסתיר מידע על-מנת למקסם את מספר החולים שלהם המקבלים כליה. תארו אלגוריתם המחליט איזה החלפת-כליות לבצע, באופן המעודד את המרכזים הרפואיים למסור את כל המידע שבידם, ומבצע לפחות $\frac{1}{2}$ ממספר ההשתלות המקסימלי. כיתבו מימוש של האלגוריתם בפייתון (בעזרת `networkx`) או בפסאודו-קוד מפורט ומדויק. הקלט לאלגוריתם הוא רשימת הזוגות (תורם+חולה) וסוג-הדם של כל אחד מהם. הדגימו על הדוגמה מסעיף א.

פתרון.

א. **מרכז א:** שלושה זוגות שבהם התורם הוא מסוג A והחולה הוא מסוג B, וזוג אחד שבו התורם מסוג B והחולה מסוג A.

מרכז ב: להיפך: שלושה זוגות שבהם התורם הוא מסוג B והחולה הוא מסוג A, וזוג אחד שבו התורם מסוג A והחולה מסוג B.

בכל מרכז בנפרד, אפשר לשדך זוג אחד A+B עם זוג אחר B+A; אבל בתוכנית הארצית אפשר לשדך את כולם.

ב. צריך לבנות את גרף ההתאמה בין זוגות, ולמצוא שידוך גדול ביותר. אפשר לעשות זאת בפייתון ע"י `networkx.maximal_matching`. השידוך הגדול ביותר הוא בגודל 4, למשל בין כל זוג במרכז א לבין הזוג ה"משלים" שלו במרכז ב. ולכן כל 8 הזוגות משודכים וכל החולים ניצלים.

ג. צריך לבנות את גרף ההתאמה בין זוגות כמו בסעיף ב, ואז להריץ את אלגוריתם אשלגי-פישר-קאש-פרוקצ'יה (כמו במטלה 12). לשם כך צריך לתת לכל קשת פנימית משקל מאד גדול, נניח 10, ולכל קשת חיצונית משקל 1, ולמצוא שידוך עם משקל מקסימלי. במקרה שלנו, בכל מרכז יש 3 קשתות פנימיות (בין הזוג ה"יוצא דופן" לבין כל אחד משלושת הזוגות האחרים), ובנוסף יש 4 קשתות חיצוניות. משקל השידוך הגדול ביותר הוא 22 – עם שתי קשתות פנימיות ושתי קשתות חיצוניות. גם כאן 8 הזוגות משודכים וכל החולים ניצלים: 4 זוגות משודכים באופן פנימי (בתוך המרכזים שלהם), ועוד 4 זוגות משודכים באופן חיצוני (בין מרכזים שונים).

שאלה 3 [20 נק'] מערכת לתיאום תרומות לעמותות

במדינה מסוימת יש 100 עמותות. כל אזרח במדינה תומך בחלק מהעמותות האלו אך לא בכולן. כל אזרח במדינה מעוניין לתרום סכום-כסף כלשהו לעמותות שהוא תומך בהן בלבד. סכום התרומה הרצוי משתנה מאזרח לאזרח. רמת השמחה של כל אזרח במדינה שווה לסכום הכולל של תרומות הניתנות לעמותות שהוא תומך בהן (מכל התורמים יחד).

עליכם לתכנן מערכת שתתאם את התרומות של האזרחים השונים, בהתאם לדרישות הבאות:

1. רמת השמחה של כל אזרח המשתתף במערכת היא גדולה לפחות כמו רמת השמחה שלו אילו לא היה משתתף.

2. האלגוריתם מעודד כל אזרח לגלות את הרשימה המדויקת של העמותות שהוא תומך בהן.

3. החלוקה היא יעילה-פארטו ביחס לקבוצת החלוקות שבהן כל אזרח תורם רק לעמותות שהוא תומך בהן.

א [10 נק']. תארו בפירוט את הקלט והפלט של המערכת: איך נראה מסך-הקלט המוצג לכל אזרח, ומה בדיוק צריך להקליד שם? איך נראה הפלט המוצג לכל אזרח? צרפו ציורי מסכים לדוגמה.

ב [10 נק']. תארו אלגוריתם המקיים את הדרישות. נמקו את בחירתכם. הדגימו את פעולת האלגוריתם על הנתונים הבאים:

- אזרח א תומך בעמותות ע, פ ומוכן לתרום 100;
- אזרח ב תומך בעמותות פ, צ ומוכן לתרום 200;
- אזרח ג תומך בעמותות צ, ק ומוכן לתרום 300.

פתרון.

א. קלט: לכל אזרח מוצג מסך עם הרשימה של 100 העמותות, וכן שדה מספרי. האזרח צריך לסמן וי ליד כל עמותה שהוא תומך בה, וכן לכתוב איזה סכום הוא מעוניין לתרום בסך-הכל.

פלט: המערכת שולחת לכל אזרח בדואל רשימה המפרטת כמה כסף הוא צריך לתרום לכל עמותה, מבין העמותות שהוא תומך בהן. לדוגמה, אם הקלט הוא "א, ב, ד, 100 ש"ח" אז הפלט יכול להיות "א – 30, ב – 50, ד – 20".

ב. מבין האלגוריתמים שלמדנו, היחיד המקיים את שתי הדרישות הוא האלגוריתם האוטיליטרי-על-תנאי: כל אזרח תורם לעמותות עם הכי הרבה תומכים, מבין אלה שהוא תומך בהן. כפי שלמדנו בהרצאה, האלגוריתם מעודד השתתפות (תכונה 1), אמיתי (תכונה 2), וממקסם את סכום הערכים (ולכן יעיל פארטו) תחת האילוץ שכל אזרח תורם רק לעמותות שהוא תומך בהן (תכונה 3). דוגמה:

- אזרח א צריך לתרום את כל ה-100 שלו לעמותה פ בלבד;
- אזרח ב יכול לחלק את ה-200 שלו באופן כלשהו בין עמותות פ, צ – נניח 100 לכל אחת;
- אזרח ג צריך לתרום את כל ה-300 שלו לעמותה צ בלבד.

- בסה"כ: עמותה פ מקבלת 200 ועמותה צ מקבלת 400. עמותות ע, ק לא מקבלות כלום.

שאלה 4 [20 נק']. חלוקת עוגה - תיכנות

נניח שרוצים לחלק נהר חד-ממדי, המיוצג ע"י הקטע $[0,1]$. כל משתתף מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent:
    def eval(self, x:float)->float:
        """
        :param x: a positive number representing a location on the cake.
        :return: v: the value of the piece  $[0,x]$  for the agent.
        """

    def mark(self, v:float)->float:
        """
        :param v: a positive number representing a value of a piece.
        :return: x: a number such that the value of  $[0,x]$  equals v.
        """
```

א [10 נק']. כיתבו בפייתון (או פסאודו-קוד מפורט ומדוייק) את אלגוריתם "חתוך ובחר":

```
def cutAndChoose(a:Agent, b:Agent):
```

הפונקציה מקבלת שני שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent a receives $[0,0.3]$. Agent b receives $[0.3,1]$.

ב [10 נק']. כיתבו בפייתון (או פסאודו-קוד מפורט ומדוייק) את אלגוריתם "המפחית האחרון":

```
def algLastDiminisher(agents:List[Agent]):
```

הפונקציה מקבלת מערך של שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent 0 receives $[0,0.3]$. Agent 1 receives $[0.3,0.6]$. Agent 2..

פתרון:

א. ראו כאן: https://github.com/erelsgl/fairpy/blob/master/cut_and_choose.py

ב. ראו כאן: https://github.com/guyguy40/fairpy/blob/master/last_diminisher.py

שאלה 5 [20 נק'] מיקסום רווח עם מס

קבלן מעוניין למכור דירה אחת לקונה אחד ולמקסם את תוחלת הרווח שלו. התפלגות הערך של הקונה אחידה בין 1.5 מיליון לבין 3 מיליון ש"ח.

א [10 נק'] הממשלה מטילה מס של 0.4 מיליון ש"ח על המוכר. מהו המכרז הממקסם את תוחלת הרווח של המוכר? ומהי תוחלת הרווח של המוכר? נמקו ופרטו את חישוביכם.

ב [10 נק'] הממשלה מטילה מס של 0.4 מיליון ש"ח על הקונה. מהו המכרז הממקסם את תוחלת הרווח של המוכר? ומהי תוחלת הרווח של המוכר? נמקו ופרטו את חישוביכם.

פתרון:

- א. פונקציית הערך הוירטואלי של הקונה (במיליוני ש"ח) היא $2v-3$. תוחלת הרווח של המוכר בלי מס שווה לתוחלת של הערך הוירטואלי של הקונה. אבל עם מס התוחלת קטנה יותר ב 0.4, כלומר היא $2v-3.4$. כדי למקסם תוחלת רווח, המוכר צריך למכור אם"ם הביטוי הזה גדול מאפס, כלומר אם"ם $v > 1.7$, לכן המכרז הממקסם-רווח הוא מכרז מאירסון עם ערך-סף קבוע 1.7. המוכר מרויח 1.7 ברוטו ו 1.3 נטו אם"ם הקונה קונה, וזה קורה בהסתברות $1.3/1.5$ (זו ההסתברות שהערך של הקונה הוא מעל 1.7). סה"כ תוחלת הרווח של המוכר היא:

$$1.3 * 1.3 / 1.5$$

- ב. כשהקונה מביא בחשבון את המס, התפלגות הערך שלו נטו היא בין 1.1 לבין 2.6. לכן פונקציית הערך הוירטואלי שלו היא $2v-2.6$. כדי למקסם רווח, המוכר צריך למכור לו אם"ם הערך הוירטואלי גדול מאפס, כלומר אם"ם הערך של הקונה אחרי מס הוא לפחות 1.3. לכן המכרז הממקסם רווח הוא מכרז מאירסון עם ערך-סף קבוע 1.3. המוכר מרויח 1.3 אם"ם הקונה קונה, וזה קורה בהסתברות $1.3/1.5$ (זו ההסתברות שהערך של הקונה אחרי מס הוא מעל 1.3). סה"כ תוחלת הרווח של המוכר היא כמו בסעיף א:

$$1.3 * 1.3 / 1.5$$

שאלה 6. תוספת נקודות

אם שמכם הופיע באחד או יותר מקבצי הפתרונות שפורסמו בגיטהאב של הקורס, אנא ציינו את מספרי המטלות. כל מטלה שבה שמכם הופיע, מזכה אתכם בתוספת של נקודה לציון הסופי.