

אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה : מדעי הטבע
מחלקה : מדעי המחשב

אלגוריתמים כלכליים

קוד הקורס : 7062310-2 קבוצה 1
שם המרצה : אראל סגל-הלו
שנה _____ ה'תשפ"ד _____ סמסטר _____ א_____ מועד _____ א
תאריך בחינה : _____ י"ח בשבט ה'תשפ"ו _____
משך הבחינה : 2.5 שעות = 150 דקוט

בחינה 4 שאלות, יש לפתרור את כולן. משקל כל שאלה 20 נקודות.

- זכאי הקלות מילואים צרייכים לפתור רק 3 שאלות ; משקל כל שאלה 28 נקודות. ציוני המטלות והמענקים יתווסף לציון הבחינה.

יינתנו 2 נקודות נוספת על כתיבה מסודרת, המוגדרת באופן הבא :

- כל השאלות פתרו במחברת הבחינה לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד ;
- הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשוקשים ומחיקות.

יש לפתרור את כל השאלות במחברת הבחינה.

- אין צורך להעתיק את השאלון למחברת - השאלון יתפרסם באתר הקורס לאחר הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש :

- מחשבון פשוט לחישובים מסוימים בלבד – ללא גրפים, תיכנות, אפליקציות או אינטרנט.
- דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4), כתוב מצד אחד בלבד.
- זכאי הקלות מילואים, וכן זכאי הקלת "דף-נוסחאות מורחב", רשותם לכתוב שני צדי הדף.

הנחיות כלליות :

- יש להסביר כל תשובה בפיירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלת כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסוימות), הניחו את ההנחות הנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלת. הסבירו את ההנחות שלכם.

הנחיות לפתרון שאלות תיקנות :

- יש לטעד את הקוד, ולהסביר היבט בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם נבחנים על האלגוריתמים – ולא על התחריר של שפת פיתון.
- אם אתם לא זוכרים פקודה מסוימת, תכתבו מה שאתם זוכרים, ותסבירו בעברית למה הטענו אתכם.
- אם אתם לא יודעים פיתון בכלל [לא מומלץ], מותר לכתוב בשפת-תיקנות אחרות כלשהי, בתנאי שהאלגוריתם יהיה נכון מפורט ומדויק.

בצלחה!!

שאלה 0. כתיבה מסודרת

יינתנו 2 נקודות על כתיבה מסודרת:

- כל השאלות פתרוות במחברת הבחינה לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד;
- הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשוקשים ומחיקות.

שאלה 0.5. מטלות

[שאלה זו מיועדת להוספת ציוני המטלות והמענקים. אין צורך לענות].

שאלה 1: חלוקה יעילה וללא-קנאה בפייתון

* בכל מקרה יש להסביר בפירות מודיעין הקיים שכתבתם אכן מוצא חילוקה ייעילה-פארטו וללא-קנאה.

```

import cvxpy

def efficient_envy_free_allocation(valuation_matrix):
    """
    Compute a Pareto-efficient and envy-free allocation

    Example:
    >>> efficient_envy_free_allocation([[80, 19, 1], [79, 1, 20]])
    Agent #1 gets:
    0.51 of resource #1
    1.00 of resource #2
    0.00 of resource #3
    Agent #2 gets:
    0.49 of resource #1
    0.00 of resource #2
    1.00 of resource #3
    """
    num_of_agents = len(valuation_matrix)
    num_of_resources = len(valuation_matrix[0])

    # הדרת המשתנים
    input_variables_matrix = [cvxpy.Variable(num_of_resources) for row in valuation_matrix]

    # הדרת ביטויים המייצגים את התוצאות
    utilities = [
        _____א ]
    _____ב

    # הדרת פונקציית המטרה
    objective = _____ג

    # הדרת האילוצים
    constraints_1 = [(input_variables_matrix[i][j] <= 1) for j in range(num_of_resources)
                     for i in range(num_of_agents)]
    constraints_2 = _____ד
    constraints_3 = _____ה

```

```

# פתרון הבעיה
prob = cvxpy.Problem(objective, constraints_1+constraints_2+constraints_3)
prob.solve()

# הצגת הפלט
for i, val in enumerate(input_variables_matrix):
    print(f"Agent #{i + 1} gets:")
    for j, v in enumerate(val.value):
        print(f" {abs(v):.2f} of resource #{j + 1}")

```

שאלה 2: קבוצת רכישה

N אנשים הקימו יחד קבוצת-רכישה וبنו יחד בניין ובו N דירות. הם רוצים לקבוע איזה דירה כל אחד יקבל, וכמה כל אחד ישלם. כמובן יש העדפות קווואזיליניאריות. האילוצים הם:

1. החלוקה צריכה להיות ללא נאה.
2. כל שחקן צריך לקבל סכום גדול או שווה אפס.
3. כל שחקן צריך לקבל דירה אחת בדיוק.
4. בכפוף לאילוצים הקודמים, **סכום התשלומים** שימושיים כל השחקנים צריך להיות קטן ככל האפשר.

א. כתבו אלגוריתם יעיל המוצא השמה ותשלומים בהתאם לדרישות. הוכחו שהאלגוריתם שלו פותר את הבעיה.

ב. הדגימו את האלגוריתם שלו על הקלט הבא:

- דירה: א, ב, ג
- ערכים אברהם: 60, 80, 100
- ערכים בתיה: 75, 90, 70
- ערכים גدعון: 95, 70, 80

שאלה 3: שיטת החלקים השווים – בינה מלאכותית

100 אזרחים מעוניינים לבחור ועדה בגודל 3, בשיטת החלקים השווים. אלה העדפות שלהם:

קבוצה 1 (40 בוחרים): תומכת במועמדים {A, B, C}

קבוצה 2 (25 בוחרים): תומכת במועמדים {D, E}

קבוצה 3 (20 בוחרים): תומכת במועמדים {A, F}

קבוצה 4 (10 בוחרים): תומכת במועמדים {C, G}

קבוצה 5 (5 בוחרים): תומכת במועמדים {E, F, G}

ביקשתי מקלود לפתר את הבעיה, אבל בתשובה שלו נפלו כמה טעויות.

א. מצאו את כל הטעויות בפתרון של קלוד. הסבירו גם מדוע התשובה הסופית שלו לא הגיונית.

ב. חשבו את הפתרון הנכון. פרטו את שלבי החישוב.

התשובה של קלוד [מעט ערוכה]:

אני אשמה לחשב עבורה את הועדה בעזרת שיטת החלקים השווים! אפרט לך את כל שלבי החישוב.

א. שלב הכנה

תקציב לכל בוחר : $100 \div 3 = 33.33$ (שליש מהתקציב הכלול)

הוצאות כל מקום בועדה : $100 \div 3 = 33.33$

בוואו נספר כמה תומכים יש לכל מועמד:

מועמד	תומכים	קבוצות
A	60	קבוצות 1, (40+20)3
B	40	קבוצה 1
C	50	קבוצות 1, (40+10)4
D	25	קבוצה 2
E	30	קבוצות 2, (25+5)5
F	25	קבוצות 3, (20+5)5
G	15	קבוצות 4, (10+5)5

סבב 1

הוצאות לבוחר ($33.33 \div$ מספר תומכים):

מועמד A : $33.33 \div 60 = 0.56$ ★ 33.33 הול ביזטר!

מועמד B : $33.33 \div 40 = 0.83$

מועמד C : $33.33 \div 50 = 0.67$

מועמד D : $33.33 \div 25 = 1.33$

מועמד E : $33.33 \div 30 = 1.11$

מועמד F : $33.33 \div 25 = 1.33$

- $33.33 \div 15 = 2.22$:G
נבחר: A ✓

עדכון תקציבים:
32.77 = 0.56 - 33.33 •
32.77 = 0.56 - 33.33 •

סעיף 2

- הוצאות לבוחר (מועמדים שנותרו):
 $33.33 \div 40 = 0.83$:B •
 $33.33 \div 50 = 0.67$ ★ :C •
 $33.33 \div 25 = 1.33$:D •
 $33.33 \div 30 = 1.11$:E •
 $33.33 \div 25 = 1.33$:F •
 $33.33 \div 15 = 2.22$:G •

נבחר: C ✓

- עדכון תקציבים:
- 32.77 :1 •
32.10 = 0.67 •
32.66 = 0.67 - 33.33 :4 •

סעיף 3

- הוצאות לבוחר (מועמדים שנותרו):
 $33.33 \div 40 = 0.83$ ★ :B הוזל ביותר!
D: $33.33 \div 25 = 1.33$ •
E: $33.33 \div 30 = 1.11$ •
F: $33.33 \div 25 = 1.33$ •
G: $33.33 \div 15 = 2.22$ •

נבחר: B ✓

ההתוצאה הסופית

{A, B, C}:
ניתוח:

- קבוצה 1 (40 בוחרים) - מרצוים מאוד! כל 3 המועמדים שלהם נבחרו
- קבוצה 2 (25 בוחרים) - לא קיבלו ייצוג (D, E, F לא נבחרו)
- קבוצה 3 (20 בוחרים) - קיבלו את A
- קבוצה 4 (10 בוחרים) - קיבלו את C
- קבוצה 5 (5 בוחרים) - לא קיבלו ייצוג

למה זה קרה? קבוצה 1 היא הגדולה ביותר וכל המועמדים שלה זכו לתמיכה רחבה, מה שהוזיל את הוצאות לבוחר.

שאלה 4: שלושה שידוכים יציבים

[נכאי הקלות מילואים לא חייבים לפתרו שאלה זו].

נתונה בעיה של השמת 3 סטודנטים ל-3 מחלקות.

העדפות הסטודנטים:

- ראותן : ביולוגיה > גיאולוגיה > ארכיאולוגיה
- שמעון : גיאולוגיה > ארכיאולוגיה > ביולוגיה
- לוי : ארכיאולוגיה > ביולוגיה > גיאולוגיה

העדפות המחלקות:

- ארכיאולוגיה : ראותן > שמעון > לוי
- ביולוגיה : שמעון > לוי > ראותן
- גיאולוגיה : לוי > ראותן > שמעון

יש מקום אחד בכל מחלקה.

א. מצאו את השידוך הייציב המתקיים באלגוריתם "קבלה על תנאי" כשהסטודנטים מציעים. פרטו את שלבי החישוב.

ב. מצאו את השידוך הייציב המתקיים באלגוריתם "קבלה על תנאי" כשהמחלקות מציעות. פרטו את שלבי החישוב.

ג. מצאו שידוך יציב נוסף, שונה משני הקודמים. הוכיחו בפירותו שהוא אכן יציב (על פ' ההגדרה).