אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה : מדעי הטבע
מחלקה : מדעי המחשב

אלגוריתמים כלכליים – פתרון

קוד הקורס : 2-7062310 קבוצה 1
שם המרצה : אראל סגל-הלוי
שנה ______ה'תשפ"ב______ סמסטר ___א___ מועד __ב__
תאריך בחינה :__י"ט אדר א' ה'תשפ"ב 20/2/2022_____
משך הבחינה : 2.5 שעות = 150 דקות

שאלה 1. עקביות אלגוריתמים לחלוקת מושבים [22 נק']

במדינה מסוימת יש פרלמנט עם 6 מושבים. יש 60 אזרחים ושלוש מפלגות : צפון, מרכז ודרום. בבחירות האחרונות, מספר הקולות שקיבלו היה : צפון - 33, מרכז – 4, דרום – 23.

א. הראו, בדוגמה זו, שאלגוריתם המילטון אינו עקבי עבור המפלגות צפון+מרכז.

פתרון: נריץ את אלגוריתם המילטון על הדוגמה. מספר המושבים המגיע לכל מפלגה הוא : 3.3, 0.4, 2.3. מעגלים למטה ומקבלים 3, 0, 2. השארית הגדולה ביותר היא של מפלגת המרכז, ולכן התוצאה הסופית היא **3, 1, 2**.

עכשיו נריץ שוב את אלגוריתם המילטון, הפעם רק על מפלגת הצפון והמרכז עם המושבים שלהן. כלומר יש לנו עכשיו 4 מושבים ו-37 קולות. מספר המושבים המגיע למפלגת הצפון הוא :

4*33/37 = 132/37 = 3 + 21/37

מספר המושבים המגיע למפלגת המרכז הוא :

4*4/37 = 16/37

החלוקה ללא השאריות היא : 3, 0, השארית הגדולה יותר היא של מפלגת הצפון, ולכן החלוקה הסופית היא **4, 0**.

השיטה אינה עקבית, כי החלוקה הפנימית בין מפלגת הצפון והמרכז בחלוקה הכללית (3, 1), שונה מהחלוקה ביניהן כשרק שתיהן נמצאות (4, 0).

[11 נק']

ב. הראו, בדוגמה זו, שאלגוריתם אדאמס הוא עקבי עבור המפלגות צפון+מרכז (יש להראות ע"י הרצת האלגוריתם ולא ע"י ציטוט המשפט הכללי). *תזכורת* : אלגוריתם אדאמס הוא שיטת-המחלק עם f(s)=s.

פתרון: ראשית נפעיל את אלגוריתם אדאמס על כל שלוש המפלגות. בהתחלה כל המחלקים הם 0, המנה היא אינסוף, ולכן כל מפלגה מקבלת מושב אחד (1, 1, 1). נשארו עוד שלושה מושבים לחלוקה. המחלקים הם :

33/1=33, 4/1=4, 23/1=23 → צפון

33/2=16.5, 4/1=4, 23/1=23 → דרום

$33/2=16.5,\ 4/1=4,\ 23/2=11.5 \rightarrow$ צפון

לכן החלוקה הסופית היא: 3, 1, 2.

עכשיו נפעיל את האלגוריתם עבור צפון+מרכז בלבד – שוב יש לנו 4 מושבים ו-37 קולות. בהתחלה כל מפלגה מקבלת מושב אחד (1, 1). נשארו עוד שני מושבים לחלוקה. המחלקים הם:

$33/1=33,\ 4/1=4 \rightarrow$ צפון

$33/2=16.5,\ 4/1=4 \rightarrow$ צפון

לכן החלוקה הסופית היא: 3, 1 – בדיוק כמו חלוקת המושבים ביניהן כשמריצים על כל שלוש המפלגות.

[11 נק']

שאלה 2. מיקסום תוחלת הרווח עם התפלגות ריבועית [22 נק']

אנחנו מעוניינים למקסם רווח ע"י מכירת חפץ יחיד לקונה יחיד, שהערך האמיתי שלו לחפץ זה מתפלג לפי:

$$F(x) = x^2 \quad [0 \le x \le 1]$$

שימו לב: הערך של הקונה במקרה זה הוא תמיד מספר בין 0 ל-1.

א. חשבו את פונקציית הערך הוירטואלי של הקונה.

פתרון: לפי ההגדרה:

$$r(v) = v - (1-F(v))/F'(v)$$

$$= v - (1-v^2)/(2v)$$

$$= (3v^2-1)/2v$$

[11 נק']

ב. תארו אלגוריתם מגלה-אמת למכירת חפץ יחיד לקונה יחיד עם התפלגות זו; האלגוריתם אמור למקסם את תוחלת הרווח של המוכר.

פתרון: לפי משפט מאירסון, תוחלת הרווח של המוכר שווה לתוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הזוכים. לכן הקונה צריך לזכות בחפץ אם ורק אם הערך הוירטואלי שלו גדול מאפס. לפי זה אפשר לחשב את ערך הסף:

$$(3v^2-1)/2v > 0$$

$$v^2 > 1/3$$

```
v > 1/sqrt(3)
```

לכן האלגוריתם הוא: "הקונה מקבל את החפץ אם-ורק-אם ערכו גדול מ 1 חלקי שורש 3, ובמקרה זה הוא משלם 1 חלקי שורש 3".

[11 נק']

שאלה 3. החלפת חדרים עם אדישות [22 נק'].

שישה סטודנטים משובצים לחדרים שונים במעונות. סטודנט א כרגע גר בחדר א, סטודנט ב בחדר ב, וכו'. הסטודנטים רוצים להתחלף ביניהם בעזרת אלגוריתם סבן-סתורמן להחלפת חדרים עם אדישות. הטבלה הבאה מתארת את הערך שכל סטודנט מייחס לכל חדר (ערך גבוה יותר = הסטודנט רוצה יותר את החדר).

	חדר א	**חדר ב**	**חדר ג**	**חדר ד**	**חדר ה**	**חדר ו**
סטודנט א	10	8	10	6	3	3
סטודנט ב	10	10	7	10	2	1
סטודנט ג	5	7	10	1	10	1
סטודנט ד	2	13	20	15	8	4
סטודנט ה	10	7	5	4	1	10
סטודנט ו	1	20	12	5	8	1

א. ציירו את הגרף המכוון הנוצר בשלב הראשון של האלגוריתם מתוך הטבלה הנ"ל.

פתרון: בשלב הראשון, יש חשיבות רק לחדרים שכל סטודנט רוצה בעדיפות ראשונה (החדרים עם ציון 10 או 20). לכן הגרף כולל את הקשתות הבאות:

- א ← א, ג
- ב ← א, ב, ד
- ג ← ג, ה
- ד ← ג
- ה ← א, ו
- ו ← ב

[7 נק']

ב. מצאו את כל רכיבי הקשירות החזקים בגרף, ואת כל רכיבי הקשירות החזקים *הסופיים* בגרף.

פתרון:
- יש מסלול מכוון מכל צומת בגרף לכל צומת אחר בגרף. לכן, כל הגרף הוא רכיב קשירות חזק יחיד.
- הרכיב היחיד הנ"ל אינו סופי, כי לא לכל צומת יש קשת עצמית. לכן אין בכלל רכיבי-קשירות-חזקים סופיים.

[7 נק']

ג. מהו מעגל-ההחלפה הראשון שמבצע האלגוריתם? הסבירו.
פתרון: צריך לבחור, עבור כל שחקן עם שתי קשתות יוצאות או יותר, קשת *אחת* בהתאם לכלל סבן-סתורמן:

- עבור כל שחקן שמקנא (= בלי קשת עצמית), בוחרים קשת המצביעה לבית עם מספר סידורי קטן ביותר. במקרה שלנו יש שלושה שחקנים מקנאים: ד, ה, ו. נבחר עבורם: ד←ג, ה←א, ו←ב.
- עבור כל שחקן שעדיין אינו "מסודר", שהוא שכן של שחקן "מסודר", נבחר קשת מכוונת אל שחקן מסודר. במקרה שלנו יש שני שחקנים כאלה: ב, ג. נבחר עבורם: ב←ד, ג←ה.
- נשאר עוד שחקן אחד שאינו מסודר – שחקן א. נבחר עבורו קשת המכוונת אל שחקן מסודר: א←ג.

הגרף שנוצר הוא:

- א ← ג
- ב ← ד
- ג ← ה
- ד ← ג
- ה ← א
- ו ← ב

יש מעגל-החלפה אחד: א-ג-ה, ולכן זה המעגל הראשון שיתבצע.

[8 נק׳]

שאלה 4. תקציב הוגן בפייתון [22 נק'].

בעיירה קטנה פועלות ארבע עמותות: הירוקים, האדומים, הצהובים והכחולים. ישנם ארבעה אזרחים. התקציב הכולל הוא 4000. האזרחים מעוניינים לחלק את התקציב בין העמותות בעזרת אלגוריתם שהוא גם *יעיל פארטו* וגם *הוגן לקבוצות*. העדפות האזרחים הן:

- אזרח 0: תומך בירוקים ובאדומים.
- אזרח 1: תומך באדומים ובצהובים.
- אזרח 2: תומך בצהובים ובכחולים.
- אזרח 3: תומך באדומים, בצהובים ובכחולים.

התועלת של כל אזרח שווה לסכום הכולל המועבר לעמותות שהוא תומך בהן.

כיתבו קוד המוצא את התקציב הרצוי. העזרו בקוד הבא:

```
import cvxpy

TOTAL_BUDGET=4000
budget_for_greens  = cvxpy.Variable()  # התקציב הכולל שיש לתת לעמותת ה״ירוקים״
budget_for_reds    = cvxpy.Variable()
budget_for_yellows = cvxpy.Variable()
budget_for_blues   = cvxpy.Variable()
```

```
### 1
________________________________________________________________________
________________________________________________________________________
________________________________________________________________________

problem = cvxpy.Problem(
  ### 2
  ___________________________________________________
  constraints =
      ### 3
      _______________________________________________
      _______________________________________________
      _______________________________________________
      _______________________________________________
      _______________________________________________
)
problem.solve()

print(f"budgets: greens={budget_for_greens.value},
reds={budget_for_reds.value}, yellows={budget_for_yellows.value},
blues={budget_for_blues.value}")
```

א. ציינו במחברת הבחינה את הקוד שיש לכתוב בקוים הריקים 1, 2, 3. נמקו את תשובתכם – הסבירו מדוע הפתרון שלכם אכן מוצא תקציב יעיל-פארטו והוגן לקבוצות.

פתרון. למדנו שאלגוריתם נאש – מיקסום סכום הלוגריתמים - הוא יעיל פארטו וגם הוגן לקבוצות. התוכנית הבאה מוצאת תקציב הממקסם את סכום הלוגריתמים:

```
import cvxpy

TOTAL_BUDGET=4000
budget_for_greens  = cvxpy.Variable()
budget_for_reds    = cvxpy.Variable()
budget_for_yellows = cvxpy.Variable()
budget_for_blues   = cvxpy.Variable()

utilities = [
    budget_for_greens+budget_for_reds,   # citizen 0
    budget_for_reds+budget_for_yellows,   # citizen 1
    budget_for_yellows+budget_for_blues,   # citizen 2
    budget_for_reds+budget_for_yellows+budget_for_blues,   # citizen 3
```

]

```
budgets = [budget_for_greens, budget_for_reds, budget_for_yellows,
budget_for_blues]
problem = cvxpy.Problem(
    cvxpy.Maximize(cvxpy.sum([cvxpy.log(u) for u in utilities])),
    constraints =
        [v >= 0 for v in budgets] +
        [cvxpy.sum(budgets)==TOTAL_BUDGET]
        )
problem.solve()

print(f"budgets: greens={budget_for_greens.value}, reds={budget_for_reds.value},
yellows={budget_for_yellows.value}, blues={budget_for_blues.value}")
```

[15 נק' = 5+5+5]

ב. נתונים שלושה תקציבים אפשריים:

1. ירוקים 0, אדומים 2000, צהובים 2000, כחולים 0.
2. ירוקים 1000, אדומים 1000, צהובים 1000, כחולים 1000.
3. ירוקים 2000, אדומים 0, צהובים 0, כחולים 2000.

מבין התקציבים הנ״ל, שניים מהם הוגנים ליחידים (Individual Fair Share), ואחד לא. הסבירו איזה תקציבים הוגנים ליחידים ומדוע, ואיזה תקציב *אינו* הוגן ליחידים ומדוע.

פתרון. תקציב הוגן ליחידים הוא תקציב שבו התועלת של כל אזרח (= סכום התקציב המועבר לעמותות שהוא תומך בהן) הוא לפחות התקציב הכולל חלקי מספר האזרחים – במקרה שלנו 1000. נבדוק את התועלות של כל האזרחים בתקציבים הנתונים:

- הראשון: 2000, 4000, 2000, 4000 – הוגן ליחידים.
- השני: 2000, 2000, 2000, 3000 – הוגן ליחידים.
- השלישי: 2000, 0, 2000, 2000 – לא הוגן ליחידים – יש אזרח עם תועלת 0.

[7 נק']