

אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה : מדעי הטבע
מחלקה : מדעי המחשב

אלגוריתמים כלכליים

קוד הקורס : 7062310-2 קבוצה 1
שם המרצה : אראל סגל-הלו
שנה _____ ה'תשפ"ד _____ סטודנט _____ א_____ מועד _____ א_____
תאריך בחינה : 5/2/2026 י"ח בשבט ה'תשפ"ו
משך הבחינה : 2.5 שעות = 150 דקוט

בחינה 4 שאלות, יש לפתרור את כולן. משקל כל שאלה 20 נקודות.

- זכאי הקלות מילואים יפתרו 3 שאלות בלבד ; משקל כל שאלה 28 נקודות. ציוני המטלות והמענקים יתווסף לציון הבחינה.

יינתנו 2 נקודות נוספת על כתיבה מסודרת, המוגדרת באופן הבא :

- כל השאלות פתרו במחברת הבחינה לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד ;
- הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשוקשים ומחיקות.

יש לפתרור את כל השאלות במחברת הבחינה.

- אין צורך להעתיק את השאלון למחברת - השאלון יתפרסם באתר הקורס לאחר הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש :

- מחשבון פשוט לחישובים מסוימים בלבד – ללא גրפים, תיכנות, אפליקציות או אינטרנט.
- דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4), כתוב מצד אחד בלבד.
- זכאי הקלות מילואים, וכן זכאי הקלת "דף-נוסחאות מורחב", רשותם לכתוב שני צדי הדף.

הנחיות כלליות :

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלת כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרו הנחות מסוימות), הניחו את ההנחות הנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלת. הסבירו את ההנחות שלכם.

הנחיות לפתרון שאלות תיקנות :

- יש לטעד את הקוד, ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם נבחנים על האלגוריתמים – ולא על התחריר של שפת פיתון.
- אם אתם לא זוכרים פקודה מסוימת, תכתבו מה שאתם זוכרים, ותסבירו בעברית למה הטענו אתכם.
- אם אתם לא יודעים פיתון בכלל [לא מומלץ], מותר לכתוב בשפת-תיקנות אחרות כלשהי, בתנאי שהאלגוריתם יהיה נכון מפורט ומדויק.

בצלחה!!

שאלה 0. כתיבה מסודרת

יינתנו 2 נקודות על כתיבה מסודרת:

- כל השאלות פתרוות במחברת הבחינה לפי הסדר, כל שאלה בעמוד נפרד;
- הכתב ברור וקריא, ללא חיצים קשוקשים ומחיקות.

שאלה 0.5. מטלות

[שאלה זו מיועדת להוספת ציוני המטלות והמענקים. אין צורך לענות].

שאלה 1: חלוקה יעילה וללא-קנאה בפייתון

* בכל מקרה יש להסביר בפירות מודיעין הקוד שכתבתם אכן מוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא-קנאה.

```

import cvxpy

def efficient_envy_free_allocation(valuation_matrix):
    """
    Compute a Pareto-efficient and envy-free allocation
    Example:
    >>> efficient_envy_free_allocation([[80, 19, 1], [79, 1, 20]])
    Agent #1 gets:
    0.51 of resource #1
    1.00 of resource #2
    0.00 of resource #3
    Agent #2 gets:
    0.49 of resource #1
    0.00 of resource #2
    1.00 of resource #3
    """
    num_of_agents = len(valuation_matrix)
    num_of_resources = len(valuation_matrix[0])

    # הדרת המשתנים
    input_variables_matrix = [cvxpy.Variable(num_of_resources) for row in valuation_matrix]

    # הדרת ביטויים המייצגים את התוצאות
    utilities = [
        _____א ]
    objective = _____ב

    # הדרת פונקציית המטרה
    constraints_1 = [(input_variables_matrix[i][j] <= 1) for j in range(num_of_resources)
                     for i in range(num_of_agents)]
    constraints_2 = _____ג
    constraints_3 = _____ד

```

```

# פתרון הבעיה
prob = cvxpy.Problem(objective, constraints_1+constraints_2+constraints_3)
prob.solve()

# הצגת הפלט
for i, val in enumerate(input_variables_matrix):
    print(f"Agent #{i + 1} gets:")
    for j, v in enumerate(val.value):
        print(f" {abs(v):.2f} of resource #{j + 1}")

```

פתרון: יש למצוא השמה הממקסמת את סכום הלוגריתמים של התוצאות, בהינתן האילוצים על החלוקה.

```

# הגדרת ביטויים המייצגים את התוצאות
utilities = [
    sum(input_variables_matrix[i][j]*valuation_matrix[i][j]
        for j in range(num_of_resources))
        for i in range(num_of_agents)
]

# הגדרת פונקציית המטרה
objective = cvxpy.Maximize(
    sum(cvxpy.log(u) for u in utilities)
)

# הגדרת האילוצים
constraints_1 = [(input_variables_matrix[i][j]<=1) for j in range(num_of_resources)
                  for i in range(num_of_agents)]
constraints_2 = [(input_variables_matrix[i][j]>=0) for j in range(num_of_resources)
                  for i in range(num_of_agents)]
constraints_3 = [(sum(input_variables_matrix[i][j] for i in range(num_of_agents))<=1)
                  for j in range(num_of_resources)]

```

שאלה 2: קבוצת רכישה

N אנשים הקיימו יחד קבוצת-רכישה ובנו יחד בניין ובו N דירות. הם רוצים לקבועו איזה דירה כל אחד יקבל, וכמה כל אחד ישלם. לכולם יש העדפות קוואזיליניאריות. האילוצים הם:

1. החלוקה צריכה להיות ללא קנאה.

2. כל שחקן צריך לשלם סכום גדול או שווה אפס.

3. כל שחקן צריך לקבל דירה אחת בדיק.

4. בכפוף לאיולוצים הקודמים, סכום התשלומים שמשלמים כל השחקנים צריך להיות קטן ככל האפשר.

A. כתבו אלגוריתםיעיל המוצא השמה ותשלומים בהתאם לדרישות. הוכחו שהאלגוריתם שלו פותר את הבעיה.

פתרון:

צעד A. מצא השמה הממקסמת סכום ערכיהם, ע"י חישוב שידוך משקל מקסימום בגרף דו-צדדי המתאים. [נימוק: לפי משפט שהוכח בהרצאה, קיים ת מהור שאיתו ההשמה ללא קנאה אם ורק אם ההשמה ממקסמת סכום ערכיהם].

צעד B. מצא את התשלומים בעזרת התוכנית הליניארית הבאה, כאשר $a[i]$ הוא התשלום של שחקן i, $p[i]$ היא הדירה של שחקן i, ו- $v[i]$ היא מטריצת הערכים:

Minimize(sum[i=1..N] p[i])

Subject to:

$$p[i] \geq 0 \quad \text{for all } i \text{ in } 1, \dots, N \quad // \text{ איולוצי תשלומים גדולים או שווים אפס}$$
$$v[i, a[i]] - p[i] \geq v[i, a[j]] - p[j] \quad \text{for all } i, j \text{ in } 1, \dots, N \quad // \text{ איולוצי חלוקה ללא קנאה}$$

B. הדגימו את האלגוריתם שלו על הקלט הבא:

- דירה: א, ב, ג
- ערכם אברהם: 60, 80, 100
- ערכם ביתה: 75, 90, 70
- ערכם גدعון: 95, 70, 80

פתרון:

צעד A. מצא השמה הממקסמת סכום ערכיהם: קל לראות שהשמה באלכסון ממקסמת סכום ערכיהם, כי כל שחקן מקבל את הדירה שהוא心仪的 – א, ביתה – ב, גدعון – ג.

צעד B. גם כשאף אחד לא משלם שום דבר, כבר אין קנאה, כי כל אחד מקבל את הדירה שהוא心仪的 – ב. לכן הפתרון שבו סכום התשלומים קטן ביותר הוא $= 0$ לכל i.

שאלה 3: שיטת החלקים השווים – בינה מלאכותית

100 אזרחים מעוניינים לבחור בעיה בגודל 3 בשיטת החלקים השווים. אלה ההעדפות שלהם:

קבוצה 1 (40 בוחרים): תומכת במועדים {A, B, C}

קבוצה 2 (25 בוחרים): תומכת במועדים {D, E}

קבוצה 3 (20 בוחרים): תומכת במועדים {A, F}

קבוצה 4 (10 בוחרים): תומכת במועדים {C, G}

קבוצה 5 (5 בוחרים): תומכת במועדים {E, F, G}

ביקשתי מקלود לפתר את הבעיה, אבל בתשובה שלו נפלו כמה טעויות.

א. מצאו את כל הטעויות.

ב. חשבו את הפתרון הנכון.

התשובה של קלוד [מעט ערוכה]:

אני אשמה לחשב עבורך את הוועדה בעזרת שיטת החלקים השווים! אפרט לכך את כל שלבי החישוב.

א. **שלב הכנה**

תקציב לכל בוחר : $100 \div 3 = 33.33$ (שליש מהתקציב הכלול)

עלות כל מקום בוועדה : $100 \div 3 = 33.33$

בוואו נספר כמה תומכים יש לכל מועמד:

\Queue	תומכים	מועמד	קבוצות
A	60	(40+20)3 , 1	קבוצות 1
B	40		קבוצת 2
C	50	(40+10)4 , 1	קבוצות 3
D	25		קבוצת 4
E	30	(25+5)5 , 2	קבוצת 5
F	25	(20+5)5 , 3	
G	15	(10+5)5 , 4	

סבב 1

עלות לבוחר ($33.33 \div \text{מספר תומכים}$):

• מועמד A : $33.33 \div 60 = 0.56$ ★ 33.33 הול ביזה!

• מועמד B : $33.33 \div 40 = 0.83$

• מועמד C : $33.33 \div 50 = 0.67$

• מועמד D : $33.33 \div 25 = 1.33$

• מועמד E : $33.33 \div 30 = 1.11$

• מועמד F : $33.33 \div 25 = 1.33$

• מועמד G : $33.33 \div 15 = 2.22$

נבחר: A ✓

עדכון תקציבים:

- קבוצה 1 : $32.77 = 0.56 - 33.33$
- קבוצה 3 : $32.77 = 0.56 - 33.33$

סעיף 2

הוצאות לבוחר (מועמדים שנותרו):

- $33.33 \div 40 = 0.83$: B
- $33.33 \div 50 = 0.67$ ★ : C
- $33.33 \div 25 = 1.33$: D
- $33.33 \div 30 = 1.11$: E
- $33.33 \div 25 = 1.33$: F
- $33.33 \div 15 = 2.22$: G

נבחר: C ✓

עדכון תקציבים:

- קבוצה 1 : $- 32.77$
- **32.10** = 0.67
- **32.66** = 0.67 - 33.33 : 4

סעיף 3

הוצאות לבוחר (מועמדים שנותרו):

- $33.33 \div 40 = 0.83$ ★
- D: $33.33 \div 25 = 1.33$
- E: $33.33 \div 30 = 1.11$
- F: $33.33 \div 25 = 1.33$
- G: $33.33 \div 15 = 2.22$

נבחר: B ✓

התוצאה הסופית

: {A, B, C}

ניתוח:

- **קבוצה 1** (40 בוחרים) - מרווחים מאוד! כל 3 המועמדים שלהם נבחרו
- **קבוצה 2** (25 בוחרים) - לא קיבלו ייצוג (D, E, F, G לא נבחרו)
- **קבוצה 3** (20 בוחרים) - קיבלו את A
- **קבוצה 4** (10 בוחרים) - קיבלו את C
- **קבוצה 5** (5 בוחרים) - לא קיבלו ייצוג

למה זה קרה? קבוצה 1 היא הגדולה ביותר וכל המועמדים שלה זכו לתמיכה רחבה, מה שהוזיל את הוצאות לבוחר.

פתרון:

א. קלוד טעה בחישוב התקציב לכל בוחר (צריך להיות גודל הועזה חלקית מספר הבוחרים – כולם 0.03), וכן בחישוב הוצאות של כל מועמד (צריכה להיות 1). לכן גם התוצאה שהתקבל היא לא הוגנת בכלל: הקבוצה הגדולה ביותר בוחרה את כל המועמדים, כי התקציב שלהם לא נגמר.

ב. הפתרון הנכון התקבל אחרי שהסבירתי你怎么令我得到正确的答案呢？

אתה צודק להלוטין! אתה את ההישוב.

פתרון מתוקן - שיטת החלקים השווים

שלב הכנה

תקציב לכל בוחר: $3/100 = 0.03$

עלות כל מקום בוועדה 1 :

ספרת תומכים לכל מועמד (כמו קודם):

תומכים מועמד

- A 60
- B 40
- C 50
- D 25
- E 30
- F 25
- G 15

1 סבב

עלות לבוחר $\div (1 \div \text{מספר תומכים})$:

A: $1 \div 60 = 0.0167$ ★ • הוזל ביותר!

B: $1 \div 40 = 0.025$ •

C: $1 \div 50 = 0.02$ •

D: $1 \div 25 = 0.04$ •

E: $1 \div 30 = 0.0333$ •

F: $1 \div 25 = 0.04$ •

G: $1 \div 15 = 0.0667$ •

כולם מתחת לתקציב 0.03? רק A ו-C! ($0.0167 < 0.03$ ו- $0.02 < 0.03$)

(נבחר) A: הוזל מבין השניים)

עדכון תקציבים:

- קבוצה 1: $0.01330.0167 - 0.03 = 0.01330.0167 - 0.03$
 - קבוצה 3: $0.01330.0167 - 0.03 = 0.01330.0167 - 0.03$
-

סעיף 2

בודקים מי יכול להרשות לעצמו:

- קבוצה 1: ציריך 40 בוחרים עם תקציב מלא של 0.03 ($1 \div 40 = 0.025$)
 < 0.025 ✗
- קבוצה 1: יש רק 40 בוחרים עם תקציב 0.0133
 $C: 1 \div 50 = 0.02$
- קבוצה 1: 40 בוחרים $\times 0.0133 = 0.532$
- קבוצה 4: 10 בוחרים $\times 0.03 = 0.3$
- סה"כ: < 1 ✗ **0.832**
- $D: 1 \div 25 = 0.04$
- קבוצה 2: $0.75 = 0.03 \times 25$
- $E: 1 \div 30 = 0.0333$
- קבוצה 2: $0.75 = 0.03 \times 25$
- קבוצה 5: $0.15 = 0.03 \times 5$
- סה"כ: < 1 ✗ **0.9**
- $F: 1 \div 25 = 0.04$
- קבוצה 3: $0.266 = 0.0133 \times 20$
- קבוצה 5: $0.15 = 0.03 \times 5$
- סה"כ: < 1 ✗ **0.416**
- $G: 1 \div 15 = 0.0667$
- אף קבוצה לא יכולה להרשות ✗

אף מועמד לא יכול להיבחר !

התוצאה

הוועדה - {A}: רק חבר אחד במקום 3!

מה קרה? התקציב של 0.03 לבוחר נמור מדי. אחרי שקבעות 1 ו-3 שלמו עבור A, לא נשאר להן מספיק תקציב למן מועמדים נוספים, והקבוצות האחרות קטנות מדי.

שאלה 4: שלושה שידוכים יציבים

[זכאי הקלות מילואים לא חייבים לפתרו שאלה זו].

נתונה בעיה של השמת 3 סטודנטים ל-3 מחלקות.

העדפות הסטודנטים:

- ראובן : ביולוגיה > גיאולוגיה > ארכיאולוגיה
- שמעון : גיאולוגיה > ארכיאולוגיה > ביולוגיה
- לוי : ארכיאולוגיה > ביולוגיה > גיאולוגיה

העדפות המחלקות:

- ארץיאולוגיה : ראוּבָן > שְׁמַעֲוִן > לוּי
- ביולוגיה : שְׁמַעֲוִן > לוּי > ראוּבָן
- גיאולוגיה : לוּי > ראוּבָן > שְׁמַעֲוִן

יש מקום אחד בכל מחלקה.

א. מצאו את השידוך הייציב המתאים באלגוריתם "קיבלה על תנאי" כשהסטודנטים מציעים. פרטו את שלבי החישוב.

ב. מצאו את השידוך הייציב המתאים באלגוריתם "קיבלה על תנאי" כשהמחלקות מציעות. פרטו את שלבי החישוב.

ג. מצאו שידוך יציב נוסף, שונה משני הקודמים. הוכיחו בפירוט שהוא אכן יציב (ע"פ ההגדרה).

פתרונות:

א. כשהסטודנטים מציעים, ראוּבָן הולך לביולוגיה, שְׁמַעֲוִן הולך לגיאולוגיה, ולוּי הולך לארכיאולוגיה. אף מחלוקת לא מקבלת יותר מסטודנט אחד, ולכן אף מחלוקת לא דוחה אף סטודנט, והאלגוריתם מסתיים כאן.

ב. כשהמחלקות מציעות, ארכיאולוגיה מציעה לראוּבָן, ביולוגיה לשְׁמַעֲוִן, וגיאולוגיה ללוּי, והאלגוריתם מסתיים בזאת.

ג. ראוּבָן – גיאולוגיה, שְׁמַעֲוִן – ארכיאולוגיה, לוּי – ביולוגיה.

כדי להוכיח שהשידוך יציב, נבדוק את כל ששת הזוגות הלא-משודכנים, ונראה שאין זוג מעורער:

- ראובן – ביולוגיה: המחלוקת לא רוצחה. ראוּבָן – ארכיאולוגיה: ראוּבָן לא רוצה.
- שמעון – גיאולוגיה: המחלוקת לא רוצחה. שְׁמַעֲוִן – ביולוגיה: שְׁמַעֲוִן לא רוצה.
- לוּי – ארכיאולוגיה: המחלוקת לא רוצחה. לוּי – גיאולוגיה: לוּי לא רוצה.