אוניברסיטת אריאל בשומרון
פקולטה : מדעי הטבע
מחלקה : מדעי המחשב

אלגוריתמים כלכליים

קוד הקורס : 2-7062310 קבוצה 1
שם המרצה : אראל סגל-הלוי
שנה ______ה'תשפ"ג_______ סמסטר ___א___ מועד __ב__
תאריך בחינה : __ח' אדר ה'תשפ"ב 1/3/2022_____
משך הבחינה : 2.5 שעות = 150 דקות

בבחינה 4 שאלות. משקל כל שאלה 22 נקודות. ציוני המטלות והמענקים יתווספו לציון הבחינה.

יש לפתור את כל השאלות במחברת הבחינה.

- אין להעתיק את השאלון למחברת - השאלון יתפרסם באתר הקורס לאחר הבחינה.

חומר עזר מותר בשימוש : דף-נוסחאות אישי בגודל פוליו (A4). אפשר לכתוב משני צדי הדף.

הנחיות לפתרון שאלות תיכנות :

- יש לתעד את הקוד, ולהסביר היטב בעברית מה עושה כל שורה ואיך זה מתאים לאלגוריתם.
- אתם נבחנים על האלגוריתמים – ולא על התחביר של שפת פייתון.
- אם אתם לא זוכרים פקודה מסוימת, תכתבו מה שאתם זוכרים, ותסבירו בעברית למה התכוונתם.
- אם אתם לא יודעים פייתון בכלל [לא מומלץ], מותר לכתוב בשפת-תיכנות אחרת כלשהי, בתנאי שהאלגוריתם יהיה נכון מפורט ומדויק.

הנחיות כלליות :

- יש להסביר כל תשובה בפירוט. ניקוד מלא יינתן רק על תשובה נכונה עם הסבר נכון.
- אם נראה לכם ששאלה כלשהי אינה מוגדרת עד הסוף (חסרות הנחות מסויימות), הניחו את ההנחות הנראות בעיניכם הגיוניות ביותר בהתאם לשאלה. הסבירו את ההנחות שלכם.

בהצלחה!!

שאלה 1. חלוקת מושבים בפייתון [22 נק']

א. כתבו פונקציה בפייתון, המחשבת את חלוקת המושבים בכנסת או בפרלמנט אחר כלשהו, לפי שיטת וובסטר (שיטת המחלק עם מחלק s+1/2). כותרת הפונקציה:

```
def webster(total_seats: int, votes: List[int]) -> List[int]:
```

הפונקציה מקבלת את מספר המושבים הכולל בפרלמנט (total_seats), ורשימה המציינת לכל מפלגה כמה קולות היא קיבלה. הפונקציה מחזירה רשימה המציינת לכל מפלגה כמה מושבים היא קיבלה. לדוגמה:

```
>>> webster(6, [105, 210])
[2, 4]
```

הסבר: מפלגה א קיבלה 105 קולות ומפלגה ב קיבלה 210 קולות; כשיש 6 מושבים בסה"כ, שיטת וובסטר תיתן 2 מושבים למפלגה א ו-4 מושבים למפלגה ב.

פתרון אפשרי [15 נק']:

```
def webster(total_seats: int, votes: List[int]) -> List[int]:
     numparties = len(votes)
     seats = [0 for i in range(numparties)]  # אתחול
     for i in range(total_seats):     # מתן המושב הבא
          quotients = [votes[i]/(seats[i]+1/2)
                          for i in range(numparties)]
          nextparty = max(range(numparties), key=lambda i:quotients[i])
          seats[nextparty] += 1
     return seats
```

ב. פרטו את שלבי הפעולה של הפונקציה שלכם על הקלט בסעיף א; כתבו את ערכי המשתנים בקוד בכל סיבוב (המספרים נבחרו כך שכל החישובים יהיו במספרים שלמים).

פתרון [7 נק']:

- אתחול – מספר המושבים הוא **0,0**.
- בסיבוב הראשון, המנות הן 210, 420 (מחלקים את מספרי הקולות ב 1/2). המנה של מפלגה ב גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא **0, 1**.
- בסיבוב השני, המנות הן 210 למפלגה א, ו 140 = 210/(3/2) למפלגה ב. המנה של מפלגה א גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא **1, 1**.

- בסיבוב השלישי, המנות הן 70 = 105/(3/2) למפלגה א, ו 140 = 210/(3/2) למפלגה ב. המנה של מפלגה ב גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא **1, 2.**
- בסיבוב הרביעי, המנות הן 70 = 105/(3/2) למפלגה א, ו 84 = 210/(5/2) למפלגה ב. המנה של מפלגה ב גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא **1, 3.**
- בסיבוב החמישי, המנות הן 70 = 105/(3/2) למפלגה א, ו 60 = 210/(7/2) למפלגה ב. המנה של מפלגה א גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הוא **2, 3.**
- בסיבוב השישי, המנות הן 42 = 105/(5/2) למפלגה א, ו-60 למפלגה ב. המנה של מפלגה ב גדולה יותר והיא מקבלת מושב. מספר המושבים הסופי הוא **2, 4.**

שאלה 2. חלוקה אגליטרית עם כללי גיזום [22 נק']

נתונה בעיית חלוקה אגליטרית של ארבעה חפצים בין שלושה שחקנים עם הערכות **זהות**. ערכי החפצים בעיני כל השחקנים הם: 10, 30, 40, 20.

הדגימו את אלגוריתם החיפוש במרחב המצבים עם שני סוגי כללי-הגיזום שנלמדו בקורס (גיזום מצבים זהים, וגיזום לפי חסמים).

תארו את המצב ההתחלתי ואת כל המצבים הנוצרים במהלך הביצוע, כאשר סדר החפצים הוא: **10, 30, 40, 20**.

פרטו את אופן החישוב של החסמים, של כללי הגיזום, ושל התוצאה הסופית.

רמזים שיחסכו לכם זמן:

- בגיזום מצבים זהים, היעזרו בעובדה שההערכות זהות.
- בגיזום לפי חסמים, חשבו את החסם הפסימי בעזרת אלגוריתם תיזמון רשימה.
- בפתרון שלי נוצרו בסך-הכל **16** מצבים, בכל הסיבובים יחד, כולל המצב ההתחלתי והמצבים הסופיים.

פתרון:

- המצב ההתחלתי הוא 0;0,0,0. ניתן להשתמש באלגוריתם תיזמון רשימה כדי לחשב חסם פסימי. מתקבלת חלוקה עם ערכים 30, 30, 40, ולכן החסם הפסימי הוא **30**.
- בסיבוב ראשון נבדוק את כל האפשרויות לחלוקת החפץ 10. נוצרים שלושה מצבים: 1;10,0,0 ו 1;0,10,0 ו 1;0,0,10 . כיוון שההערכות **זהות**, כל המצבים האלה למעשה זהים, ולאחר גיזום נשאר רק מצב אחד: **1;10,0,0**.
  - החסם האופטימי מתקבל ע"י חלוקת כל החפצים הנותרים לכולם – יוצא **90**. החסם הפסימי מתקבל ע"י האלגוריתם החמדני – שוב יוצא **30**. החסם האופטימי גדול מהפסימי, ולכן לא גוזמים.
- בסיבוב שני נבדוק את כל האפשרויות לחלוקת החפץ 30. נוצרים שלושה מצבים: 2;40,0,0 או 2;10,30,0 או 2;10,0,30. שני המצבים האחרונים זהים; נגזום אחד מהם ונישאר עם שני מצבים: **2;40,0,0** ו **2;10,30,0**. בשני המצבים, החסם האופטימי הוא **60** שהוא גדול מהחסם הפסימי, ולכן לא גוזמים.
- בסיבוב שלישי נבדוק את כל האפשרויות לחלוקת החפץ 40. מהמצב 2;40,0,0 נוצרים שלושה מצבים, מתוכם רק שניים שונים: **3;80,0,0** ו **3;40,40,0**. מהמצב 2;10,30,0 נוצרים שלושה מצבים, שלושתם שונים: **3;50,30,0** ו **3;10,70,0** ו **3;10,30,40**.
  - החסם האופטימי מתקבל ע"י חלוקת החפץ הנותר – שערכו 20 – לכל השחקנים. מבין חמשת המצבים השונים שנוצרו, בארבעה מהם החסם האופטימי הוא 20, שהוא קטן מהחסם הפסימי של 30 שכבר מצאנו. לכן נגזום את כל המצבים פרט למצב האחרון: **3;10,30,40**.
- בסיבוב רביעי נבדוק את כל האפשרויות לחלוקת החפץ 20. נוצרים שלושה מצבים: 4;30,30,40 ו 4;10,50,40 ו 4;10,30,60. הערך האגליטרי הגדול ביותר מתקבל עבור המצב הראשון, ולכן זו החלוקה שתוחזר – הערך האגליטרי הוא **30**.

שאלה 3: חלוקת שכר דירה בעזרת ויקרי-קלארק-גרובס [22 נק']

נתונה דירה עם שלושה חדרים, שיש לחלק בין שלושה דיירים, כך שכל דייר יקבל חדר אחד בדיוק. הערכות הדיירים הן:

- חדר: מרתף, סלון, מטבח
- דייר א: 40, 50, **80**
- דייר ב: 70, **40**, 30
- דייר ג: **90**, 20, 50

תארו את תהליך החלוקה בעזרת אלגוריתם **ויקרי-קלארק-גרובס**. פרטו את כל שלבי החישוב.

פתרון (תודה לעינב):

א [7 נק']. האפשרות הנבחרת היא האפשרות הממקסמת את סכום הערכים. ניתן לבדוק את 3! = 6 האפשרויות, ולראות שהאפשרות שבה סכום הערכים גבוה ביותר היא: א-מטבח, ב-סלון, ג-מרתף. סכום הערכים הוא **40+80+90=210**.

ב [15 נק']. כדי לחשב את התשלומים, צריך לחשב עבור כל אחד מהשחקנים את סכום הערכים כשהוא לא נמצא:

- עבור שחקן א: גם בלעדיו, השידוך הממקסם את סכום הערכים של האחרים הוא עדיין ב-סלון, ג-מרתף. סכום הערכים של האחרים נשאר 130, ולכן שחקן א משלם **0**.
- עבור שחקן ב: כנ"ל: בלעדיו, השידוך הממקסם את סכום הערכים של האחרים הוא עדיין א-מטבח, ג-מרתף. סכום הערכים של האחרים נשאר 170, ולכן שחקן ב משלם **0**.
- עבור שחקן ג: בלעדיו, השידוך הממקסם את סכום הערכים של האחרים הוא א-מטבח, ב-מרתף. סכום הערכים של האחרים הוא 150. אבל עם שחקן ג, סכום הערכים של האחרים הוא 120. לכן שחקן ג משלם **30**.

שאלה 4: החלפת כליות עם עדיפות [22 נק']

מרכז להחלפת כליות מעוניין לבצע החלפה בזוגות בלבד. לכל אחד מהחולים יש עדיפות; צריך למצוא החלפת-כליות שבה כמה שיותר חולים בעדיפות ראשונה מקבלים כליה; בכפוף לזה, כמה שיותר חולים בעדיפות שניה מקבלים כליה; וכן הלאה.

א. תארו אלגוריתם כללי הפותר את הבעיה בזמן פולינומיאלי. כתבו פסאודו-קוד מפורט ומדויק של האלגוריתם (אפשר בפייתון). הוכיחו שהאלגוריתם שלכם אכן פותר את הבעיה.

פתרון (תודה לחן):

- נבנה את גרף ההתאמות של הזוגות.
- נסדר את הקודקודים בגרף בסדר עולה של העדיפות של החולה בזוג.
- ניתן לכל קודקוד, לפי הסדר, משקל גדול פי 2 משל הקודם (1, 2, 4, ...)
- ניתן לכל צלע בגרף משקל השווה לסכום משקלי שני הקודקודים שלה.
- נמצא שידוך משקל מקסימום בגרף.

כיוון שסכום חזקות של 2 תמיד קטן יותר מהחזקה הבאה, שידוך משקל מקסימום תמיד יעדיף צלע הסמוכה לקודקוד עם עדיפות גבוהה, על-פני צלע הסמוכה לקודקוד עם עדיפות נמוכה יותר. ולכן יימצא שידוך העומד בדרישות.

ב. הדגימו את האלגוריתם שלכם על בעיית החלפה עם תשעה זוגות, עם הנתונים הבאים:

- זוג א – עדיפות 3 (גבוהה ביותר), מתאים לזוגות ב, ג.
- זוג ב – עדיפות 3, מתאים לזוגות א, ד.
- זוג ג – עדיפות 2, מתאים לזוגות א, ד.
- זוג ד – עדיפות 2, מתאים לזוגות ב, ג (וגם ח, ה).
- זוג ה – עדיפות 3, מתאים לזוגות ד, ו, ז.
- זוג ו – עדיפות 2, מתאים לזוגות ה, ז.
- זוג ז – עדיפות 1 (נמוכה ביותר), מתאים לזוגות ה, ו.
- זוג ח – עדיפות 1, מתאים לזוגות ד, ט.
- זוג ט – עדיפות 2, מתאים לזוג ח.

פתרון: נסדר את הזוגות באופן הבא: ז, **ח**, ג, ד, **ו**, **ט**, **א**, **ב**, **ה**.
ניתן להם משקלים: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256
לפי זה נקבע את משקלי הצלעות:

	א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט
א	-	**192**	68						
ב	-	-		136					
ג	-	-	-	12					
ד	-	-	-	-	264			10	
ה	-	-	-	-	-	**272**	257		

ו	-	-	-	-	-	-	17		
ז	-	-	-	-	-	-	-		
ח	-	-	-	-	-	-	-	-	34
ט	-	-	-	-	-	-	-	-	-

הקודקוד הראשון שישודך יהיה **ה** – שהמשקל שלו הכי גדול. מבין הקודקודים שהוא קשור אליהם (ד, ו, ז), ייבחר קודקוד **ו** – שמשקלו הכי גדול.

השידוך השני יהיה **ב-א**.

השידוך השלישי יהיה **ט-ח**.

השידוך הרביעי יהיה **ג-ד**.

בסך-הכל ישודכו כל הזוגות חוץ מזוג **ז**, שהוא בעדיפות הנמוכה ביותר.