Linear Algebra questions for MASSP Application form

Hồ Lê Minh Quân

Ngày 20 tháng 5 năm 2025

1 Các câu hỏi

1.1 (a) Ma trận đối xứng là gì? (b) Nêu 2 tính chất của ma trận đối xứng.

(a) Ma trận A được gọi là đối xứng khi và chỉ khi: $A = A^T$

(b) (a) Nếu ma trận A khả nghịch thì A^{-1} đối xứng $\Leftrightarrow$ A đối xứng.

(b) Với $\forall n \in$: A khả nghịch $\Rightarrow A^n$ khả nghịch.

(c) Với A là ma trận bất kì, ma trận $X = AA^T$ là một ma trận đối xứng.

1.2 Cho X là một ma trận. (a) Tại sao tất cả trị riêng của X^TX đều không âm? (b) Khi nào X^TX nghịch đảo được?

(a) Ta có: $|X| = |X^T|$, điều này đúng với mọi ma trận X.
λ là một trị riêng của $X^TX \Leftrightarrow$ Tồn tại ma trận A sao cho: $X^TXA = \lambda A$.
Điều này tương đương:

$$\begin{aligned}
&|X^TXA| = \lambda|A| \\
\Rightarrow &|X^T||X||A| = \lambda|A| \\
\Rightarrow &|X^T||X| = \lambda \\
\Rightarrow &|X|^2 = \lambda \geq 0
\end{aligned}$$

Vậy: Tất cả trị riêng của ma trận X^TX đều không âm.

(b)

$$\begin{aligned}
X^TX\text{khả nghịch} &\Leftrightarrow |X^TX| \neq 0 \\
&\Leftrightarrow |X|^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow |X| \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \text{X khả nghịch.}
\end{aligned}$$

1.3 Cho ma trận X, và vector Y sao cho tích XY có nghĩa. (a) Tại sao XY nằm trong không gian vector sinh ra bởi các cột của X? Cho một ma trận Y sao cho tích XY có nghĩa. (b) Tại sao $rank(X) \geq rank(XY)$?

(a)

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} XY &= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} + \lambda 2 x_{12} + \cdots + \lambda n x_{1n} \\ \ldots \\ \lambda_1 x_{m1} + \lambda 2 x_{m2} + \cdots + \lambda n x_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{bmatrix} {}_{11} \\ \ldots \\ {}_{m1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} {}_{12} \\ \ldots \\ {}_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{bmatrix} {}_{1n} \\ \ldots \\ {}_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ta thấy XY chính là 1 tổ hợp tuyến tính của n vector là các vector cột của X, ứng với bộ n hệ số Y, nói cách khác XY là vector sinh bởi các vector cột của X, hay XY nằm trong không gian vector sinh bởi các cột của X.

(b) Giả sử X có kích thước (m,n), Y có kích thước (n,p) thì XY có kích thước (m,p).
Gọi S_X là không gian sinh bởi các cột của X, S_{XY} là không gian sinh bởi các cột của XY.
Điều phải chứng minh tương đương:

$$\mathrm{dim}(\mathrm{S}_X) \geq dim(S_{XY}).$$

Gọi v là vector bất kỳ thuộc S_{XY}.
Có:

$$\mathrm{v} \in S_{XY} \Rightarrow \exists \lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p] : v = (XY)\lambda \Leftrightarrow v = X(Y\lambda) \Leftrightarrow v \in S_X.$$

Điều này đã chứng minh được:

$$\begin{aligned} & S_{XY} \subset S_X \\ \Leftrightarrow \ & dim(S_{XY}) \leq dim(S_X)(\text{đpcm}). \end{aligned}$$

1.4 (a) Nêu định nghĩa của hàm lồi và hàm lõm (đơn biến). (b) Nêu một số tính chất đặc trưng của hàm lồi.

(a) Xét tập $I = I(a,b)$ và hàm số $y = f(x)$ trên I.
Hàm f được gọi là lồi trên I khi và chỉ khi:

$$\forall x, y \in I, \forall \alpha \in [0;1] : f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

Hàm f được gọi là lõm trên I khi và chỉ khi:

$$\forall x, y \in I, \forall \alpha \in [0;1] : f((1-\alpha)x + \alpha y) \geq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

(b)
  (a) Nếu f khả vi trên I thì f' là hàm đơn điệu tăng trên I.

  (b) Nếu f và f' khả vi trên I thì $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.

  (c) $\forall x, y \in I, f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.

  (d) Hàm chỉ có 1 cực tiểu địa phương, đây cũng là giá trị nhỏ nhất của hàm.