

Sémantique des langages impératifs

Florent Kirchner

Projet LogiCal

Pôle Commun de Recherche en Informatique du Plateau de Saclay, CNRS, École
Polytechnique, INRIA, Université Paris-Sud

10 mars 2005

Évaluation d'un script de preuve

```
intro a ab ;  
apply ab ;  
trivial.
```

Preuve

$$\frac{}{\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A}$$

Évaluation d'un script de preuve

```
intro a ab ;  
apply ab ;  
trivial.
```

Preuve

$$\frac{a:A, ab:(A \Rightarrow B) \vdash B}{\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A}$$

Évaluation d'un script de preuve

```
intro a ab ;  
apply ab ;  
trivial.
```

Preuve

$$\frac{\frac{a:A, ab:(A \Rightarrow B) \vdash A}{a:A, ab:(A \Rightarrow B) \vdash B}}{\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A}$$

Évaluation d'un script de preuve

```
intro a ab ;  
apply ab ;  
trivial.
```

Preuve

$$\frac{\frac{\frac{\bullet}{a:A, ab:(A \Rightarrow B) \vdash A}}{a:A, ab:(A \Rightarrow B) \vdash B}}{\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A}$$

Évaluation d'un script de preuve

```
intro a ab ;  
apply ab ;  
trivial.
```

Preuve

$$\frac{\frac{\frac{\odot}{a:A, ab:(A \Rightarrow B) \vdash A}}{a:A, ab:(A \Rightarrow B) \vdash B}}{\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A}$$

Évaluation d'un programme impératif

$X := 42$; $X := 704893$

État mémoire

$X \rightsquigarrow 8$

$Y \rightsquigarrow 12$

Évaluation d'un programme impératif

$X := 42$; $X := 704893$

État mémoire

$X \rightsquigarrow 42$

$Y \rightsquigarrow 12$

Évaluation d'un programme impératif

$X := 42$; $X := 704893$

État mémoire

$X \rightsquigarrow 704893$

$Y \rightsquigarrow 12$

Évaluation d'un programme impératif

$X := 42$; $X := 704893$

État mémoire

$X \rightsquigarrow 704893$

$Y \rightsquigarrow 12$

IMP : Syntaxe

$a ::= n \mid X \mid a_1 + a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 \times a_2$

$b ::= \text{true} \mid \text{false} \mid a_1 = a_2 \mid a_1 \leq a_2 \mid \neg b \mid b_1 \wedge b_2 \mid b_1 \vee b_2$

$c ::= \text{skip}$
 $\mid X := a$
 $\mid c_1 ; c_2$
 $\mid \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2$
 $\mid \text{while } b \text{ do } c .$

L'approche classique

Principe Ajout des stores à la syntaxe des éléments du langage

Règles $\langle c, s \rangle \rightarrow \langle c', s' \rangle$

Contextes
$$\frac{\langle c, s \rangle \rightarrow \langle c', s' \rangle}{\langle \Xi[c], s \rangle \rightarrow \langle \Xi[c'], s' \rangle}$$



Forme normale Sous condition de bonne-formation : $\langle \text{skip}, s \rangle$

Évaluation des expressions

$$\langle _, _ \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E$$

Arithmétiques $\langle 4 + 3, s \rangle \rightarrow 7$

$$\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$$

Booléennes $\langle \text{true} \wedge \text{false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$

Évaluation des instructions

$$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I \times S$$

Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s\{X \rightsquigarrow n\} \rangle$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{if true then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{if false then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Boucle $\langle \text{while } b \text{ do } c, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{if } b \text{ then } (c ; \text{while } b \text{ do } c) \text{ else skip}, s \rangle$

Évaluation des instructions

$$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I \times S$$

Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s\{X \rightsquigarrow n\} \rangle$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{if true then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{if false then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Boucle $\langle \text{while } b \text{ do } c, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{if } b \text{ then } (c ; \text{while } b \text{ do } c) \text{ else skip}, s \rangle$

Évaluation des instructions

$$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I \times S$$

Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s\{X \rightsquigarrow n\} \rangle$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{if true then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{if false then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Boucle $\langle \text{while } b \text{ do } c, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{if } b \text{ then } (c ; \text{while } b \text{ do } c) \text{ else skip}, s \rangle$

Évaluation des instructions

$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I \times S$

Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s\{X \rightsquigarrow n\} \rangle$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{if true then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{if false then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Boucle $\langle \text{while } b \text{ do } c, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{if } b \text{ then } (c ; \text{while } b \text{ do } c) \text{ else skip}, s \rangle$

L'alternative duale

Principe Ajout des instructions à la syntaxe des stores

Règles $s \rightarrow s'$

Contexte $\frac{s \rightarrow s'}{\langle c, s \rangle \rightarrow \langle c, s' \rangle}$

Forme normale Sous condition de bonne-formation : s

Évaluation des expressions

$$\langle _, _ \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E$$

Expressions arithmétiques $\langle 4 + 3, s \rangle \rightarrow 7$

$$\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$$

Expressions booléennes $\langle \text{true} \wedge \text{false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$

Évaluation des expressions

$$\langle _, _ \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E$$

Expressions arithmétiques $\langle \text{add } 4 \ 3, s \rangle \rightarrow 7$
 $\langle a_1 + a_2, s \rangle \rightarrow \langle \text{add } \langle a_1, s \rangle \ \langle a_2, s \rangle, s \rangle$
 $\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$

Expressions booléennes $\langle \text{true} \wedge \text{false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$

Évaluation des expressions

$$\langle \rangle, \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E$$

Expressions arithmétiques $\langle \text{add } 4 \ 3, s \rangle \rightarrow 7$
 $\langle a_1 + a_2, s \rangle \rightarrow \langle \text{add } \langle a_1, s \rangle \ \langle a_2, s \rangle, s \rangle$
 $\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$

Expressions booléennes $\langle \text{and true false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$
 $\langle b_1 \wedge b_2, s \rangle \rightarrow \langle \text{and } \langle b_1, s \rangle \ \langle b_2, s \rangle, s \rangle$

Évaluation des instructions

$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$

Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s \{ X \rightsquigarrow n \} \rangle$

Skip $\langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{cond true } c_1 c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$

$\langle \text{cond false } c_1 c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Évaluation des instructions

$$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$$

Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow s \{ X \rightsquigarrow n \}$

Skip $\langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{cond true } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$

$\langle \text{cond false } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Évaluation des instructions

$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$

Allocation $\langle \text{aff } X \ n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\}$
 $\langle X := a, s \rangle \rightarrow \langle \text{aff } X \ (a, s), s \rangle$

Skip $\langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{cond true } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{cond false } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Évaluation des instructions

$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$

Allocation $\langle \text{aff } X \ n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\}$
 $\langle X := a, s \rangle \rightarrow \langle \text{aff } X \ (a, s), s \rangle$

Skip $\langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{cond true } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{cond false } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Évaluation des instructions

$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$

Allocation $\langle \text{aff } X \ n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\}$
 $\langle X := a, s \rangle \rightarrow \langle \text{aff } X \ (a, s), s \rangle$

Skip $\langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$

Séquence $\langle c_1 ; c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, \langle c_1, s \rangle \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{cond true } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{cond false } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Évaluation des instructions

$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$

Allocation $\langle \text{aff } X \ n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\}$
 $\langle X := a, s \rangle \rightarrow \langle \text{aff } X \ (a, s), s \rangle$

Skip $\langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$

Séquence $\langle c_1 ; c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, \langle c_1, s \rangle \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{if true then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{if false then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Évaluation des instructions

$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$

Allocation $\langle \text{aff } X \ n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\}$
 $\langle X := a, s \rangle \rightarrow \langle \text{aff } X \ (a, s), s \rangle$

Skip $\langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$

Séquence $\langle c_1 ; c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, \langle c_1, s \rangle \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{cond true } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{cond false } c_1 \ c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$
 $\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle \text{cond } (b, s) \ c_1 \ c_2, s \rangle$

Exemple : approche classique

$$\langle (X := 4; X := 5), X \rightsquigarrow 8 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

Exemple : approche classique

$$\langle (X := 4; X := 5), X \rightsquigarrow 8 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

Contexte + Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s\{X \rightsquigarrow n\} \rangle$

Exemple : approche classique

$$\langle (\text{skip}; X := 5), X \rightsquigarrow 4 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

Exemple : approche classique

$$\langle (\text{skip}; X := 5), X \rightsquigarrow 4 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

$$\text{Sequence } \langle \text{skip}; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$$

Exemple : approche classique

$$\langle (X := 5), X \rightsquigarrow 4 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

Exemple : approche classique

$$\langle (X := 5), X \rightsquigarrow 4 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

$$\text{Allocation } \langle X := n, s \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s\{X \rightsquigarrow n\} \rangle$$

Exemple : approche classique

$$\langle (\text{skip}), X \rightsquigarrow 5 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

Exemple : approche duale

$$\langle (X := 4; X := 5), X \rightsquigarrow 8 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

Exemple : approche duale

$$\langle (X := 4; X := 5), X \rightsquigarrow 8 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

$$\text{Sequence } \langle c_1; c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, \langle c_1, s \rangle \rangle$$

Exemple : approche duale

$$\langle (X := 5), \langle (X := 4), X \rightsquigarrow 4 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle \rangle$$

Exemple : approche duale

$$\langle (X := 5), \langle (X := 4), X \rightsquigarrow 4 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle \rangle$$

Congruence + Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\}$

Exemple : approche duale

$$\langle (X := 5), X \rightsquigarrow 4 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

Exemple : approche duale

$$\langle (X := 5), X \rightsquigarrow 4 :: Y \rightsquigarrow 12 \rangle$$

$$\text{Allocation } \langle X := n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\}$$

Exemple : approche duale

$$X \rightsquigarrow 5 :: Y \rightsquigarrow 12$$

- Forme normale sans `skip`
- Simple règle de congruence
- Règles de réduction intuitives (p.ex. pour la séquence)
- ▷ Formalisme simple et naturel
- Que se passe-t-il quand les expressions produisent des effets de bord ?

- Forme normale sans `skip`
- Simple règle de congruence
- Règles de réduction intuitives (p.ex. pour la séquence)
- ▷ Formalisme simple et naturel
- Que se passe-t-il quand les expressions produisent des effets de bord ?

- Forme normale sans `skip`
- Simple règle de congruence
- Règles de réduction intuitives (p.ex. pour la séquence)
- ▷ Formalisme simple et naturel
- Que se passe-t-il quand les expressions produisent des effets de bord ?

Return'n'update

$\text{rnu } X \ 4$

Machine state
 $X \rightsquigarrow 8$

Return'n'update

$r_{nu} \ X \ 4$

Machine state

$X \rightsquigarrow 4$

Return'n'update

8

Machine state

$X \rightsquigarrow 4$

Approche classique : expressions

$$\langle _, _ \rangle : E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Expressions arithmétiques $\langle 4 + 3, s \rangle \rightarrow \langle 7, s \rangle$
 $\langle X, s \rangle \rightarrow \langle s(X), s \rangle$

Expressions booléennes $\langle \text{true} \wedge \text{false}, s \rangle \rightarrow \langle \text{false}, s \rangle$

$$\text{rnu} \quad \langle \text{rnu } X \ n, s\{X \rightsquigarrow m\} \rangle \rightarrow \\ \langle m, s\{X \rightsquigarrow n\} \rangle$$

Approche classique : expressions

$$\langle _, _ \rangle : E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Expressions arithmétiques $\langle 4 + 3, s \rangle \rightarrow \langle 7, s \rangle$
 $\langle X, s \rangle \rightarrow \langle s(X), s \rangle$

Expressions booléennes $\langle \text{true} \wedge \text{false}, s \rangle \rightarrow \langle \text{false}, s \rangle$

rne $\langle \text{rne } X \ n, s\{X \rightsquigarrow m\} \rangle \rightarrow$
 $\langle m, s\{X \rightsquigarrow n\} \rangle$

Approche classique : instructions

$$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I \times S$$

Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s\{X \rightsquigarrow n\} \rangle$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{if true then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{if false then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Approche classique : ~~instructions~~ expressions

$$\langle _, _ \rangle : E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Allocation $\langle X := n, s \rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s \{ X \rightsquigarrow n \} \rangle$

Séquence $\langle \text{skip} ; c, s \rangle \rightarrow \langle c, s \rangle$

Conditionnelle $\langle \text{if true then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_1, s \rangle$
 $\langle \text{if false then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, s \rangle$

Approche duale : expressions

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Expressions arithmétiques $\langle \text{add } 4 \ 3, s \rangle \rightarrow 7$

$$\langle a_1 + a_2, s \rangle \rightarrow$$

$$\langle \text{add } \langle a_1, s \rangle \ \langle a_2, s \rangle, s \rangle$$

$$\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$$

Expressions booléennes $\langle \text{and true false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$

$$\langle b_1 \wedge b_2, s \rangle \rightarrow$$

$$\langle \text{and } \langle b_1, s \rangle \ \langle b_2, s \rangle, s \rangle$$

$$\text{rnu } \langle \text{rnu } X \ n, s \{ X \mapsto m \} \rangle \rightarrow$$

$$\langle m, s \{ X \mapsto n \} \rangle$$

Approche duale : expressions

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Expressions arithmétiques $\langle \text{add } 4 \ 3, s \rangle \rightarrow 7$

$$\langle a_1 + a_2, s \rangle \rightarrow$$

$$\langle \text{add } \langle a_1, s \rangle_1 \ \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_1, \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_2 \rangle$$

$$\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$$

Expressions booléennes $\langle \text{and true false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$

$$\langle b_1 \wedge b_2, s \rangle \rightarrow$$

$$\langle \text{and } \langle b_1, s \rangle \ \langle b_2, s \rangle, s \rangle$$

$$\text{rnu } \langle \text{rnu } X \ n, s \{ X \rightsquigarrow m \} \rangle \rightarrow$$

$$\langle m, s \{ X \rightsquigarrow n \} \rangle$$

Approche duale : expressions

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Expressions arithmétiques $\langle \text{add } 4 \ 3, s \rangle \rightarrow 7$
 $\langle a_1 + a_2, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{add } \langle a_1, s \rangle_1 \ \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_1, \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_2 \rangle$
 $\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$

Expressions booléennes $\langle \text{and true false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$
 $\langle b_1 \wedge b_2, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{and } \langle b_1, s \rangle \ \langle b_2, s \rangle, s \rangle$

$\text{rnu} \ \langle \text{rnu } X \ n, s \{ X \rightsquigarrow m \} \rangle \rightarrow$
 $\langle m, s \{ X \rightsquigarrow n \} \rangle$

Approche duale : expressions

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Expressions arithmétiques $\langle \text{add } 4 \ 3, s \rangle \rightarrow 7$
 $\langle a_1 + a_2, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{add } \langle a_1, s \rangle_1 \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_1, \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_2 \rangle$
 $\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$

Expressions booléennes $\langle \text{and true false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$
 $\langle b_1 \wedge b_2, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{and } \langle b_1, s \rangle_1 \langle b_2, \langle b_1, s \rangle_2 \rangle_1, \langle b_2, \langle b_1, s \rangle_2 \rangle_2 \rangle$

$\text{rnu} \quad \langle \text{rnu } X \ n, s \{X \rightsquigarrow m\} \rangle \rightarrow$
 $\langle m, s \{X \rightsquigarrow n\} \rangle$

$\langle \text{rnu } X \ n, s \{X \rightsquigarrow m\} \rangle \rightarrow \langle m, s \{X \rightsquigarrow n\} \rangle$

Approche duale : expressions

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Expressions arithmétiques $\langle \text{add } 4 \ 3, s \rangle \rightarrow 7$
 $\langle a_1 + a_2, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{add } \langle a_1, s \rangle_1 \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_1, \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_2 \rangle$
 $\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$

Expressions booléennes $\langle \text{and true false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$
 $\langle b_1 \wedge b_2, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{and } \langle b_1, s \rangle_1 \langle b_2, \langle b_1, s \rangle_2 \rangle_1, \langle b_2, \langle b_1, s \rangle_2 \rangle_2 \rangle$

rne $\langle \text{rne } X \ n, s \{X \rightsquigarrow m\} \rangle \rightarrow$
 $\langle m, s \{X \rightsquigarrow n\} \rangle$
 $\langle \text{rne } X \ a, s \rangle \rightarrow \langle \text{ru } X \ \langle a, s \rangle_1, \langle a, s \rangle_2 \rangle$

Approche duale : expressions

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Expressions arithmétiques $\langle \text{add } 4 \ 3, s \rangle \rightarrow 7$
 $\langle a_1 + a_2, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{add } \langle a_1, s \rangle_1 \ \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_1, \langle a_2, \langle a_1, s \rangle_2 \rangle_2 \rangle$
 $\langle X, s \rangle \rightarrow s(X)$

Expressions booléennes $\langle \text{and true false}, s \rangle \rightarrow \text{false}$
 $\langle b_1 \wedge b_2, s \rangle \rightarrow$
 $\langle \text{and } \langle b_1, s \rangle_1 \ \langle b_2, \langle b_1, s \rangle_2 \rangle_1, \langle b_2, \langle b_1, s \rangle_2 \rangle_2 \rangle$

rneu $\langle \text{ru } X \ n, s \{ X \rightsquigarrow m \} \rangle \rightarrow$
 $\langle m, s \{ X \rightsquigarrow n \} \rangle$
 $\langle \text{rneu } X \ a, s \rangle \rightarrow \langle \text{ru } X \ \langle a, s \rangle_1, \langle a, s \rangle_2 \rangle$

Approche duale : instructions

$$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$$

$$\begin{aligned} \text{Allocation} \quad \langle X := a, s \rangle &\rightarrow \langle \text{aff } X \ (a, s), s \rangle \\ &\langle \text{aff } X \ n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\} \end{aligned}$$

$$\text{Skip} \quad \langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$$

$$\text{Séquence} \quad \langle c_1 ; c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, \langle c_1, s \rangle \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Conditionnelle} \quad \langle \text{cond true } c_1 \ c_2, s \rangle &\rightarrow \langle c_1, s \rangle \\ \langle \text{cond false } c_1 \ c_2, s \rangle &\rightarrow \langle c_2, s \rangle \\ \langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle &\rightarrow \\ &\langle \text{cond } (b, s) \ c_1 \ c_2, s \rangle \end{aligned}$$

Approche duale : instructions

$$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$$

$$\begin{aligned} \text{Allocation} \quad \langle X := a, s \rangle &\rightarrow \langle \text{aff } X \ (\langle a, s \rangle_1, \langle a, s \rangle_2) \\ &\langle \text{aff } X \ n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\} \end{aligned}$$

$$\text{Skip} \quad \langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$$

$$\text{Séquence} \quad \langle c_1 ; c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, \langle c_1, s \rangle \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Conditionnelle} \quad \langle \text{cond true } c_1 \ c_2, s \rangle &\rightarrow \langle c_1, s \rangle \\ \langle \text{cond false } c_1 \ c_2, s \rangle &\rightarrow \langle c_2, s \rangle \\ \langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle &\rightarrow \\ \langle \text{cond } (\langle b, s \rangle) \ c_1 \ c_2, s \rangle & \end{aligned}$$

Approche duale : instructions

$$\langle , \rangle \quad I \rightarrow S \rightarrow I$$

$$\begin{aligned} \text{Allocation} \quad \langle X := a, s \rangle &\rightarrow \langle \text{aff } X \ (a, s)_1, (a, s)_2 \rangle \\ &\langle \text{aff } X \ n, s \rangle \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\} \end{aligned}$$

$$\text{Skip} \quad \langle \text{skip}, s \rangle \rightarrow s$$

$$\text{Séquence} \quad \langle c_1 ; c_2, s \rangle \rightarrow \langle c_2, \langle c_1, s \rangle \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Conditionnelle} \quad \langle \text{cond true } c_1 \ c_2, s \rangle &\rightarrow \langle c_1, s \rangle \\ \langle \text{cond false } c_1 \ c_2, s \rangle &\rightarrow \langle c_2, s \rangle \\ \langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, s \rangle &\rightarrow \\ \langle \text{cond } (b, s)_1 \ c_1 \ c_2, (b, s)_2 \rangle & \end{aligned}$$

Approche duale : ~~instructions~~ expressions

$$(\cdot, \cdot) \quad E \rightarrow S \rightarrow E \times S$$

Allocation $(\llbracket X := a, s \rrbracket \rightarrow (\llbracket \text{aff } X \llbracket a, s \rrbracket_1, (\llbracket a, s \rrbracket_2)$
 $(\llbracket \text{aff } X \ n, s \rrbracket \rightarrow s\{X \rightsquigarrow n\}$

Skip $(\llbracket \text{skip}, s \rrbracket \rightarrow (\llbracket \text{skip}, s \rrbracket)$

Séquence $(\llbracket c_1 ; c_2, s \rrbracket \rightarrow (\llbracket c_2, (\llbracket c_1, s \rrbracket_2)$

Conditionnelle $(\llbracket \text{cond true } c_1 \ c_2, s \rrbracket \rightarrow (\llbracket c_1, s \rrbracket)$
 $(\llbracket \text{cond false } c_1 \ c_2, s \rrbracket \rightarrow (\llbracket c_2, s \rrbracket)$
 $(\llbracket \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, s \rrbracket \rightarrow$
 $(\llbracket \text{cond } (\llbracket b, s \rrbracket_1 \ c_1 \ c_2, \text{snd } (\llbracket b, s \rrbracket))$

Coquille de noix

- Une approche novatrice de la sémantique opérationnelle
- Lien entre les approches fonctionnelle et opérationnelle
- Application à la sémantique des langages de tactiques
- Stratégies de réduction et machines abstraites

Coquille de noix

- Une approche novatrice de la sémantique opérationnelle
- Lien entre les approches fonctionnelle et opérationnelle
- Application à la sémantique des langages de tactiques
- Stratégies de réduction et machines abstraites

Coquille de noix

- Une approche novatrice de la sémantique opérationnelle
- Lien entre les approches fonctionnelle et opérationnelle
- Application à la sémantique des langages de tactiques
- Stratégies de réduction et machines abstraites

Coquille de noix

- Une approche novatrice de la sémantique opérationnelle
- Lien entre les approches fonctionnelle et opérationnelle
- Application à la sémantique des langages de tactiques
- Stratégies de réduction et machines abstraites

Références



J.-C. Filliâtre,

Preuve de programmes impératifs en théorie des types,
Université Paris-Sud, 1999.



G. D. Plotkin,

A structural approach to operational semantics,
Aarhus University, 1981.



G. Winskel,

The Formal Semantics of Programming Languages,
Foundations of Computing, 1993.

Contextes de réduction

$\Xi ::= []$
| $\Xi; c$
| $X := \Theta$
| if Θ then c_1 else $c_2,$

with

$\Theta ::= []$
| $\Theta + a \mid v + \Theta \mid \Theta - a \mid v - \Theta \mid \Theta \times a \mid v \times \Theta$
| $\Theta = a \mid v = \Theta \mid \Theta \leq a \mid v \leq \Theta$
| $\Theta \wedge a \mid v \wedge \Theta \mid \Theta \vee a \mid v \vee \Theta$