

HW4Jacobi 方法

王启骅 PB20020580

2022 年 10 月 25 日

1 实验结果与分析

1.1 SVD 分解

生成的初始矩阵如图 1

```
初始随机矩阵:
0.001251      0.563585      0.193304
0.808741      0.585009      0.479873
0.350291      0.895962      0.822840
0.746605      0.174108      0.858943
```

图 1: 初始矩阵 A

计算得到 AA^T 并使用 Jacobi 方法得到对角特征值矩阵结果为图 2

```
A*A^T的Jacobi特征值矩阵:
0.000000      0.000162      0.000067      0.000002
0.000162      0.129216      -0.000000      0.000000
0.000067      -0.000000      3.870294      0.000005
0.000002      0.000000      0.000005      0.510095
```

图 2: AA^T 的 Jacobi 方法结果特征值对角矩阵

得到迭代过程中每次的非对角元平方和如图 3, 可见非对角元平方和确实每次都呈迅速下降趋势。

```
非对角元平方和:6.40945379
非对角元平方和:1.41017494
非对角元平方和:0.14340713
非对角元平方和:0.05674756
非对角元平方和:0.00989821
非对角元平方和:0.00450824
非对角元平方和:0.00271219
非对角元平方和:0.00102853
非对角元平方和:0.00055362
非对角元平方和:0.00013152
非对角元平方和:0.00002915
非对角元平方和:0.00000006
```

图 3: 非对角元平方和

最后输出变换矩阵 Q 即为所需的 U, 再计算 SIGMA 与 V 得到结果如图 4

```

U:
0.221194      -0.568333      0.080233      0.788437
0.539568      0.162285      0.817740     -0.117608
0.614380     -0.491326     -0.378072     -0.488055
0.531485      0.639734     -0.426528      0.355441
SIGMA:
1.967306      0.000000      0.000000
0.000000      0.714210      0.000000
0.000000      0.000000      0.359467
0.000000      0.000000      0.000000
V^T:
0.533048      0.550657      0.642368
0.610544     -0.775952      0.158536
0.585745      0.307687     -0.749821

```

图 4: $U \Sigma V$ 矩阵

接下来按照图 2 所求的特征值矩阵对角元顺序一次求 $\det(AA^T - \lambda_i I)$ 得到结果如图 5, 如图可见该行列式绝对值计算结果均小于 10^{-7} 次方, 趋于 0, 可见所求结果确实为正确的矩阵特征值。

```

det(AAT-lambda_i*I)=-0.000000052345
det(AAT-lambda_i*I)=-0.000000037566
det(AAT-lambda_i*I)=-0.000000056680
det(AAT-lambda_i*I)=-0.000000000002

```

图 5: $\det(AA^T - \lambda_i I)$

1.2 PCA 分析

所求得到 $\frac{1}{m}XX^T$ 协方差矩阵为图 6

```

协方差矩阵:
0.681122      -0.039007      1.265191      0.513458
-0.039007      0.186751     -0.319568     -0.117195
1.265191     -0.319568      3.092425      1.287745
0.513458     -0.117195      1.287745      0.578532

```

图 6: $\frac{1}{m}XX^T$

计算其特征值、特征向量矩阵为图 6, 7

```

协方差特征值矩阵:
4.196675      0.000053      0.000000     -0.000002
0.000053      0.240629     -0.000000     -0.000110
0.000000     -0.000000      0.078000      0.000000
-0.000002     -0.000110      0.000000      0.023525

```

图 7: $\frac{1}{m}XX^T$ 的特征值矩阵

将生成的投影坐标输出到 coordinate.txt, 读入到 python 文件 Cov pic.py 画图得到可视化结果如图 8, 其中前 50 个点对应蓝色, 50-100 对应红色, 100-150 对应绿色

可见对于第 0 组数据点, 其特征向量投影再靠近 $x=-3, y=-1 \sim 1.5$ 的位置附近, 说明第 0 组数据在 e_1 方向的投影相近, 都在 -3 左右, 而在 e_2 方向投影差异较大; 对于第 1 组数据, 可见其主要分布在近似于 $y=x$ 的靠近原点

协方差特征值列向量矩阵:			
0.361590	0.656512	0.581221	0.316902
-0.082269	0.729741	-0.596194	-0.324442
0.856572	-0.175986	-0.072598	-0.479628
0.358844	-0.074149	-0.549058	0.751178

图 8: $\frac{1}{m}XX^T$ 的特征向量矩阵

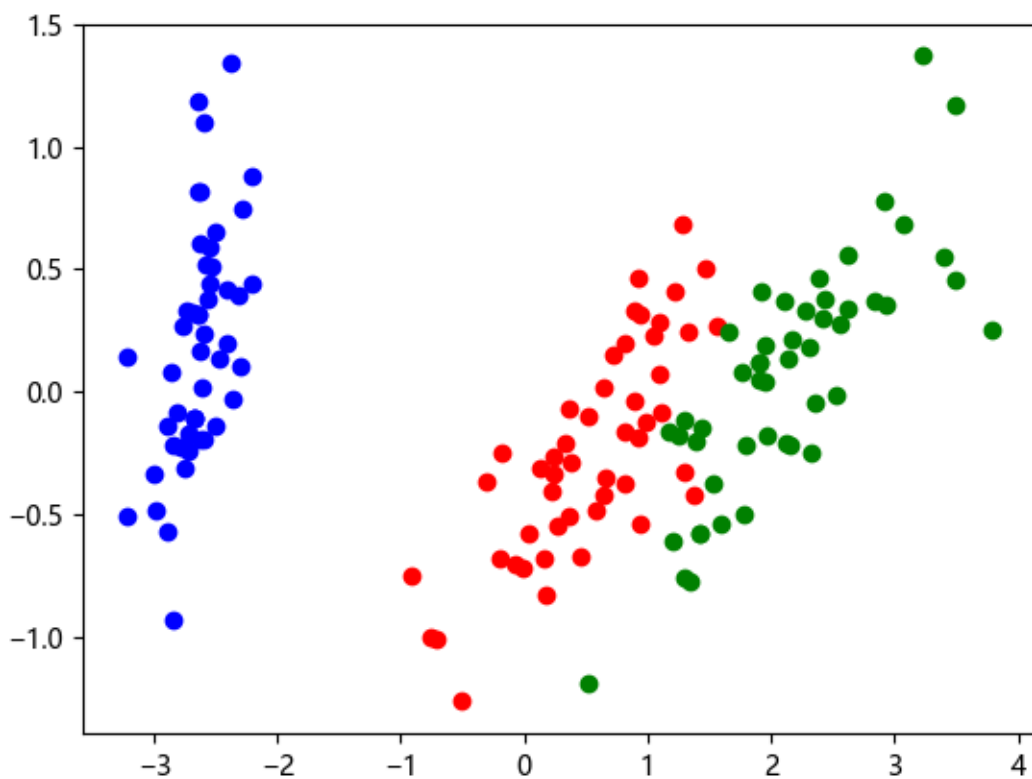


图 9: IRIS 可视化结果

的直线上，说明其数据大多分布在朝向 \hat{e}_1, \hat{e}_2 方向之间的某一夹角的方向正负附近；对于第 2 组数据，其主要分布在 $4 > x > 0, 1.5 > y > -1.5$ 的区域，也主要沿 $y=x$ 的方向分布，说明该组数据在 \hat{e}_1 方向投影均为正值，说明数据相对 \hat{e}_1 的方向不改变，而相对 \hat{e}_2 则总体上随对 \hat{e}_1 的投影增大而增大的趋势。由此可见三组数据明显属于不同种类的花，有不同特性。