

Clebson Abati Graeff

*Notas de aula:
Laboratórios de Física 1 e 2*

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS PATO BRANCO



Este trabalho é licenciado de acordo com a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)¹. De acordo com essa licença você pode utilizar/compartilhar/adaptar este material desde que respeite as seguintes condições

❶ *Você deve dar os créditos apropriados ao autor, prover um link para a licença e indicar se mudanças foram efetuadas. Você pode fazê-lo de qualquer maneira razoável, porém não de forma a sugerir que o autor endossa seu trabalho.*

❷ *Você não pode usar o material para fins comerciais.*

❸ *Se você remixar, transformar, ou criar a partir do material, tem de distribuir as suas contribuições sob a mesma licença que o original.*

Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.

¹ http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt_BR

Horários de atendimento:

- 5^a 13:00 – 13:50
- 6^a 11:10 – 12:00, 17:30 – 18:20

Clebson Abati Graeff
cgraeff@utfpr.edu.br
março de 2019

CRONOGRAMA

As aulas seguirão o planejamento abaixo. No calendário ao lado, estão circuladas as datas das provas.

QUÍMICA

As aulas seguirão o planejamento abaixo.

Aula	Data	Conteúdo
1	12/03	Turmas A e B: Apresentação da disciplina.
2	19/03	Turma A: Exp. 1, Elasticidade.
3	26/03	Turma B: Exp. 1, Elasticidade.
4	02/04	Turma A: Exp. 2, Empuxo.
5	09/04	Turma B: Exp. 2, Empuxo.
6	16/04	Turma A: Exp. 3, Oscilações.
7	23/04	Turma B: Exp. 3, Oscilações.
8	30/04	Turma A: Exp. 4, Ondas estacionárias.
9	07/05	Turma B: Exp. 4, Ondas estacionárias.
–	14/05	Recesso.
10	21/05	Turma A: Exp. 5, Dilatação linear e lei de resfriamento de Newton.
11	28/05	Turma B: Exp. 5, Dilatação linear e lei de resfriamento de Newton.
12	04/06	Turma A: Exp. 6, Calor específico de sólidos.
13	11/06	Turma B: Exp. 6, Calor específico de sólidos.
14	18/06	Turma A: Exp. 7, Zero absoluto.
15	25/06	Turma B: Exp. 7, Zero absoluto.
16	02/07	Turmas A e B: Prova.
17	09/07	Turmas A e B: Apresentação das notas finais de laboratório.
18	16/07	—

Março
1 2 3
4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30 31
Abril
1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28
29 30
Maio
1 2 3 4 5
6 7 8 9 10 11 12
13 14 15 16 17 18 19
20 21 22 23 24 25 26
27 28 29 30 31
Junho
1 2
3 4 5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 18 19 20 21 22 23
24 25 26 27 28 29 30
Julho
1 (2) 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28
29 30 31

Sumário

I Medidas, Técnicas de Análise de Dados

1	<i>Medidas</i>	11
1.1	<i>Medição, tipos de medidas</i>	11
1.2	<i>Tipos de equipamentos, algarismos significativos</i>	12
1.2.1	<i>Medidas realizadas com equipamentos analógicos</i>	12
1.2.2	<i>Medidas realizadas com equipamentos não-analógicos</i>	13
1.2.3	<i>Unidades e algarismos significativos, notação científica</i>	16
1.2.4	<i>Operações envolvendo medidas</i>	18
1.2.5	<i>Arredondamento</i>	20
2	<i>Gráficos</i>	21
2.1	<i>Gráficos</i>	21
2.2	<i>Gráficos de dispersão</i>	23
2.2.1	<i>Principais elementos de um gráfico de dispersão</i>	23
2.2.2	<i>Problemas mais comuns em gráficos de dispersão</i>	25
2.2.3	<i>Elaborando um gráfico com papel milimetrado</i>	26
3	<i>Erros</i>	31
3.1	<i>Erros de medidas</i>	31
3.2	<i>Medidas e erros</i>	31
3.2.1	<i>Tipos de erros</i>	32
3.3	<i>Erros de escala em uma medida direta</i>	34
3.4	<i>Erros propagados</i>	35
3.4.1	<i>Constantes e erros propagados</i>	38
3.5	<i>Erros e algarismos significativos</i>	38

3.6	<i>Incerteza fracional e percentual</i>	39
3.6.1	<i>Erro percentual em relação a um valor de referência</i>	40
3.7	<i>Expressão geral para o cálculo do erro propagado</i>	41
4	<i>Régressão Linear</i>	43
4.1	<i>Linhos de Tendência</i>	43
4.2	<i>Régressão Linear</i>	45
4.2.1	<i>Régressão linear utilizando uma calculadora</i>	50
4.2.2	<i>Interpretação dos coeficientes</i>	52
4.3	<i>Linearização</i>	53
4.4	<i>Linearização e teste de hipóteses</i>	54
4.5	<i>Erros nos parâmetros de uma régressão linear</i>	57
5	<i>Desvio padrão</i>	59
5.1	<i>Histogramas</i>	59
5.2	<i>Desvio padrão</i>	59

II Experimentos

6	<i>Elasticidade</i>	65
7	<i>Empuxo</i>	71
8	<i>Oscilações</i>	77
9	<i>Ondas estacionárias</i>	87
10	<i>Dilatação linear e lei de resfriamento de Newton</i>	99
11	<i>Calor Específico de Sólidos</i>	111
12	<i>Zero absoluto</i>	123

Introdução

Este livro/apostila tem como objetivo facilitar o desenvolvimento das atividades de laboratório. Para isso, todo o conteúdo de análise de dados e os próprios experimentos foram reunidos em um conjunto único.

Na primeira parte, as técnicas de análise de dados são introduzidas e discutidas. Nenhuma técnica muito avançada é apresentada, somente o básico, já que o texto é de nível introdutório. Os assuntos cobertos são medidas, erros, erros propagados, gráficos, regressão linear, e um pouco sobre desvio padrão e erros aleatórios.

Na segunda, os experimentos são analisados de um ponto de vista teórico, seguidos dos procedimentos para coleta de dados. Após isso, as equipes de alunos devem responder um questionário. Os experimentos utilizam diferentes técnicas de análise de dados, sendo que à medida que o semestre avança, o número e a complexidade das técnicas envolvidas aumenta. Isso não é completamente linear, no entanto, já que algumas experiências são mais complexas e mais ricas que outras de um ponto de vista de análise dos dados.

Fiz um esforço grande visando obter um texto de fácil compreensão e bem ilustrado, mas sempre restam pontos que podem ficar confusos — ou posso ter cometido um erro! —. Se isso acontecer, entre em contato comigo. Sugestões são sempre bem vindas.

Clebson Abati Graeff,
Pato Branco, março de 2019.

PARTE I: MEDIDAS, TÉCNICAS DE ANÁLISE DE DADOS

1 Medidas

Um dos principais objetivos da Física como ciência é determinar o resultado de experimentos não apenas qualitativamente, mas também quantitativamente. A realização de medidas está diretamente ligada a tal objetivo: para que possamos prever um resultado, precisamos de medidas de parâmetros relevantes do sistema e que servem de base para a previsão de novos valores através de um modelo matemático. Os valores previstos pelo modelo devem ser comparados com resultados experimentais, que — mais uma vez — devem ser medidos. Se as previsões concordarem com os resultados experimentais, o modelo deve ser submetido a mais testes; caso o modelo falhe, ele deve ser revisto.

O ato de realizar uma medição pode ser simples ou complexo, dependendo do tipo de medida a se realizar. Além disso, os valores obtidos estarão sempre sujeitos a erros que podem deturpar-lhos. Veremos abaixo alguns aspectos importantes para a determinação precisa de medidas.

1.1 *Medição, tipos de medidas*

O processo de obtenção do valor de uma medida é denominado *medição*. Tal processo consiste em comparar aquilo que se deseja medir com um padrão, obtendo o que se denomina como *medida direta*, ou no cálculo de um valor a partir de um conjunto de medidas diretas, o que se denomina como *medida indireta*.

Como exemplo de medida direta, podemos citar a determinação do comprimento de um objeto. Para obter o valor da medida, basta alinhar uma de suas extremidades ao zero de uma régua e verificarmos quantas marcas estão compreendidas no comprimento total do objeto. Temos, portanto, uma medida obtida através de uma comparação direta com um padrão de grandeza.

Algumas medidas, no entanto, não podem ser feitas de maneira direta — ou podem ser determinadas de maneira mais conveniente de forma indireta —. Se necessitamos saber a área de uma folha retangular, basta verificar as medidas laterais e então multiplicá-las. Desta forma, estamos determinando a área de uma maneira **indireta**. Da mesma maneira, o volume de um paralelepípedo pode ser determinado de maneira indireta através do produto de suas três dimensões. Para um sólido irregular, no entanto, é mais conveniente mergulhá-lo em um líquido e verificar através de uma escala graduada impressa no recipiente que o comporta qual é o volume deslocado. Portanto, uma grandeza qualquer pode ser determinada de maneira direta ou indireta, sendo que a escolha de um ou outro tipo de método é uma questão de conveniência.

1.2 Tipos de equipamentos, algarismos significativos

¹ Em equipamentos digitais que verificam o valor de uma quantidade que costuma sofrer pequenas variações em torno de um valor, os aparelhos geralmente realizam uma série de medidas durante um certo intervalo de tempo e mostram somente o valor médio de tais medidas. Um exemplo disso são os velocímetros digitais: devido a pequenas variações de velocidade que ocorrem durante a condução, o processo descrito acima deve ser realizado visando mostrar um número que sofra variações menos frequentes, distraindo menos o condutor.



Figura 1.1: Exemplo de equipamento analógico: régua.

Os equipamentos de medida podem ser divididos em dois tipos:

Analógicos Os equipamentos analógicos são aqueles que permitem que realizemos uma estimativa de valores entre duas marcas quaisquer de sua escala. São exemplos deste tipo de equipamento régua, velocímetros de ponteiro, relógios de ponteiros, etc.

Não-analógicos Equipamentos que não permitem a estimativa de valores são classificados como não-analógicos: nessa categoria se incluem os equipamentos digitais e aqueles dotados de escalas auxiliares. Nos equipamentos digitais, os dados da medida são mostrados através de um visor digital que permite a leitura direta dos valores numéricos¹. Já os equipamentos dotados de escala auxiliar — também conhecida como nônio ou vernier — possibilitam a leitura em uma escala analógica principal, porém com a leitura da subdivisão da escala principal na escala auxiliar. Como a escala auxiliar tem divisões muito “finas”, no entanto, não é possível estimar dígitos menores do que a menor divisão da escala auxiliar.

Vamos tratar as medidas realizadas por cada tipo de equipamento separadamente nas seções seguintes. Trataremos também a questão de *algarismos significativos* de uma medida.

Figura 1.2: Equipamentos eletrônicos geralmente utilizam um visor digital para expressar os valores medidos. Na figura, uma balança digital.

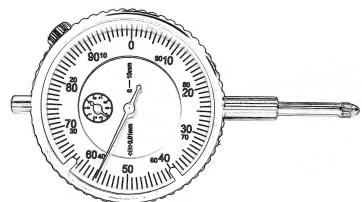
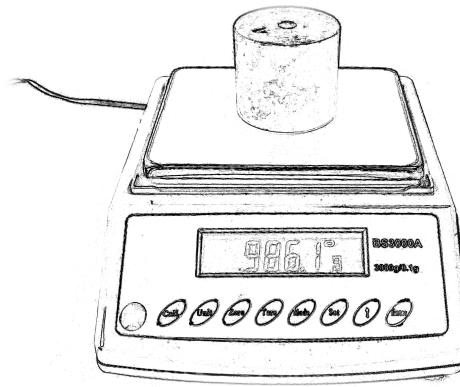


Figura 1.3: Equipamentos com ponteiros são exemplos comuns de equipamentos analógicos. Na figura temos um dilatômetro, equipamento utilizado para verificar pequenas variações de tamanho características de dilatação térmica (uma volta completa representa uma variação de 1,0mm).

1.2.1 Medidas realizadas com equipamentos analógicos

Suponhamos que precisamos usar uma trena para realizar uma medida de um muro. O equipamento em questão foi elaborado de tal forma que um metro está subdividido em 10 partes. Alinhamos uma extremidade da trena — aquela que contém o zero — com uma extremidade do muro e verificamos a outra extremidade. Vemos que o muro passa da marca dos 15 metros por três subdivisões, mas não passa da quarta subdivisão. O valor da medida do comprimento ℓ do muro está em algum ponto entre os valores correspondentes às duas marcas:

$$15,3 \text{ m} < \ell < 15,4 \text{ m}. \quad (1.1)$$

Sabemos que o muro termina em algum lugar entre a terceira e a quarta marca, sendo então maior que 15,3 m. Nesse caso, devemos estimar mais um algarismo. Se, por exemplo, a extremidade do muro está próxima da metade da distância entre as duas marcas da trena, porém antes dela, poderíamos estimar um valor 4 (isto é, quatro décimos da distância entre as duas subdivisões). Assim, podemos expressar a medida como,

$$\ell = 15,34 \text{ m.} \quad (1.2)$$

Poderíamos realizar uma estimativa com mais casas após o 4, mas a validade dela seria duvidosa: se já não temos certeza sobre a medida ser 4 (poderia ser 3 ou 5, em escalas menores é difícil efetuar uma estimativa), não temos ganho algum em denotar mais algarismos após o 4. Ao conjunto de algarismos que temos certeza (pois foram verificados no instrumento) e ao algarismo estimado, damos o nome de *algarismos significativos*. O último algarismo também é conhecido como *algarismo duvidoso*, pois seu valor pode mudar ao se utilizar um equipamento de medida mais preciso.

Em casos onde realizamos uma medida que coincide exatamente com uma marca, devemos considerar que o equipamento permitiria expressar divisões menores, se fosse o caso. Se, por exemplo, ao medirmos o muro com a trena mencionada a extremidade coincidir com a marca de 15 m, devemos expressar a medida como

$$\ell = 15,00 \text{ m,} \quad (1.3)$$

pois sabemos que não foi ultrapassada nenhuma subdivisão de décimos de metro, e determinamos que o algarismo estimado também é zero (pois se aparentemente coincide com a marca, não a ultrapassa em quantidade apreciável).

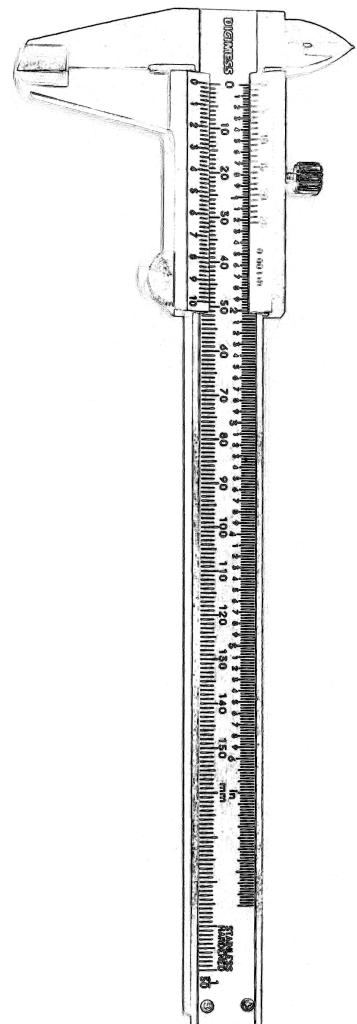


Figura 1.4: O paquímetro é um exemplo de equipamento *não-analógico*, pois é dotado de escala auxiliar (nônião).

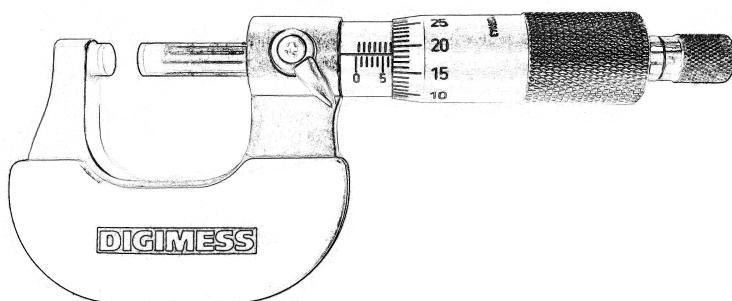


Figura 1.5: Um micrômetro pode ter ou não uma escala auxiliar: na figura, temos um exemplo em que não há escala auxiliar e por isso permite que um dígito seja estimado nas leituras. Os que possuem escala auxiliar tem uma série de marcas que podem se alinhar com as marcas do tambor (região numerada de 10 a 25 na figura e que pode girar), indicando a leitura apropriada para o último dígito (aquele que é estimado em um micrômetro sem escala auxiliar).

1.2.2 Medidas realizadas com equipamentos não-analógicos

No caso de equipamentos não-analógicos, podemos subdividi-los em equipamentos digitais e em equipamentos dotados de escalas

auxiliares. No caso do primeiro, a medida consiste em ler os números mostrados através de um visor. Todos os algarismos mostrados são significativos — exceto aqueles que simplesmente posicionam a vírgula, veja a seção seguinte —. Nesse caso, o último é o algarismo duvidoso, pois, novamente, seu valor poderia ser diferente se utilizássemos um equipamento mais preciso para realizar a medida.

No caso de equipamentos dotados de escalas auxiliares, apesar de não realizarmos a leitura de um visor digital, também não realizamos estimativas. Nesse caso realizamos a leitura a partir da escala auxiliar e, devido à precisão de tal escala, não conseguimos realizar estimativas. Novamente, todos os algarismos lidos são significativos², sendo que o último é denominado duvidoso devido ao fato de que pode mudar ao se utilizar um equipamento mais preciso.

² Exceto os que posicionam a vírgula, veja a Seção 1.2.3 para mais informações.

Funcionamento da escala auxiliar

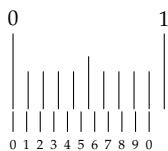


Figura 1.6: Escala de um equipamento dotado de escala auxiliar. A escala superior é a principal, enquanto a inferior é a auxiliar.

Em um equipamento dotado de uma escala auxiliar — como um paquímetro, por exemplo —, as medidas devem ser feitas utilizando-se a posição do zero da escala auxiliar na escala principal. Na Figura (1.6) vemos uma representação das escalas de leitura típicas de um equipamento dotado de escala auxiliar: a escala maior, superior, é a principal, enquanto a menor, inferior, é a auxiliar.

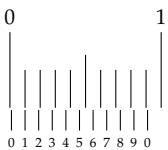


Figura 1.7: Escala auxiliar deslocada para a direita por um décimo da largura da menor divisão da escala principal. Note que a marca número 1 da escala auxiliar está alinhada com a primeira marca à direita do zero da escala principal.

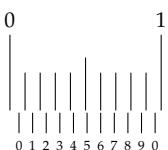


Figura 1.8: Escala auxiliar deslocada por 6 décimos da largura da menor divisão da escala superior. Note o alinhamento da marca número 6.

A ideia por trás da escala auxiliar é bastante simples: tomamos a menor divisão da escala principal, a subdividimos em n partes. Fazemos então uma escala auxiliar onde a menor divisão é a largura de $n - 1$ partes. Assim se a marca do zero da escala auxiliar estiver deslocado para a direita de uma marca i qualquer da escala principal pela largura da n -ésima parte, a marca imediatamente à direita do zero da escala auxiliar estará alinhado com a marca imediatamente à direita da i -ésima. Se a marca do zero estiver deslocada por duas vezes a largura da n -ésima parte, a segunda marca à direita do zero se alinhará à segunda marca à direita da i -ésima marca, e assim por diante. Dessa forma, podemos realizar uma leitura em que a menor divisão da escala é a largura da n -ésima parte.

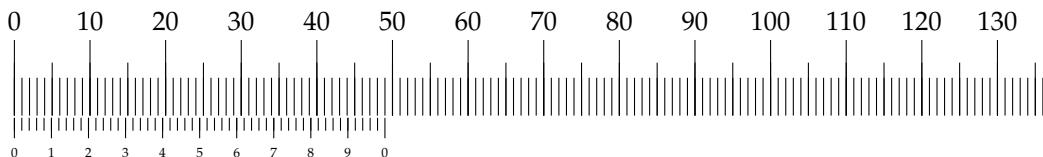
Nas Figuras 1.7 e 1.8 temos dois deslocamentos diferentes para a escala auxiliar da Figura 1.6. A escala auxiliar de tais figuras foi construída de forma que a menor divisão da escala principal foi subdividida em 10 partes. Tomando 9 partes, construímos a menor divisão da escala auxiliar. Assim, se o zero da escala auxiliar for deslocado — em relação ao zero da escala principal — para a direita por uma distância equivalente a um décimo da largura da menor divisão da escala principal, temos que a marca à direita do zero da escala auxiliar se alinhará à marca à direita do zero da escala principal (situação da Figura 1.7). Na Figura 1.8 o zero da escala auxiliar está deslocado em seis partes para a direita, o que leva ao alinhamento da marca número 6 da escala auxiliar com a sexta marca à direita do zero da escala principal.

Tomando medidas utilizando a escala auxiliar

A Figura 1.9 retrata uma medida tomada com um paquímetro cuja menor divisão da escala principal é de um milímetro e no qual a menor divisão da escala auxiliar é de $9/10$ da largura da menor divisão da escala principal. Para tomar a medida, fazemos o seguinte:

1. Efetuamos a leitura na escala principal através do zero da escala auxiliar. Consideramos a marcação imediatamente à esquerda do zero da escala auxiliar. Nesse caso temos 35 mm.
2. Verificamos qual é a marca da escala auxiliar que tem o melhor alinhamento com uma marca da escala principal. Nesse caso, temos que tal marca é a de número 6.
3. Como dividimos a menor divisão da escala principal em 10 partes para elaborar a escala auxiliar, ao alinharmos a sexta marca da escala auxiliar, temos $6/10$ de um milímetro, ou seja, 0,6 mm.
4. Somando essas duas contribuições, temos que a medida é 35,6 mm.

Veja que na prática basta *ler a escala principal através do zero da escala auxiliar, inserir uma vírgula, e anotar o número da marca na escala auxiliar que está alinhada à marca da escala principal*. Note ainda que o zero da direita na escala auxiliar serve para ajudar a verificar o alinhamento do zero da esquerda, pois ambos ficam alinhados ao mesmo tempo.



Paquímetro com divisão de 1 mm em 50 partes

Na Figura 1.10, temos a representação das escalas de um paquímetro no qual a menor divisão da escala principal foi subdividida em 50 partes para elaborar a escala auxiliar. Portanto, verificamos que a menor divisão da escala é de 0,02 mm ($1/50$ de um milímetro). Se tivermos uma leitura como a da Figura 1.12 em um instrumento desse tipo, procedemos a leitura através das seguintes etapas:

1. Verificamos qual a leitura na escala principal da marca imediatamente à esquerda da marca do zero da escala auxiliar. Nesse caso temos 47 mm.
2. Na escala auxiliar, procuramos a marca que está mais bem alinhada com alguma das marcas da escala principal. Em muitos casos, ficamos em dúvida sobre qual é a marca mais bem alinhada, como duas ou três candidatas. No caso de termos três, escolha a central. No caso em questão, vemos que a primeira, a segunda e a terceira marcas à direita da marca 2 da escala auxiliar estão bem alinhadas. Escolhendo a central, temos $12 \times 0,02 \text{ mm} = 0,24 \text{ mm}$.

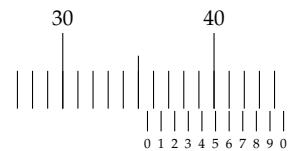


Figura 1.9: Exemplo de medida em um equipamento dotado de escala auxiliar.

Figura 1.10: Escalas de um paquímetro milimetrado em que a menor divisão da escala principal é subdividida em 50 partes para elaborar a escala auxiliar.

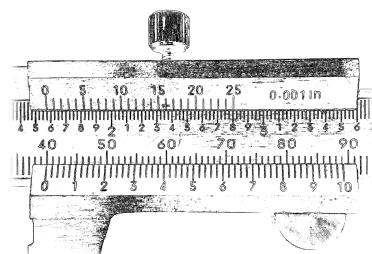


Figura 1.11: Detalhe mostrando a escala auxiliar de um paquímetro em que 1,0 mm é dividido em 50 partes.

3. A medida será composta pela soma dos dois resultados, isto é, 47,24 mm.

Na prática, a leitura é bastante simples:

1. Determinamos a leitura da escala principal — 47 mm —;
2. Colocamos uma vírgula após o valor dessa leitura — 47,0 mm —;
3. Verificamos a marca numerada imediatamente à esquerda da marca melhor alinhada e anotamos seu dígito — 47,2 mm —;
4. Finalmente, verificamos a posição da marca melhor alinhada a partir da última numerada — nesse caso, a segunda posição —. Como cada marca da escala auxiliar corresponde a 0,02 mm, “multiplicamos” por dois o “valor” da posição e anotamos o resultado ao fim — 47,24 mm —.

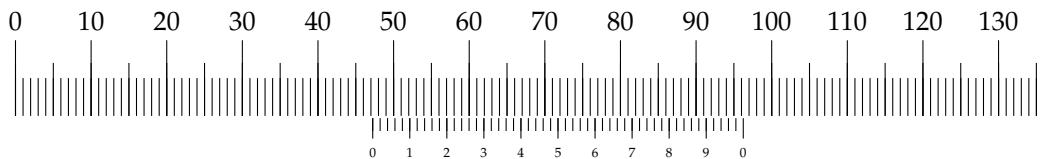


Figura 1.12: Leitura de 47,24 mm. Note o entre alinhamento a segunda marca após a marca “2” na escala auxiliar e a marca da escala principal.

Uma observação importante ao se utilizar equipamentos dotados de escala auxiliar é a realização de medidas que coincidem com as marcas maiores da escala auxiliar. Na Figura 1.13, por exemplo, temos uma medida em que a marca da escala auxiliar que está alinhada à da escala principal é a denotada pelo número 2. Efetuando a leitura, temos 33,2 mm. No entanto, temos o último dígito, dado pela “posição” da marca alinhada “multiplicada” por dois. Se a marca alinhada é a numerada, então a posição é zero. Logo, devemos adicionar um zero ao final da medida: 33,20 mm. Uma maneira mais simples de interpretar essa questão é verificarmos que o número de algarismos após a vírgula em uma dada unidade para um instrumento qualquer é sempre o mesmo. Assim, temos que no caso do paquímetro dos exemplos acima o número é sempre de duas casas após a vírgula ao se efetuar medidas em milímetros.

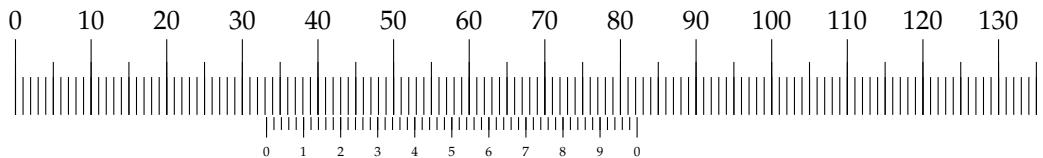


Figura 1.13: Leitura de 33,20 mm. Note o entre alinhamento a marca “2” na escala auxiliar e a marca da escala principal.

1.2.3 Unidades e algarismos significativos, notação científica

O número de algarismos significativos de uma medida está ligado à precisão do equipamento utilizado para realizá-la. Devido a isso,

se realizarmos uma conversão de unidades, não podemos ter uma alteração no número de algarismos significativos — afinal a precisão não aumenta nem diminui —. Isso nos leva a contemplar as duas seguintes situações:

1. Realizarmos uma medida e obtemos

$$\ell = 34,82 \text{ mm}, \quad (1.4)$$

onde o último algarismo foi estimado. Sabemos que temos quatro algarismos significativos e ao expressarmos esta medida em outras unidades, devemos manter o mesmo número de algarismos significativos. Podemos então expressá-la como

$$\ell = 3,482 \text{ cm} \quad (1.5)$$

$$= 0,3482 \text{ dm} \quad (1.6)$$

$$= 0,03482 \text{ m.} \quad (1.7)$$

Note que os zeros à esquerda não são algarismos significativos. Sua função é exclusivamente a de posicionar a vírgula, dando aos algarismos a ordem de grandeza adequada.

2. Realizamos uma medida de massa obtemos,

$$m = 11,2 \text{ kg}, \quad (1.8)$$

e desejamos expressá-la em gramas. Efetuando a conversão, poderíamos escrever em um primeiro momento

$$m = 11\,200 \text{ g.} \quad (1.9)$$

Uma medida assim expressa, no entanto, tem cinco algarismos significativos — pois o último algarismo anotado é o duvidoso —, enquanto a medida original tem três. Portanto, por mais que possamos adicionar zeros ao lado esquerdo sem modificar o número de significativos, não podemos fazê-lo do lado direito.

Para expressar essa medida com o número adequado de algarismos significativos, podemos utilizar a notação científica. Um número expresso em notação científica tem a forma $a \cdot 10^b$, onde a — denominada *mantissa* — é um número Real, e b — o expoente — é um número inteiro. O expoente também é conhecido como *ordem de grandeza*. Em um número expresso dessa forma, somente os algarismos da mantissa são significativos. Os prefixos kilo (k), hecto (h), deci (d), centi (c), mili (m), micro (μ), nano (n), etc., utilizados em unidades de medida são simplesmente formas abreviadas para as notações $\cdot 10^3$, $\cdot 10^2$, $\cdot 10^{-1}$, $\cdot 10^{-2}$, $\cdot 10^{-3}$, $\cdot 10^{-6}$, $\cdot 10^{-9}$, etc.

Utilizando a notação científica temos então

$$m = 112 \cdot 10^2 \text{ g.} \quad (1.10)$$

Portanto, temos as seguintes regras:

- Conversões de unidade não alteram a precisão das medidas e por isso não podem alterar o número de algarismos significativos.
- Zeros à esquerda não contam como algarismos significativos.
- Não podemos adicionar zeros à direita. Se for necessário fazê-lo ao efetuar uma conversão de unidades, devemos utilizar a notação científica.

1.2.4 Operações envolvendo medidas

Lembre-se que em uma medida direta, o algarismo duvidoso está ligado à ideia de que ele seria o algarismo que possivelmente sofreria alterações caso utilizássemos equipamentos mais precisos para realizar as medidas. Isso também se reflete nos valores calculados para medidas indiretas, afinal elas são calculadas a partir de medidas diretas, que têm um algarismo duvidoso. Portanto, ao obtermos uma medida indireta, também devemos denotá-la com o número adequado de algarismos significativos.

Para determiná-los, no entanto, devemos seguir algumas regras para as operações realizadas:

Multiplicação e divisão No caso da multiplicação ou da divisão, devemos limitar o número de algarismos significativos àquele da medida que tiver o menor número.

Para entender a razão dessa regra, podemos fazer a seguinte análise: Tomamos a medida indireta L dada por

$$L = \ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots \quad (1.11)$$

onde $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$, são medidas diretas quaisquer. Vamos supor que ℓ_1 tem n algarismos significativos e que as demais têm mais algarismos significativos que ℓ_1 . Vamos supor ainda que o primeiro dígito (aquele com a maior ordem de grandeza) tem ordem de grandeza p , que o duvidoso ordem de grandeza d e que a diferença entre as ordens de grandeza desses dígitos é s . Agora fazemos o seguinte

1. Tomamos a ordem de grandeza d do algarismo duvidoso de ℓ_1 e multiplicamos pelas demais medidas;
2. Obtemos um valor com uma ordem de grandeza d' qualquer;
3. Qualquer dígito com uma ordem de grandeza menor que d' é então desprezível se comparado ao dígito com a ordem de grandeza d ;
4. Observamos no valor calculado para L que o dígito com a maior ordem de grandeza será p' . Esse dígito deve ser s' ordens de grandeza maior que d' .

A diferença s' nada mais é do que o número de algarismos significativos da medida L . Além disso s' é igual a s . Logo, o resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos que a medida ℓ_1 . Portanto, ao multiplicar duas ou mais medidas,

- Determinamos o número de algarismos significativos de cada uma das medidas que compõe o produto/divisão;
- Realizamos o produto/divisão;
- Ao fim, deixamos o resultado com o mesmo número de algarismos significativos que a medida que tem menos algarismos significativos.

Uma observação importante a se fazer é que se separarmos o cálculo em várias etapas, devemos levar mais algarismos do que o mínimo necessário entre as etapas (pelo menos um a mais). A razão disso é que a contribuição dos dígitos após o último significativo pode se acumular entre as etapas e dar um resultado levemente maior que no caso de os descartarmos. O descarte dos algarismos não-significativos deve ser feito ao final do cálculo.

EXEMPLO³:

$$12,03 \div 3,6 = 3,\bar{3}4 = 3,3 \quad (1.12a)$$

$$198,633 \times 3,211 = 637,\bar{8}1056 = 637,8. \quad (1.12b)$$

³ Utilizamos a barra para denotar o último algarismo significativo quando escrevemos dígitos além dele.

Soma e subtração Para o caso da soma ou subtração, mantemos o número de casas decimais da medida que tem o menor número de casas após a vírgula.

A razão disso é que se temos uma incerteza em um algarismo qualquer, dígitos à direita serão menores ou da ordem de grandeza da incerteza. Consequentemente, seria inútil expressá-los. Observe que para realizar a soma/subtração, é importante que todas as medidas sejam expressas na mesma unidade e ordem de grandeza.

EXEMPLO:

$$12,03 \text{ cm} + 3,6 \text{ cm} = 15,\bar{6}3 \text{ cm} \quad (1.13)$$

$$= 15,6 \text{ cm}. \quad (1.14)$$

Constantes Quando efetuamos uma operação envolvendo uma constante matemática e uma medida, conservamos no resultado o mesmo número de algarismos significativos da medida.

Nesse caso temos que a constante matemática não tem incerteza nenhuma, então podemos considerá-la com um número infinito de algarismos significativos.

EXEMPLO:

$$A = \pi \times (3,66 \text{ m})^2 \quad (1.15)$$

$$= \pi \times (13,\bar{3}956 \text{ m}^2) \quad (1.16)$$

$$= 42,\bar{0}8351855 \text{ m}^2 \quad (1.17)$$

$$= 42,1 \text{ m}^2. \quad (1.18)$$

Funções Quando uma medida é o argumento de uma função, mantemos para o resultado o número de algarismos significativos da medida.

⁴ Uma série de potência é uma forma de escrever uma função em termos de potências, somas e subtrações. Em geral, tais séries contém um número infinito de termos.

As funções trigonométricas $\sin x$ e $\cos x$, por exemplo, são descritas pelas séries

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

onde x é um ângulo expresso em radianos.

⁵ Isso é útil para podermos truncar a soma da série a um número pequeno de parcelas, afinal não faz sentido calcular parcelas que têm valores menores que a incerteza das parcelas dominantes

Uma maneira de entender isso é o fato de que podemos escrever funções como séries de potência⁴ — que são basicamente multiplicações, somas e subtrações —. Dessa forma, podemos verificar que ao tomarmos a medida e realizarmos o produto por ela mesma, devemos ter um resultado com o mesmo número de algarismos significativos para todas as parcelas que serão somadas/subtraídas, sendo que o número de casas após a vírgula fica determinado pelo primeiro termo que não é constante. Assim, ao somarmos, a parcela maior dominará e teremos que o resultado terá o mesmo número de algarismos significativos que o argumento da função⁵.

EXEMPLO:

$$x = \ln 3,555 \quad (1.19)$$

$$= 1,26\bar{8}355063 \quad (1.20)$$

$$= 1,268. \quad (1.21)$$

1.2.5 Arredondamento

Nos exemplos da seção anterior, usamos uma barra para denotar o último algarismo significativo antes de descartar os algarismos excedentes. Sempre que os descartarmos, devemos fazê-lo observando os critérios de arredondamento.

Quando obtemos resultados do tipo

$$\ell = 134,\bar{3}9487, \quad (1.22)$$

precisamos fazer um *arredondamento*. No exemplo acima, vemos que 134,4 é um número mais próximo do resultado do que 134,3. Portanto, adotamos as seguintes regras ao realizarmos o arredondamento:

1. Se o algarismo seguinte ao duvidoso for menor que 5, simplesmente descartamos os algarismos excedentes.
2. Se o algarismo seguinte ao duvidoso for maior ou igual a 5, aumentamos o duvidoso de uma unidade e descartamos os demais.

Esse critério de arredondamento não é único. Em algumas situações se utiliza uma regra específica para o caso de o algarismo seguinte ao duvidoso ser 5: analisa-se o algarismo seguinte a esse e caso ele for par, se arredonda para cima e caso for ímpar, para baixo.

2 Gráficos

Uma maneira simples de verificar a relação entre duas grandezas é a elaboração de um gráfico de dispersão. Apesar de não podermos verificar valores exatos em um gráfico, uma observação do comportamento geral de um conjunto de pontos pode ser muito esclarecedora, principalmente se levarmos em conta que todas as medidas efetuadas sofram uma dispersão aleatória em torno de seus valores ideais. Verificaremos como elaborar um gráfico de maneira a evidenciar o comportamento das variáveis consideradas e, no Capítulo 4, verificaremos como descrever de maneira idealizada a dependência entre as variáveis.

2.1 Gráficos

Um gráfico é uma maneira de transformar um conjunto de dados numéricos em uma figura, relacionando valores numéricos a escalas de cor, distâncias ou áreas. No livro *The Visual Display of Quantitative Information*¹, Edward R. Tufte afirma que

Gráficos mostram quantidades visualmente através do uso combinado de pontos, linhas, um sistema de coordenadas, números, símbolos, palavras, sombreamento, e cor.

e que

Gráficos modernos podem fazer muito mais que simplesmente substituir pequenas tabelas de dados. Quando utilizados em seu máximo potencial, gráficos são instrumentos para raciocinar sobre informações quantitativas. Frequentemente a maneira mais efetiva para descrever, explorar, e sumarizar um conjunto de números — mesmo um conjunto muito grande — é através de figuras de tais números.

Tufte afirma que talvez em virtude da diversidade de técnicas e informações necessárias — habilidades artísticas e matemáticas, dados experimentais — a utilização de figuras abstratas para representar números é relativamente recente (1750 em diante). Dentre os autores que desenvolveram o campo da representação gráfica de dados, ele destaca o trabalho de William Playfair, que desenvolveu melhorias para vários tipos de gráficos. Tufte também destaca o trabalho de Johann Heinrich Lambert² que percebe que os gráficos não precisam necessariamente relacionar quantidades em analogia ao mundo físico — como séries temporais, isto é, a evolução de um valor qualquer de acordo com a evolução do tempo —, mas podem ser elaborados para quaisquer duas variáveis cujas relações desejamos verificar:

Temos em geral duas quantidades variáveis, x , y , que serão comparadas uma à outra por observação, de forma que para cada valor de x — que

¹ Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001. ISBN: 0-9613921-4-2

² Johann Heirich Lambert. "Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung". Em: Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001, p. 45. ISBN: 0-9613921-4-2

pode ser considerada como uma abscissa — determinamos a ordenada correspondente y . Se as observações experimentais fossem completamente precisas, essas ordenadas resultariam em um número de pontos através dos quais uma curva ou uma reta deveriam ser traçadas.²

Existem vários tipos de gráficos, cada um com o objetivo de evidenciar características específicas do conjunto de dados em questão:

- *Gráficos de setores* servem bem o propósito de mostrar a contribuição relativa de várias parcelas que perfazem um todo;
- *Gráficos de colunas/barras* servem para comparação entre diversos valores absolutos;
- *Gráficos de colunas/barras empilhadas* denotam valores absolutos e demonstram a composição relativa de várias contribuições para o todo. Une as propriedades dos dois tipos anteriores;
- *Séries temporais* denotam a evolução temporal de variáveis com o tempo;
- *Mapas de dados* servem para demonstrar dados que variam de acordo com a distribuição geográfica;
- *Gráficos de dispersão* permitem verificar a relação entre duas variáveis quaisquer;
- *Histogramas* são similares aos gráficos de barra, mas voltados à apresentação de contagens de eventos em diversos intervalos;

além de outros tipos. Em comum a todos os tipos de gráfico, está a utilização de dimensões como área e comprimento, ou tonalidades de cor, para representar informações numéricas.

Temos especial interesse nos gráficos de dispersão. Esse tipo de gráfico serve para verificar relações de causa e efeito entre duas variáveis quaisquer. De acordo com Tufte,

[...] Na literatura científica moderna, em torno de 40% dos gráficos publicados têm uma forma relacional, com duas ou mais variáveis. Isto não é sem propósito, já que os gráficos relacionais — em sua forma mais simples, o gráfico de dispersão e suas variantes — é o mais formidável de todos os tipos de gráficos. Eles ligam pelo menos duas variáveis, encorajando e mesmo suplicando que o leitor se pergunte qual é a possível relação causal entre elas. Eles confrontam as teorias causais [...] com evidências empíricas.

De fato, estamos interessados em verificar experimentalmente a relação entre diversas variáveis através de experimentos. Além disso, desejamos testar teorias científicas, procurando confirmar ou refutar suas validades.

Finalmente, como recomendações gerais para a elaboração de gráficos, Tufte destaca:

- *A representação de números através de medidas de superfície em um gráfico deve ser proporcional às quantidades numéricas representadas.*³

³ Esse item é bastante visível ao se analisar um gráfico de campanha política: o candidato que deseja evidenciar sua vantagem costuma realizar um corte de forma que o zero não seja no menor valor da escala mostrada e também adota uma largura maior para sua coluna. Dessa forma uma diferença insignificante (menor que o erro da própria pesquisa) parece muito grande.

- Cada parte de um gráfico gera expectativa visual sobre as outras partes. Se uma escala que se move em intervalos regulares, por exemplo, se espera que ela continue a fazê-lo. Mostre a variação dos dados, não variação na elaboração do gráfico.
- Em séries temporais, ao se mostrar dados relativos a dinheiro, geralmente é melhor utilizar quantidades corrigidas pela inflação.
- O número de dimensões utilizadas para demonstrar informações não deve exceder o número de dimensões dos dados⁴.
- Acima de tudo, mostre os dados.⁵

2.2 Gráficos de dispersão

Gráficos de dispersão são ferramentas muito usadas para visualizar relações matemáticas entre uma função e seu argumento. Por exemplo, sabemos que a função $f(x) = A + Bx$ é uma equação da reta, pois seu gráfico é uma reta. Cada função tem um gráfico característico.

Em experimentos de laboratório é comum procuramos estabelecer a relação entre duas grandezas. Uma delas variamos arbitrariamente e denominamos como **variável independente**, já a outra medimos e — como seus valores variam em resposta aos da variável independente — a denominamos como **variável dependente**. Tais variáveis são representadas nos eixo x (abscissas) e y (ordenadas), respectivamente, sendo o primeiro o eixo horizontal e o segundo o vertical.

O maior objetivo de uma teoria é justamente encontrar a relação matemática f que relaciona x e y , ou seja, que nos dá y em função de x : $y = f(x)$. Isso não é algo que possa ser retirado dos gráficos de uma maneira simples, por diversas razões. Primeiramente, os dados experimentais se distribuem em torno do comportamento ideal devido a variações aleatórias. Além disso, mesmo que possamos tirar uma conclusão a partir do gráfico, tal conclusão só é válida para o intervalo de valores que compreende as medidas, podendo ser diferente em outras regiões. Finalmente, uma relação extraída dos dados experimentais não consegue explicar em argumentos lógicos o mecanismo que relaciona uma variável à outra, portanto não explicando o comportamento. De qualquer forma, uma gráfico que mostra uma dependência confiável de uma variável em relação a outra já abre um caminho para a investigação. Também podemos utilizar os dados experimentais para *verificar a validade de previsões teóricas*.

2.2.1 Principais elementos de um gráfico de dispersão

Os elementos mais notáveis de um gráfico de dispersão são:

Eixos: Os valores das variáveis dependente e independente são expressos pelas distâncias ao longo dos eixos vertical e horizontal em relação à origem (encontro dos dois eixos). Muitas vezes os valores das variáveis são distantes de zero e não podem ser verificados adequadamente se um dos eixos — ou mesmo ambos —

⁴ As dimensões são as maneiras diferentes que os dados podem variar. Se, por exemplo, desejamos comparar o número de habitantes de diversas cidades, devemos utilizar uma figura com uma dimensão (um gráfico de barras) e não com duas (a área de um círculo).

⁵ Isto é, faça um gráfico simples, sem floreios, que mostre os dados.

iniciarem em zero. Por isso, é comum que se realizem “cortes” nos eixos de maneira que eles não iniciem em zero. Nesse caso, os valores são expressados por meio da distância relativa que os pontos ocupam entre duas marcas numeradas nos eixos (veja o item seguinte). Os eixos devem ser nomeados com a variável que está sendo representada e suas unidades.

Escalas: Para que a leitura do gráfico possa ser efetuada de uma maneira quantitativa, ainda que aproximada, é importante que se efetuem marcas nos eixos e que tais marcas sejam numeradas com os valores que elas representam no eixo. Tais marcas não precisam iniciar em zero, porém devem ser efetuadas em intervalos regulares e com números de fácil leitura. Nas escalas não devem ser marcados os valores das abscissas e ordenadas dos pontos⁶.

Pontos experimentais: Os dados experimentais são representados através de pontos na área retangular delimitada pelos eixos horizontal e vertical. A localização dos pontos é aquela do encontro das retas paralelas aos eixos horizontal e vertical e que passam pelas posições desses eixos que correspondem aos valores que desejamos representar. Para que o ponto seja facilmente visível, indica-se a utilização de quadrados, círculos, triângulos, etc. centrados no ponto de encontro das retas. Caso mais que um conjunto de dados seja representado no mesmo gráfico, devem ser utilizados símbolos diferentes para cada conjunto.

Como elementos opcionais, temos:

Legenda: Se temos somente um conjunto de dados, a legenda pode ser dispensada. No entanto, se temos dois ou mais conjuntos — ou mesmo curvas —, representados no mesmo gráfico, é essencial que seja feita uma legenda indicando o que cada símbolo representa.

Linha de tendência: Uma reta ou curva que represente o comportamento “médio” dos pontos é denominada como *linha de tendência*. Muitas vezes estaremos interessados nesse tipo de curva, porém verificaremos como calculá-las adequadamente no Capítulo 4. Tal curva deve ficar restrita à área do gráfico que contém os dados experimentais (entre os valores mínimo x_{min} e máximo x_{max} para as abscissas dos dados experimentais).

Título: Um título pode ser adicionado ao gráfico indicando como eles foram obtidos. Um exemplo de título adequado é “Valores do deslocamento de um corpo em queda livre em função do tempo”; Uma versão inadequada desse título seria “Gráfico de Δx em função de t ”.

Muitas vezes alguns desses elementos são omitidos. O título e a legenda, por exemplo, podem ser descritos na *legenda da figura* — o pequeno texto que aparece abaixo das figuras, como na Figura 2.1 —. Já a linha de tendência pode ser omitida por não ser de interesse do autor do gráfico.

⁶ Exceto no caso em que os próprios valores das variáveis ocorrem em intervalos regulares e tais intervalos correspondem ao mais adequado para a escala do eixo. Isso ocorre mais comumente com os valores do eixo independente (horizontal).

Exemplo de um gráfico de dispersão

Se tomarmos as medidas da Tabela 2.1, podemos fazer um gráfico como o da Figura 2.1. Nesse gráfico podemos perceber que foram aplicados alguns princípios básicos para a elaboração de um gráfico adequado:

- O gráfico deve ter os dois eixos com numerações que aparecem em *intervalos regulares* — a cada 100 no eixo x e a cada 10 no eixo y —.
- O eixo y foi “cortado”, iniciando em 20. Isto é adequado pois não existem dados cujos valores da variável dependente sejam menores que 20.
- Os eixos começam e terminam em valores que permitem que toda a área disponível do gráfico é bem utilizada.
- O gráfico possui uma legenda indicando o que os pontos representam.
- Os eixos foram nomeados e indicam as unidades dos dados.
- O título descreve sucintamente o que o gráfico representa.

Tubo 1		Tubo 2	
t (s)	T °C	t (s)	T °C
0	98	0	92
5,71	93	8,27	87
17,79	88	17,43	82
34,50	83	31,07	77
61,63	78	44,98	72
83,96	73	67,78	67
109,09	68	96,57	62
130,78	63	115,26	57
149,09	58	135,78	52
184,21	53	170,32	47
217,09	48	213,28	42
261,28	43	268,04	37
315,90	38	349,44	32
373,35	33	465,71	27
470,55	28	575,21	24
504,21	25		

Tabela 2.1: Dados para a temperatura de tubos metálicos em função do tempo para o processo de resfriamento convectivo.

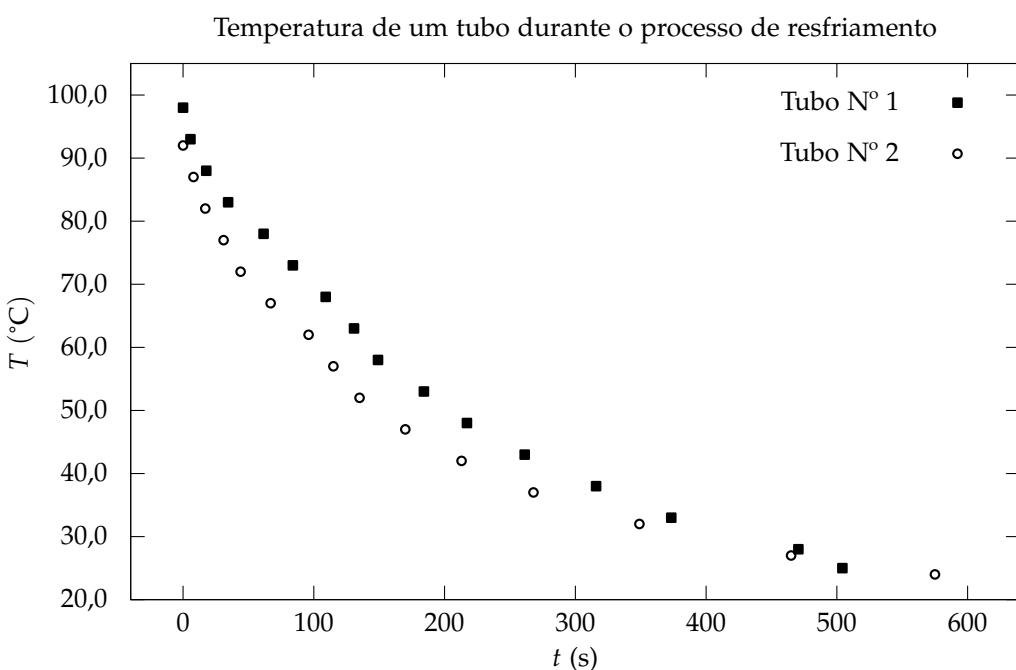


Figura 2.1: Gráfico dos dados da Tabela 2.1.

2.2.2 Problemas mais comuns em gráficos de dispersão

A elaboração de um gráfico não é uma tarefa que podemos reduzir a um certo número de passos. Um gráfico deve ser utilizado de maneira a evidenciar dados ou seu comportamento e muitas vezes isso implica em fugirmos das regras mais comuns: por exemplo, se desejamos mostrar com o auxílio de uma linha de tendência qual é

o valor estimado da variável dependente em uma região do gráfico distante dos pontos experimentais. De qualquer forma, podemos recomendar que os seguintes itens sejam evitados:

Não utilizar adequadamente a área do gráfico: Muitas vezes nossos dados não iniciam em zero. Nesse caso devemos escolher um número próximo, porém inferior, ao primeiro valor que ocorre naquele eixo e iniciar o eixo em tal número. Se, por exemplo, devemos marcar em um eixo os valores 107,25, 115,12, 129,90, 138,22, etc., uma boa escolha é iniciar o eixo em 100 e realizarmos as marcações no eixo a cada 10. Outra escolha adequada seria iniciar o eixo em 105 — porém, nesse caso, não marcamos o “canto” do gráfico como 105 —. Realizamos a marcação em 110 e daí em diante a cada 10.

Não utilizar espaçamento regular na numeração dos eixos: Marcações irregulares, isto é, com “espaçamento variável” não devem ser realizadas. Utilizando os dados do item acima, poderíamos realizar marcações no eixo em 105, 115, 130 e 140. Porém a distância entre essas marcações não é regular, o que dificulta a leitura do gráfico.

Marcar os valores de x e y dos pontos experimentais: Os valores de abscissas e de ordenadas dos pontos não devem aparecer nos eixos ordenados. Veja que no gráfico da Figura 2.1 ocorrem muitos valores que ficam entre duas marcações quaisquer, porém os valores correspondentes aos pontos não devem ser marcados no eixo.

Linhas que ligam os pontos aos eixos: Muitos alunos ligam os pontos aos eixos x e y usando linhas tracejadas. Tais linhas não têm propósito nenhum e dificultam a visualização dos pontos experimentais. Caso queiramos saber exatamente os valores das variáveis independente e dependente, podemos verificarlos na tabela de dados.

Linhas que ligam os pontos entre si: Os pontos marcados a partir de dados experimentais nunca devem ser ligados entre si. Quando marcamos curvas ou retas em um gráfico, isso significa que temos conhecimento sobre todos os pontos que compõe aquela curva. Isso só pode ser razoável para curvas matemáticas, não para dados experimentais. Estes são verificados “pontualmente” e não podemos afirmar nada sobre o que obteríamos entre dois pontos quaisquer. Portanto, a reta que liga dois pontos experimentais não carrega informação alguma e não deve ser traçada. Veja a Figura 2.2 para um exemplo do que não fazer.

2.2.3 Elaborando um gráfico com papel milimetrado

Hoje podemos fazer um gráfico rapidamente usando um programa de computador. No entanto, é interessante fazer alguns gráficos com papel milimetrado e lápis/caneta para sabermos o que tais programas estão fazendo.

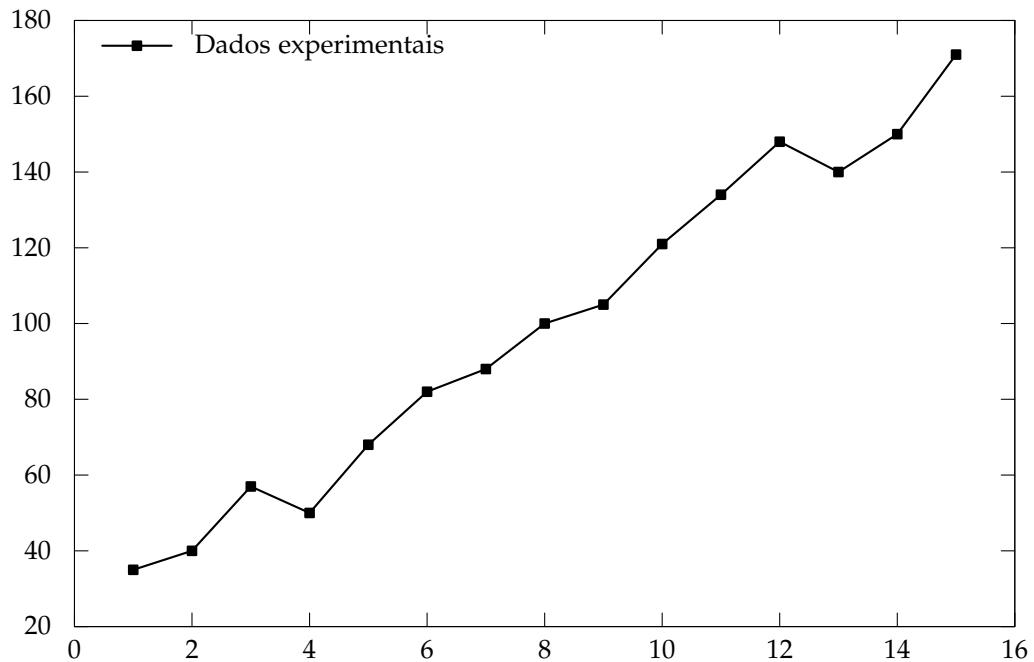


Figura 2.2: Exemplo do que não fazer:
ligar os pontos experimentais, não no-
mear os eixos, não colocar unidades.

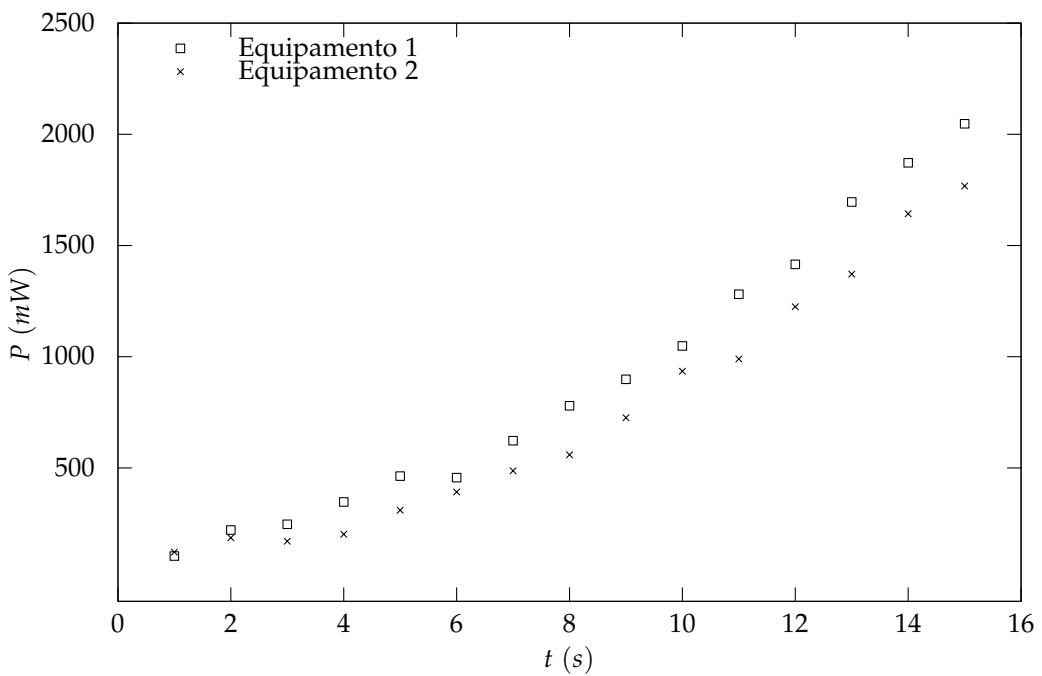


Figura 2.3: Exemplo de gráfico contendo
vários conjuntos de dados. Notem que
cada conjunto usa um símbolo diferente
para os dados e que não ligamos os pon-
tos. Além disso, fazemos um corte no
eixo x para aproveitar a área do gráfico.

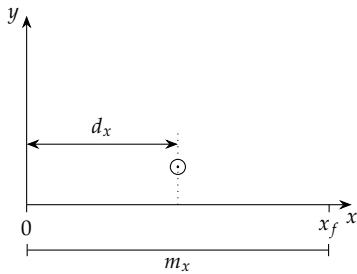


Figura 2.4: Variáveis para o cálculo da posição de um ponto em um gráfico em que o eixo x inicia em zero.

Elaborar um gráfico em papel milimetrado é uma questão de observar as regras gerais para a elaboração de gráficos e usar regras de três. O procedimento para elaborar o gráfico consiste no seguinte (veja a Figura 2.5):

1. Verificar quais os valores mínimo x_i e máximo x_f para o eixo x . Tais valores devem ser um pouco menor e um pouco maior que os valores mínimo e máximo para as abscissas dos dados experimentais, respectivamente.
2. Verificar quais os valores mínimo y_i e máximo y_f para o eixo y . Como no caso do eixo x , os valores escolhidos devem ser um pouco menor e um pouco maior que os valores das ordenadas dos pontos experimentais, respectivamente.
3. Verificar o tamanho do papel e desenhar os eixos *dentro da área milimetrada* e não na borda dessa área. Em geral, deixa-se um centímetro entre a borda da área milimetrada e o eixo para que possamos fazer as escalas. Com isso determinamos as medidas m_x e m_y dos eixos horizontal e vertical no papel.
4. Se escolhermos $x_i = 0$, temos que a distância m_x em relação à origem do eixo x representa o valor x_f que escolhemos para o final do eixo⁷. Isso é equivalente a dizer que cada unidade de medida no eixo x equivale a uma quantidade⁸

$$f_x = \frac{x_f}{m}. \quad (2.4)$$

Assim, se precisamos representar um valor x_p de um ponto $P = (x_p, y_p)$ qualquer, calculamos a distância d_x em relação à origem — veja a Figura 2.4 — através de⁹

$$d_x = \frac{x_p}{f_x} = x_p \frac{m_x}{x_f}. \quad (2.5)$$

Se fazemos um corte no eixo x em um valor x_i , temos que uma unidade de medida nesse eixo representa uma quantidade (veja a Figura 2.5)

$$f_x = \frac{x_f - x_i}{m_x}. \quad (2.6)$$

Dessa forma, se precisamos representar um valor x_p , devemos dividir pelo fator f_x somente o valor que *excede* o valor do corte x_i . Portanto, a distância d_x é dada por¹⁰,

$$d_x = \frac{(x_p - x_i)}{f_x} = (x_p - x_i) \frac{m_x}{x_f - x_i}. \quad (2.7)$$

Vamos considerar, por exemplo, um conjunto de dados cujas abscissas correspondem a uma variável t , cujas unidades são segundos. Verificamos que o menor valor de abscissa para os pontos é 36,29 s e o maior 104,04 s. Todas as abscissas estão compreendidas entre 30 s e 110 s e podemos escolher tais valores¹¹ como o início e o fim

⁷ O raciocínio para o eixo y é o mesmo, por isso mostramos somente para o eixo x .

⁸ O que temos é uma regra de *proporção*, ou seja, uma regra de três:

$$\frac{d}{m} = \frac{x_p}{x_f}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{m} = \frac{x_f}{x_f}, \quad (2.2)$$

o que resulta em

$$d_x = x_p \frac{m_x}{x_f}. \quad (2.3)$$

⁹ Note que a fração que aparece nessa equação é um valor constante. Calculando tal valor podemos simplesmente multiplicá-lo pelo valor x_p de cada ponto para descobrir quanto cada um dista da origem.

¹⁰ Veja que se tivermos um ponto em que x_p é igual a x_i , ele deve ficar sobre a posição de corte do eixo ($d_x = 0$), o que está de acordo com o que a equação prevê. Note também que novamente o valor da fração é constante, facilitando o cálculo da distância.

¹¹ Outra escolha possível seria entre 35 s e 105 s. No entanto, devemos tomar cuidado com a escolha pois alguns pontos podem ficar muito próximos dos eixos, dificultando a leitura do gráfico.

do eixo x . A medida do eixo no gráfico é $m_x = 25,00$ cm. Assim, se desejamos encontrar a distância d_x a partir do início do eixo em que devemos marcar um ponto cuja abscissa é $x_p = 47,20$ s temos

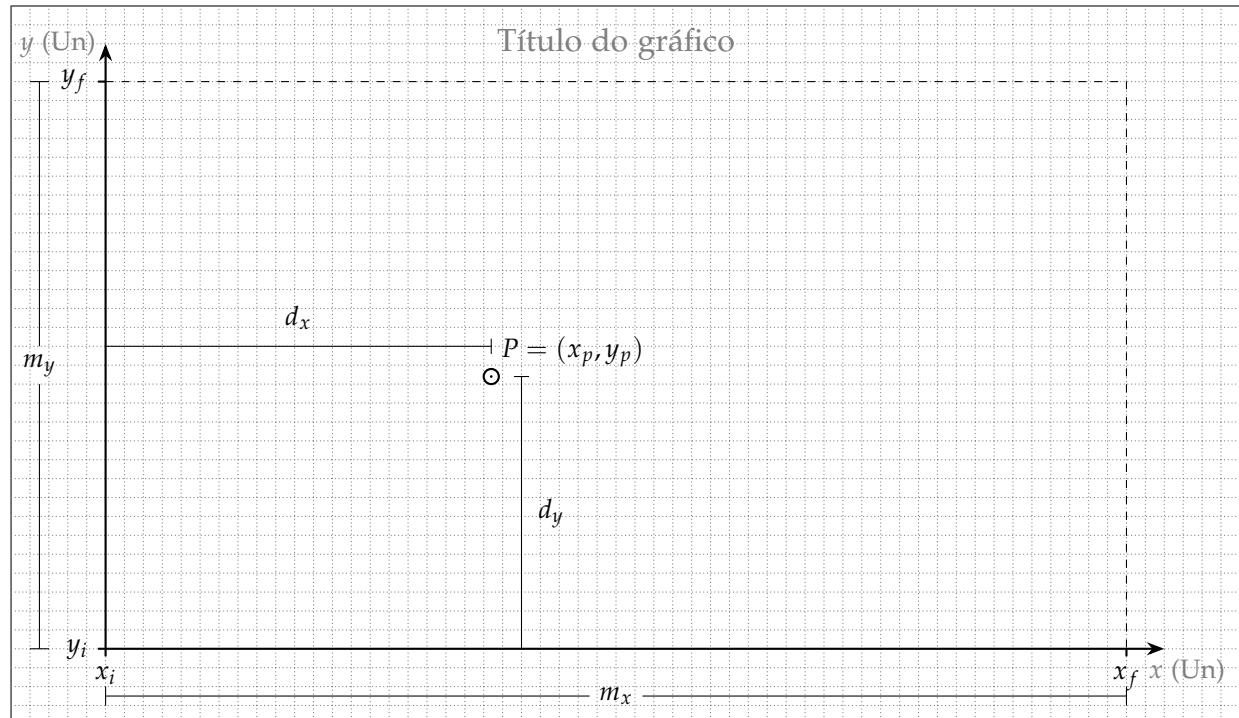
$$d_x = (47,20 - 30) \frac{25,00}{110 - 30} \quad (2.8)$$

$$= 5,375 \text{ cm.} \quad (2.9)$$

5. Podemos determinar a posição do ponto $P = (x_p, y_p)$ no eixo y de maneira análoga, calculando a distância d_y através de

$$d_y = (y_p - y_i) \frac{m_y}{y_f - y_i}. \quad (2.10)$$

6. Também podemos calcular a posição de uma marca das escalas dos eixos x e y utilizando as Equações (2.7) e (2.10). Para isso basta utilizarmos o valor que desejamos marcar no lugar da abscissa x_p ou da ordenada y_p . Após encontrarmos a posição das duas primeiras marcas, no entanto, basta verificar a distância entre elas e utilizá-la para marcar a posição das demais marcas, já que o espaçamento deve ser constante.



Utilizando o procedimento acima, todos os pontos experimentais estarão distribuídos dentro da área demarcada pelo valor máximo y_f no eixo y e pelo valor máximo x_f no eixo x — na Figura 2.5, a região retangular delimitada pelos eixos x e y , e pelas retas tracejadas —. Veja que o adequado aproveitamento dessa região está diretamente ligado aos valores escolhidos para x_i , y_i , x_f e y_f : se, por exemplo, escolhermos valores para x_i e y_i que não sejam menores que os valores mínimos das abscissas e ordenadas dos pontos, teremos pontos abaixo

Figura 2.5: Esquema para a elaboração de um gráfico em papel milimetrado.

do eixo x , à esquerda do eixo y , ou ambos. Outro problema, nesse caso, é que os pontos podem ficar sobre os eixos ou muito próximos deles, dificultando a sua visualização. Por outro lado, se escolhermos valores para x_i e y_i muito menores que os valores mínimos das abscissas e ordenadas dos pontos, teremos grandes regiões vazias à esquerda e/ou abaixo dos pontos do gráfico. Analogamente, devemos escolher valores de x_f e y_f que sejam maiores que os valores máximos das abscissas e ordenadas dos pontos, porém não muito maiores: se escolhermos valores menores que os máximos, teremos pontos fora do gráfico; se escolhermos valores muito maiores que os máximos, teremos regiões vazias à direita e/ou acima dos pontos experimentais.

Uma dificuldade prática dos cálculos acima é a de que muitas vezes eles incorrem em fatores de escala não muito práticos, pois resultam em números “quebrados” que tornam a marcação dos pontos no papel milimetrado suscetível a erros. Uma maneira de contornar esse problema é aproximarmos a escala: tomando o eixo x , por exemplo, calculamos através dos valores x_f , x_i e m_x um fator de escala f_x onde

$$f_x = \frac{x_f - x_i}{m_x}. \quad (2.11)$$

Após calculá-lo, o arredondamos para algum dos valores seguintes: 1, 2, 2,5, 4, 5 ou 10, ou qualquer múltiplo ou submúltiplo decimal desses (isto é, esses números multiplicados por 10 elevado a alguma potência inteira), sempre fazendo o arredondamento para cima. A partir desse valor arredondado f'_x , podemos calcular a distância d_x entre o início do eixo e o ponto através de

$$d_x = \frac{x_p - x_i}{f'_x}. \quad (2.12)$$

3 Erros

Se precisamos fabricar uma peça de um mecanismo, as tolerâncias nas medidas são em geral muito pequenas, portanto não podemos utilizar equipamentos de medida pouco precisos. Verificaremos que todas as medidas têm um limite de validade dado pela incerteza na medida, sendo que um aumento na precisão de uma medida significa uma diminuição em tal incerteza. Verificaremos quais as origens dos erros e como propagá-los no cálculo de uma medida indireta.

3.1 Erros de medidas

Se, por exemplo, tomarmos uma trena cujas divisões são em decímetros e a utilizarmos para medir o diâmetro de um tubo de PVC e com essa informação adquirir uma conexão para o tubo, corremos um grande risco de adquirir uma conexão com um diâmetro inadequado. Claramente estamos usando um instrumento de medida com uma escala inadequada. Nunca é possível se conhecer uma medida com exatidão: Sempre que efetuamos uma medida, a ela estará associada uma incerteza, ou um “erro”. Determinar esse erro nos permitirá conhecer o limite de utilidade de uma medida.

Outro fator que dificulta o processo de medida é o fato de que medições sucessivas podem resultar em valores diferentes: se cronometrarmos o tempo de queda de um objeto de uma certa altura com uma precisão razoável, observaremos valores diferentes em cada medida. O tratamento desse tipo de incerteza requer técnicas provenientes da análise estatística, possibilitando a obtenção de um valor mais provável.

Portanto, a determinação do valor de uma medida não é uma tarefa fácil. Além de requerer um método e equipamentos apropriados, precisamos também de uma análise matemática dos resultados para determinar o valor mais adequado. No caso de uma grandeza calculada a partir de outras, precisamos ainda determinar o erro associado, de forma a ter uma ideia de quanto confiável é o nosso resultado. Essas tarefas nem sempre são fáceis e dão origem a uma série de métodos que compõe uma *teoria de tratamento de erros e medidas*. No laboratório aplicaremos alguns conceitos descritos a seguir.

3.2 Medidas e erros

Ao efetuarmos uma medição no dia a dia, nos contentamos em atribuir à medida um valor e uma unidade. Expressamos a medida de uma sala, por exemplo, como

$$\ell = 4,32 \text{ m.} \quad (3.1)$$

Entretanto, associada a toda medida existe uma *incerteza* ou *erro*. Tal erro pode ser composto por três partes: erros sistemáticos, erros de escala e erros aleatórios. Podemos então descrever uma medida mais precisamente ao escrevermos

$$\ell = (4,32 \pm 0,05) \text{ m}, \quad (3.2)$$

o que nos diz que além de sabermos que nossa medida é da ordem de 4,32 m, ela pode variar de 0,05 m para mais ou para menos.

É importante destacarmos que o erro é expresso com somente um algarismo significativo. Uma exceção importante a essa regra é no caso de termos erros cujo primeiro algarismo é 1: nesse caso se admite um erro com dois algarismos significativos. Veremos abaixo os tipos de erro e como calculá-los.

3.2.1 Tipos de erros

De uma forma geral, os erros de medida podem ser classificados em três categorias^{1,2}:

Erros sistemáticos São erros cuja causa é bem definida e sempre afetam as medidas da mesma maneira. Um exemplo disso são relógios desenvolvidos para usar como padrão de tempo a frequência de oscilação da corrente elétrica de instalações elétricas residenciais. Ocorre, no entanto, que diferentes países adotam frequências diferentes de oscilação da corrente: alguns usam 50 Hz outros 60 Hz (isto é, 50 ou 60 oscilações por segundo). Utilizar um desses relógios em uma região inadequada fará com que ele subestime ou superestime a passagem do tempo. O problema na medida do tempo é sistemático e por isso pode ser corrigido, seja usando um relógio adequado, seja calculando o tempo correto com base no tempo medido.

Apesar do fato de que — uma vez conhecido o erro sistemático — sua eliminação é relativamente simples, na prática este é um erro bastante difícil de se identificar. O primeiro passo visando garantir que as medidas não tenham erros sistemáticos é calibrar os instrumentos de medida. Tal calibração não pode ser realizada para um único valor, pois o erro pode ser nulo para tal medida e aumentar conforme se aumenta o valor medido. Ainda que essas medidas sejam tomadas, um instrumento pode ter problemas conforme se aumenta a magnitude dos valores a serem medidos, pode não ser exatamente linear para alguma faixa de valores, dentre outros problemas possíveis. No entanto, apesar de todos os cuidados, uma fonte de erro pode passar desapercebida, prejudicando as medidas obtidas.

Erros aleatórios Um erro aleatório é todo erro que faz variar a medida de maneira imprevisível, porém com igual probabilidade de subestimar ou superestimar o “valor real” da medida. Este tipo de incerteza, portanto, se opõe ao erro sistemático, que tenta a

¹ João J. Piacentini et al. *Introdução ao Laboratório de Física*. 2^a Edição. Editora da UFSC, 2001

² José Ricardo Marinelli e Flavio Renato Ramos de Lima. *Laboratório de Física I*. 2^a Edição. UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. ISBN: 978-85-8030-001-7

subestimá-la *ou* superestimá-la. A aleatoriedade da incerteza possibilita que ela seja tratada através de métodos estatísticos, tornando factível a extração de valores de medida precisos através da rea-lização de várias medidas. O fato de a incerteza ser aleatória é algo bom: erros sistemáticos são muito mais difíceis de se eliminar, eliminar e tratar do que simplesmente aumentar o número de medidas e assim diminuir o erro, por mais que isso em geral envolva uma grande quantidade de trabalho para a obtenção dos dados.

Através de cálculos estatísticos, é possível se mostrar que ao se efetuar um grande número de medidas, a melhor estimativa para uma grandeza pode ser extraída através do cálculo da média das medidas. Assim, para um conjunto de medidas x_1, x_2, \dots, x_n , temos que o melhor valor é dado por³:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.4)$$

³ O símbolo $\langle \rangle$ em $\langle x \rangle$ denota a média da variável x .

Verificaremos no Capítulo 5 que a incerteza do processo de medição pode ser calculada através dos desvios das medidas em relação ao valor médio. Além disso, verificaremos que a incerteza na média das medidas diminui conforme o número de medidas aumenta, mesmo que cada uma delas tenham a mesma incerteza.

Erros de escala Ao realizarmos medidas utilizando um equipamento analógico, verificamos uma série de algarismos com absoluta cer-teza e estimamos um algarismo adicional. Este algarismo pode acabar sendo subestimado ou superestimado durante a leitura da escala do instrumento. Temos, portanto, uma fonte adicional de erros.

De maneira similar, em equipamentos digitais não sabemos qual seria o próximo dígito caso utilizássemos um equipamento com maior precisão e não sabemos se o equipamento simplesmente descarta os demais dígitos ou os utiliza para realizar arredonda-mentos. Assim a melhor estimativa da medida pode estar contida em um intervalo acima ou abaixo do valor apresentado pelo ins-trumento de medida. Portanto também temos fontes de incerteza relacionadas à medida no caso de um equipamento digital.

Em ambos os casos as incertezas estão ligadas à leitura das medidas e dependem das escalas utilizadas nos instrumentos de medida, dando origem ao que denominamos como *erros de escala*. Esse tipo de erro é o mais relevante para os experimentos realizados nos laboratórios didáticos, e o veremos em mais detalhes na próxima seção.

O erro total de uma medida é então composto pelos três erros descritos acima. Em uma situação qualquer, um deles pode ser muito maior que os demais, determinando o valor do erro. Um exemplo disso é o uso de cronômetros manuais nos quais a menor divisão

⁴ Veremos adiante como determinar o erro de escala.

da escala está em centésimos de segundo. Verificando o erro de escala, teremos um erro de um centésimo de segundo na medida⁴. No entanto, o tempo de reação do usuário do cronômetro é maior do que o erro de escala, levando a um erro aleatório da ordem de 0,2 s. Nesse caso o erro total é dado por 0,21 s, porém como utilizamos somente um algarismo significativo para denotar o erro, temos um erro de 0,2 s, que é o próprio erro aleatório — isto é, o erro aleatório é dominante —.

Quando temos um tipo de erro que é muito maior que os outros, precisamos considerar somente o erro dominante, descartando os demais. Em geral é isso o que acontece com medidas estáticas, como as realizadas por um paquímetro ou por uma régua: nesse caso o erro dominante é o de escala, enquanto o aleatório é desprezível. Como esse é o caso da maioria das medidas realizadas nas experiências de laboratório didático, focaremos nossa atenção predominantemente neste tipo de erro. Devido às dificuldades em tratar os erros sistemáticos, consideraremos que os aparelhos utilizados estejam devidamente calibrados e que não existe nenhum erro sistemático relevante.

3.3 Erros de escala em uma medida direta

Podemos dividir a questão do erro de escala de uma medida direta em dois casos, conforme o tipo de equipamento que estamos utilizando:

Equipamentos analógicos: Se utilizarmos um equipamento analógico — como uma régua milimetrada, por exemplo — podemos verificar medidas menores que 1 mm se estimarmos valores entre uma casa de milímetros e outra. Podemos dizer que o erro associado deve ser claramente menor que 1 mm, pois ao realizar uma medida de — por exemplo — 13,41 cm, um erro de 1 mm poderia levar essa medida ao valores extremos $\ell - \delta\ell = 13,31$ cm e $\ell + \delta\ell = 13,51$ cm: Claramente há um exagero, afinal tais medidas estariam muito próximas das marcas de 13,3 cm e 13,5 cm que conseguimos distinguir perfeitamente em uma régua. Um valor menor para o erro parece uma melhor ideia. Se tomarmos um valor para o erro de 0,5 mm, os valores extremos de ℓ se tornariam mais razoáveis, pois não poderíamos afirmar com tanta certeza de que não se tratam de valores claramente distinguíveis em uma medida: $\ell - \delta\ell = 13,36$ cm e $\ell + \delta\ell = 13,46$ cm.

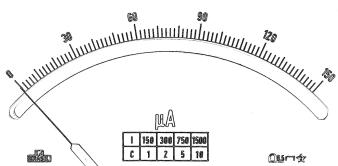


Figura 3.1: Para eliminar erros de leitura devidos à paralaxe, muitos equipamentos utilizam um espelho atrás do ponteiro (região curva abaixo da escala): quando a imagem do ponteiro no espelho está atrás do próprio ponteiro, temos certeza de que estamos vendo o ponteiro exatamente de frente, eliminando este tipo de erro.

Um erro pequeno pode ser cometido na própria leitura dos valores devido à paralaxe (deslocamento aparente entre dois objetos localizados a distâncias diferentes do observador quando este se move). Isso é bastante notável em equipamentos analógicos em que a medida é mostrada por um ponteiro, pois quando o observador se desloca uma pequena distância para um lado ou outro, a posição aparente do ponteiro muda. Para evitar o erro de paralaxe, a medida deve ser feita de forma que o ponteiro seja observado diretamente de frente. Alguns aparelhos têm uma região espelhada atrás do ponteiro para eliminar esse tipo de erro, sendo que a lei-

tura correta é feita quando a imagem do ponteiro fica escondida atrás dele.

Em alguns equipamentos, a menor divisão da escala — o que denominamos como *resolução* do equipamento — pode ser muito grande. Nesse caso, temos mais facilidade em avaliar o algarismo estimado. Podemos então reduzir o valor do erro para $1/3$ ou $1/4$ da medida. No entanto isso não é muito comum, pois em geral os fabricantes dos equipamentos optam por divisões pequenas com o intuito de possibilitar a realização de medidas precisas. Nos equipamentos que utilizaremos no laboratório didático, as divisões são em geral pequenas e por isso adotaremos sempre que o erro é equivalente à metade da menor divisão da escala.

Equipamentos digitais ou dotados de escala auxiliar: Se, por outro lado, o equipamento for digital podemos realizar uma medida como $M = 14,2\text{ g}$, por exemplo. Se utilizássemos um equipamento mais preciso, talvez essa medida pudesse variar entre $14,15\text{ g}$ até $14,25\text{ g}$ (incluindo o primeiro valor, porém não incluindo o último) devido a arredondamentos realizados pelo equipamento em virtude do número reduzido de casas decimais. Outra possibilidade é a de que o equipamento simplesmente descarte dígitos menores que décimos de grama, o que permitiria que as medidas variassem entre $14,20\text{ g}$ e $14,29\text{ g}$. Poderíamos escolher para o erro do equipamento o valor de metade da menor divisão da escala abaixo do valor mostrado e de uma divisão acima. Por simplicidade, no entanto, assumimos que no caso de equipamentos digitais o erro é equivalente à menor divisão da escala tanto acima quanto abaixo do valor indicado.

Se o equipamento é dotado de uma escala auxiliar, verificamos que ao realizar a leitura em geral percebemos que duas ou três marcas parecem alinhadas com as marcas da escala principal. Se tormarmos a do meio, por exemplo, poderíamos considerar que a medida pode variar dentro do intervalo compreendido pelas marcas à esquerda e à direita. Logo, também adotamos para o erro a menor divisão da escala. Como tanto os equipamentos digitais, quanto os dotados de escala auxiliar possuem erros dados pela mesma regra, equipamentos desses dois tipos são comumente referidos coletivamente como *não-analógicos*.

3.4 Erros propagados

Se precisamos calcular a área de uma folha, é mais fácil realizar um cálculo através do produto das medidas de ambos os lados, que comparar com um “padrão de área”. Se temos um erro nas medidas das laterais, no entanto, deve haver um erro associado à medida da área.

Na Figura 3.3 mostramos o cálculo da área a partir de duas medidas ℓ_1 e ℓ_2 . Como cada uma dessas medidas possui um erro associado, denotados por $\delta\ell_1$ e $\delta\ell_2$, respectivamente, devemos calcular os valores máximos e mínimos da área:

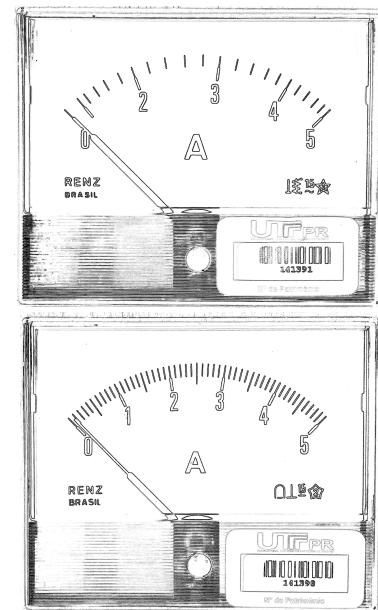


Figura 3.2: Dois equipamentos capazes de realizar medidas em um intervalo de zero a cinco ampéres. Note que a menor divisão da escala é menor no segundo caso.

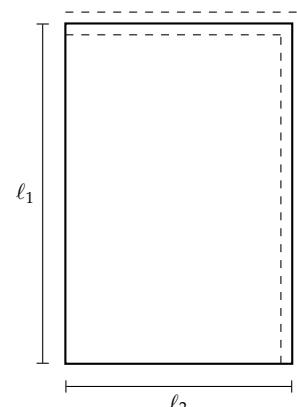


Figura 3.3: Erro no cálculo da área de um retângulo.

$$A_- = (\ell_1 - \delta\ell_1)(\ell_2 - \delta\ell_2) \quad (3.5)$$

$$= \ell_1\ell_2 - (\ell_1\delta\ell_2 + \ell_2\delta\ell_1 - \delta\ell_1\delta\ell_2) \quad (3.6)$$

$$A_+ = (\ell_1 + \delta\ell_1)(\ell_2 + \delta\ell_2) \quad (3.7)$$

$$= \ell_1\ell_2 + (\ell_1\delta\ell_2 + \ell_2\delta\ell_1 + \delta\ell_1\delta\ell_2). \quad (3.8)$$

Se desprezarmos o produto $\delta\ell_1\delta\ell_2$, que deve ser muito pequeno, já que os erros são — em geral — pequenas frações das medidas, podemos escrever as expressões acima como uma só:

$$A = \ell_1\ell_2 \pm (\ell_1\delta\ell_2 + \ell_2\delta\ell_1). \quad (3.9)$$

Temos então uma expressão para calcular o erro associado à área da folha.

A expressão acima, não está limitada ao cálculo de uma área, mas serve para qualquer multiplicação de dois números. Veremos adiante que podemos determinar um método geral para a obtenção do erro para qualquer expressão. A partir de tal método, é possível deduzir os resultados abaixo

$$(x \pm \delta x) + (y \pm \delta y) = (x + y) \pm (\delta x + \delta y) \quad (3.10a)$$

$$(x \pm \delta x) - (y \pm \delta y) = (x - y) \pm (\delta x + \delta y) \quad (3.10b)$$

$$(x \pm \delta x) \cdot (y \pm \delta y) = (x \cdot y) \pm (|x| \cdot \delta y + |y| \cdot \delta x) \quad (3.10c)$$

$$(x \pm \delta x) \div (y \pm \delta y) = (x \div y) \pm \frac{|x| \cdot \delta y + |y| \cdot \delta x}{y^2} \quad (3.10d)$$

$$(x \pm \delta x)^n = x^n \pm n \cdot x^{n-1} \cdot \delta x \quad (3.10e)$$

$$\ln(x \pm \delta x) = \ln x \pm \frac{\delta x}{x} \quad (3.10f)$$

$$\log(x \pm \delta x) = \log x \pm \frac{0,4343 \cdot \delta x}{x}. \quad (3.10g)$$

É importante observar, no entanto, que apesar de podermos calcular o erro propagado em uma operação complexa como uma sucessão de operações simples — como as do conjunto de equações acima — em geral esse erro é maior do que aquele que seria obtido se deduzíssemos a expressão para o erro a partir da expressão geral para o erro propagado.

Exemplos de cálculo de erro propagado

Vamos fazer agora alguns exemplos de operações envolvendo medidas. Para isso, vamos tomar duas medidas ℓ_1 e ℓ_2 , dadas por

$$\ell_1 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.11)$$

$$\ell_2 = (11,14 \pm 0,05) \text{ cm}. \quad (3.12)$$

No caso de termos uma soma de tais medidas, temos — usando a Equação (3.10a) —

$$\ell_1 + \ell_2 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} + (11,14 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.13)$$

$$= ([13,24 + 11,14] \pm [0,05 + 0,05]) \text{ cm} \quad (3.14)$$

$$= (24,30 \pm 0,10) \text{ cm}. \quad (3.15)$$

De maneira similar, podemos calcular a diferença entre tais medidas através da Equação (3.10b):

$$\ell_1 - \ell_2 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} - (11,14 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.16)$$

$$= ([13,24 - 11,14] \pm [0,05 + 0,05]) \text{ cm} \quad (3.17)$$

$$= (13,24 \pm 0,10) \text{ cm}. \quad (3.18)$$

Note que apesar de estarmos realizando uma subtração, os erros são *somados*.

Para o cálculo de um produto, a determinação do erro utilizando a Equação (3.10c) é um pouco mais elaborada que no caso da soma ou subtração:

$$\ell_1 \ell_2 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} \times (11,14 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.19)$$

$$= ([13,24 \cdot 11,14] \pm [|13,24| \cdot 0,05 + |11,14| \cdot 0,05]) \text{ cm}^2 \quad (3.20)$$

$$= (147,493\,6 \pm 1,219) \text{ cm}^2 \quad (3.21)$$

$$= (147,5 \pm 1,2) \text{ cm}^2. \quad (3.22)$$

Veja que no cálculo acima realizamos todas as operações com toda a precisão disponível — isto é, utilizamos todos os dígitos da calculadora —, mas como último passo descartamos os dígitos cuja ordem de grandeza é menor que a do último algarismo significativo. Esse procedimento deve ser adotado em todos os cálculos envolvendo medidas.

O cálculo do erro na operação de divisão através da Equação (3.10d) é similar ao caso da multiplicação, porém envolve um passo a mais devido à divisão do erro pelo denominador:

$$\ell_1 \div \ell_2 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} \div (11,14 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.23)$$

$$= \left([13,24 \div 11,14] \pm \left[\frac{|13,24| \cdot 0,05 + |11,14| \cdot 0,05}{11,14^2} \right] \right) \quad (3.24)$$

$$= (1,188\,509\,874 \pm 0,009\,822\,755) \quad (3.25)$$

$$= (1,189 \pm 0,010). \quad (3.26)$$

Para a potencia, temos no caso geral a Expressão (3.10e). Tal equação deve ser particularizada para a potência em questão:

$$\ell_1^2 = [(13,24 \pm 0,05) \text{ cm}]^2 \quad (3.27)$$

$$= (13,24^2 \pm [2 \cdot 13,24^{(2-1)} \cdot 0,05]) \text{ cm}^2 \quad (3.28)$$

$$= (175,297\,6 \pm 1,324) \text{ cm}^2 \quad (3.29)$$

$$= (175,3 \pm 1,3) \text{ cm}^2. \quad (3.30)$$

Também podemos utilizar a Expressão (3.10e) para o cálculo de potências negativas. Para o caso $n = -1$ em especial, temos

$$\ell_1^{-1} = [(13,24 \pm 0,05) \text{ cm}]^{(-1)} \quad (3.31)$$

$$= (13,24^{(-1)} \pm [(-1) \cdot 13,24^{((-1)-1)} \cdot 0,05]) \text{ cm}^{-1} \quad (3.32)$$

$$= (0,075\,528\,701 \pm [13,24^{(-2)} \cdot 0,05]) \text{ cm}^{-1} \quad (3.33)$$

$$= (0,075\,528\,701 \pm 0,000\,285\,229) \text{ cm}^{-1} \quad (3.34)$$

$$= (0,075\,53 \pm 0,000\,3) \text{ cm}^{-1} \quad (3.35)$$

$$= (7,553 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}. \quad (3.36)$$

As operações exemplificadas acima são as que aparecem com maior frequência em cálculos. Muitas vezes, no entanto, será necessário aplicar mais que uma fórmula. Se, por exemplo, precisamos determinar o resultado de uma expressão do tipo

$$R = \frac{\ell_1(\ell_2 - \ell_3)}{\ell_4}, \quad (3.37)$$

devemos separar o cálculo em etapas, calculando o erro em cada uma delas:

- Primeiro calculamos a diferença $d = \ell_2 - \ell_3$;
- Após isso, calculamos o produto $p = \ell_1 \cdot d$;
- Finalmente, determinamos razão $R = p/\ell_4$.

3.4.1 Constantes e erros propagados

No caso de termos operações envolvendo constantes como π , ou qualquer outro valor conhecido absolutamente (como 2, 3, 4, etc.) — isto é, que não são medidas —, podemos simplesmente efetuar a operação com a constante e o erro da mesma forma que com a medida. Por exemplo

$$r = (4,0 \pm 0,5) \text{ mm} \quad (3.38)$$

$$p = 2\pi r \quad (3.39)$$

$$= 2\pi(4,0 \pm 0,5) \text{ mm} \quad (3.40)$$

$$= (2\pi 4,0 \pm 2\pi 0,5) \text{ mm} \quad (3.41)$$

$$= (25 \pm 3) \text{ mm} \quad (3.42)$$

sempre respeitando o número de algarismos significativos e os critérios de arredondamento.

3.5 Erros e algarismos significativos

Verificamos que as medidas fornecidas por instrumentos são expressas por um conjunto de algarismos significativos e que algarismos além deles são mera especulação. Também utilizamos regras gerais para determinar o número de algarismos significativos de uma medida indireta com base no número de algarismos significativos das medidas diretas. Agora que conhecemos o erro, podemos entender a origem dos algarismos significativos de uma maneira simples: eles são os algarismos cuja ordem de grandeza é maior ou igual àquela do erro.

Para verificar como funciona esse processo, vejamos o seguinte conjunto de medidas:

$$v_0 = (10,345 6 \pm 0,01) \text{ m/s} \quad (3.43)$$

$$a = (2,065 8 \pm 0,05) \text{ m/s}^2 \quad (3.44)$$

$$t = (3,000 \pm 0,001) \text{ s.} \quad (3.45)$$

Utilizando essas informações e as fórmulas para o erro propagado, obtemos — utilizando a relação $v = v_0 + at$ — o seguinte resultado:

$$v = (16,543 \pm 0,162\,065\,8) \text{ m/s.} \quad (3.46)$$

O erro é sempre expresso com um ou dois algarismos significativos⁵. Nesse caso, o erro da medida acima pode ser expresso como $\delta v = 0,16 \text{ m/s}$. Vemos também que a medida tem algarismos cuja ordem de grandeza é menor que o erro e são, portanto, sem significado. Podemos reduzir nossa medida para a velocidade a

$$v = (16,54 \pm 0,16) \text{ m/s.} \quad (3.47)$$

Analizando o erro das medidas mostradas nas Equações (3.43) a (3.45), percebemos que existem vários algarismos sem significado. Retirando-os, obtemos

$$v_0 = (10,35 \pm 0,01) \text{ m/s} \quad (3.48)$$

$$a = (2,07 \pm 0,05) \text{ m/s}^2 \quad (3.49)$$

$$t = (3,000 \pm 0,001) \text{ s.} \quad (3.50)$$

Verificamos agora que a medida para a aceleração a tem somente três algarismos significativos. Segundo a regra sobre o número de algarismos significativos para o resultado de uma multiplicação, devemos manter então somente três algarismos. Ao somarmos com o valor de v_0 , a regra nos diz para mantermos duas casas após a vírgula. De fato, isto nos dá um resultado que coincide com aquele obtido através da análise do erro propagado (Equação (3.47)).

3.6 Incerteza fracional e percentual

Se realizamos uma medição com um instrumento e obtemos $\ell_1 = (15,3 \pm 0,5) \text{ cm}$, o erro é de aproximadamente 3,3%. Se realizarmos outra medição com o mesmo instrumento e obtivermos $\ell_2 = (3,4 \pm 0,5) \text{ cm}$, teremos um erro de aproximadamente 14,7%. Claramente no segundo caso temos uma medida mais incerta que no primeiro, o que acarretará em consequências para o cálculo de medidas indiretas.

Para calcularmos o erro como uma fração da medida, basta o dividirmos pelo valor da medida:

$$E_f = \frac{\delta x}{x}. \quad (3.51)$$

Como x e δx possuem a mesma unidade, o erro fracional é adimensional. O erro percentual pode ser calculado multiplicando-se o erro fracional por 100:

$$E\% = 100 \cdot E_f. \quad (3.52)$$

É comum encontrar dispositivos eletrônicos cujo erro é dado como um número percentual. Por exemplo, podemos ter um resistor cuja resistência R é de 500Ω , com erro de 5 %. Isso significa que a medida da resistência é $R = (500 \pm 25) \Omega$, ou melhor, $R = (5,0 \pm 0,3) \cdot 10^2 \Omega$.

⁵ Lembre-se que utilizamos dois se o primeiro algarismo significativo do erro, isto é, o primeiro dígito diferente de zero, for 1; nos demais casos utilizamos somente um algarismo significativo.

Outro uso comum do erro percentual é ao se declarar a precisão de um instrumento de medida. Se um voltímetro declara sua precisão como 1 %, isso significa que em uma medida $V_1 = 13,45\text{ V}$ temos um erro $\delta V_1 = 0,13\text{ V}$. Já em uma medida $V_2 = 156,35\text{ V}$, temos um erro $\delta V_2 = 1,6\text{ V}$. Temos, portanto, um caso em que o erro da medida — também chamado de *erro absoluto* — varia, mas o erro percentual é constante, indicando que o instrumento é igualmente adequado (ou inadequado, dependendo de sua necessidade de precisão) para uma ampla faixa de valores de medida.

Os erros fracional e percentual nos indicam que sempre que desejarmos conhecer uma medida calculada a partir de outras, devemos procurar utilizar medidas diretas com um grande número de algarismos significativos, de forma a minimizar o erro percentual. Por exemplo, se calcularmos o valor da aceleração da gravidade através de

$$g = \frac{2\Delta x}{t^2}, \quad (3.53)$$

a partir das medidas

$$t_1 = (0,15 \pm 0,01) \text{ s} \quad (3.54)$$

$$\Delta x_1 = (0,11 \pm 0,02) \text{ m} \quad (3.55)$$

e

$$t_2 = (1,32 \pm 0,01) \text{ s} \quad (3.56)$$

$$\Delta x_2 = (8,54 \pm 0,02) \text{ m}, \quad (3.57)$$

obteremos os valores

$$g_1 = (9,8 \pm 2) \text{ m/s}^2 \quad (3.58)$$

$$g_2 = (9,80 \pm 0,1) \text{ m/s}^2. \quad (3.59)$$

Claramente as medidas diretas têm o mesmo erro absoluto, no entanto erros fracionais/percentuais diferentes. Isso se reflete na incerteza da medida indireta, onde no segundo caso obtemos um erro muito menor, devido ao menor erro fracional/percentual.

3.6.1 Erro percentual em relação a um valor de referência

Em experiências didáticas, é muito comum que estejamos interessados em determinar o valor de uma constante física cujo valor já é conhecido experimentalmente com grande precisão. Nesses casos, é interessante obter um valor percentual de diferença entre o valor obtido e o valor de referência. Tal valor também é conhecido como erro percentual, e pode ser calculado através da expressão

$$E_{\%} = \left| \frac{x - x_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \right| \cdot 100, \quad (3.60)$$

onde x representa o valor que obtemos experimentalmente e x_{ref} representa o valor de referência.

3.7 Expressão geral para o cálculo do erro propagado

Apesar de termos conseguido calcular o erro propagado de uma maneira relativamente simples para o caso do produto de duas medidas, precisamos de um método mais robusto, que possa ser aplicado a *qualquer tipo de função*. Se tivermos uma medida q , dada por $q = f(x, y, z, \dots, \xi, \dots)$, onde $x, y, z, \dots, \xi, \dots$ representam medidas diretas através das quais calculamos a medida indireta q , podemos calcular uma variação em q em relação a uma variação em uma das medidas — na medida ξ , por exemplo — através de uma derivada:

$$\frac{dq}{d\xi} = \frac{df(x, y, z, \dots, \xi, \dots)}{d\xi}. \quad (3.61)$$

Podemos então escrever a variação dq como

$$dq = \left(\frac{df(x, y, z, \dots, \xi, \dots)}{d\xi} \right) d\xi. \quad (3.62)$$

Assumindo que as variáveis x, y, z, \dots, ξ são todas independentes, podemos escrever a expressão acima como

$$dq = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots, \xi)}{\partial \xi} \right) d\xi. \quad (3.63)$$

Agora podemos identificar as variações $d\xi$ e dq na expressão acima com próprios erros nas medidas. Logo, a contribuição para o erro em q devido ao erro $\delta\xi$ é dada por

$$\delta q = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots, \xi)}{\partial \xi} \right) \delta \xi. \quad (3.64)$$

Cada uma das medidas dá origem a um termo análogo à expressão acima. Somando todas essas contribuições, obtemos

$$\delta q = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \delta z + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| \delta \xi, \quad (3.65)$$

onde tomamos o valor absoluto da derivada parcial para eliminar possíveis “compensações” devido a sinais diferentes para cada termo.

A partir da equação acima, podemos calcular o erro para qualquer função que nos dê uma medida indireta. Se, por exemplo, considerarmos a área de um retângulo

$$A = f(\ell_1, \ell_2) = \ell_1 \ell_2, \quad (3.66)$$

temos:

$$\delta A = \left| \frac{\partial(\ell_1 \ell_2)}{\partial \ell_1} \right| \delta \ell_1 + \left| \frac{\partial(\ell_1 \ell_2)}{\partial \ell_2} \right| \delta \ell_2 \quad (3.67)$$

$$= |\ell_2| \delta \ell_1 + |\ell_1| \delta \ell_2, \quad (3.68)$$

que é exatamente a expressão que encontramos quando analisamos os valores máximo e mínimo para a área do retângulo.

4 Regressão Linear

Apesar de podermos verificar previsões teóricas pela simples comparação com os dados experimentais obtidos (assumindo que eles sejam confiáveis), devido à dispersão dos dados não temos um bom método para extrair informações a partir das medidas. Veremos que para isso precisamos determinar a linha de tendência dos dados. A partir das informações para essa linha, conseguiremos extrair informações acerca de parâmetros físicos do sistema.

4.1 Linhas de Tendência

Quando realizamos um experimento, procuramos relacionar uma variável dependente a uma variável independente. Para visualizarmos a relação entre as duas, é interessante fazer uma representação gráfica da variável dependente em função dos valores da variável independente. Podemos assim verificar uma tendência geral dos pontos, que pode seguir padrões retilíneos, parabólicos, etc. Retomando a citação ao texto de Johann H. Lambert (e a extendendo), temos¹

Se as observações experimentais fossem completamente precisas, essas ordenadas resultariam em um número de pontos através dos quais uma curva ou uma reta deveriam ser traçadas. No entanto, esse não é o caso, a curva/reta desvia pouco ou muito dos pontos observados. Portanto, ela deve ser traçada de maneira que passe tão próxima quanto possível das posições verdadeiras e vá, como se fosse, pelo meio dos pontos em questão.

Muitas vezes tal padrão é muito claro, pois os pontos tem uma dispersão baixa. Outras vezes a dispersão é razoavelmente alta e fica difícil verificar tal padrão.

Mesmo em casos em que podemos verificar um padrão aparente ao fazer um gráfico, determinar a forma mais adequada para a *linha de tendência* que melhor descreve os pontos experimentais — ou mesmo afirmar que tais pontos seguem este padrão — pode ser complicado. Se, por exemplo, fizermos uma série de medidas que seguem um padrão parabólico, mas com medidas que se restringem a um intervalo pequeno da variável independente, o gráfico terá a aparência de uma reta (veja as Figuras 4.1 e 4.2).

Determinar o padrão seguido pelos pontos, é, portanto, uma tarefa que não pode ser feita a partir de um gráfico: o mais adequado é termos uma *teoria acerca do fenômeno físico* que descreva qual é o padrão que os pontos devem seguir, e usar um gráfico para determinar se tal descrição é coerente. Verificaremos posteriormente como determinar se uma teoria é plausível ou não, por hora vamos nos preocupar em determinar a *melhor reta* que ajusta um conjunto de dados.

¹Johann Heinrich Lambert. "Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung". Em: Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001, p. 45. ISBN: 0-9613921-4-2

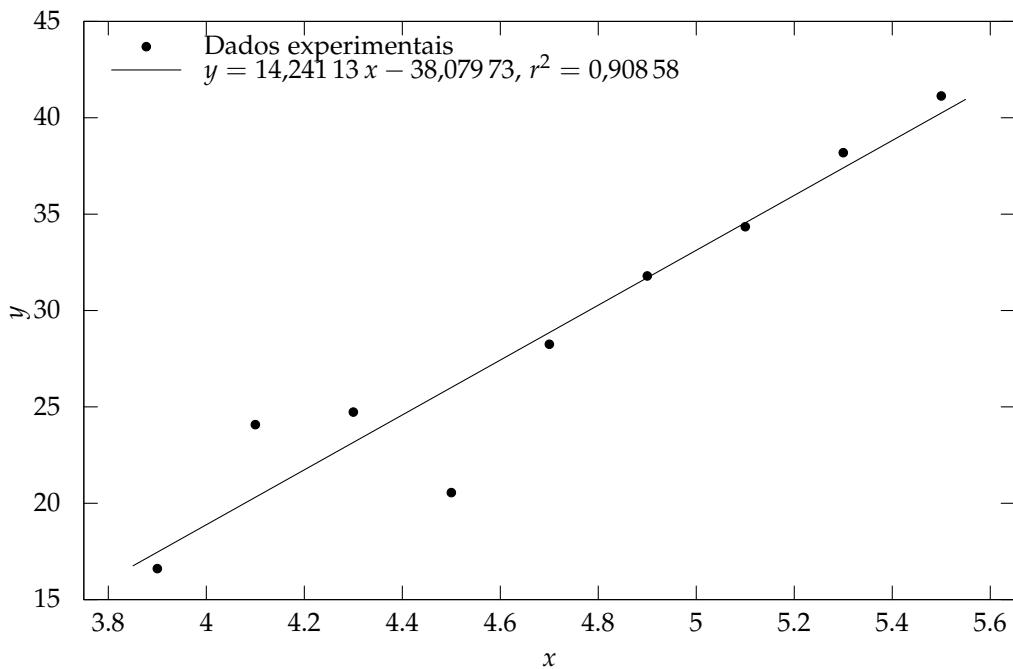


Figura 4.1: Gráfico de um conjunto de pontos que aparentemente seguem uma tendência linear. Veja também a Figura 4.2.

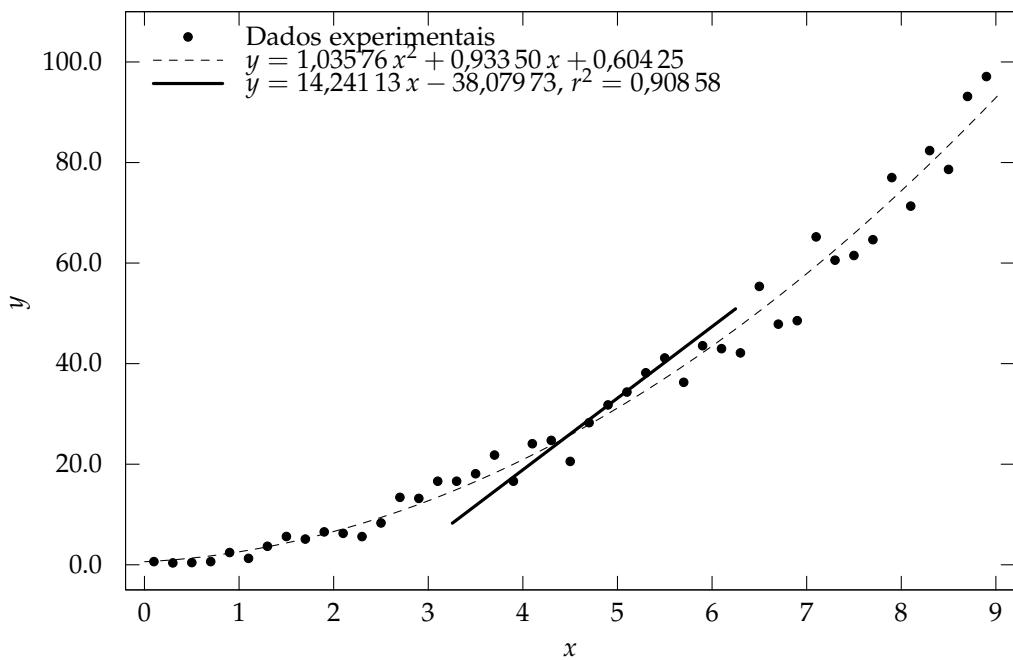


Figura 4.2: Gráfico do mesmo conjunto de pontos da Figura 4.1, juntamente com diversos outros pertencentes ao mesmo conjunto de dados. Verifique que a tendência linear aparente no primeiro gráfico já não é mais razoável. De fato, os dados correspondem a uma distribuição em torno de uma parábola.

Existem outros tipos de regressão, como a logarítmica ou exponencial, ou mesmo processos capazes de calcular os coeficientes para uma equação com uma forma qualquer. No entanto, nos restringiremos ao caso linear devido ao fato de que a maioria das calculadoras científicas é capaz de realizar tal processo. Além disso, uma vez conhecida a equação da reta, adicioná-la ao gráfico dos dados experimentais é uma questão de calcular dois pontos e traçar uma reta com uma régua.

4.2 Regressão Linear

Sempre que tivermos um conjunto de dados, podemos calcular a melhor reta que o representa através de um processo de *regressão linear*. Este processo consiste em aplicar um método matemático que tome os dados experimentais e calcule os coeficientes linear A e angular B para a equação da reta:

$$y = A + Bx. \quad (4.1)$$

A dimensão do coeficiente linear é a mesma que a da variável dependente y — ou seja, é a mesma que do eixo y em um gráfico $y \times x$ —, enquanto a dimensão do coeficiente angular é a mesma que a da razão entre a dimensão da variável dependente pela dimensão da variável independente — isto é, é a razão entre a dimensão do eixo y e a dimensão do eixo x em um gráfico $y \times x$.

O método utilizado para obter tais coeficientes é o de *mínimos quadrados*. Nele, são encontrados os coeficientes de forma a minimizar o quadrado da distância entre os pontos experimentais e a “melhor reta”. É possível mostrar², utilizando técnicas de cálculo, que para minimizarmos a soma do quadrado das distâncias entre os pontos e a melhor reta, os coeficientes linear e angular são dados por

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.2)$$

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (4.3)$$

onde as somas se dão sobre todas as medidas x_i e y_i , N representa o número de medidas, e as médias das medidas para as variáveis x e y são representadas por $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$, respectivamente. É importante lembrar que as relações acima são válidas somente para o caso em que os erros associados às medidas de x e y são constantes, isto é, a incerteza δx para as medidas de x são todas iguais, assim como a incerteza δy para as medidas de y . Após fazer a regressão, podemos utilizar os coeficientes para traçar as *retas de tendência* nos gráficos³.

Ao fazermos o processo de regressão linear, a calculadora também calculará o *coeficiente de correlação linear* r , dado por

$$r = \frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{\sqrt{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2 \sum (y_i - \langle y \rangle)^2}}. \quad (4.4)$$

Tal coeficiente pode ser interpretado como um “índice de confiança” e geralmente é calculado ao quadrado, pois seus valores podem variar

² John R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis*. 2nd Edition. University Science Books, 1997. ISBN: 0-935702-75-X

³ Quando tais retas forem calculadas, adicione as equações resultantes aos gráficos.

x	y_1	y_2	y_3
0,714	14,577	0,678	1,235
2,693	20,696	8,806	-0,153
4,389	25,226	20,988	-0,657
4,960	27,449	28,474	-0,592
6,245	30,242	40,030	0,961
7,277	33,378	55,780	1,149
7,579	34,195	64,904	1,635
7,719	35,715	64,394	1,476
7,912	35,011	66,412	1,739
8,280	37,529	74,632	1,249
9,034	40,590	87,455	0,200
9,442	39,156	94,785	0,146
10,306	43,238	113,030	-0,231
10,572	42,406	111,970	-0,575
11,177	44,796	129,481	0,121
15,335	57,611	235,805	0,446
17,023	63,832	294,533	-0,780
18,926	68,063	372,048	0,500
20,608	74,408	426,581	1,118
20,876	75,083	456,391	1,065
21,095	75,248	452,660	1,085
22,225	77,243	507,765	0,271
22,407	81,058	509,275	-0,230
22,469	78,821	521,414	0,394
23,077	80,714	554,175	-0,198
26,421	91,433	700,788	1,869
26,863	91,777	732,601	1,724
27,360	93,291	773,226	1,452

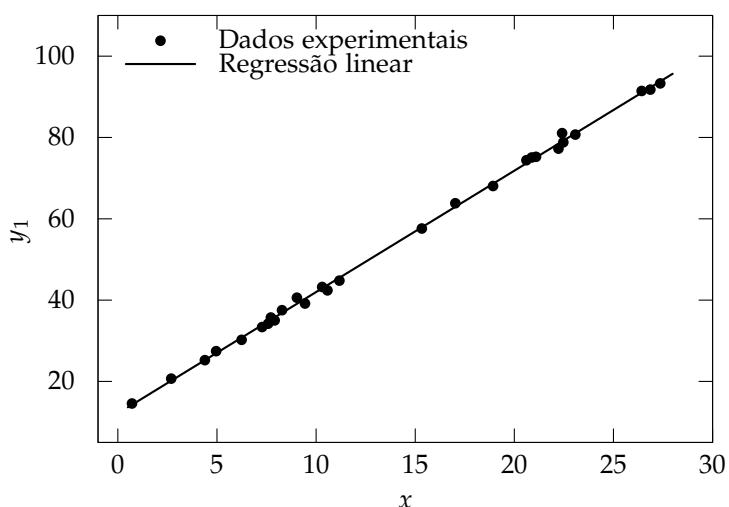
Tabela 4.1: Dados de três variáveis (y_1 , y_2 e y_3) em função de uma quarta (x).

entre -1 e 1 . Quanto mais próximo r for de ± 1 , menor é a dispersão dos pontos em relação ao comportamento retilíneo, ou seja, maiores são as chances de que o fenômeno estudado e que deu origem aos dados siga uma relação linear. Este número geralmente se parece com algo como $r^2 = 0,999\,98$, $r^2 = 0,997$, $r^2 = 0,990$, etc., quando os dados são altamente lineares e relativamente abundantes. Se a dispersão em relação ao comportamento linear for grande e forem poucos os pontos, r^2 pode cair para $0,7$, ou valores menores.

Um aspecto importante a ser considerado é se os dados realmente seguem uma tendência linear: uma distribuição qualquer de pontos, mesmo que visivelmente não linear, pode ser descrita por uma melhor reta. Caso a tendência não seja linear, o coeficiente r^2 resultará um valor baixo. Nas Figuras 4.3 a 4.5 mostramos três conjuntos de dados distintos juntamente com suas respectivas melhores retas e coeficientes de dispersão r^2 . Os dados foram gerados utilizando as expressões $y_1 = A + B(x + r_1) + r_2$, $y_2 = A(r_1 + x)^2 + B + r_2$ e $y_3 = A \operatorname{sen}(x + r_1) + B + r_2$, onde r_1 e r_2 são números aleatórios entre zero e um, enquanto A e B representam constantes arbitrárias — veja a Tabela 4.2 —. Verificamos que nos três casos podemos calcular uma melhor reta, ainda que para y_2 e y_3 o comportamento não seja linear.

Dentre as três figuras, a Figura 4.4 se destaca. Nesse caso, temos um comportamento não linear, porém verificamos que o valor do coeficiente r^2 é relativamente alto. Ocorre que o comportamento dos dados sofre uma distorção relativamente pequena — apesar de visivelmente não linear — em relação a um comportamento linear e por isso obtemos um valor grande para o coeficiente de dispersão. Muitas vezes um comportamento verdadeiramente linear pode apresentar uma distorção pequena como esta, porém devido a flutuações aleatórias, e não devido à não-lineariedade. A distinção entre essas duas possibilidades pode ser feita realizando mais medidas: Se o comportamento for verdadeiramente linear, o valor de r^2 tenderá a crescer, enquanto no caso de termos um comportamento não-linear, o valor desse coeficiente deve permanecer constante, ou diminuir.

Figura 4.3: Conjunto de dados 1. A reta da regressão linear é dada por $y(x) = 2,984\,480\,401x + 12,140\,462\,64$, $r^2 = 0,998\,901\,256$.



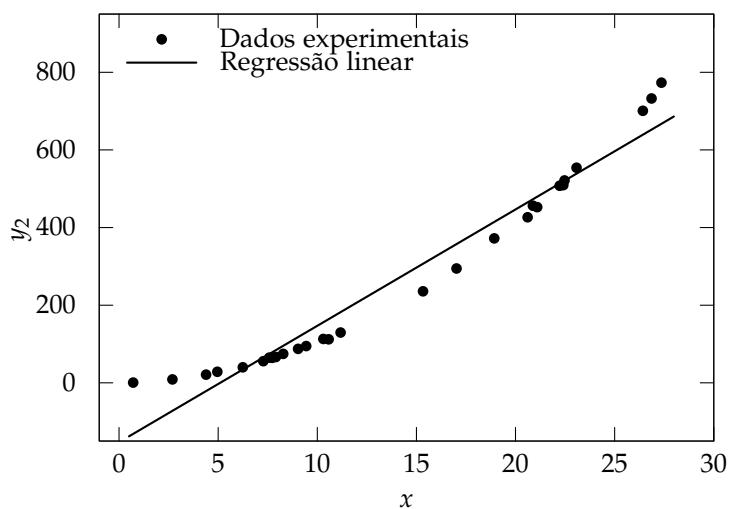


Figura 4.4: Conjunto de dados 2. A reta da regressão linear é dada por $y(x) = 29,978\,230\,68x - 152,924\,429$, $r^2 = 0,956\,577\,278$.

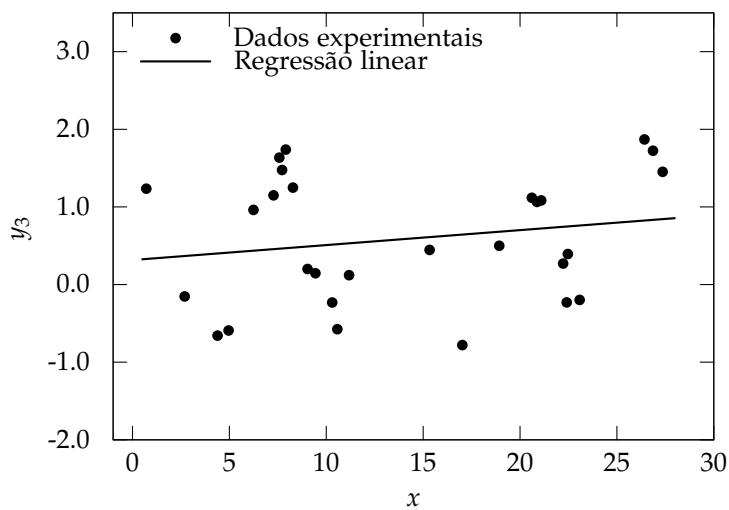


Figura 4.5: Conjunto de dados 3. A reta da regressão linear é dada por $y(x) = 0,019\,262\,681x + 0,316\,038\,383$, $r^2 = 0,035\,985\,674$.

Exemplo: Cálculo dos coeficientes da regressão linear

Para determinarmos os valores das constantes A , B , e do coeficiente r^2 é necessário calcularmos uma série de valores intermediários. Na Tabela 4.2 (página 49) apresentamos tais valores intermediários para o caso do cálculo dos coeficientes da regressão linear para a variável y_1 discutida acima. Através desses valores, obtemos para o coeficiente linear

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.5)$$

$$= \frac{7\,295,757 \cdot 1\,512,768 - 392,984 \cdot 26\,545,051}{28 \cdot 7\,295,757 - 392,984^2} \quad (4.6)$$

$$= 12,140\,462\,64. \quad (4.7)$$

Para o coeficiente angular, obtemos

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.8)$$

$$= \frac{28 \cdot 26\,545,051 - 392,984 \cdot 1\,512,786}{28 \cdot 7\,295,757 - 392,984^2} \quad (4.9)$$

$$= 2,984\,480\,401. \quad (4.10)$$

Finalmente, para o coeficiente r obtemos

$$r = \frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{\sqrt{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2 \sum (y_i - \langle y \rangle)^2}} \quad (4.11)$$

$$= \frac{5\,312,883}{\sqrt{1\,780,170 \cdot 15873,637}} \quad (4.12)$$

$$= 0,999\,450\,477, \quad (4.13)$$

o que resulta em um r^2 dado por

$$r^2 = 0,998\,901\,256. \quad (4.14)$$

Note que o cálculo é bastante trabalhoso se for realizado manualmente. Felizmente, esse tipo de análise — a regressão linear — é algo que é implementado na maioria dos programas de computador que permitem a análise de dados. Mesmo em planilhas de cálculo existem funções que permitem calcular as constantes A e B , e o coeficiente r^2 facilmente. Funções para a determinação de tais valores também estão disponíveis em calculadoras científicas. Na seção seguinte verificaremos como proceder para inserir os dados experimentais e obter os coeficientes da regressão linear para alguns modelos comuns de calculadoras.

i	x_i	$y_{1,i}$	x_i^2	$x_i y_i$	$x_i - \langle x \rangle$	$y_i - \langle y \rangle$	$(x_i - \langle x \rangle)^2$	$(y_i - \langle y \rangle)^2$	$(x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)$
1	0,714	14,577	0,510	10,408	-13,321	-39,451	177,453	1 556,387	525,533
2	2,693	20,696	7,252	55,734	-11,342	-33,332	128,644	1 111,027	378,057
3	4,389	25,226	19,263	110,717	-9,646	-28,802	93,048	829,559	277,828
4	4,960	27,449	24,602	136,147	-9,075	-26,579	82,358	706,447	241,208
5	6,245	30,242	39,000	188,861	-7,790	-23,786	60,686	565,777	185,296
6	7,277	33,378	52,955	242,892	-6,758	-20,650	45,672	426,425	139,556
7	7,579	34,195	57,441	259,164	-6,456	-19,833	41,682	393,351	128,045
8	7,719	35,715	59,583	275,684	-6,316	-18,313	39,894	335,369	115,667
9	7,912	35,011	62,600	277,007	-6,123	-19,017	37,493	361,649	116,444
10	8,280	37,529	68,558	310,740	-5,755	-16,499	33,122	272,219	94,955
11	9,034	40,590	81,613	366,690	-5,001	-13,438	25,011 4	180,582	67,206
12	9,442	39,156	89,151	369,711	-4,593	-14,872	21,097	221,179	68,310
13	10,306	43,238	106,214	445,611	-3,729	-10,790	13,907	116,426	40,238
14	10,572	42,406	111,767	448,316	-3,463	-11,622	11,993	135,073	40,249
15	11,177	44,796	124,925	500,685	-2,858	-9,232	8,169	85,231	26,387
16	15,335	57,611	235,162	883,465	1,300	3,583	1,690	12,837	4,657
17	17,023	63,832	289,783	1 086,612	2,988	9,804	8,927	96,117	29,293
18	18,926	68,063	358,193	1 288,160	4,891	14,035	23,920	196,979	68,643
19	20,608	74,408	424,690	1 533,400	6,573	20,380	43,202	415,341	133,954
20	20,876	75,083	435,807	1 567,433	6,841	21,055	46,797	443,310	144,033
21	21,095	75,248	444,999	1 587,357	7,060	21,220	49,842	450,285	149,809
22	22,225	77,243	493,951	1 716,726	8,190	23,215	67,074	538,933	190,126
23	22,407	81,058	502,074	1 816,267	8,372	27,030	70,088	730,617	226,290
24	22,469	78,821	504,856	1 771,029	8,434	24,793	71,130	614,689	209,100
25	23,077	80,714	532,548	1 862,637	9,042	26,686	81,755	712,139	241,290
26	26,421	91,433	698,069	2 415,751	12,386	37,405	153,409	1 399,129	463,292
27	26,863	91,777	721,621	2 465,406	12,828	37,749	164,554	1 424,982	484,237
28	27,360	93,291	748,570	2 552,442	13,325	39,263	177,552	1 541,578	523,172
Σ	392,984	1 512,786	7 295,757	26 545,051	0	0	1 780,170	15 873,637	5 312,883
$\langle \cdot \rangle$	14,035	54,028							

Tabela 4.2: Tabela de cálculos para a determinação das constantes A e B , e do coeficiente r^2 . As linhas marcadas com Σ e $\langle \cdot \rangle$ denotam as somas e as médias dos valores apresentados para cada variável, respectivamente. Os valores apresentados na tabela foram limitados a três casas após a vírgula, porém os cálculos foram feitos com toda a precisão disponível.

4.2.1 Regressão linear utilizando uma calculadora

Geralmente calculadoras científicas são capazes de realizar regressões lineares e diversas outras, facilitando a obtenção da melhor reta. Apresentaremos abaixo como realizar tal cálculo em alguns modelos.

CASIO® fx-82TL

- Pressione o botão **[MODE]**. As informações abaixo aparecerão no visor:

COMP	SD	REG
1	2	3

- Pressione o botão **[3]**. Teremos no visor

Lin	Log	Exp	→
1	2	3	

Ao pressionarmos o botão **[1]**, a calculadora estará no modo de regressão linear, indicado por **REG** no visor.

- Podemos agora digitar o valor da variável independente x_1 , correspondente ao primeiro ponto, seguido do botão **[,]**. Digitamos após a vírgula o valor da variável dependente y_1 correspondente ao primeiro ponto. Após isso, basta pressionar **[M+]** para inserir o par de valores na memória da calculadora. Repetiremos esse processo para cada par x_i, y_i .
- Quando todos os valores tiverem sido inseridos, podemos recuperar os valores de A , B e r pressionando **[SHIFT]** seguido de
 - tecla **[7]** e então **[=]** para recuperar o valor de A ;
 - tecla **[8]** e então **[=]** para recuperar o valor de B ;
 - tecla **[9]** e então **[=]** para recuperar o valor de r .

Para recuperar outro valor, não é necessário inserir os pontos novamente, basta pressionar mais uma vez **[SHIFT]** seguido da tecla correspondente à variável que desejamos.

- Para realizar uma nova regressão, devemos antes apagar os dados da regressão anterior. Fazemos isso pressionando **[SHIFT]** e então **[AC/ON]** (função **Scl**). Na tela aparecerá **Scl**. Pressione **[=]** para confirmar a exclusão dos dados.

CASIO® fx-82MS

- Pressione o botão **[MODE]**. As informações abaixo aparecerão no visor:

COMP	SD	REG
1	2	3

- Pressione o botão **[3]**. Teremos no visor

Lin	Log	Exp	→
1	2	3	

Ao pressionarmos o botão **[1]**, a calculadora estará no modo de regressão linear, indicado por REG no visor.

- Podemos agora digitar o valor da variável independente x_1 , correspondente ao primeiro ponto, seguido do botão **[,]**. Digitamos após a vírgula o valor da variável dependente y_1 correspondente ao primeiro ponto. Após isso, basta pressionar **[M+]** para inserir o par de valores na memória da calculadora. Repetiremos esse processo para cada par x_i, y_i .
- Quando todos os valores tiverem sido inseridos, podemos recuperar os valores de A , B e r pressionando **[SHIFT]** seguido do botão **[2]** (função S-var). Neste momento, aparecerá na tela

\bar{x}	$x\sigma n$	$x\sigma n - 1$	→
1	2	3	

Se pressionarmos para a direita no botão direcional duas vezes, na tela teremos

A	B	r
1	2	3

Basta agora escolher qual variável desejamos, pressionar o botão correspondente — **[1]**, **[2]** ou **[3]** — e pressionar **[=]**. Para recuperar outro valor, não é necessário inserir os pontos novamente, basta pressionar mais uma vez **[SHIFT]** seguido de **[2]** (função S-var) e escolher outra variável.

- Para realizar uma nova regressão, devemos antes apagar os dados da regressão anterior. Fazemos isso pressionando **[SHIFT]** e então **[MODE]** (função CLR). Na tela aparecerá

Scl	Mode	All
1	2	3

Selecione **Scl** pressionando o botão **[1]** e pressione **[=]**.

CASIO® fx-570ES e fx-991ES Plus

- Ao pressionar a tecla **[MODE]**, aparecerão diversas opções, entre elas a opção '3: STAT'. Pressione a tecla **[3]** para selecioná-la. Uma nova tela aparecerá com opções.
- Selecione a opção '2: A+Bx' pressionando a tecla **[2]**. Ao selecionar esta opção, uma tabela surgirá para a entrada de dados.
- Coloque o valor da abscissa x_1 da primeira medida e pressione **[=]**. A calculadora passará ao próximo valor de abscissa automaticamente, o que torna mais fácil a entrada de todos os valores para

essa variável. Ao finalizar, navegue usando as teclas direcionais até o local de inserção da primeira ordenada. Insira o valor e tecle $=$. A calculadora passará automaticamente ao próximo campo, permitindo a inserção do próximo valor de ordenada. Como a calculadora tem o comportamento automático de passar ao próximo valor da mesma variável, é mais fácil segui-lo, porém podemos inserir os pares x, y se utilizarmos as teclas direcionais após pressionar $=$. Qualquer erro pode ser corrigido navegando novamente ao campo e reinserindo os valores.

- Após inserir todos os valores, pressione a tecla $[AC]$.
- Para recuperar os valores de A , B , e r , devemos pressionar a tecla $[SHIFT]$, seguida da tecla $[1]$ (função STAT). Uma nova tela de opções surgirá.
- No modelo *fx-570ES* devemos selecionar a opção '7: Reg' pressionando a tecla $[7]$. No modelo *fx-991ES Plus*, devemos pressionar a tecla $[5]$ (opção '5: Reg'). Uma tela surgirá com as opções correspondentes às variáveis A , B e r . Selecione a variável que deseja recuperar através das teclas numéricas correspondentes e então pressione $=$. Para recuperar outra variável, basta repetir os passos desse ítem, não sendo necessário digitar novamente os dados experimentais.
- Para realizar uma nova regressão, basta repetirmos os passos desde o início. Quando a tabela de inserção de dados surgir, ela estará vazia.

4.2.2 Interpretação dos coeficientes

A ideia por trás do cálculo da melhor reta é estabelecer quais seriam os coeficientes mais adequados para uma relação linear que descreve o fenômeno estudado. *Esses coeficientes são importantes pois estão, em geral, ligados a constantes físicas cujo valor estamos interessados em medir.* Além disso, esse processo é mais preciso do que simplesmente calcular o valor dos coeficientes da reta associados aos pontos medidos e depois fazer uma média.

Vamos considerar, por exemplo, o conjunto de dados para a velocidade em função do tempo dados na Tabela 4.3, representados na Figura 4.6. Verificamos nos dados da tabela que a velocidade se altera com o tempo. Supondo que tenhamos um movimento com aceleração constante, podemos descrever os dados em função do tempo como

$$v = v_0 + at. \quad (4.15)$$

Comparando esta equação com a equação da reta $y = A + Bx$, verifi-

$(t \pm 0,01) \text{ s}$	$(v \pm 0,01) \text{ m/s}$
0,10	24,04
0,20	25,14
0,30	25,79
0,40	27,08
0,50	27,33
0,60	28,79
0,70	29,98
0,80	30,61
0,90	31,15
1,00	32,94
1,10	34,04
1,20	34,78
1,30	35,22
1,40	36,10
1,50	37,91

Tabela 4.3: Dados medidos para a velocidade em função do tempo para um experimento hipotético.

camos as relações

$$y = v \quad (4.16)$$

$$A = v_0 \quad (4.17)$$

$$B = a \quad (4.18)$$

$$x = t. \quad (4.19)$$

Para determinar a relação entre as variáveis das duas equações, devemos verificar qual variável dos dados foi varrida arbitrariamente — e que então deve corresponder à variável independente x — e qual foi lida em resposta à primeira — correspondendo à variável dependente y . Vemos na Tabela 4.3 que os valores de tempo são mais condizentes com uma variação arbitrária (valores “redondos” ou semi-inteiros, isto é, variados com um passo regular) do que no caso dos valores da velocidade. No caso de realizarmos um experimento, não teremos problemas em determinar quem foi a variável independente, pois realizaremos essa escolha ao idealizá-lo.

Dessa forma, se tomarmos os dados e realizarmos uma regressão linear, vamos obter os valores de v_0 e de a — que são desconhecidos — através das constantes A e B . Para os valores da tabela obtemos $v_0 = 22,734\,285\,714\,3$ e $a = 9,907\,142\,857\,1$. Verificaremos adiante que nem todos os dígitos obtidos para as constantes A e B são relevantes e por isso deveremos descartar alguns deles. Por ora podemos expressá-las com o mesmo número de casas após a vírgula que a variável (x ou y) que tem menos casas após a vírgula:

$$A = v_0 = 22,73 \text{ m/s} \quad (4.20)$$

$$B = a = 9,91 \text{ m/s}^2. \quad (4.21)$$

4.3 Linearização

É comum realizarmos um experimento e obtermos um conjunto de dados que não segue uma tendência linear. Em um experimento de queda livre, por exemplo, a distância percorrida pelo objeto que cai está ligada ao tempo através de

$$\Delta y = v_0^y t + \frac{a_y t^2}{2}. \quad (4.22)$$

Como em geral estamos interessados em extrair dos dados experimentais informações acerca de constantes físicas, podemos recorrer a um processo de regressão. No entanto, não podemos utilizar uma regressão linear neste caso, pois os dados claramente não seguirão uma tendência linear. Podemos recorrer a uma regressão quadrática ou realizar uma *linearização*.

Realizar uma linearização nada mais é do que fazer uma mudança de variáveis. No entanto, nem todos os casos são passíveis de serem linearizados. No caso da queda livre, por exemplo, precisamos garantir que v_0 seja muito próximo de zero. Nesse caso, podemos escrever

$$\Delta y = \frac{a_y t^2}{2}. \quad (4.23)$$

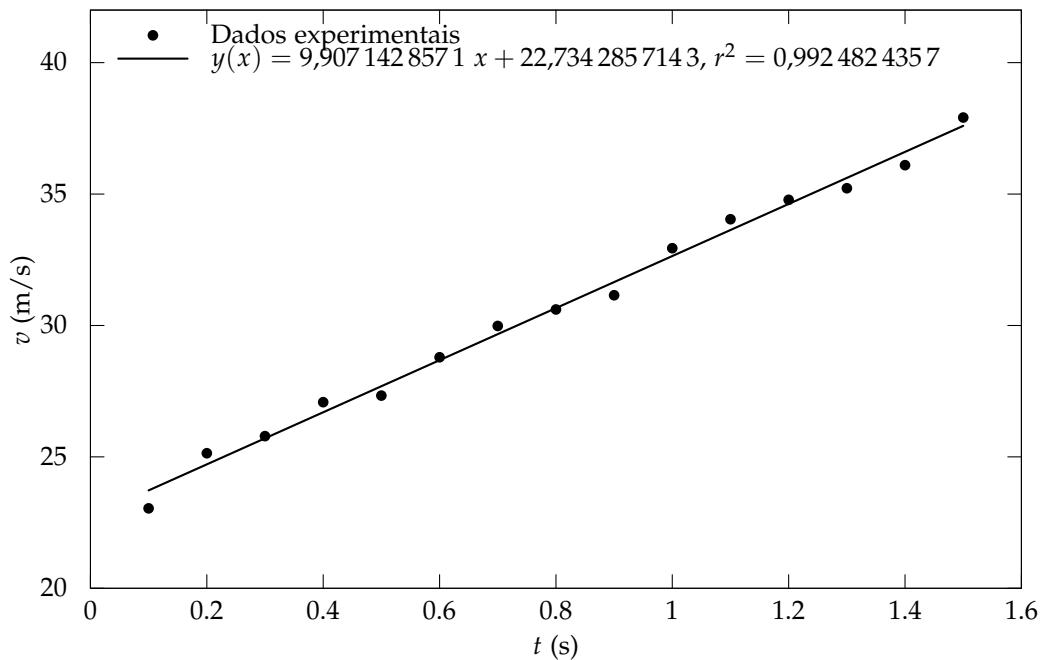


Figura 4.6: Gráfico dos dados da Tabela 4.3.

Fazendo agora a mudança de variável $\tau = t^2$, obtemos

$$\Delta y = \frac{a_y}{2} \tau. \quad (4.24)$$

Comparando a equação acima com a equação da reta $y = A + Bx$, verificamos as seguintes relações, se considerarmos que o tempo é a variável independente:⁴

$$y = \Delta y \quad (4.25)$$

$$A = 0 \quad (4.26)$$

$$B = a/2 \quad (4.27)$$

$$x = \tau. \quad (4.28)$$

⁴ Veja que aqui estamos usando y para duas coisas distintas: um eixo vertical através do qual calculamos o deslocamento Δy de um corpo sujeito à gravidade, e o eixo da variável dependente de um gráfico (que é representado no sentido "da parte inferior da página, para a parte superior").

Podemos, portanto, utilizar o processo de linearização associado ao processo de regressão linear para obtermos informações a respeito de constantes físicas mesmo que o conjunto de dados experimentais obtidos não siga uma tendência linear.

4.4 Linearização e teste de hipóteses

Nos casos em que um fenômeno não segue uma tendência linear, se tivermos um modelo do fenômeno físico considerado, podemos empregar o processo da linearização com o intuito de transformar o conjunto de dados de forma que ele passe a representar uma reta. O sucesso desse procedimento, no entanto, depende de a teoria usada como referência estar correta. Muitas vezes ocorre que não temos conhecimento acerca da teoria que descreve um fenômeno ou temos mais de uma teoria, sem ter certeza de qual é a mais adequada. Podemos então utilizar uma regressão linear como um método de

teste, validando uma ou outra teoria com base nos valores obtidos para o coeficiente de dispersão linear r^2 .

Digamos que ao fazer uma série de medidas de uma grandeza ξ em função de outra grandeza ρ (Tabela 4.4), tenhamos um conjunto que segue uma forma que não é uma reta (Figura 4.7). Além disso, temos duas teorias, cada uma com as seguintes previsões:

$$\xi = \begin{cases} \alpha e^{\beta \rho}, & \text{Teoria 1} \\ \alpha \rho^2 + \beta, & \text{Teoria 2.} \end{cases} \quad (4.29)$$

Podemos realizar a regressão linear em ambos os casos e comparar os coeficientes r para verificar qual das duas teorias descreve melhor os dados obtidos. Tomando o logaritmo no primeiro caso, temos

$$\ln(\xi) = \ln(\alpha e^{\beta \rho}) \quad (4.30)$$

$$\ln(\xi) = \ln(\alpha) + \beta \rho \quad (4.31)$$

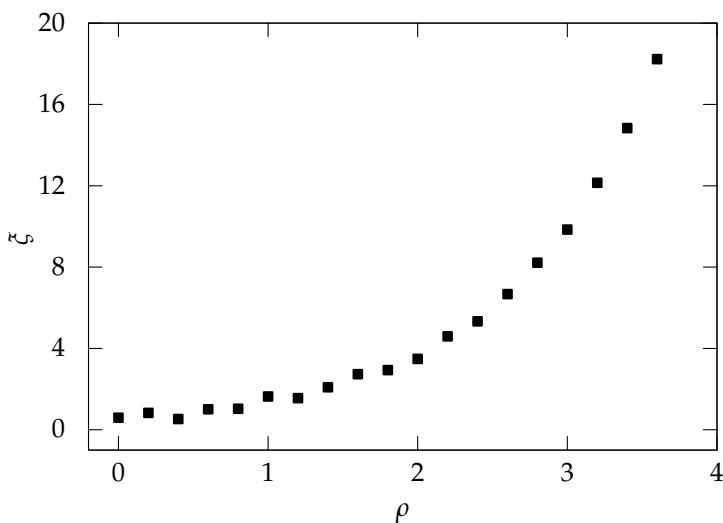


Tabela 4.4: Dados medidos para ξ em função de ρ .

Figura 4.7: Dados medidos de ξ em função de ρ . Visivelmente o comportamento é não linear.

Logo,

$$y = \ln(\xi) \quad (4.32)$$

$$x = \rho \quad (4.33)$$

$$A = \beta \quad (4.34)$$

$$B = \ln(\alpha) \quad (4.35)$$

No segundo caso, temos uma identificação mais simples:

$$y = \xi \quad (4.36)$$

$$x = \rho^2 \quad (4.37)$$

$$A = \alpha \quad (4.38)$$

$$B = \beta. \quad (4.39)$$

Podemos então usar os resultados dessas linearizações para transformar a tabela inicial em duas outras tabelas, cada uma considerando

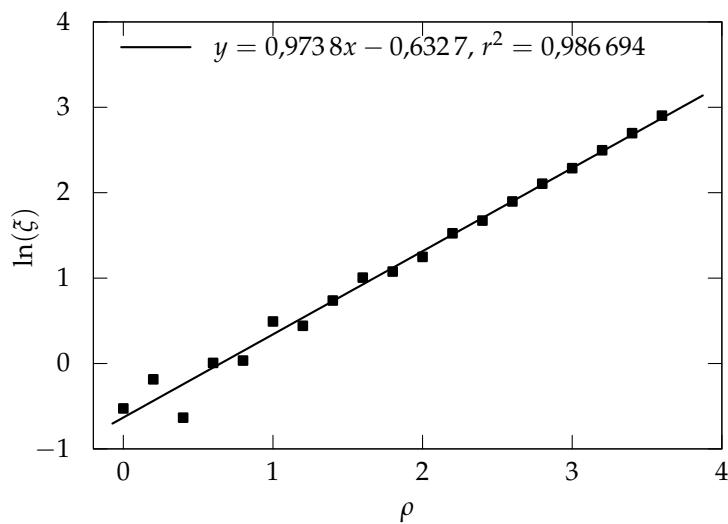
as previsões de cada uma das Teorias e com a esperança de que alguma delas siga o comportamento linear, indicando que a Teoria correspondente tem fundamento.

Baseando-se nas medidas e nos valores transformados dados na Tabela 4.5, podemos realizar as regressões lineares. Os resultados podem ser vistos nas Figuras 4.8 e 4.9. Concluímos, portanto, que a Teoria 1 descreve melhor os resultados medidos.

Tabela 4.5: Dados medidos para ξ em função de ρ e os resultados das transformações baseadas nas Teorias 1 e 2.

ρ	$\ln(\xi)$	Teoria 1		Teoria 2	
		ρ^2	ξ	ρ^2	ξ
0.00	-0.5260	0.00	0.5909		
0.20	-0.1850	0.04	0.8310		
0.40	-0.6346	0.16	0.5301		
0.60	0.0065783	0.36	1.0066		
0.80	0.033918	0.64	1.0345		
1.00	0.49249	1.00	1.6364		
1.20	0.44133	1.44	1.5547		
1.40	0.73770	1.96	2.0911		
1.60	1.0055	2.56	2.7331		
1.80	1.0763	3.24	2.9338		
2.00	1.2485	4.00	3.4851		
2.20	1.5249	4.84	4.5948		
2.40	1.6740	5.76	5.3332		
2.60	1.8980	6.76	6.6722		
2.80	2.1060	7.84	8.2156		
3.00	2.2870	9.00	9.8453		
3.20	2.49719	10.24	12.1483		
3.40	2.69717	11.56	14.8377		
3.60	2.90308	12.96	18.2303		

Figura 4.8: Dados ajustados segundo as previsões da Teoria 1.



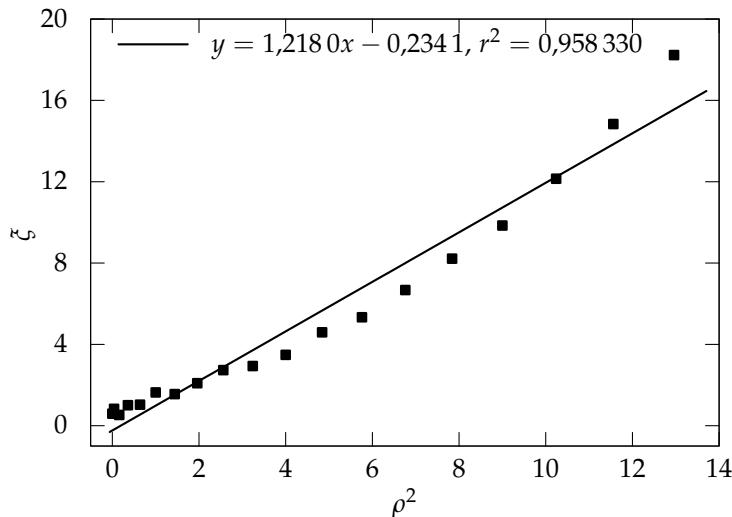


Figura 4.9: Dados ajustados segundo a Teoria 2.

4.5 Erros nos parâmetros de uma regressão linear

Diferentemente da parte teórica, onde assumimos o conhecimento de constantes como a aceleração da gravidade g e calculamos o deslocamento de uma partícula com o passar do tempo, no laboratório podemos medir o tempo e o deslocamento facilmente. O valor da gravidade, por outro lado, é mais difícil de ser determinado. Utilizando uma regressão linear, podemos identificar a relação entre o coeficiente B da equação da reta e g . Sabemos, no entanto, que a toda medida temos um erro associado. Qual seria, nesse caso, o erro associado ao valor de g ?

Utilizando algumas considerações⁵ acerca da distribuição das medidas y_i em torno de seus valores ideais correspondentes, temos que o erro associado aos parâmetros A e B são dados por

$$\delta A = \xi_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \quad (4.40)$$

$$\delta B = \xi_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad (4.41)$$

onde N é o número de pontos experimentais e a soma se dá sobre todos os pontos experimentais. Além disso,

$$\xi_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum (y_i - A - B x_i)^2} \quad (4.42)$$

$$\Delta = N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2. \quad (4.43)$$

Podemos então calcular não só o melhor valor associado a uma constante física através dos coeficientes A e B da melhor reta, mas também determinar qual o erro associado a cada uma dessas constantes. Nem sempre temos uma correspondência simples entre uma constante física e um dos parâmetros da equação da reta, nesses casos, ao calcular o valor da constante física, precisamos calcular o erro propagado através da fórmula geral discutida no Capítulo 3.

⁵ John R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis*. 2nd Edition. University Science Books, 1997. ISBN: 0-935702-75-X

<i>i</i>	x_i	$y_{1,i}$	$(y_{1,i} - A - Bx_i)^2$
1	0,714	14,577	0,0934
2	2,693	20,696	0,2687
3	4,389	25,226	0,0002
4	4,960	27,449	0,2555
5	6,245	30,242	0,2879
6	7,277	33,378	0,2309
7	7,579	34,195	0,3190
8	7,719	35,715	0,2887
9	7,912	35,011	0,5516
10	8,280	37,529	0,4584
11	9,034	40,590	2,2134
12	9,442	39,156	1,3547
13	10,306	43,238	0,1152
14	10,572	42,406	1,6548
15	11,177	44,796	0,4928
16	15,335	57,611	0,0879
17	17,023	63,832	0,7863
18	18,926	68,063	0,3156
19	20,608	74,408	0,5827
20	20,876	75,083	0,4077
21	21,095	75,248	0,0225
22	22,225	77,243	1,5069
23	22,407	81,058	4,1791
24	22,469	78,821	0,1427
25	23,077	80,714	0,0896
26	26,421	91,433	0,1932
27	26,863	91,777	0,2868
28	27,360	93,291	0,2549
Σ		17,4411	

Tabela 4.6: Tabela com os valores de $(y_{1,i} - A - Bx_i)^2$ e da soma $\sum(y_{1,i} - A - Bx_i)^2$.

⁶ Algumas calculadoras disponibilizam os valores de $\sum x_i$ e $\sum x_i^2$ juntamente com os valores de A , B , e r .

Exemplo: Cálculo dos erros dos coeficientes A e B

Vamos determinar os erros associados aos coeficientes da regressão linear apresentada no exemplo da Seção 4.2. Note que os termos $\sum x_i$ e $\sum x_i^2$ que aparecem nas Equações (4.40) e (4.43) estão disponíveis na Tabela (4.2), porém na prática utilizamos uma calculadora ou um programa de computador para realizar o cálculo dos coeficientes da regressão linear, e por isso não temos de antemão tais valores⁶. Nesse caso, será necessário determinar os valores de $\sum x_i$ e de $\sum x_i^2$, além do valor de $\sum(y_{1,i} - A - Bx_i)^2$ — novamente, a elaboração de uma tabela ajuda na determinação de tal valor, como mostrado na Tabela 4.6. Uma vez determinados tais valores, determinar os erros δA e δB é relativamente simples:

$$\xi_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum (y_i - A - Bx_i)^2} \quad (4.44)$$

$$= \sqrt{\frac{17,4411}{28-2}} \quad (4.45)$$

$$= 0,05814, \quad (4.46)$$

$$\Delta = N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \quad (4.47)$$

$$= 28 \cdot 7295,757 - (392,984)^2 \quad (4.48)$$

$$= 49\,844,766, \quad (4.49)$$

$$\delta A = \xi_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \quad (4.50)$$

$$= 0,05814 \cdot \sqrt{\frac{7295,757}{49\,844,766}} \quad (4.51)$$

$$= 0,022244, \quad (4.52)$$

$$\delta B = \xi_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad (4.53)$$

$$= 0,05814 \cdot \sqrt{\frac{28}{49\,844,766}} \quad (4.54)$$

$$= 0,001378. \quad (4.55)$$

Assim, podemos denotar os coeficientes linear e angular com seus devidos erros:

$$A = (12,140\,462\,642 \pm 0,022\,244) \text{ Un}_y \quad (4.56)$$

$$B = (2,984\,480\,401 \pm 0,001\,378) \text{ Un}_{x/y}. \quad (4.57)$$

Note que, como discutido anteriormente, a unidade do coeficiente angular é a mesma que a da variável dependente, enquanto a unidade do coeficiente angular é dada pela razão entre as unidades da variável dependente e da variável independente. Acima denotamos conceitualmente tais unidades como Un_y e $\text{Un}_{x/y}$, respectivamente. Resta ainda notar que não devemos carregar dígitos cuja ordem de grandeza é menor que a do erro, assim obtemos finalmente

$$A = (12,14 \pm 0,02) \text{ Un}_y \quad (4.58)$$

$$B = (2,984 \pm 0,0014) \text{ Un}_{x/y}. \quad (4.59)$$

5 Desvio padrão

Como mencionado no Capítulo 3, podemos interpretar o desvio das medidas em relação à média como uma medida relacionada à incerteza — ou erro — das medidas. Verificaremos o por quê dessa afirmação e como chegar ao valor da incerteza — tanto para cada uma das medidas, quanto para o valor da incerteza associada ao valor médio das medidas —.

5.1 Histogramas

Um método útil para verificar a distribuição das medidas em torno de seu valor mais provável é a elaboração de um *histograma*. Imagine o seguinte experimento: Pegamos uma tábua e afixamos uma série de pregos, de forma que suas pontas fiquem presas à tábua e o resto do comprimento dos pregos fique acima dela. Prendemos a tábua de forma que ela permaneça inclinada, com a superfície com os pregos para cima. Abaixo da região de pregos, colocamos várias pequenas caixas numeradas, com a de número 25 exatamente no centro da tábua. Soltamos então uma pequena bola de gude da posição central acima dos pregos. A bola descerá colidindo com os pregos aleatoriamente e finalmente cairá em uma das caixas. Se repetirmos esse procedimento várias vezes e contarmos quantas vezes a bola cai em cada caixa, podemos fazer um gráfico (um histograma) como o da Figura 5.1.

Se utilizássemos caixas menores, numerando-as como 21,1, 21,2, etc., e aumentássemos o número de vezes que soltamos a bola de gude, chegamos — em um limite de caixas muito pequenas e um número de lançamentos muito grande — a uma curva chamada de *distribuição normal* ou *distribuição gaussiana* (veja a Figura 5.1).

5.2 Desvio padrão

No caso de realizarmos uma medida qualquer, temos valores numéricos pertencentes ao conjunto dos números Reais, não aos Inteiros como na numeração das caixas. Nesse caso, contamos o número de ocorrências entre dois valores quaisquer. Se por exemplo, as caixas que colocamos abaixo da tábua no exemplo anterior tinham 1,00 cm de largura, podemos dizer que as bolas que caem na 23^acaixa caem entre 23,0 cm e 24,0 cm à direita do início da tábua. Vemos então que para qualquer medida, mesmo que sejam números pertencentes aos Reais ao invés de Inteiros, podemos fazer um histograma.

É possível se mostrar¹ que o centro da distribuição normal é igual

¹John R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis*. 2nd Edition. University Science Books, 1997. ISBN: 0-935702-75-X

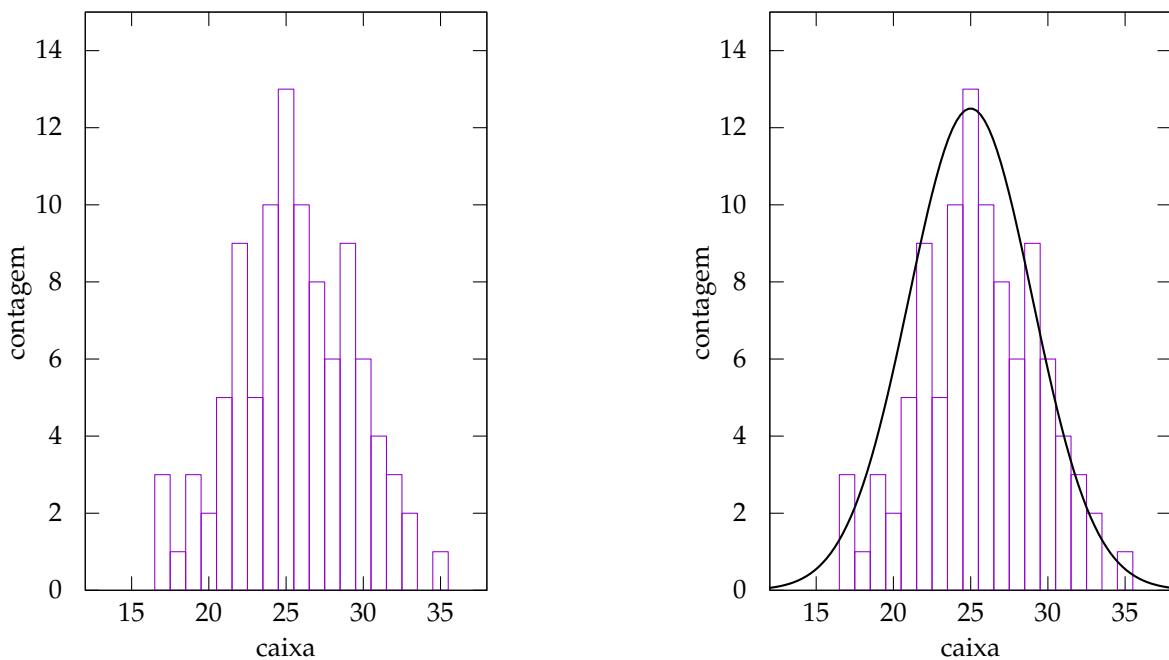


Figura 5.1: *Esquerda:* Histograma do número de vezes que a bola de gude cai em cada caixa. *Direita:* Histograma juntamente com a curva da distribuição normal.

à média dos valores obtidos para as medidas. Vemos que esse valor é o *mais provável* de obtermos. Logicamente, temos que o valor médio é então o melhor valor para uma série de medidas. Vemos também que a distribuição normal aparentemente nos dá um *limite inferior* e um *limite superior* para o valor de uma medida. O problema principal reside no fato de que a distribuição diminui, porém não chega a zero à medida que nos afastamos do pico central.

Podemos calcular, a partir das próprias medidas, um parâmetro que leva em conta as variações em torno do valor médio, denominado *variância* e definido como²

$$\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}{N}. \quad (5.1)$$

Quanto mais as medidas diferem do valor médio — isto é, quanto mais elas se espalham, tornando a largura do pico maior —, maior será o valor da variância. No entanto, como esse valor não tem as mesmas unidades das medidas que estamos tratando, podemos utilizar o *desvio padrão*, definido como a raiz quadrada da variância e representado por σ :

Desvio padrão populacional.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (5.2)$$

Essa grandeza, ao contrário da variância, possui as mesmas unidades que as medidas. Se tomarmos a faixa de valores entre o valor médio *menos* o desvio padrão e o valor médio *mais* o desvio padrão, temos aproximadamente 63% das medidas realizadas. **O valor do desvio padrão pode então ser interpretado como a incerteza de uma medida qualquer realizada**, pois podemos afirmar que “o valor real de uma medida está contido entre $x_i - \sigma$ e $x_i + \sigma$ com 63% de certeza”.

²Jay L. Devore, Probabilidade e estatística para engenharia e ciências.

Se precisamos de mais certeza de que a medida se encontra entre dois valores quaisquer, podemos utilizar como incerteza o valor de 2σ .

A definição mostrada acima para o desvio padrão não é a que usamos na prática. Tal definição é dada para uma *população*, isto é, para todos os valores possíveis de uma dada grandeza. Não podemos calcular tal valor quando tratamos de medidas, pois podemos ter um número infinito delas. Podemos, no entanto, utilizar o *desvio padrão amostral*: Como os valores das medidas x_i estão mais próximos do valor médio da amostra $\langle x \rangle$, do que do valor médio da população, o valor do somatório será menor que se utilizássemos a média da população. Tal problema pode ser contornado utilizando-se como denominador $N - 1$, obtendo

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (5.3) \quad \text{Desvio padrão amostral.}$$

Dessa forma, o desvio padrão calculado para uma amostra aproxima adequadamente o desvio padrão calculado para a população.

Uma maneira mais simplista de interpretar a questão de utilizar uma fórmula ou outra é o fato de que o desvio padrão amostral resulta em um valor um pouco maior, dando um “garantia” maior quando σ é usado como erro. Além disso, se temos somente um valor de medida, o valor de σ torna-se indefinido, o que reflete o desconhecimento acerca do valor do erro. Resta dizer ainda que o valor do desvio padrão é uma característica do equipamento e método de medida utilizado. A partir de 5 ou 10 medidas, o valor de σ varia muito pouco.

Finalmente, não parece razoável que essa incerteza seja a mesma para o valor médio $\langle x \rangle$, pois conforme o número de medidas aumenta, esperamos que o valor da incerteza diminua. De fato, podemos considerar que a incerteza no valor médio pode ser calculada através de

$$\sigma_{\langle \rangle} = \sigma / \sqrt{N}, \quad (5.4) \quad \text{Desvio padrão da média.}$$

onde $\sigma_{\langle \rangle}$ é chamado de *desvio padrão da média*. Portanto, temos que a melhor estimativa para uma medida X qualquer é

$$X = (\langle x \rangle \pm \sigma_{\langle \rangle}). \quad (5.5) \quad \text{Melhor estimativa para uma medida.}$$

PARTE II: EXPERIMENTOS

6 Elasticidade

Realizaremos um experimento visando mostrar o comportamento não-linear de um corpo que sofre uma deformação. Verificaremos através dos dados que a deformação segue uma forma característica conhecida como curva de histerese. Veremos que as deformações com dependência linear na força aplicada se restringem a condições muito específicas. Utilizaremos os seguintes conceitos/técnicas de análise de dados: medidas, algarismos significativos, gráficos, e erros de escala e propagados.

6.1 Elasticidade

Verificamos através da Lei de Hooke que a deformação de objetos em resposta a uma força aplicada é proporcional à intensidade da força:

$$\Delta x = \frac{F}{k}. \quad (6.1)$$

Sabemos, no entanto, que um objeto sujeito a uma força muito grande pode apresentar uma deformação permanente, ou mesmo se quebrar. Além disso, no caso mais geral, a deformação pode ser *não-linear*.

Mesmo para uma mola, caso clássico em que se aplica a Lei de Hooke, a deformação será não-linear se a distensão da mola for muito grande. Por isso se faz a restrição de que *a distensão da mola deve ser pequena*. Podemos entender melhor essa restrição chamando a força exercida pela mola de $f(x)$, onde x representa a distensão da mola, e fazendo uma expansão de $f(x)$ em uma série de Taylor. Esse tipo de expansão nos que diz que uma função $g(x)$ pode ser aproximada em torno de um ponto $x = a$ qualquer como

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^n g(x)}{dx^n} \Big|_{x=a} \right] \cdot (x-a)^n \quad (6.2)$$

$$= \frac{g(a)}{0!} + \frac{g'(a)}{1!}(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (6.3)$$

$$= g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{6}(x-a)^3 + \dots \quad (6.4)$$

onde $g'(a)$, $g''(a)$, $g'''(a)$, etc. são as derivadas da função $g(x)$ calculadas no ponto a .

Assim, podemos expandir a função $f(x)$ em torno de zero (considerando que esta é a posição de equilíbrio) como

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \dots \quad (6.5)$$

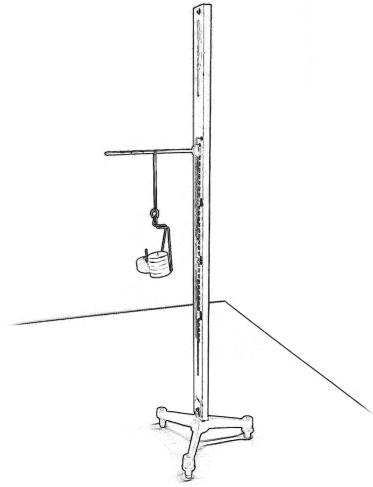


Figura 6.1: Ao submetermos um elástico a uma força variável, verificando a distensão registrada em função da força, obtemos uma *curva de histerese*.

No entanto, $f(0)$ é a força na posição de equilíbrio, ou seja, zero. Além disso, se x é muito pequeno, temos que x^2 é menor ainda e por isso podemos desprezar todos os termos de ordem 2 (termos quadráticos) ou maior. Obtemos então:

$$f(x) = f'(0)x, \quad (6.6)$$

e se fizermos $k \equiv f'(0)$,

$$f(x) = kx. \quad (6.7)$$

Portanto, quando falamos em pequenas distensões, *estamos restringindo os valores de termos de ordens quadrática ou superiores a valores muito menores que o termo de ordem linear*. Respeitada essa condição, o que poder ser feito através da escolha de uma distensão máxima adequada — isto é, que ela seja suficientemente pequena para que os termos de ordem superior a 2 sejam desprezíveis —, podemos tratar as deformações de um objeto como sendo lineares.

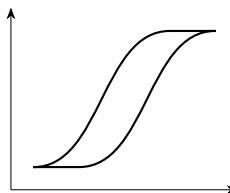


Figura 6.2: Gráfico típico de um fenômeno de histerese.

6.1.1 Elasticidade e Histerese

Uma característica que também pode ser observada no caso de uma deformação não-linear é a *histerese*. Temos na Figura 6.2 uma típica figura de histerese: quando efetuamos um aumento gradual da variável independente, ocorre um aumento não-linear da variável dependente. Quando passamos a fazer uma diminuição da variável independente, existe uma diminuição correspondente da variável dependente, porém os valores não coincidem com aqueles do processo de aumento. Vários sistemas físicos têm esse tipo de comportamento: deformações de materiais, magnetização de imãs, campos elétricos em alguns materiais, etc.

Na Figura 6.3 temos um gráfico da tensão em função deformação para um elástico de borracha. As linhas representam o processo de aumento e diminuição progressiva da tensão exercida sobre o elástico. Vemos que as duas curvas não coincidem. É importante notar que, para o caso do elástico, só há a coincidência entre o ponto inicial e final¹ se o processo for realizado lentamente.

A explicação para este comportamento pode ser dada ao analisarmos o processo de um ponto de vista de energia: em uma mola, quando a esticamos, armazenamos energia potencial elástica. Já para um elástico de borracha, quando o esticamos, além de armazenarmos energia potencial elástica, também é possível notar um *aumento da temperatura do elástico*, o que ocasiona uma perda de calor para o ambiente. Ao relaxarmos a distensão, é necessária a absorção de calor do meio. Como esse processo é demorado, se relaxarmos o elástico rapidamente, percebemos que ele não volta ao tamanho original. Após algum tempo, no entanto, a absorção de calor ocorre e o restaura ao tamanho inicial.

Esse fenômeno pode ser entendido analisando a estrutura da borracha: ela é constituída de moléculas de polímeros de tamanhos diferentes, constituindo um emaranhado de fibras. Devido à agitação térmica das moléculas — agitação característica dos corpos a

¹ O quadrado e o círculo mais à esquerda na figura.

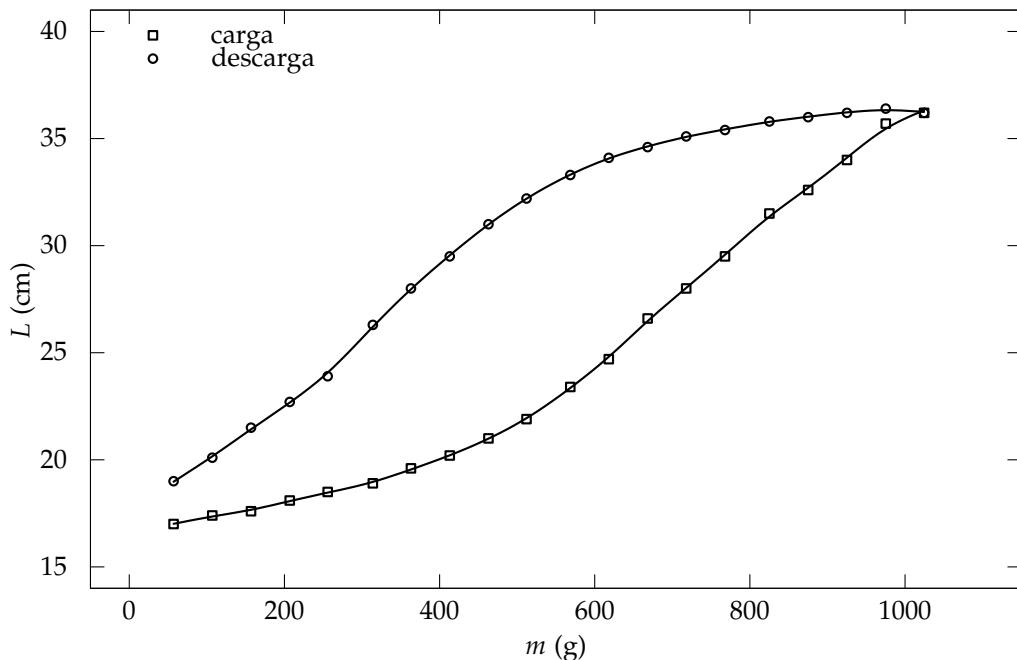


Figura 6.3: Gráfico de histerese para o processo de carregamento e descarregamento de um elástico. Note que o último ponto do processo de carga e o primeiro do processo de descarga coincidem. As linhas foram ajustadas utilizando uma spline de aproximação cúbica de Hermite.

nível molecular associada à temperatura — as moléculas sofrem colisões laterais sucessivas, encurtando-se. Quando esticamos o elástico, as moléculas alinharam-se, colidindo lateralmente contra as menores, transferindo energia cinética e aumentando a temperatura. Se o processo de esticamento demora tempo suficiente para que o calor seja transferido para o meio — através de colisões das moléculas mais próximas da superfície com as moléculas do ar, por exemplo, transferindo energia cinética para fora da borracha —, ao relaxarmos o elástico, não há energia suficiente nas moléculas menores para que elas colidam com as maiores e façam com que elas se contraiam totalmente. Portanto, há uma deformação residual no elástico.

6.2 Experimento

6.2.1 Objetivos

1. Realizar as medidas de deformação de um elástico verificando a curva de histerese resultante;
2. Verificar a dissipação de energia envolvida em processos que não são elásticos.

6.3 Material Necessário

- 20 anilhas metálicas e ganchos adequados para suportá-las;
- Suporte vertical com haste horizontal;
- Elástico de borracha;
- Régua;

- Balança de braços.

6.4 Procedimento Experimental

1. Enumere as anilhas a lápis, pois posteriormente elas deverão ser retiradas na ordem inversa em que foram colocadas;
2. Verifique a massa m_a de cada uma das anilhas e anote na Tabela 6.1;
3. Verifique a massa m_g dos ganchos e anote na Tabela 6.1;
4. Na haste horizontal do suporte pendure um elástico de borracha e na sua extremidade livre pendure um gancho com uma anilha;
5. Meça o comprimento ℓ do elástico e o anote, juntamente com a massa total m_t sustentada pelo elástico, nas colunas correspondentes ao processo de “carga” da Tabela 6.1;
6. Adicione mais uma anilha e verifique o novo comprimento, anotando os dados para ℓ e m_t na Tabela 6.1;
7. Repita o item acima até que todas as anilhas tenham sido penduradas. Utilize ganchos adicionais quando necessário. Não esqueça de somar a massa do gancho;
8. Anote os últimos os valores² de comprimento e massa do processo de “carregamento” também nas colunas relativas ao processo de “descarregamento” Tabela 6.1;
9. Retire as anilhas suspensas pelo elástico uma a uma, realizando o processo inverso ao “carregamento”, anotando os valores de massa e comprimento correspondentes.

² Atenção: se houver demora para iniciar o processo de descarga, pode ser necessário realizar uma nova medida de comprimento, pois é comum que o elástico continue cedendo lentamente ao peso suspenso.

Elasticidade

Turma: _____ Data: _____

Aluno(a): _____	Matrícula: _____

6.5 Questionário

Questão 1. (1 ponto) Apresente os resultados de maneira clara e organizada. Mostre os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, evidenciando o raciocínio desenvolvido.

Questão 2. (1.5 pontos) Liste os equipamentos utilizados. Para os instrumentos de medida, descreva o tipo do equipamento, sua resolução, e seu erro de escala.

Questão 3. (1.5 pontos) Preencha as tabelas com o número adequado de algarismos significativos, unidades, e erros de escala apropriados.

Questão 4. (2.5 pontos) Elabore em papel milimetrado um gráfico de $\ell \times m$ — onde ℓ é o comprimento do elástico e m é a massa total correspondente ao conjunto de anilhas e ganchos que o elástico sustenta —. Ambos os conjuntos de dados (“carregamento” e “descarregamento” na Tabela 6.1) devem estar contidos no mesmo gráfico, sendo que os pontos de cada conjunto de dados devem estar claramente diferenciados.

Questão 5. (2 pontos) Calcule a diferença entre os comprimentos do elástico quando ele suporta somente uma anilha no processo de carga e no processo de descarga (a diferença entre a primeira medida realizada no carregamento e a última no descarregamento). Através de tal valor, calcule a diferença de energia potencial gravitacional entre as duas posições. O que acontece com a energia potencial perdida? (*A energia não fica armazenada como energia potencial elástica!*)

Questão 6. (1.5 pontos) Considerando os objetivos do experimento, listados na Seção 6.2.1, e os resultados obtidos nas questões anteriores, discuta quais objetivos foram atingidos com sucesso, justificando suas conclusões. Se algum objetivo não foi atingido, discuta quais são os possíveis motivos do fracasso e que providências podem ser tomadas para que eles sejam alcançados.

6.6 *Tabelas*

Nº	m_g	Carregamento		Descarregamento	
Nº	m_a	ℓ	m_t	ℓ	m_t
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Tabela 6.1: Dados obtidos para o comprimento do elástico e a massa correspondente.

7 Empuxo

Realizaremos um experimento para verificar a interação entre um sólido e um fluido quando o primeiro está total ou parcialmente submerso no segundo. Verificaremos experimentalmente o princípio de Arquimedes, calculando através dos dados obtidos a densidade do fluido. Veremos também o conceito de peso aparente e através dele calcularemos a densidade de alguns sólidos. Utilizaremos os seguintes conceitos/técnicas de análise de dados: medidas, algarismos significativos, gráficos, erros de escala e propagados, equação geral para o erro propagado, e regressão linear.

7.1 Empuxo

Se tomarmos um bloco de madeira e o colocarmos em uma bacia com água, verificaremos que ele flutua. Sabemos que existe uma força gravitacional que tende a fazer com que o bloco, se ele pudesse se mover livremente, acelere em direção ao centro da Terra. Concluímos então que a água deve exercer alguma força sobre ele, equilibrando o peso e mantendo o sistema com aceleração nula.

Podemos verificar a origem dessa força se tomarmos um bloco metálico, que afunda ao ser colocado na água e o prendendo a um dinamômetro conforme mostra a Figura 7.1. Se o becker estiver vazio, claramente a leitura do dinamômetro será igual à força peso do bloco quando o sistema estiver em equilíbrio. Se o enchermos, notaremos que o dinamômetro registrará uma nova medida de força, menor do que a primeira. O valor dessa nova medida é conhecido como *peso aparente* do corpo.

A origem dessa diferença pode ser entendida ao analisarmos as forças exercidas pela pressão do fluido nas superfícies superior e inferior do bloco (as laterais se cancelam, veja a Figura 7.3). A pressão exercida por um fluido não é constante, aumentando conforme a profundidade aumenta, e é definida como

$$P = \frac{F}{A}, \quad (7.1)$$

o que implica em

$$F = PA. \quad (7.2)$$

Logo, a força na parte inferior do bloco é maior que na parte superior, já que as áreas superior e inferior são idênticas.

Essa diferença entre as forças é o que denominamos como *força de empuxo*, representada aqui como \vec{F}_E (Figura 7.4). Sua direção e sentido são verticalmente para cima, pois equilibra — ao menos parcialmente — o peso. Podemos verificar a intensidade do empuxo imaginando a seguinte situação: substituímos o volume ocupado pelo

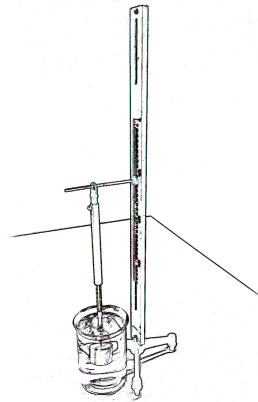


Figura 7.1: Bloco metálico suspenso por um dinamômetro e submerso em água.

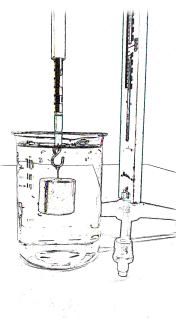


Figura 7.2: Detalhe da Figura 7.1.

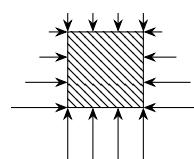


Figura 7.3: Forças atuando nas faces de um bloco submerso.

¹ Este resultado é conhecido como *princípio de Arquimedes*.

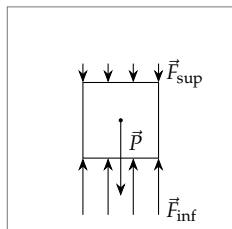


Figura 7.4: Diagrama de corpo livre representando as forças que atuam sobre o bloco quando submerso. No diagrama à direita, substituímos a soma $\vec{F}_{\text{inf}} + \vec{F}_{\text{sup}}$ das forças que atuam na parte inferior e superior do bloco por F_e , isto é, o empuxo. As forças laterais não estão representadas pois, por simetria, se equilibram.

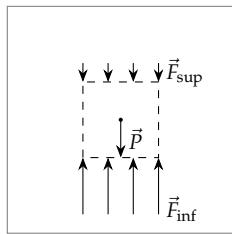


Figura 7.5: Diagrama de corpo livre representando as forças que atuam sobre uma massa de água que ocupa o volume original do bloco. As forças devido à pressão são iguais ao caso do bloco, porém o peso é menor. Como o meio é todo composto por água e deve então estar em equilíbrio, concluímos que o empuxo deve ser igual ao peso do volume de água deslocado (caso contrário não haveria equilíbrio).

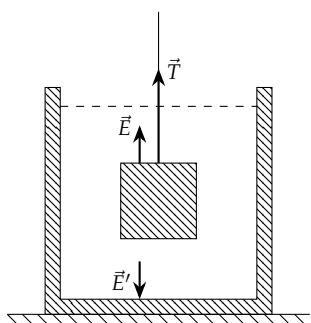


Figura 7.6: A reação à força de empuxo exercida sobre o corpo atua sobre o fundo do recipiente.

bloco por água (veja a Figura 7.5). Nesse caso, sabemos que o “bloco de água” deve permanecer em equilíbrio, como qualquer outra região do líquido. Se o “bloco” está em equilíbrio, seu peso está sendo equilibrado pelo empuxo. Logo, *o empuxo tem o mesmo módulo que o peso do líquido deslocado*¹. No caso do bloco metálico acima, o empuxo é equivalente ao peso de um “bloco de água” com o mesmo volume que o bloco metálico.

7.2 Cálculo de densidades

7.2.1 Densidade de um sólido

Podemos calcular a razão da densidade de um objeto pela densidade da água usando um dinamômetro e uma proveta. Se pendurarmos o objeto no dinamômetro, verificaremos que — no equilíbrio — ele nos dará a leitura do módulo da força peso do objeto. Quando o mergulhamos, no entanto, teremos uma leitura menor, que denominamos anteriormente como peso aparente.

Temos então que

$$P = \rho V g \quad (7.3)$$

$$F_E = \rho_{\text{água}} V g \quad (7.4)$$

onde F_E é igual ao peso do volume de água deslocado, ρ é a densidade do material e $\rho_{\text{água}}$ é a densidade da água. Calculando a razão entre as equações acima, temos

$$\frac{P}{F_E} = \frac{\rho V g}{\rho_{\text{água}} V g} = \frac{\rho}{\rho_{\text{água}}}, \quad (7.5)$$

de onde podemos escrever, lembrando que o peso aparente é dado por

$$P_{\text{ap}} = P - F_E, \quad (7.6)$$

a seguinte relação para a razão $\rho / \rho_{\text{água}}$:

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{água}}} = \frac{P}{P - P_{\text{ap}}}. \quad (7.7)$$

7.2.2 Densidade de um fluido

Podemos utilizar uma proveta, um fluido, uma balança, e um conjunto de corpos de prova para verificar a densidade do fluido.

Se tomarmos a proveta e a preenchermos com água até um certo nível, podemos pesá-la e encontraremos um valor para a massa do sistema. Ao pendurarmos o corpo de prova de forma que ele esteja *submerso, porém sem tocar as laterais da proveta ou seu fundo*, verificaremos um aumento na leitura da balança, porém esse aumento *não corresponderá à massa do corpo*. Ao verificarmos o diagrama de forças das Figuras 7.4 e 7.5, vemos que ao mergulharmos o corpo, há uma força de empuxo E dirigida para cima e que equilibra parcialmente o peso do objeto. Onde está a reação a esta força de empuxo? A reação

a esta força deve agir sobre o líquido, que — por sua vez — exerce força sobre as paredes do recipiente (Figura 7.6). Como as forças exercidas sobre uma lateral qualquer se equilibram com as forças exercidas sobre a lateral oposta, resta a força exercida sobre o fundo do recipiente. Nessa situação, temos então que a balança registrará uma “massa aparente” adicional dada por²

$$m_{ap} = \frac{F_E}{g}. \quad (7.8)$$

Como o empuxo é o peso do volume de água deslocado, temos

$$m_{ap} = \frac{m_{água}g}{g} \quad (7.9)$$

$$= m_{água}. \quad (7.10)$$

Podemos então calcular a densidade da água através da razão entre a diferença das massas (depois e antes da submersão do corpo) e a diferença dos volumes indicados pela proveta:³

$$\rho_{água} = \frac{m' - m}{V' - V}. \quad (7.11)$$

Note que se tomarmos um gráfico dos valores de $m' \times V'$ para diversos corpos submersos, temos que a inclinação do gráfico será dada por

$$B = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (7.12)$$

Assim, se fizermos um gráfico desse tipo e traçarmos a melhor reta, podemos obter $\rho_{água}$ através do coeficiente angular.

² Mesmo em uma balança de braços, o que a balança registra é a força normal exercida para equilibrar o objeto, apesar de a escala estar marcada em unidades de massa.

³ As variáveis m' e V' denotam os valores registrados pela balança e pela proveta após a submersão do corpo.

7.3 Experimento

7.3.1 Objetivos

1. Verificar experimentalmente a existência da força de empuxo e a existência de um peso aparente para um objeto submerso.
2. Verificar experimentalmente a densidade de corpos de prova utilizando um dinamômetro e uma proveta.
3. Verificar experimentalmente a reação ao empuxo.
4. Verificar experimentalmente a densidade de um líquido utilizando uma balança e uma proveta.

7.4 Material Necessário

- Proveta;
- Balança;
- Dinamômetro;
- Becker com água;
- Corpos de prova diversos;
- Suporte vertical com haste horizontal.

7.5 *Procedimento Experimental*

7.5.1 *Determinação da densidade de um sólido*

1. Disponha o dinamômetro na vertical com o auxílio do suporte com haste.
2. Zere o dinamômetro
3. Suspenda um corpo de prova usando o gancho do dinamômetro e efetue a leitura do peso real.
4. Mergulhe o corpo de prova de forma que ele não toque nas paredes e no fundo do becker. Verifique o valor do peso aparente.
5. Anote os dados obtidos para o peso na Tabela 7.1
6. Repita os itens 3 a 5 acima para os demais corpos de prova.

7.5.2 *Determinação da densidade da água*

1. Coloque 150,0 ml na proveta e meça a massa da proveta com a água;
2. Mergulhe o corpo de prova na proveta, cuidando para que ele não toque no fundo e nas bordas da proveta e determine a massa do conjunto;
3. Obtenha também a leitura para o volume indicado pela proveta.
4. Repita os itens 2 e 3 para os demais corpos.
5. Anote os resultados na Tabela 7.1

Empuxo

Turma: _____ Data: _____

Aluno(a): _____ Matrícula: _____
 Aluno(a): _____ Matrícula: _____
 Aluno(a): _____ Matrícula: _____
 Aluno(a): _____ Matrícula: _____
 Aluno(a): _____ Matrícula: _____

7.6 Questionário

Questão 1. (1 ponto) Apresente os resultados de maneira clara e organizada. Mostre os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, evidenciando o raciocínio desenvolvido.

Questão 2. (1 ponto) Liste os equipamentos utilizados. Para os instrumentos de medida, descreva o tipo do equipamento, sua resolução, e seu erro de escala.

Questão 3. (1 ponto) Preencha as tabelas com o número adequado de algarismos significativos, unidades, e erros de escala apropriados.

Questão 4. (1 ponto) Elabore um gráfico de $m' \times V'$ para os dados da Tabela 7.1.

Questão 5. (1.5 pontos) Calcule a reta que melhor representa os dados experimentais na questão acima utilizando o método dos mínimos quadrados e a adicione ao gráfico.

Questão 6. (1.5 pontos) Calcule os valores para a densidade relativa ($\rho / \rho_{\text{água}}$) dos sólidos, juntamente com o erro propagado, através da Equação 7.7. Apresente os cálculos e preencha com os resultados obtidos a coluna correspondente da Tabela 7.1.

Questão 7. (1.5 pontos) Deduza a equação para o erro em uma divisão

$$(q \pm \delta q) = (x \pm \delta x) \div (y \pm \delta y) \quad (7.13)$$

a partir da Equação (3.65).

Questão 8. (1.5 pontos) Considerando os objetivos do experimento, listados na Seção 7.3.1, e os resultados obtidos nas questões anteriores, discuta quais objetivos foram atingidos com sucesso, justificando suas conclusões. Se algum objetivo não foi atingido, discuta quais são os possíveis motivos do fracasso e que providências podem ser tomadas para que eles sejam alcançados.

7.7 *Tabelas*

Tabela 7.1: Dados para as leituras de massa, volume, peso e peso aparente.

Dados de peso e peso aparente para os corpos de prova.		
P	P_{ap}	$\rho/\rho_{água}$
Dados a leitura de volume e massa.		
V'	m'	

8 Oscilações

Verificaremos o comportamento oscilatório de dois sistemas — um sistema massa-mola e um pêndulo simples —. Veremos que através das Leis de Newton, chegamos a uma equação cuja solução é uma função periódica que descreve o movimento oscilatório observado. Utilizaremos os seguintes conceitos/técnicas de análise de dados: medidas, algarismos significativos, gráficos, erros de escala e propagados, equação geral para o erro propagado, regressão linear, linearização, e erros dos coeficientes A e B.

8.1 Sistema massa-mola

Sabemos que a força exercida por uma mola é proporcional à sua distensão:

$$F = -k\Delta x \quad (8.1)$$

$$= -kx, \quad (8.2)$$

onde assumimos que $x_i = 0$ e $x_f = x$, que k é uma constante de proporcionalidade, e onde o sinal negativo significa que a força é no sentido contrário à distensão da mola.

Vamos considerar um sistema onde penduramos uma mola em um suporte, de forma que ela se disponha verticalmente, e prendemos um corpo de massa m à extremidade inferior. Deixamos o corpo descer até que a força exercida pela mola equilibre o peso. A partir dessa posição de equilíbrio, qualquer deslocamento exercido com que atue sobre o corpo uma força proporcional ao deslocamento, porém com sentido contrário a ele, tendendo a restaurá-lo à posição de equilíbrio. Utilizando a segunda lei de Newton, podemos descrever a dinâmica do corpo através de

$$F_R^x = ma_x \quad (8.3)$$

$$P^x + F_e^x = ma_x \quad (8.4)$$

$$-P + (-kx) = ma_x \quad (8.5)$$

$$-k \left(x + \frac{mg}{k} \right) = ma_x \quad (8.6)$$

$$-kx' = ma_x, \quad (8.7)$$

onde o eixo x aponta verticalmente para cima e $x' \equiv x + mg/k$. A constante mg/k na expressão acima representa a distensão da mola em relação à posição de equilíbrio. Note também que

$$a_x = \frac{d^2}{dt^2} x \quad (8.8)$$

$$a'_x = \frac{d^2}{dt^2} x', \quad (8.9)$$

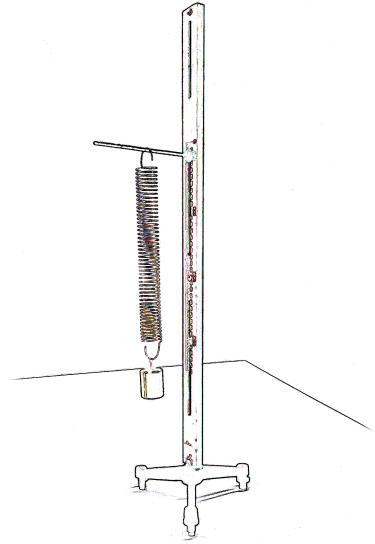


Figura 8.1: Sistema massa-mola.

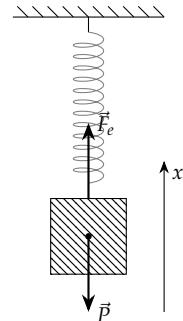


Figura 8.2: Direção e sentido das forças em um sistema massa-mola.

porém

$$a'_x = \frac{d}{dt} x' \quad (8.10)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(x - \frac{mg}{k} \right) \quad (8.11)$$

$$= \frac{d}{dt} x \quad (8.12)$$

$$= a_x, \quad (8.13)$$

pois m , g , e k são constantes. Logo, podemos escrever

$$-kx' = ma'_x, \quad (8.14)$$

o que representa uma expressão para a aceleração em função da distensão da mola em relação à posição de equilíbrio do corpo.

Analizando essa equação, temos que sempre que o corpo se distancia da posição de equilíbrio, ele está sujeito a uma força na mesma direção, porém com o sentido oposto ao desse deslocamento, acelerando-o em direção à posição de equilíbrio — em que a distensão da mola é nula (ou seja, em direção à posição de equilíbrio); isso é o que ocorre em todas as posições representadas na Figura 8.3, exceto t_0 , t_4 , e t_7 . Quando o objeto passa pela posição de equilíbrio — posições t_0 , t_4 , e t_7 —, sua aceleração é zero, porém sua velocidade não, o que o faz com que ele continue o movimento, dando origem a um *movimento oscilatório*.

Para descrever esse movimento, podemos substituir a aceleração na equação acima por sua definição em termos da derivada segunda da posição em relação ao tempo:

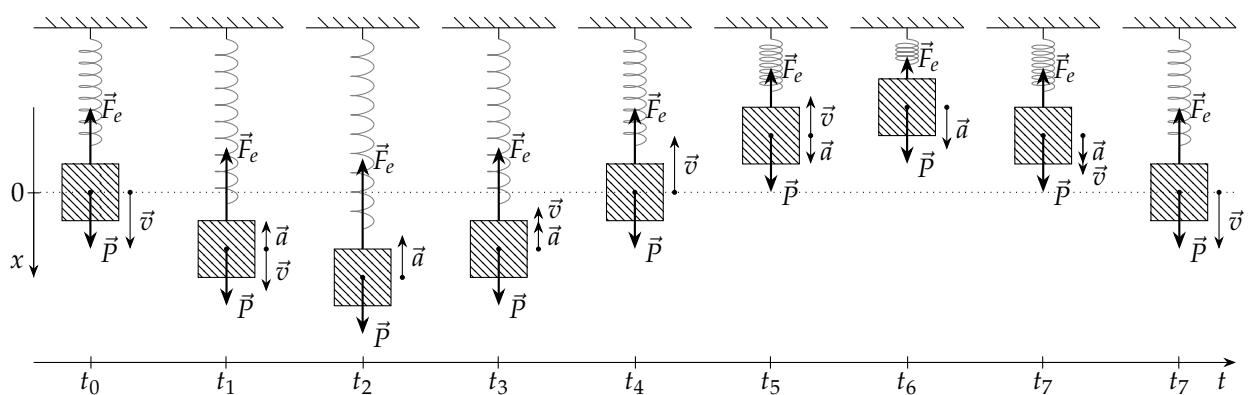
$$-kx' = m \frac{d^2 x'}{dt^2}, \quad (8.15)$$

ou, rearranjando os termos,

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{k}{m} x' = 0. \quad (8.16)$$

Através da equação acima, percebemos que a posição x' como função do tempo satisfaz uma condição curiosa: a posição vezes uma

Figura 8.3: Evolução da posição do bloco em função do tempo.



constante positiva somada à sua derivada segunda resulta em zero, ou seja, a função $x'(t)$ é tal que sua derivada é igual a ela mesma, vezes uma constante negativa. Existem duas funções que satisfazem essa condição: as funções trigonométricas seno e cosseno. Se supusermos que $x'(t)$ possui a forma

$$x'(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (8.17)$$

e a substituirmos na Equação (8.16), temos

$$-A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + \frac{k}{m} A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 0 \quad (8.18)$$

o que pode ser simplificado a

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (8.19)$$

Verificamos então que a forma suposta para $x'(t)$ é solução da Equação (8.16) se $\omega = \sqrt{k/m}$, sendo que as constantes A e ϕ podem assumir quaisquer valores. Claramente A representa os valores máximos de deslocamento do corpo em relação à posição de equilíbrio, e é denominada *amplitude* do movimento. Já a constante ϕ nos permite mudar o valor de $x(t = 0)$, e em geral escolhemos $\phi = 0$, o que implica em $x(0) = 0$. Portanto, concluímos que a posição do objeto descreve uma curva senoidal em um gráfico da posição em função do tempo. A partir da expressão para a posição, podemos calcular a velocidade e a aceleração em função do tempo

$$v'(t) = A\omega \cos \omega t \quad (8.20)$$

$$a'(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t. \quad (8.21)$$

Se analisarmos a função seno, vemos que ela tem um período igual a 2π , isto é, seu gráfico se repete a cada 2π radianos. Isso se reflete em um ciclo de oscilação do sistema massa mola, pois após o argumento do seno atingir 2π , o movimento se repete. Se considerarmos que o tempo para completar uma oscilação é o período T , temos, no instante que o objeto termina uma oscilação

$$\omega T = 2\pi \quad (8.22)$$

o que leva à seguinte equação para o período:

$$T = 2\pi \frac{1}{\omega}. \quad (8.23)$$

Substituindo a expressão para ω , temos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (8.24)$$

Verificamos então que o período de oscilação do sistema massa-mola depende da massa do objeto e da constante k da mola.

Expressões como a Equação (8.16) são comuns em física e são denominadas *Equações Diferenciais Ordinárias*. As soluções para estas equações são *funções*. A Equação (8.16) em particular define o *Movimento Harmônico Simples*.

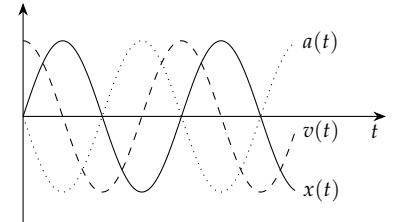


Figura 8.4: Gráfico da posição (linha contínua), velocidade (linha tracejada), e aceleração (linha pontilhada) como funções do tempo para um sistema massa-mola. (As escalas dos eixos verticais das três funções são diferentes para que os três gráficos possam ser comparados qualitativamente.)

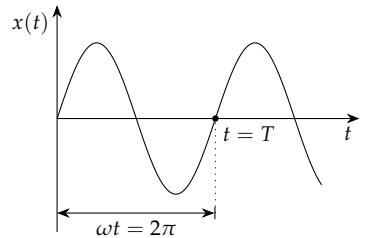


Figura 8.5: O tempo necessário para completarmos uma oscilação é o que denominamos como período T . Como a periodicidade da função seno é igual a 2π , quando $\omega t = 2\pi$, o movimento se repete e o valor de t é o do próprio período T .

8.2 Pêndulo Simples

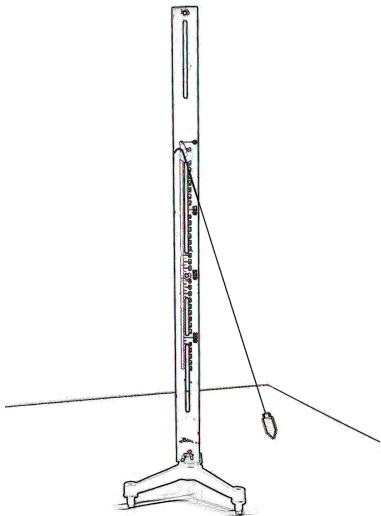


Figura 8.6: Pêndulo simples.

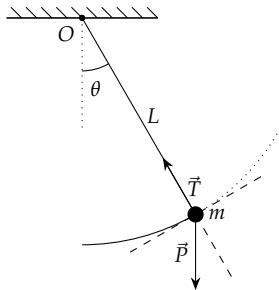
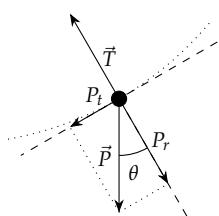


Figura 8.7: Diagrama de corpo livre do pêndulo simples.

Figura 8.8: Decomposição da força peso em uma componente tangencial à trajetória circular e em uma componente ao longo da reta radial que liga o centro da trajetória à posição do corpo. O torque está relacionado à componente tangencial, dada por $P_t = mg \sen \theta$.

¹ É interessante notar que se o pêndulo for longo e a massa do corpo suspenso for grande, o pêndulo pode oscilar por muito tempo. Nesse caso verificaremos que o eixo de rotação muda de direção em relação ao solo. Esse efeito, porém, se deve à rotação da Terra e não da mudança do eixo de rotação do pêndulo.

Podemos tratar um objeto que oscila preso a uma corda de massa desprezível como uma oscilação harmônica desde que o ângulo máximo de oscilação — isto é, a amplitude — seja pequena. Se essa condição for garantida, o pêndulo é denominado *pêndulo simples*.

Se deslocarmos um pêndulo para a direita, como na Figura 8.7, teremos uma componente da força peso que sempre tende a restaurar o pêndulo à posição de equilíbrio, o que dá origem a um movimento oscilatório. De acordo com a segunda lei de Newton para a rotação,

$$\tau = I\alpha. \quad (8.25)$$

O momento de inércia do pêndulo pode ser determinado através da expressão para o momento de inércia de um conjunto de partículas:

$$I = \sum_i m_i (r_{\perp}^i)^2, \quad (8.26)$$

onde r_{\perp}^i representa a distância da i -ésima partícula ao eixo de rotação: tal eixo é perpendicular ao círculo descrito pelo movimento do corpo preso à extremidade da corda e passa pelo ponto onde ela é fixada ao suporte. Como estamos tratando o caso em que a corda tem massa desprezível, podemos em boa aproximação considerar que toda a massa do pêndulo está localizada no centro de massa do corpo preso à corda. Assim,

$$I = mL^2, \quad (8.27)$$

sendo que consideramos que $r_{\perp} \approx L$.

Para determinar o torque τ , devemos calcular o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{P}$, pois a força responsável pela aceleração angular é a própria força peso que atua no corpo preso à extremidade da corda. Além disso, não estamos interessados na direção do torque, uma vez que o movimento se restringe à rotação em torno do eixo de rotação; a direção de tal eixo não muda¹. Nesse caso podemos tomar o módulo de τ , obtendo

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}_R| \quad (8.28)$$

$$= |\vec{r} \times (\vec{T} + \vec{P})| \quad (8.29)$$

$$= |\vec{r} \times \vec{T} + \vec{r} \times \vec{P}|. \quad (8.30)$$

Como o vetor \vec{r} parte da origem O e vai até a posição do corpo, ele aponta na mesma direção do fio e é colinear ao vetor tensão \vec{T} . Logo, o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{T}$ é zero, e o torque é dado por

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{P}| \quad (8.31)$$

$$= mgL \sen \theta. \quad (8.32)$$

Substituindo os resultados para o momento de inércia e para o torque na segunda lei de Newton para a rotação, obtemos

$$-mgL \sen \theta = mL^2 \alpha. \quad (8.33)$$

O sinal está relacionado ao fato de que a força tem sempre direção contrária ao deslocamento. A aceleração α se refere à derivada segunda da posição angular do pêndulo, portanto podemos reescrever a expressão acima como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \quad (8.34)$$

Até este momento obtivemos uma equação que descreve o movimento de um pêndulo para qualquer valor de amplitude e, devido à função seno, não temos uma oscilação harmônica. Uma propriedade do seno, no entanto, é que para valores pequenos do argumento θ — em radianos —, obtemos valores de $\sin \theta$ muito próximos dos próprios valores de θ . Isso pode ser visto através de uma expansão em série:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots, \quad (8.35)$$

onde θ é dado em radianos. Se θ é pequeno (muito menor que 1 rad), θ^3 é menor ainda, portanto os termos de ordem maior que θ são desprezíveis para pequenas oscilações. Logo,

$$\sin \theta \approx \theta, \quad (8.36)$$

o que nos leva a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0. \quad (8.37)$$

Como a equação acima tem a mesma forma que a Equação 8.16, concluímos que o movimento para o pêndulo simples também é harmônico, sendo que $\theta(t)$ é dada por

$$\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \phi), \quad (8.38)$$

onde θ_m representa a amplitude máxima de oscilação e ω é dado por

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (8.39)$$

O período T , consequentemente, é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (8.40)$$

8.3 Experimento

8.3.1 Objetivos

1. Verificar a relação entre o período e a massa para um sistema massa-mola.
2. Verificar a relação entre o período e o comprimento de um pêndulo simples.
3. Determinar a constante elástica de uma mola através do período de oscilação de um sistema massa-mola.
4. Determinar a aceleração da gravidade através do período de oscilação de um pêndulo simples.

8.4 Material Necessário

- Suporte vertical com haste horizontal;
- Mola;
- Ganchos e anilhas;
- Balança;
- Cronômetro;
- Fio flexível;
- Corpo pequeno ao qual se possa prender um fio;
- Régua milimetrada de 100,00 cm.
- Transferidor.

8.5 Procedimento Experimental

8.5.1 Sistema massa-mola

1. Prenda uma extremidade da mola à haste horizontal do suporte e a disponha verticalmente.
2. Afira a massa de um gancho com uma anilha, anotando o valor na Tabela 8.1. Prenda-os à extremidade inferior da mola.
3. Desloque o gancho e a anilha alguns centímetros para cima e solte. Deixe o sistema completar 10 oscilações, cronometrando o tempo necessário para efetuá-las. Utilize como erro para o cronômetro² o valor de 0,2 s.
4. Anote os resultados para o tempo necessário para completar as 10 oscilações na Tabela 8.1. Utilize unidades do SI.
5. Adicione anilhas ao gancho, uma a uma, e repita o processo acima para cada adição. Anote os valores de massa do gancho com as anilhas e o tempo correspondente de oscilação. Adicione tantas anilhas quanto possível, tomando o cuidado de não danificar a mola.

8.5.2 Pêndulo simples

1. Prenda o corpo pequeno à extremidade de um fio flexível.
2. Prenda a outra extremidade do fio à haste horizontal do suporte, de forma que a distância entre a haste de sustentação e o centro de massa do corpo seja de aproximadamente 100,00 cm. Solte o corpo de forma que o fio fique esticado e o corpo se mantenha parado, sustentado pelo fio.

² Em um cronômetro manual o erro aleatório associado ao tempo de reação do operador é bastante significativo, sendo muito maior que o erro de escala. Por isso, podemos descartar o valor desse último e utilizar somente o próprio erro aleatório, que pode ser determinado a partir do desvio padrão. O valor de 0,2 s é um valor típico para o erro aleatório em um cronômetro manual.

3. Desloque o corpo lateralmente, de forma que o ângulo entre o fio e a vertical não exceda 10,0°. Deixe o corpo completar 10 oscilações, cronometrando o tempo necessário. Anote o valor do comprimento do fio e do tempo para as 10 oscilações na Tabela 8.2. Utilize unidades do SI.
4. Diminua o tamanho do fio em 5,00 cm e calcule o novo tempo necessário para completar as 10 oscilações, anotando as informações na Tabela 8.2.
5. Repita o processo acima até um comprimento mínimo de 45,00 cm.

Oscilações

Turma: _____ Data: _____

Aluno(a): _____	Matrícula: _____

8.6 Questionário

Questão 1. (1 ponto) Apresente os resultados de maneira clara e organizada. Mostre os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, evidenciando o raciocínio desenvolvido.

Questão 2. (0.75 pontos) Liste os equipamentos utilizados. Para os instrumentos de medida, descreva o tipo do equipamento, sua resolução, e seu erro de escala.

Questão 3. (0.75 pontos) Preencha as tabelas com o número adequado de algarismos significativos, unidades, e erros de escala apropriados.

Questão 4. (1 ponto) Elabore um gráfico de $T^2 \times m$ para os dados da Tabela 8.1.

Questão 5. (1 ponto) Para a questão anterior, calcule a reta que melhor representa os dados experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados e a adicione ao gráfico. *Utilize as unidades do SI para efetuar a regressão linear para obter resultados de mais fácil interpretação.*

Questão 6. (1 ponto) Ainda considerando o gráfico $T^2 \times m$, demonstre a relação entre o coeficiente angular B e a constante da mola k , e calcule o valor desta última.

Questão 7. (1 ponto) Elabore um gráfico de $T^2 \times L$ para os dados da Tabela 8.2.

Questão 8. (1 ponto) Para a questão anterior, calcule a reta que melhor representa os dados experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados e a adicione ao gráfico. *Utilize as unidades do SI para efetuar a regressão linear para obter resultados de mais fácil interpretação.*

Questão 9. (1 ponto) Ainda considerando o gráfico $T^2 \times L$, demonstre a relação entre o coeficiente angular B e a aceleração da gravidade g , e calcule o valor desta última.

Questão 10. (1.5 pontos) Considerando os objetivos do experimento, listados na Seção 8.3.1, e os resultados obtidos nas questões anteriores, discuta quais objetivos foram atingidos com sucesso, justificando suas conclusões. Se algum objetivo não foi atingido, discuta quais são os possíveis motivos do fracasso e que providências podem ser tomadas para que eles sejam alcançados.

8.7 Tabelas

m	T_{10}	T	T^2

Tabela 8.1: Dados para a oscilação de um sistema massa-mola.

L	T_{10}	T	T^2

Tabela 8.2: Dados para a oscilação de um pêndulo simples.

9 Ondas estacionárias

Submeteremos um fio a uma tensão e a uma vibração, com a consequente formação de ondas estacionárias. O objetivo desse experimento é verificarmos experimentalmente as propriedades de tais ondas e as relações com os diversos parâmetros do sistema. Utilizaremos os seguintes conceitos/técnicas de análise de dados: medidas, algarismos significativos, gráficos, software para elaboração de gráficos, erros de escala e propagados, equação geral para o erro propagado, regressão linear, linearização, e erros dos coeficientes A e B.

9.1 Ondas transversais

Uma onda mecânica é uma perturbação periódica que se propaga em um meio. No caso de uma onda transversal, tal perturbação é um deslocamento lateral, perpendicular à direção de propagação da onda. Esse tipo de onda pode ser descrita como uma função $y(x, t)$, onde y representa o valor da perturbação na posição x e tempo t . A forma mais simples para essa função é

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t), \quad (9.1)$$

onde A é a amplitude da onda — isto é, o valor máximo atingido pela variável y — e os parâmetros k e ω são denominados como *número de onda* e *frequência angular*, respectivamente.

Tal expressão pode ser entendida de maneira simples se considerarmos dois casos especiais: $x = 0$ para qualquer t e $t = 0$ para qualquer x . Isso resulta nas expressões

$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t), \quad (9.2)$$

e

$$y(x) = A \operatorname{sen}(kx). \quad (9.3)$$

O primeiro caso representa simplesmente a oscilação de um ponto do meio no qual a onda se propaga (especificamente, nesse caso, aquele localizado na origem do eixo x). No segundo caso, temos uma análise de toda a onda em um dado instante de tempo, como se a congelássemos (veja a Figura 9.1).

Interpretação da frequência angular para uma onda

Sabemos que a função $\operatorname{sen} \theta$ se repete a partir de $\theta = 2\pi$, o que se reflete em uma repetição do movimento oscilatório. Consequentemente, temos que ao final de uma oscilação

$$\omega T = 2\pi, \quad (9.4)$$

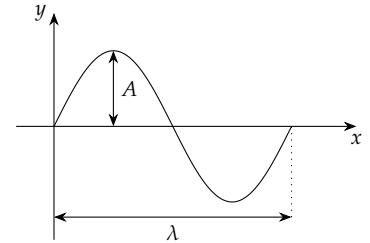


Figura 9.1: Parâmetros espaciais de uma onda transversal.

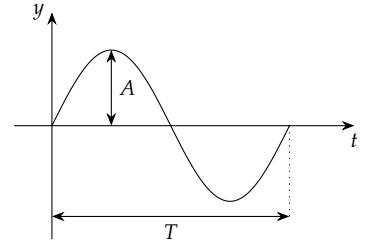


Figura 9.2: Parâmetros temporais de uma onda transversal.

onde usamos $t = T$ — isto é, a variável t assume o valor do período T da oscilação (o tempo que o movimento oscilatório demora para completar um ciclo) —. Logo

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (9.5)$$

Para determinarmos o número de oscilações por unidade de tempo — a frequência da oscilação —, basta dividirmos uma unidade de tempo pela duração de uma oscilação, ou seja,

$$f = \frac{1}{T}, \quad (9.6)$$

o que nos permite escrever

$$\omega = 2\pi f. \quad (9.7)$$

Interpretação do número de onda

Se nos deslocamos na direção do eixo x , observamos uma variação da posição y , sendo que após percorrermos uma distância λ — denominada *comprimento de onda* — o movimento se repete. Novamente, como a função $\sin \theta$ se repete após $\theta = 2\pi$, temos que para a posição $x = \lambda$

$$k\lambda = 2\pi, \quad (9.8)$$

ou

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (9.9)$$

Velocidade de propagação de uma onda

Podemos calcular a velocidade de propagação da onda simplesmente verificando que uma crista qualquer (o ponto em que y atinge o valor máximo) se desloca uma distância λ a cada oscilação. Logo

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}. \quad (9.10)$$

A velocidade de propagação de uma onda é uma constante que depende de características do meio no qual a onda se propaga. Em uma onda transversal em uma corda, por exemplo, ela é dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (9.11)$$

onde T representa a tensão a qual a corda está submetida, e μ representa a densidade linear de massa da corda. Portanto, os valores da frequência angular ω e do número de onda k não são independentes, pois estão ligados através da velocidade.

Sentido de propagação de uma onda

O sentido de propagação da onda está ligado ao sinal do termo ωt na Equação (9.1). Podemos entender tal relação, consideramos

um sistema de referência ortogonal xy e uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo x , como mostrado na Figura 9.3. No referencial xy , a onda é descrita através de uma função $y(x, t)$ e se propaga com velocidade v .

Em um segundo referencial ortogonal, denotado $x'y'$, que se move na direção e sentido do eixo x , com velocidade v em relação ao primeiro sistema de referência, temos que a velocidade da onda é nula. A função y' que descreve a onda deve então depender somente da posição x' nesse referencial, ou seja, temos somente $y'(x')$. Podemos assumir que no referencial $x'y'$ a expressão para a onda é dada por

$$y'(x') = A \operatorname{sen}(kx'). \quad (9.12)$$

A relação entre x' e x é dada por

$$x' = x - vt, \quad (9.13)$$

portanto, podemos escrever $y'(x, t)$ como

$$y'(x, t) = A \operatorname{sen}(k[x - vt]) \quad (9.14)$$

$$= A \operatorname{sen}(kx - kvt). \quad (9.15)$$

Considerando que a origem dos eixos y e y' coincide, podemos escrever $y'(x, t) = y(x, t)$, o que nos permite escrever

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t), \quad (9.16)$$

onde utilizamos a Equação 9.10 para eliminar a velocidade. Note, portanto, que no caso em que a onda se desloca no sentido *positivo*, o sinal deve ser *negativo*.

Caso a onda se desloque no sentido negativo do eixo x , novamente com um sistema de referência ortogonal $x'y'$ que se move na mesma direção e sentido para a qual a onda se propaga —como mostrado na Figura 9.4—, temos como única diferença o fato de que a relação entre x' e x é dada por

$$x' = x + vt, \quad (9.17)$$

de onde obtemos

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t). \quad (9.18)$$

Portanto, se a onda se desloca no sentido *negativo* do eixo x , temos um sinal *positivo*.

Uma maneira alternativa de compreender a relação entre o sinal e o sentido de propagação é a de que se tomarmos um valor de x qualquer com um valor de $\operatorname{sen}(kx - \omega t)$ correspondente, quando t aumenta, o valor do argumento — isto é, $kx - \omega t$ — diminui. Equivalentemente, poderíamos simplesmente diminuir o argumento escolhendo um valor de x menor, ou seja, escolheríamos um ponto à esquerda. O efeito de aumentar o t é então o de tomar o “gráfico” do $\operatorname{sen}(kx)$ e deslocá-lo para a direita, o que implica em uma propagação da onda para a direita. Logo, para uma onda que se propaga no sentido positivo

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t). \quad (9.19)$$

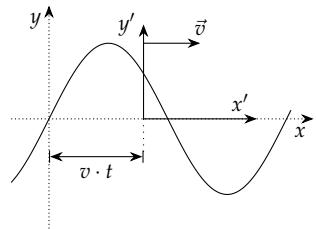


Figura 9.3: Para uma onda que se propagam no sentido positivo de x , a relação entre as coordenadas x e x' é $x' = x - vt$.

Onda transversal que se propaga no sentido positivo

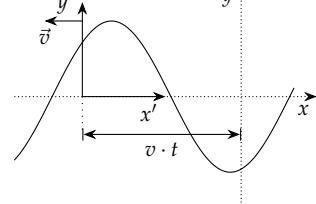


Figura 9.4: No caso de uma onda que se propagam no sentido negativo de x , a relação entre as coordenadas x e x' é $x' = x + vt$.

Onda transversal que se propaga no sentido negativo

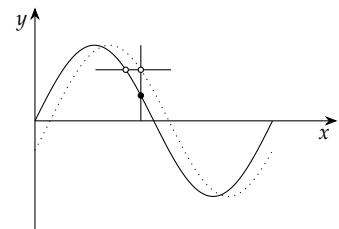


Figura 9.5: Ao aumentarmos o valor de t , temos uma diminuição do valor do argumento da função seno. Poderíamos ter uma diminuição equivalente reduzindo o valor de x , o que equivale a alterar a posição do ponto preenchido para o ponto vazado. Tal alteração equivale, por sua vez, a deslocar todo o gráfico para a direita.

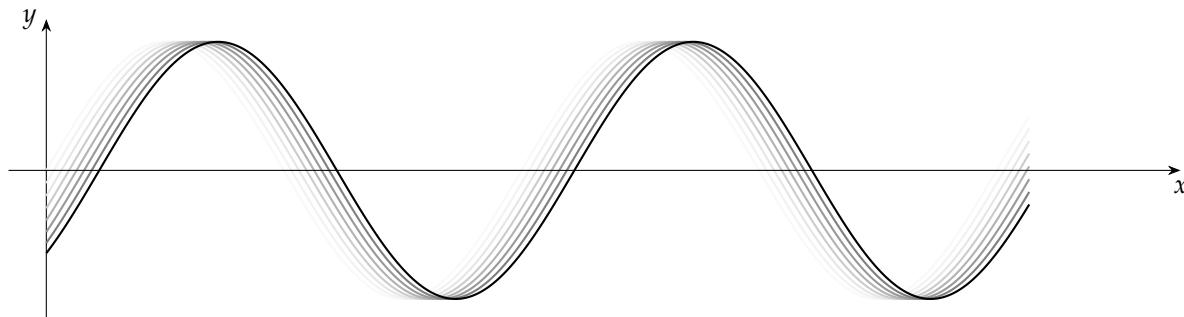


Figura 9.6: Evolução temporal de uma onda transversal descrita por $y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$.

¹ Uma maneira simples de se obter tal fenômeno é utilizar uma corda presa a uma parede e em cuja extremidade livre ligamos um oscilador (cuja função é gerar a perturbação, ou seja, a onda). Ao se propagar, a onda atinge a extremidade fixa e é refletida, passando a trafegar no sentido oposto, o que faz com que ela interfira com pulsos de onda gerados posteriormente, e que ainda estão se propagando no sentido original.

9.1.1 Ondas estacionárias

Vamos supor que duas ondas com os mesmos valores de amplitude A , frequência angular ω , e número de onda k , se propagam em sentidos opostos em um mesmo meio¹. Podemos descrever tais ondas através das expressões

$$y_1(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (9.20)$$

$$y_2(x, t) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t). \quad (9.21)$$

Quando ambas estiverem se propagando em uma mesma região do meio de propagação, a onda resultante será dada por:²

$$y_{1+2}(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (9.22)$$

$$= A \operatorname{sen}(kx - \omega t) + A \operatorname{sen}(kx + \omega t). \quad (9.23)$$

Utilizando a propriedade

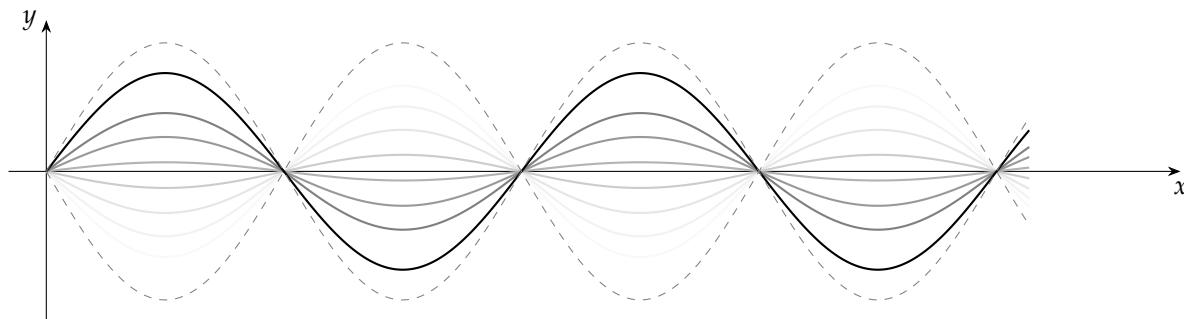
$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen}[(\alpha + \beta)/2] \cos[(\alpha - \beta)/2], \quad (9.24)$$

podemos reescrever a superposição das duas ondas como

$$y_{1+2}(x, t) = [2A \operatorname{sen} kx] \cos \omega t. \quad (9.25)$$

Na Equação (9.25), o termo entre colchetes denota a amplitude de uma onda cuja posição no eixo y muda com o tempo conforme $\cos \omega t$. Analisando tal expressão, percebemos que para valores periódicos de x , o valor da amplitude é zero. Isso implica que, no caso da superposição das duas ondas, temos uma onda resultante na qual alguns

Figura 9.7: Evolução temporal de uma onda transversal estacionária.



pontos (denominados *nós*) permanecem parados, enquanto os demais pontos variam sua posição com o tempo, sendo que a amplitude dessa oscilação depende da posição em x . Podemos verificar na Figura 9.7 uma onda estacionária descrita por tal equação. A linha em preto mostra o estado atual, enquanto as demais mostram o estado da onda em instantes anteriores (em intervalos regulares de tempo). Note que existem “ventres” delimitados por $\pm 2A \sin kx$ (linhas tracejadas), isto é, ventres cujo perfil é dado pela função $2A \sin kx$ tanto acima, quanto abaixo da direção de propagação x . Portanto, o movimento da onda fica restrito a deslocamentos na direção do eixo y , limitado pelas linhas tracejadas.

De acordo com o termo $[2A \sin kx]$, a posição dos nós pode ser obtida fazendo com que

$$kx = n\pi. \quad (9.26)$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, isto é, um número inteiro não negativo. Substituindo a expressão para o número de onda $k = (2\pi)/\lambda$, obtemos

$$x = n\frac{\lambda}{2}. \quad (9.27)$$

Temos então que, para uma onda estacionária, os nós aparecem a cada meio comprimento de onda.

9.2 Ondas estacionárias em uma corda fixada em dois pontos

Em uma onda estacionária, os pontos de fixação devem ser obrigatoriamente nós (afinal, para que houvesse um ventre nos pontos de fixação, a corda precisaria oscilar, o que a fixação impede). Isso faz com que tenhamos um *número inteiro de meios comprimentos de onda* entre os pontos de fixação. Como a velocidade da onda no meio é uma constante característica do próprio meio, concluímos que somente algumas frequências específicas são capazes de gerar ondas estacionárias.

Sabemos que a amplitude da onda estacionária será nula sempre que

$$kx = n\pi, \quad (9.28)$$

logo, os dois primeiros nós são então em $x = 0$ e em $x = \lambda/2$. Isto significa que temos uma onda estacionária de forma que a distância entre os pontos de fixação equivale a *meio comprimento de onda*.

Temos outras possibilidades, no entanto: se assumirmos que no segundo ponto de fixação temos o terceiro nó, temos que a distância entre os pontos de fixação será coberta por dois ventres (um comprimento de onda). De forma geral temos que a distância L entre os pontos de fixação é igual a um número inteiro de meios comprimentos de onda:

$$L = n'\frac{\lambda}{2}. \quad (9.29)$$

O valor de $n' = 1, 2, 3, \dots$ designa o número³ de ventres da onda estacionária. Como a frequência está relacionada com a velocidade v

³ O número de ventres n' está relacionado ao número de nós n por $n' = n - 1$.

e o comprimento de onda através de

$$f = \frac{v}{\lambda}, \quad (9.30)$$

para uma onda estacionária temos que,

$$f = \frac{n'}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (9.31)$$

⁴ No aparato experimental adotado, a corda passa por uma polia e sustenta um conjunto de anilhas. A tensão na corda será então igual ao peso do conjunto, isto é, $T = mg$.

onde utilizamos as Equações (9.11) e (9.29).⁴

Portanto, é interessante notar que para uma corda cujas extremidades são fixas existem múltiplos — porém específicos — valores de frequência para os quais podemos ter uma onda estacionária. Essas frequências são denominadas *frequências de ressonância*, sendo que a menor delas é denominada *modo fundamental ou frequência fundamental* — ou ainda, *primeiro harmônico* —, enquanto as demais são denominadas *segundo harmônico* ($n' = 2$), *terceiro harmônico* ($n' = 3$), etc.

9.3 Experimento

9.3.1 Objetivos

1. Verificar a proporcionalidade da frequência de ressonância f com a raiz quadrada da tensão exercida pela corda, sendo que a tensão será variada ao se alterar a massa m suspensa na extremidade livre;
2. Linearizar a equação que relaciona a frequência à massa, determinando a função $F_1(m)$ de forma que um gráfico $f \times F_1(m)$ seja linear.
3. Verificar a proporcionalidade da frequência de ressonância f com o inverso do comprimento L da corda.
4. Linearizar a equação que relaciona a frequência ao comprimento, determinando a função $F_2(L)$ de forma que um gráfico $f \times F_2(L)$ seja linear.
5. Determinar o valor da densidade linear de massa através do coeficiente angular dos gráficos $f \times F_2(L)$.
6. Determinar o valor da gravidade através do coeficiente angular dos gráficos $f \times F_1(m)$.

9.4 Material Necessário

- Gerador de ondas;
- Trena;
- Fio fino;
- Balança;
- Anilhas leves e gancho;
- Polia com suporte.

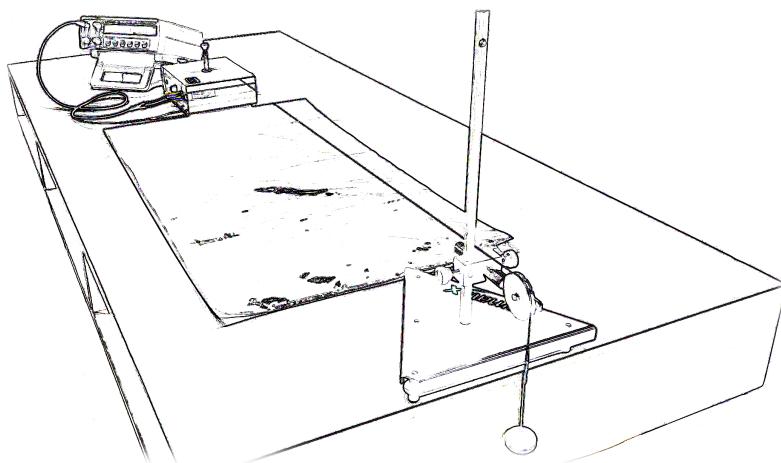


Figura 9.8: Aparato para a visualização de ondas estacionárias em uma corda.

9.5 Procedimento Experimental

9.5.1 Determinação da densidade linear de massa do fio (opcional)

O valor de densidade de massa do fio utilizado pode ser determinado com a utilização de uma balança de alta precisão⁵. Para isso basta tomarmos um segmento com um comprimento L arbitrário, porém determinado, e verificarmos qual a massa m correspondente. Obtemos a densidade linear de massa μ através da razão

$$\mu = \frac{m}{L}. \quad (9.32)$$

O valor obtido dessa forma será considerado o *valor de referência* na análise de dados.

9.5.2 Dependência da frequência de ressonância com a tensão aplicada

1. Ligue o gerador de ondas ao oscilador eletromecânico, dispondo o segundo a uma distância de aproximadamente 1,30 m da extremidade da mesa;
2. Prenda a polia ao suporte e a disponha de forma que fique para fora da mesa;
3. Tome um segmento de fio com tamanho adequado e o prenda ao pino do oscilador. Anote na Tabela 9.1 o valor de referência para densidade linear de massa μ do fio utilizado;
4. Afira a massa do gancho, juntamente com uma anilha e os pendure na extremidade livre da corda, fazendo-a passar pela polia e deixando o gancho suspenso. Anote na Tabela 9.1 o valor da massa m suspensa na corda;
5. Ligue o gerador de ondas e varie a frequência até que se forme uma onda estacionária com dois⁶ ventres ($n' = 2$);

⁵ Caso a determinação da densidade linear de massa μ não seja feita experimentalmente, utilize o valor de $\mu = (9,010 \pm 0,002) \times 10^{-4} \text{ g/cm}$.

⁶ Esse harmônico foi escolhido por ser o de mais fácil visualização.

6. Anote o valor da frequência f em que a onda estacionária se forma na Tabela 9.1. Obs.: Em alguns equipamentos, a frequência pode variar constantemente. Nesse caso, anote os valores com uma casa após a vírgula e adote o valor de erro como sendo 0,1 Hz.
7. Utilize a trena/régua para medir a distância L entre os nós das extremidades⁷. Anote o valor obtido na Tabela 9.1. Esse valor será aproximadamente constante e não precisa ser medido novamente.
8. Adicione mais uma anilha ao gancho e repita o processo a partir do item 4 até que a tabela seja completamente preenchida.

9.5.3 Dependência da frequência de ressonância com o comprimento do fio

1. Mantenha o aparato disposto conforme a descrição da seção anterior;
2. Utilizando uma ou duas anilhas, verifique o valor da massa m suspensa pelo fio (gancho e anilhas) e anote na Tabela 9.2. Desta vez manteremos a massa constante. Anote também o valor de referência da densidade linear de massa μ do fio;
3. Ligue o gerador de ondas e varie a frequência até que se forme uma onda estacionária com dois ventres ($n' = 2$). Anote o valor de frequência f na Tabela 9.2;
4. Utilize a trena para medir a distância L entre os nós das extremidades.⁸ Anote o valor de L na Tabela 9.2;
5. Mova o oscilador aproximadamente 10,0 cm em direção à polia e repita o processo a partir do item 3 até preencher a tabela ou até que as anilhas estejam prestes a tocar o chão.
6. Repita os itens acima para ondas estacionárias com três ventres ($n' = 3$), preenchendo a Tabela 9.3.

⁷ A distância deve ser medida entre o ponto em que a corda toca a polia (onde se localiza um dos nós) e o nó que deve se formar um pouco antes do pino do oscilador. Em muitos casos o nó se forma tão próximo do pino que não podemos distingui-lo. Nesse caso meça a distância entre a polia e o próprio pino do oscilador. Este valor é, efetivamente, o comprimento da corda.

⁸ Novamente, devemos medir a distância entre o nó determinado pelo ponto em que a corda toca a polia e o nó que se forma próximo ao pino do oscilador.

Ondas Estacionárias

Turma: _____ Data: _____

Aluno(a): _____	Matrícula: _____

9.6 Questionário

Questão 1. (1 ponto) Apresente os resultados de maneira clara e organizada. Mostre os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, evidenciando o raciocínio desenvolvido.

Questão 2. (0.5 pontos) Liste os equipamentos utilizados. Para os instrumentos de medida, descreva o tipo do equipamento, sua resolução, e seu erro de escala.

Questão 3. (0.5 pontos) Preencha as tabelas com o número adequado de algarismos significativos, unidades, e erros de escala apropriados.

Questão 4. (1 ponto) Elabore um gráfico linear de f em função da massa m para os dados da Tabela 9.1. *Será necessário efetuar uma mudança de variáveis.*

Questão 5. (1 ponto) Para a questão anterior, calcule a reta que melhor representa os dados experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados e a adicione ao gráfico.

Questão 6. (1 ponto) Considerando a linearização adotada na Questão 4 e a Equação (9.31), identifique os coeficientes angular B e linear A . Utilizando a relação obtida para o coeficiente angular, determine a densidade linear de massa do fio a partir do valor obtido para B na questão anterior. Determine o erro percentual em relação ao valor de referência utilizando a expressão

$$E\% = \left| \frac{x - x_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \right| \times 100. \quad (9.33)$$

Questão 7. (1.5 pontos) Calcule o erro associado ao coeficiente angular obtido na Questão 5. A partir dos valores do coeficiente e do erro, determine o erro associado à densidade linear de massa do fio.

⁹ Os dois conjuntos de dados devem estar contidos no mesmo gráfico.

Questão 8. (1 ponto) Elabore um gráfico⁹ linear de f em função de L para os dados das Tabelas 9.2 e 9.3. Novamente, será necessário efetuar uma mudança de variáveis.

Questão 9. (1 ponto) Para a questão anterior, calcule as retas que melhor representam os dados experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados e as adicione ao gráfico.

Questão 10. (1.5 pontos) Considerando os objetivos do experimento, listados na Seção 9.3.1, e os resultados obtidos nas questões anteriores, discuta quais objetivos foram atingidos com sucesso, justificando suas conclusões. Se algum objetivo não foi atingido, discuta quais são os possíveis motivos do fracasso e que providências podem ser tomadas para que eles sejam alcançados.

9.7 Tabelas

Parâmetros constantes

L	
μ	

Dados para a massa e a frequência correspondente

m	f

Parâmetros constantes

m	
μ	

Dados para o comprimento e a frequência correspondente

L	f

Tabela 9.1: Dados para a frequência de surgimento do **segundo harmônico** ($n' = 2$).

Tabela 9.2: Dados para a frequência de surgimento do **segundo harmônico** ($n' = 2$).

Tabela 9.3: Dados para a frequência de surgimento do **terceiro harmônico** ($n' = 3$).

10 Dilatação linear e lei de resfriamento de Newton

Realizaremos um experimento de dilatação linear de sólidos verificando a relação entre o comprimento de tubos metálicos e sua temperatura. Verificaremos também qual é a evolução temporal da temperatura dos tubos no processo de resfriamento. A partir dos resultados obtidos, calcularemos os coeficientes de dilatação dos materiais dos tubos e os identificaremos. Verificaremos também qual é a expressão que descreve a evolução da temperatura durante o processo de resfriamento. Veremos a expressão para a dilatação linear e também o conceito de equação diferencial. Utilizaremos os seguintes conceitos/técnicas de análise de dados: medidas, algarismos significativos, gráficos, software para elaboração de gráficos, erros de escala e propagados, equação geral para o erro propagado, regressão linear, linearização, e erros dos coeficientes A e B .

10.1 Dilatação Linear

Ao resfriarmos ou aquecermos um objeto, verificamos que ele tem suas dimensões alteradas. Isso é especialmente notável em fios longos, pois a variação do comprimento é proporcional ao comprimento do objeto. Esse fenômeno têm muitas implicações práticas: pontes necessitam de juntas de dilatação, assim como pisos e trilhos de trem. Caso não as tivessem, com um aumento ou diminuição de temperatura, apareceriam deformações e rachaduras que deteriorariam essas estruturas.

Muitas vezes esse tipo de comportamento pode ser usado de maneira positiva: duas peças metálicas podem ser unidas sem soldas se elas forem feitas de forma que uma das peças encaixe em um orifício da outra somente se a segunda for aquecida — estando, portanto, dilatada —. Quando a peça externa for resfriada, ela se contrairá e acabará prendendo a peça interna.

Além de notarmos que a dilatação é proporcional às dimensões do objeto, verifica-se experimentalmente que quanto maior a variação de temperatura a que o objeto é submetido, maior é a variação do comprimento. Observamos ainda que materiais diferentes tem variações diferentes de comprimento para uma mesma variação de temperatura. Essas observações podem ser condensadas na seguinte equação:

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T, \quad (10.1)$$

onde α é uma constante característica do material, L_0 é o comprimento inicial do objeto — ou seja, seu comprimento antes de sofrer a variação de temperatura — e $\Delta T = T - T_0$ (T_0 é a temperatura inicial e T é a temperatura final do corpo). Podemos usar $\Delta L = L - L_0$ para

reescrever esta expressão como

$$L = L_0 + \alpha L_0(T - T_0). \quad (10.2)$$

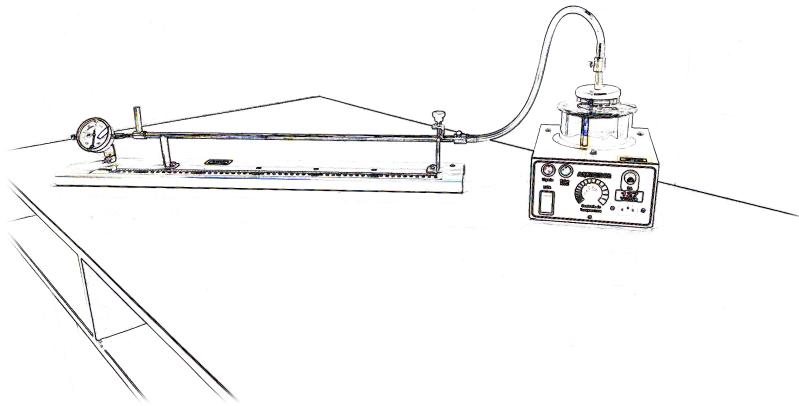
Se compararmos a expressão acima com a equação da reta $y = A + Bx$, podemos fazer a seguinte identificação entre as variáveis:

$$\begin{array}{ll} y = L & x = (T - T_0) \\ A = L_0 & B = \alpha L_0 \end{array}$$

Segundo as relações acima, se realizarmos um experimento no qual variarmos a temperatura de — por exemplo — uma barra metálica, anotando os valores do comprimento em função da variação de temperatura, verificaremos ao fazer a regressão linear que o coeficiente linear não é zero. Nesse caso o valor obtido para A será igual ao comprimento inicial da barra. O coeficiente angular B , por sua vez, será igual ao produto do coeficiente de expansão térmica α pelo comprimento inicial da barra.

Tabela 10.1: Valores dos coeficientes de expansão térmica para alguns metais.

Figura 10.1: Equipamento para a verificação experimental da dilatação linear de sólidos.



10.2 Lei de resfriamento de Newton

¹ <http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math100/notes/diffeqs/cool.html>

De acordo com a lei do resfriamento de Newton¹

A taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura do ambiente.

Em termos matemáticos podemos descrever a afirmação acima como

$$\frac{dT}{dt} \propto -(T - T_a), \quad (10.3)$$

onde T representa a temperatura do corpo, dT/dt representa a taxa de variação temporal de tal temperatura e T_a representa a temperatura ambiente. O sinal negativo denota o fato de que se $T > T_a$, o corpo sofre uma *diminuição* de sua temperatura, o que significa que $dT/dt < 0$. Podemos escrever a equação acima como uma igualdade com o auxílio de uma constante:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a). \quad (10.4)$$

Verificamos que a temperatura T deve ser então uma *função do tempo*, ou seja $T = T(t)$. Podemos encontrar tal função se definirmos

$$y(t) = T(t) - T_a, \quad (10.5)$$

de onde temos que

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dT(t)}{dt} - \frac{dT_a}{dt}. \quad (10.6)$$

O segundo termo à direita é zero, pois a temperatura ambiente é constante, portanto

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dT(t)}{dt}. \quad (10.7)$$

Substituindo esse resultado e a própria definição de $y(t)$ na Equação 10.4, obtemos

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ky(t), \quad (10.8)$$

o que pode ser reescrito como

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = -kdt. \quad (10.9)$$

Se imaginarmos que $y(t)$ tem um valor inicial $y(t_i)$ no instante t_i e um valor final $y(t_f)$ em um instante t_f , podemos integrar o lado esquerdo entre os valores inicial e final de $y(t)$ e o lado direito entre os valores inicial e final do tempo, obtendo

$$\int_{y(t_i)}^{y(t_f)} \frac{dy(t)}{y(t)} = -k \int_{t_i}^{t_f} dt, \quad (10.10)$$

o que resulta em

$$\ln \frac{y(t_f)}{y(t_i)} = -k(t_f - t_i), \quad (10.11)$$

onde usamos $\ln \alpha - \ln \beta = \ln(\alpha/\beta)$. Essa equação fica mais simples se fizermos $t_i = 0$, $t_f = t$ e tomarmos a exponencial de ambos os lados da equação:

$$y(t) = y(0)e^{-kt}. \quad (10.12)$$

Finalmente, se notarmos que $y(0) = T(0) - T_a$ e que $T(0)$ é a temperatura inicial T_0 do corpo, encontramos

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}. \quad (10.13)$$

Temos então que a temperatura do corpo decai segundo uma lei *exponencial*, com uma constante característica k .

10.2.1 Linearização

Voltando à Equação 10.11, podemos reescrevê-la como

$$\ln y(t) = -kt + \ln y(0) \quad (10.14)$$

onde utilizamos $t_i = 0$. Utilizando a definição de $y(t)$, temos

$$\ln(T(t) - T_a) = -kt + \ln(T_0 - T_a). \quad (10.15)$$

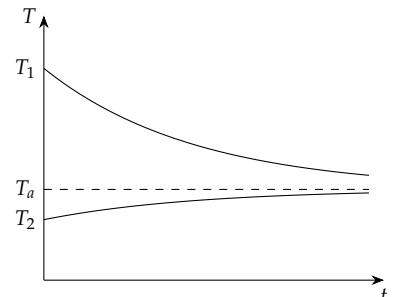


Figura 10.2: Gráfico da temperatura em função do tempo para o resfriamento e para o aquecimento de um corpo segundo a Lei de Newton para o Resfriamento. As temperaturas iniciais são tais que $T_1 > T_a > T_2$, sendo que para $t \rightarrow \infty$ as temperaturas T_1 e T_2 tendem à temperatura ambiente.

Comparando essa equação com a equação da reta, temos

$$y = \ln(T(t) - T_a) \quad (10.16a)$$

$$x = t \quad (10.16b)$$

$$B = -k \quad (10.16c)$$

$$A = \ln(T_0 - T_a). \quad (10.16d)$$

Portanto, podemos determinar o valor de k a partir de uma regressão linear.

10.3 Experimento

10.3.1 Objetivos

1. Verificar a lineariedade da relação entre o comprimento de barras metálicas de diferentes materiais e a variação da temperatura.
2. Calcular o coeficiente de expansão térmica para o material das barras identificando o material da barra com base em tal propriedade.
3. Verificar o decaimento exponencial da temperatura, de acordo com a lei do resfriamento de Newton.
4. Determinar o valor de k para cada uma das barras.

10.4 Material Necessário

- Tubos metálicos em forma de L;
- Aquecedor elétrico de água;
- Termômetro;
- Réguas;
- Aparato para medição de dilatações térmicas lineares;
- Cronômetro.

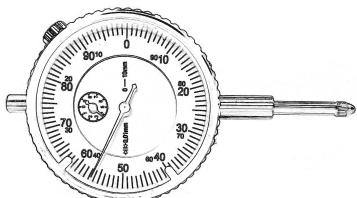


Figura 10.3: Dilatômetro. Note a existência de números pequenos para facilitar a leitura nos casos em que ocorre uma diminuição de tamanho. A coroa externa pode ser girada para zerar o dilatômetro, bastando para isso soltar o parafuso superior.

10.5 Procedimento Experimental

1. Coloque o tubo metálico com a extremidade em forma de L em contato com o dilatômetro, com o segmento menor disposto verticalmente para cima.
2. Posicione a extremidade do tubo de forma que ela pressione o pino do dilatômetro e fique a uma distância de aproximadamente 520,0 mm do parafuso de fixação (utilize a escala milimetrada do suporte). Prenda a outra extremidade do tubo utilizando o parafuso do suporte.
3. Prenda a mangueira do aquecedor à extremidade horizontal do tubo (aquele oposta ao dilatômetro).

4. Adicione água ao aquecedor até uma profundidade de aproximadamente 5,0 cm. *Importante: o aquecedor não pode ficar sem água durante o experimento, pois isso pode causar um superaquecimento e a consequente queima do aparelho.*
5. Ligue o aquecedor e aguarde até que a água ferva.
6. Quando a água ferver, o tubo dilatará. Quando ele parar de dilatar, coloque o termômetro na extremidade do tubo mais próxima do dilatômetro e aguarde até que sua temperatura pare de variar.
7. Utilizando a régua ou a escala do suporte, meça o comprimento L_0 da barra entre o parafuso de fixação e a extremidade próxima ao dilatômetro. Anote este valor na Tabela 10.2.
8. Anote também a temperatura T_0 indicada pelo termômetro.
9. Zere o dilatômetro girando a coroa exterior.
10. Zere o cronômetro.
11. Desligue o aquecedor e aguarde até que o ponteiro do dilatômetro passe a se mover². Assim que ele o fizer, inicie o cronômetro.
12. Quando a temperatura atingir 90°, faça a leitura do dilatômetro e do cronômetro e anote na Tabela 10.2.
13. Faça a leitura do dilatômetro e do cronômetro a cada 5,0 °C perdidos. Anote os valores na Tabela 10.2, incluindo a temperatura. Cesse a leitura quando a temperatura do tubo estiver a aproximadamente 15,0° acima da temperatura ambiente.
14. Repita o procedimento para os outros tubos e anote os dados nas Tabelas 10.3 e 10.4.

² Veja que o dilatômetro sofre uma variação negativa, pois a barra está encolhendo. Faça a leitura nos números pequenos do mostrador.

Dilatação linear e lei de resfriamento de Newton

Turma: _____ Data: _____

Aluno(a): _____ Matrícula: _____

10.6 Questionário

Questão 1. (1 ponto) Apresente os resultados de maneira clara e organizada. Mostre os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, evidenciando o raciocínio desenvolvido.

Questão 2. (0.5 pontos) Liste os equipamentos utilizados. Para os instrumentos de medida, descreva o tipo do equipamento, sua resolução, e seu erro de escala.

Questão 3. (0.5 pontos) Preencha as tabelas com o número adequado de algarismos significativos, unidades, e erros de escala apropriados.

Questão 4. (1 ponto) Elabore um gráfico³ de $L \times |T - T_0|$ com os dados das Tabelas 10.2, 10.3 e 10.4.

Questão 5. (0.5 pontos) Para a questão anterior, calcule as retas que melhor representam os dados experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados e as adicione ao gráfico.

Questão 6. (1 ponto) Calcule o valor do coeficiente de expansão térmica para os materiais através dos coeficientes angulares e lineares obtidos na questão anterior. Identifique os materiais utilizando os dados da Tabela 10.1 e calcule o erro percentual obtido através da expressão

$$E\% = \left| \frac{x - x_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \right| \times 100. \quad (10.17)$$

Questão 7. (1 ponto) Para os dados da Tabela 10.2, calcule o erro associado às constantes A e B e determine o erro associado ao coeficiente de expansão térmica.

³ Os três conjuntos de dados devem ser representados no mesmo gráfico, possibilitando a comparação entre eles. Note ainda que o gráfico será decrescente, uma vez que estamos verificando o processo de encolhimento das barras conforme elas resfriam.

Questão 8. (1 ponto) Elabore um gráfico de $T \times t$ para os dados das Tabelas 10.2, 10.3 e 10.4.

Questão 9. (1 ponto) Elabore um gráfico linearizado de acordo com o conjunto de Equações (10.16) para os dados das Tabelas 10.2, 10.3 e 10.4.

Questão 10. (1 ponto) Para a questão anterior, calcule as melhores retas através do método de mínimos quadrados e as adicione ao gráfico linearizado. Calcule os valores da constante k através dos coeficientes angulares.

Questão 11. (1.5 pontos) Considerando os objetivos do experimento, listados na Seção 10.3.1, e os resultados obtidos nas questões anteriores, discuta quais objetivos foram atingidos com sucesso, justificando suas conclusões. Se algum objetivo não foi atingido, discuta quais são os possíveis motivos do fracasso e que providências podem ser tomadas para que eles sejam alcançados.

10.7 Tabelas

Tabela 10.2: Dados para a dilatação do Tubo 1.

Dados Iniciais

L_0	
T_0	
T_a	

Dados para o resfriamento

Dados para elaboração dos gráficos

Tabela 10.3: Dados para a dilatação do Tubo 2.

Dados Iniciais L_0 T_0 T_a **Dados para o resfriamento** T ΔL t **Dados para elaboração dos gráficos** L $T - T_0$ $T - T_a$

Tabela 10.4: Dados para a dilatação do Tubo 3.

11 Calor Específico de Sólidos

Verificaremos o calor específico de alguns materiais, buscando comprovar experimentalmente as trocas energéticas envolvidas em transferências de calor. Veremos também a explicação para os fenômenos observados segundo a Primeira Lei da Termodinâmica. Utilizaremos os seguintes conceitos/técnicas de análise de dados: medidas, algarismos significativos, gráficos, software para elaboração de gráficos, erros de escala e propagados, equação geral para o erro propagado, regressão linear, linearização, erros dos coeficientes A e B, e planilhas para cálculo dos coeficientes A e B com erros.

11.1 Princípio da conservação da energia

Sabemos que a soma da energia cinética e da energia potencial de um sistema dá origem ao que denominamos como *energia mecânica*:

$$E = K + \sum U \quad (11.1)$$

$$= \frac{mv^2}{2} + \left(mgy + \frac{kx^2}{2} + \dots \right). \quad (11.2)$$

Se em um sistema qualquer atuam somente *forças conservativas*, a energia mecânica será constante. Se existe uma *força não-conservativa*, no entanto, temos que

$$\Delta E^{\text{mec}} = W_{\text{NC}}. \quad (11.3)$$

Vamos considerar agora o que acontece com a energia em duas situações diferentes, ambas sujeitas a atuação de uma força não-conservativa.

Primeiramente, vamos considerar um bloco suspenso por uma mola e livre para oscilar. Na parte inferior do bloco, existe uma haste que está fixada a ele e cuja extremidade oposta está ligada a uma placa plana, submersa em água — veja a Figura 11.1 —. Sabemos que o deslocamento da placa dentro do fluido está sujeito a uma força de arrasto, sempre na direção contrária ao seu deslocamento. Isso implica em uma força que atua sobre o bloco através da haste, realizando trabalho negativo, fazendo com que sua energia mecânica seja diminuída a cada oscilação:

$$\Delta E^{\text{mec}} = W_{\text{NC}} \quad (11.4)$$

$$= W_{F_{\text{haste}}}. \quad (11.5)$$

Eventualmente, o movimento oscilatório cessará devido ao fato de que a energia mecânica se tornará nula. Se considerarmos o sistema formado somente pelo bloco e pela mola, podemos dizer que há

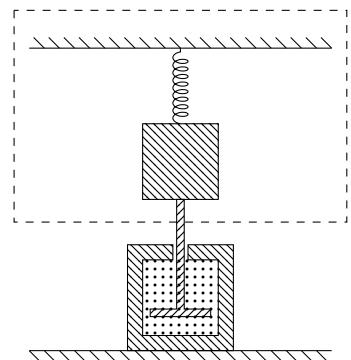


Figura 11.1: Bloco suspenso por uma mola, livre para oscilar, porém conectado a um sistema de amortecimento.

¹ Sabemos que pelo menos uma parte da energia é transferida para o fluido, manifestando-se como energia cinética.

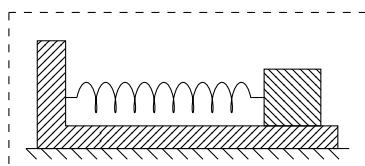


Figura 11.2: Sistema formado por um oscilador massa-mola sujeito a uma força de atrito. Se nenhuma força que atravessa a fronteira do sistema realiza trabalho, então o sistema é *fechado*.

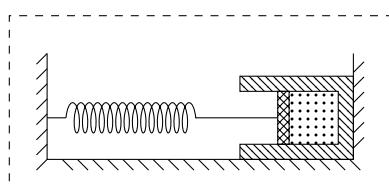


Figura 11.3: No sistema acima, a mola inicialmente armazena energia potencial elástica. Ao liberarmos para que se move, a energia mecânica sofre uma variação devido ao trabalho exercido através da haste sobre o gás.

uma *força externa* — a força exercida pela haste — que diminui a energia mecânica do sistema. Por outro lado, verificamos também que tal força exerce um trabalho *positivo* sobre o fluido, forçando-o a se movimentar. Dessa forma, podemos dizer que o trabalho de uma força externa *transfere* a energia através da fronteira do sistema (representada na figura pelo retângulo tracejado).¹

Vamos supor agora que temos um sistema onde atuam forças conservativas e uma força não-conservativa *interna*, ou seja, uma força cujo par ação-reação esteja completamente contido dentro da fronteira do sistema. Um exemplo desse caso pode ser uma força de atrito entre um bloco e uma superfície em um sistema como o mostrado na Figura 11.2. Vamos assumir que nenhuma força externa que *realize trabalho* atue sobre tal sistema, atravessando sua fronteira — vamos desconsiderar efeitos da força de arrasto; a força normal que atua sobre o sistema é externa, porém seu trabalho é nulo —. Nessa situação, verificamos que se aplica a expressão

$$\Delta E_S = W_{NC} \quad (11.6)$$

$$= W_{at}. \quad (11.7)$$

Segundo a equação acima, a energia mecânica deve diminuir, porém estamos considerando um *sistema fechado*, ou seja, não pode haver fluxo de energia através da fronteira. Nesse momento, aparentemente deveríamos argumentar que a energia se perdeu, afinal, estamos tratando de uma situação em que atua uma força não-conservativa. Essa ideia, porém, não descreve o que acontece quando uma força não conservativa atua de maneira a realizar trabalho através da fronteira, como no caso da força exercida pela haste no exemplo anterior. Além disso, é comum em situações como a da Figura 11.2 que se note um *aumento da temperatura do sistema*, isto é, um aumento da temperatura do bloco e da superfície onde ele se apoia.

Outro sistema que apresenta uma comportamento similar ao do sistema massa-mola da Figura 11.2 é o mostrado na Figura 11.3, onde uma mola está inicialmente comprimida e está ligada a um êmbolo que pode comprimir um gás. Ao liberarmos a mola para que se expanda, verificamos uma diminuição da energia mecânica devido ao trabalho exercido sobre a mola pelo gás, através da haste. No entanto, como nenhuma força que atravessa a fronteira do sistema realiza trabalho, novamente temos uma aparente perda da energia. Mais uma vez, notamos um aumento da temperatura do sistema: ao comprirmos o gás, sua temperatura aumenta. Se, por outro lado, aumentarmos a temperatura do gás utilizando a chama de uma vela, por exemplo, vamos notar algo interessante: o gás se expande, comprimindo a mola. Ou seja, verificamos um aumento da energia mecânica do sistema. Percebemos assim que a *temperatura está ligada a uma outra forma de energia*.

Nos sistemas das Figuras 11.2 e 11.3 concluímos que a energia mecânica deve ter sido transformada em algum outro tipo de energia, que denominamos como *energia interna*, e que está relacionada à temperatura do corpo². Logo, podemos somar a variação da energia

² Microscopicamente, a energia interna associada à temperatura de um corpo está relacionada à velocidade média das partículas que o compõe: no caso da Figura 11.3, para que o gás comprima a mola ao ter sua temperatura aumentada devido à chama da vela, verificamos que a força média exercida pela colisão das moléculas do gás sobre a parede do êmbolo só pode aumentar se o número de partículas no cilindro, a massa das moléculas, ou as velocidades das moléculas aumentarem. Como os dois primeiros fatores são constantes, concluímos que a velocidade das moléculas aumenta com a temperatura.

mecânica à variação da energia interna de um sistema e escrever

$$\Delta E_S^{\text{mec}} + \Delta E_S^{\text{int}} = W_{F_{\text{ext}}}, \quad (11.8)$$

onde $W_{F_{\text{ext}}}$ representa o trabalho total efetuado por forças que atravessam a fronteira do sistema. Note que a expressão acima assume o caráter de uma *lei de conservação* para a energia do sistema, uma vez que só é possível alterá-la através do trabalho de uma força externa — isto é, de uma força que cruza a fronteira do sistema e que realize trabalho —.

11.1.1 Calor

Se a energia interna está associada à temperatura, então existe uma maneira de transferir energia para fora de um sistema que não envolve a realização de trabalho por uma força externa: se tomarmos dois sistemas distintos — como, por exemplo, dois blocos metálicos — a temperaturas diferentes, é fácil perceber que ao deixarmos que ambos fiquem em contato direto, a temperatura do bloco frio aumenta, enquanto a temperatura do bloco quente diminui. A tal fluxo de energia interna denominamos *calor*³. Devemos então adicionar um termo Q à direita da Expressão (11.8), relativo ao calor transmitido:

$$\Delta E_S^{\text{mec}} + \Delta E_S^{\text{int}} = W_{F_{\text{ext}}} + Q. \quad (11.9)$$

11.1.2 Outras formas de energia, radiação

Apesar de a expressão acima ser mais geral que a Expressão (11.3), ainda podemos imaginar uma série de possibilidades que não são bem descritas por ela:

Energia química: Se, por exemplo, utilizarmos um motor elétrico ligado a uma bateria, sabemos que é possível o utilizar para alterar a energia mecânica do sistema, mesmo sem a ação de uma força externa. De fato, existe uma *energia química* armazenada na bateria que nos permite utilizar o trabalho da força não-conservativa exercida pelo motor para fazer variar a energia mecânica do sistema, ou a energia interna do sistema, ou mesmo ambas. Outra possibilidade é a de utilizar um combustível e substituir o motor elétrico por uma máquina térmica: assim como no caso da bateria, os combustíveis são uma maneira de armazenar energia química. Como esse tipo de energia tem um caráter similar à energia interna associada à temperatura, não há necessidade de alterar a expressão (11.8).⁴

Radiação eletromagnética: Sabemos que o Sol é capaz de causar variações de temperatura na Terra, mesmo na ausência de um *meio de contato* entre ambos. Devido à ausência de tal meio, temos que não é possível que haja transmissão de energia interna através de um fluxo de calor. Também não existe uma força que atravesse ambas as fronteiras, realizando trabalho⁵. Resta então a transmissão de

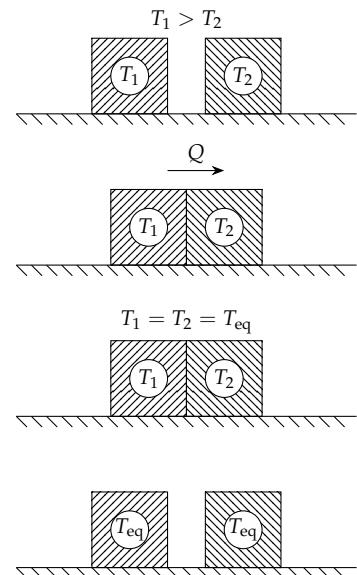


Figura 11.4: Se dois blocos a temperaturas diferentes são postos em contato, existe uma fluxo de energia interna entre eles que tende a equilibrar suas temperaturas.

³ Microscopicamente, como a temperatura dos blocos é diferente, a energia cinética média das partículas que compõe cada um deles também são diferentes. No contato direto entre ambos, as partículas do corpo quente interagem com as do corpo frio, forçando-as a oscilar. Ocorre uma transferência de energia cinética entre as partículas de cada um dos corpos através do trabalho das forças entre as cargas elétricas dos átomos.

⁴ Microscopicamente, a energia química é uma energia potencial elétrica armazenada nas configurações moleculares dos átomos.

⁵ Na verdade, a força gravitacional entre o Sol e a Terra, ou entre a Lua e a Terra, pode realizar trabalho: essa é a origem das marés. A quantidade de energia transmitida, no entanto, é muito menor que através da radiação.

energia através de *radiação eletromagnética*. A radiação eletromagnética, é uma perturbação de caráter ondulatório nos campos elétrico e magnético que preenchem o espaço, e também é conhecida como *ondas eletromagnéticas*. Como tais campos podem existir mesmo no vácuo, as ondas eletromagnéticas podem se propagar na ausência de matéria. Representamos a radiação eletromagnética através de um termo R à direita da Expressão (11.8).

Considerando as observações acima, podemos *postular* um *princípio de conservação da energia*:

Princípio da conservação da energia
(1^a Lei da Termodinâmica)

$$\Delta E_S^{\text{mec}} + \Delta E_S^{\text{int}} = W_{F_{\text{ext}}} + Q + R. \quad (11.10)$$

Tal expressão é um postulado pois não é possível prová-la: verificamos nos exemplos discutidos acima que existem indícios de que a energia é transmitida entre sistemas diferentes, através de diferentes meios, porém não é possível verificar/provar que nenhuma parte da energia é perdida. No entanto, todas as evidências experimentais levam a crer que o princípio acima é válido.⁶

Através do princípio da conservação da energia e da flexibilidade que temos ao definir um sistema, podemos nos preocupar simplesmente com o *fluxo* da energia. Isso tende a facilitar muito a interpretação de diversos problemas pois podemos nos preocupar com a origem e o destino da energia, sem se ater a cada detalhe dos processos físicos que ocorrem durante a transferência da energia entre uma forma e outra.

11.2 Calor Específico

Vamos considerar um corpo qualquer que repousa sobre uma mesa e pode ser posto em contato com uma fonte de calor (Figura 11.5). Se a fonte ceder uma certa quantidade de calor, podemos determinar a variação de energia interna através do princípio de conservação da energia. Obtemos então

$$\Delta E^{\text{mec}} + \Delta E^{\text{int}} = W_{\text{ext}} + Q \quad (11.11)$$

$$\Delta E^{\text{int}} = Q, \quad (11.12)$$

onde ΔE^{mec} é zero pois não há variação nem da energia cinética, nem de qualquer energia potencial. Além disso, não existe nenhum trabalho efetuado sobre o corpo, portanto W_{ext} também é zero.

Nessas condições, é possível verificar experimentalmente que

$$Q = \Delta E^{\text{int}} \quad (11.13)$$

$$= mc\Delta T, \quad (11.14)$$

onde m representa a massa do corpo, c é uma constante característica do material de que o corpo é feito — denominada *calor específico* —, e ΔT representa a variação de temperatura do corpo.

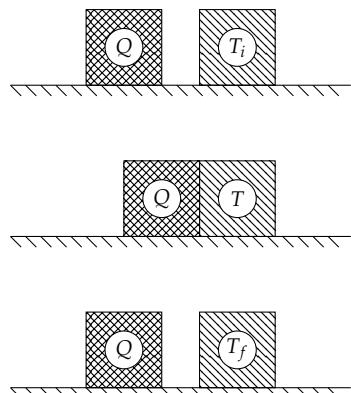


Figura 11.5: Um corpo entra em contato com uma fonte térmica, sofrendo uma variação em sua temperatura.

Material	J/kg · °C	cal/g · °C
Alumínio	900	0,215
Cobre	387	0,0924
Ferro	448	0,107
Chumbo	128	0,0305
Latão	380	0,092
Água	4186	1,00

Tabela 11.1: Calor específico para alguns materiais à temperatura de 25 °C.

11.2.1 Capacidade Térmica

Em muitas situações temos corpos que não são feitos de um único material. Nesse caso, podemos relacionar o calor transferido para o corpo e a consequente variação da temperatura através da *capacidade térmica* C , de forma que

$$Q = \Delta E^{\text{int}} \quad (11.15)$$

$$= C\Delta T. \quad (11.16)$$

Note que para um corpo constituído de um único tipo de material, podemos relacionar a capacidade térmica e o calor específico através de

$$C = mc. \quad (11.17)$$

11.2.2 Determinação da Capacidade Térmica de um Calorímetro

Para que possamos determinar o calor específico utilizando um calorímetro, devemos antes de tudo determinar qual é a quantidade de calor que será absorvida pelo próprio calorímetro. Se inicialmente temos o calorímetro e dentro dele uma massa de água fria $m_{\text{fria}}^{\text{água}}$, sendo que ambos se encontram em equilíbrio térmico a uma temperatura T_i , ao adicionarmos uma massa $m_{\text{quente}}^{\text{água}}$ de água quente, a uma temperatura T_q , obteremos uma temperatura final T_f . Analisando as trocas de calor, verificamos que

$$\Delta E_S^{\text{mec}} + \Delta E_S^{\text{int}} = W_{\text{ext}} + Q + R \quad (11.18)$$

$$\Delta E_S^{\text{int}} = 0, \quad (11.19)$$

onde verificamos que não ocorrem variações de energia mecânica apreciáveis e também que não temos trocas de calor, radiação, ou trabalho de forças externas entre o calorímetro e o ambiente. Apesar de a energia interna total do sistema também não variar, a energia interna de cada componente pode variar independentemente, logo

$$\Delta E_{\text{água quente}}^{\text{int}} + \Delta E_{\text{água fria}}^{\text{int}} + \Delta E_{\text{calorímetro}}^{\text{int}} = 0. \quad (11.20)$$

Tais variações de energia interna se devem ao calor que flui entre os componentes do sistema, de forma que

$$Q_{\text{perdido}}^{\text{água quente}} + Q_{\text{ganho}}^{\text{água fria}} + Q_{\text{ganho}}^{\text{Calorímetro}} = 0. \quad (11.21)$$

Logo, se substituirmos $Q = mc\Delta T$ — onde c é o calor específico da água — para o calor ganho ou perdido pela água e $Q = C\Delta T$ — onde C é a capacidade térmica do calorímetro — para o calor ganho pelo calorímetro, temos

$$m_{\text{quente}}^{\text{água}}c(T_f - T_q) + m_{\text{fria}}^{\text{água}}c(T_f - T_i) + C(T_f - T_i) = 0, \quad (11.22)$$

de onde obtemos

$$C = -c \cdot \left[\frac{m_{\text{quente}}^{\text{água}}(T_f - T_q) + m_{\text{fria}}^{\text{água}}(T_f - T_i)}{(T_f - T_i)} \right]. \quad (11.23)$$

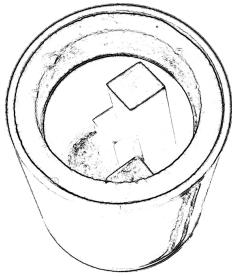


Figura 11.6: Calorímetro aberto.

11.2.3 Determinação do Calor Específico

Para determinar o calor específico devemos tomar o calorímetro com uma massa m de água fria, ambos em equilíbrio térmico a uma temperatura inicial T_i . Se tomarmos uma amostra aquecida a uma temperatura T_q e a adicionarmos ao calorímetro, temos após o equilíbrio uma temperatura final T_f . Analisando as trocas de calor obtemos

$$\Delta E_S^{\text{mec}} + \Delta E_S^{\text{int}} = W_{F_{\text{ext}}} + Q + R \quad (11.24)$$

$$\Delta E_S^{\text{int}} = 0, \quad (11.25)$$

onde novamente temos que não ocorrem variações de energia mecânica apreciáveis e também que não temos trocas de calor, radiação, ou trabalho de forças externas entre o calorímetro e o ambiente. Como a energia interna de cada componente pode variar independentemente,

$$\Delta E_{\text{água quente}}^{\text{int}} + \Delta E_{\text{água fria}}^{\text{int}} + \Delta E_{\text{calorímetro}}^{\text{int}} = 0, \quad (11.26)$$

o que resulta em

$$Q_{\text{perdido}}^{\text{Corpo}} + Q_{\text{ganho}}^{\text{água}} + Q_{\text{ganho}}^{\text{Calorímetro}} = 0 \quad (11.27)$$

Substituindo as expressões $Q = mc\Delta T$ para o ganho de calor pela água, $Q = m_a c_a \Delta T$ para o calor perdido pela amostra, e $Q = C\Delta T$ para o calor ganho pelo calorímetro, temos

$$m_a c_a (T_f - T_q) + mc(T_f - T_i) + C(T_f - T_i) = 0. \quad (11.28)$$

Obtemos então para o calor específico da amostra

$$c_a = - \left[\frac{(mc + C) \cdot (T_f - T_i)}{m_a (T_f - T_q)} \right] \quad (11.29)$$

11.3 Experimento

11.3.1 Objetivos

1. Determinar experimentalmente o calor específicos de diferentes materiais sólidos;
2. Observar o equilíbrio térmico entre os corpos;
3. Observar a validade da Primeira Lei da Termodinâmica;

11.4 Material Necessário

- Calorímetro;
- Termômetro de haste;
- Becker com água fria;
- Becker de vidro;

- Ebulidores elétricos;
- Termômetro;
- Balança;
- Pinça;
- Corpos de diferentes materiais;
- Recipiente para descartar água.

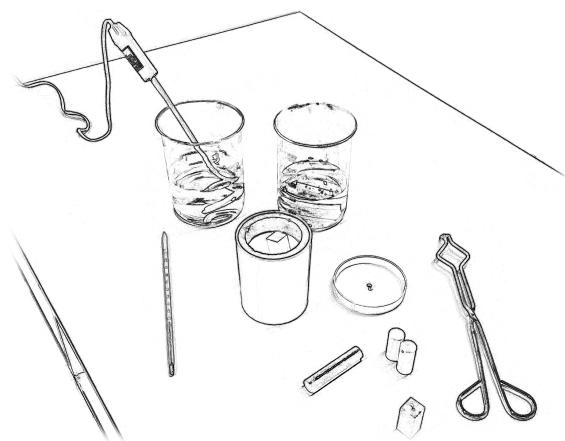


Figura 11.7: Aparato para a verificação do calor específico de sólidos.

11.5 Procedimento Experimental

11.5.1 Determinação da Capacidade Térmica do Calorímetro

1. Determine a massa m^{Cal} do calorímetro com o auxílio da balança, anote o resultado na Tabela 11.2;
2. Adicione água fria⁷ ao calorímetro até que ela cubra aproximadamente um quarto da parte metálica interna;
3. Verifique a massa $m_{\text{água fria}}^{\text{Cal}}$ do calorímetro com a água e anote na Tabela 11.2;
4. Aguarde até que o sistema entre em equilíbrio térmico. Uma vez atingido o equilíbrio, com o auxílio do termômetro, determine a temperatura inicial T_i do calorímetro e a anote na Tabela 11.2. A partir de agora, mantenha o calorímetro sempre tampado;
5. Verifique a temperatura da água quente disponível e anote na Tabela 11.2;
6. Imediatamente após verificar a temperatura da água quente, adicione água quente ao calorímetro até cobrir aproximadamente a metade da cuba metálica interna. Aguarde o equilíbrio e verifique a temperatura final T_f do calorímetro, anotando na Tabela 11.2;
7. Verifique a massa final $m_{\text{água fria+quente}}^{\text{Cal}}$ do sistema;
8. Descarte a água do calorímetro e repita o procedimento descrito acima mais duas vezes, anotando os dados na Tabela 11.2

⁷ Aqui “água fria” se refere a água a qualquer temperatura significativamente menor que a temperatura da água quente utilizada. Se a temperatura da água quente for de aproximadamente 100,0 °C, por exemplo, para os nossos propósitos podemos considerar água à temperatura ambiente como fria.

11.5.2 Determinação do calor específico de sólidos

1. Determine a massa m^{Cal} do calorímetro com o auxílio da balança, anote o resultado na Tabela 11.3;
2. Adicione água fria ao calorímetro até que ela cubra aproximadamente um quarto da parte metálica interna;
3. Verifique a massa $m_{\text{água fria}}^{\text{Cal}}$ do calorímetro com a água fria e anote na Tabela 11.3;
4. Aguarde até que o sistema entre em equilíbrio térmico. Uma vez atingido o equilíbrio, com o auxílio do termômetro, determine a temperatura inicial T_i do calorímetro e a anote na Tabela 11.3. A partir de agora, mantenha o calorímetro sempre tampado;
5. Tome um dos materiais⁸ e o submerja na água quente. Aguarde até que a amostra entre em equilíbrio térmico com a água. Verifique a temperatura T_{amostra} do banho térmico e anote na Tabela 11.3.
6. Retire a amostra do banho quente e a coloque rapidamente no calorímetro. Aguarde o equilíbrio térmico⁹ e verifique temperatura final T_f do calorímetro. Anote os resultados na Tabela 11.3.
7. Retire a amostra do calorímetro, seque-a e verifique sua massa¹⁰ m_a com o auxílio da balança e a anote na Tabela 11.3.
8. Repita o procedimento acima mais duas vezes para o mesmo material. Após finalizar os procedimentos para o material em questão, repita o procedimento para outros dois materiais (três vezes cada), anotando os resultados nas Tabelas 11.4 a 11.5.

⁸ Se houver mais que uma amostra do mesmo material disponível, tome mais que uma. Quanto maior for a massa, menor será o erro na determinação do calor específico.

⁹ Se as amostras forem metálicas, o equilíbrio será atingido rapidamente. Não aguarde um tempo muito longo pois nesse caso a energia térmica perdida pelo calorímetro para o ambiente será significativa.

¹⁰ Caso a amostra do material seja um corpo rígido, não é necessário aferir sua massa novamente.

Calor Específico de Sólidos

Turma: _____ Data: _____

Aluno(a): _____	Matrícula: _____

11.6 Questionário

Questão 1. (1 ponto) Apresente os resultados de maneira clara e organizada. Mostre os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, evidenciando o raciocínio desenvolvido.

Questão 2. (1 ponto) Liste os equipamentos utilizados. Para os instrumentos de medida, descreva o tipo do equipamento, sua resolução, e seu erro de escala.

Questão 3. (1.5 pontos) Preencha as tabelas com o número adequado de algarismos significativos, unidades, e erros de escala apropriados.

Questão 4. (2 pontos) Calcule a capacidade térmica do calorímetro, juntamente com o erro propagado, para as três medidas realizadas. Obtenha o valor médio e o erro associado.

Questão 5. (2 pontos) Utilizando o resultado para a capacidade térmica do calorímetro e o erro associado a ela, calcule os calores específicos dos materiais, incluindo o erro propagado, para cada uma das três medidas de cada material. Obtenha o valor médio e o erro associado para cada material.

Questão 6. (1 ponto) Identifique o material e compare o resultado obtido para o calor específico com os valores de referência na Tabela 11.1. Calcule os erros percentuais utilizando

$$E\% = \left| \frac{x - x_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \right| \times 100. \quad (11.30)$$

Questão 7. (1.5 pontos) Considerando os objetivos do experimento, listados na Seção 11.3.1, e os resultados obtidos nas questões anteriores, discuta quais objetivos foram atingidos com sucesso, justificando suas conclusões. Se algum objetivo não foi atingido, discuta quais são os possíveis motivos do fracasso e que providências podem ser tomadas para que eles sejam alcançados.

11.7 Tabelas

Determinação da Capacidade Térmica do calorímetro

Massas				
m^{Cal}	$m_{\text{água fria}}^{\text{Cal}}$	$m_{\text{água fria+quente}}^{\text{Cal}}$	$m_{\text{fria}}^{\text{água}}$	$m_{\text{quente}}^{\text{água}}$

Temperaturas				
T_i	$T_{\text{água quente}}$	T_f	$T_f - T_i$	$T_f - T_{\text{água quente}}$

Tabela 11.2: Dados para o cálculo da capacidade térmica do calorímetro.

Determinação do Calor Específico, Material N° 1

Massas				
m^{Cal}	$m_{\text{água fria}}^{\text{Cal}}$	m_a	$m_{\text{fria}}^{\text{água}}$	

Temperaturas				
T_i	T_{amostra}	T_f	$T_f - T_i$	$T_f - T_{\text{amostra}}$

Tabela 11.3: Dados para o cálculo do calor específico.

Determinação do Calor Específico, Material N° 2

Massas

m^{Cal}	$m^{\text{Cal}}_{\text{água fria}}$	m_a	$m^{\text{água}}_{\text{fria}}$

Temperaturas

T_i	T_{amostra}	T_f	$T_f - T_i$	$T_f - T_{\text{amostra}}$

Tabela 11.4: Dados para o cálculo do calor específico.

Determinação do Calor Específico, Material N° 3

Massas

m^{Cal}	$m^{\text{Cal}}_{\text{água fria}}$	m_a	$m^{\text{água}}_{\text{fria}}$

Temperaturas

T_i	T_{amostra}	T_f	$T_f - T_i$	$T_f - T_{\text{amostra}}$

Tabela 11.5: Dados para o cálculo do calor específico.

12 Zero absoluto

Realizaremos um experimento em que verificaremos a pressão exercida por uma quantidade de gás com volume constante em função de sua temperatura. Através desses dados, determinaremos a temperatura para a qual teríamos uma pressão nula — tal temperatura é o que denominamos como Zero Absoluto —. Utilizaremos os seguintes conceitos/técnicas de análise de dados: medidas, algarismos significativos, gráficos, software para elaboração de gráficos, erros de escala e propagados, equação geral para o erro propagado, regressão linear, linearização, erros dos coeficientes A e B , e planilhas para cálculo dos coeficientes A e B com erros.

12.1 Termômetros

Um método simples para verificar a temperatura é utilizar alguma propriedade de um material que varie com a temperatura como indicador de leitura. Muitos termômetros empregados rotineiramente em laboratórios usam mercúrio, outros usam álcool. Em ambos os casos, a propriedade que varia com a temperatura é o volume: o líquido de um reservatório se dilata e invade um tubo fino, onde a altura da coluna pode ser lida através de uma escala.

Outras propriedades podem ser utilizadas para verificar a temperatura, dentre elas a diferença de potencial elétrico entre uma junção bimetálica, a resistência elétrica de um material, o comprimento de uma fita metálica longa, a pressão de um volume confinado de um gás, etc.

Em todos esses casos, é necessário se utilizar dois pontos para calibrar o termômetro com valores arbitrários de temperatura. A escala Celsius, por exemplo, utiliza a temperatura de fusão do gelo para zero graus e a temperatura de ebulição da água para 100 graus. No caso de um termômetro de mercúrio, podemos verificar a altura da coluna para a temperatura de fusão do gelo, realizando uma marca (na escala Celsius, 0°). Marcamos também a altura da coluna para a temperatura de ebulição da água (100°). Dividimos então o intervalo entre essas duas marcas em um número de divisões menores. Podemos então verificar qualquer temperatura intermediária utilizando uma leitura da coluna de mercúrio. Podemos inclusive extrapolar as leituras para valores de temperatura maiores e menores que os extremos definidos pela temperatura de fusão do gelo e de ebulição da água, bastando para isso manter o tamanho da divisão igual às divisões intermediárias.

A confiabilidade das medidas de temperatura obtidas através de um termômetro está diretamente ligada à linearidade da propriedade observada com a variação da temperatura. Para faixas de tempera-

¹ Nesse caso, podemos verificar a temperatura através do espectro da radiação emitida pelo corpo em questão.

² As temperaturas devem estar na escala Kelvin, discutida adiante.

tura relativamente pequenas, isso pode não ser um problema, mas se desejarmos realizar medições para uma ampla faixa de valores, comportamentos não-lineares podem ter efeito significativo. Além disso, se — por exemplo — desejarmos utilizar uma medida de temperatura extremamente elevada, não podemos utilizar um termômetro devido ao risco de danificá-lo¹. Portanto, é importante escolher um material e uma propriedade adequados à medida em questão.

12.1.1 Termômetros de gás a volume constante

Uma propriedade que pode ser utilizada para realizar uma medida confiável da temperatura é a pressão de um gás mantido em um volume constante. Segundo a equação dos gases ideais, a pressão varia com a temperatura de acordo com²

$$PV = nRT, \quad (12.1)$$

onde R é a constante dos gases, n é o número de moles de partículas do gás, V é o volume ocupado pelo gás, e T é a temperatura. Dessa equação, podemos escrever

$$P = \frac{nR}{V} T. \quad (12.2)$$

Para um gás real, a relação entre a pressão e a temperatura depende do tipo de gás utilizado. Porém, se o gás estiver a baixa pressão, ou seja, estiver *rarefeito*, e a temperatura a ser medida for maior que aquela em que o gás se torna um líquido, podemos utilizar qualquer gás para realizar medidas de temperatura. A diferença entre diversos gases será a inclinação da reta, porém as relações serão sempre lineares (Figura 12.1).

Para um gás mantido a um volume V constante em um reservatório hermético, podemos afirmar que o número de moles n se mantém constante. Temos então uma relação de proporcionalidade entre a pressão do gás e a temperatura a que ele se encontra. Um dispositivo que utiliza essa propriedade para realizar medidas é denominado *termômetro de gás a volume constante*.

A Figura 12.2 mostra um desenho esquemático de um dispositivo desse tipo: nela temos um balão de destilação fechado com uma rolha e em cuja saída lateral está conectada um tubo flexível, sendo que a outra extremidade é aberta. Dentro do tubo temos um fluido de densidade conhecida. O balão fica submerso em um banho térmico cuja temperatura estamos interessados em medir.

Como a extremidade livre do tubo é aberta, ela está sujeita à pressão atmosférica, logo, a pressão do gás dentro do balão será determinada pela soma da pressão atmosférica com a pressão exercida pela coluna de líquido:

$$P = P_0 + \rho gh, \quad (12.3)$$

onde P_0 é a pressão atmosférica, ρ é a densidade do fluido dentro do tubo, g é a aceleração da gravidade e h é a altura³ (veja a Figura 12.3).

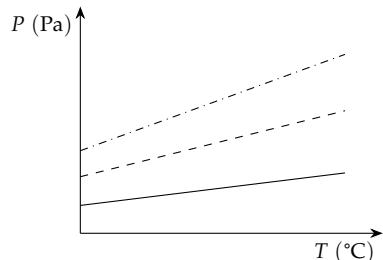


Figura 12.1: Para um gás real, a relação entre P e T depende do gás, porém é sempre linear.

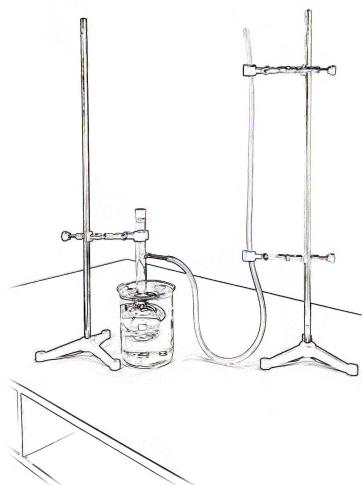


Figura 12.2: Termômetro de gás a volume constante.

³Note que h é a *altura* da coluna, não seu comprimento. Tal distância deve ser medida verticalmente.

Para determinarmos o valor da altura da coluna de fluido adequadamente, devemos nos certificar que o volume de gás dentro do balão seja mantido constante. Para isso, devemos verificar a posição da coluna de fluido na extremidade do tubo que está ligada ao balão e marcarmos sua posição para referência futura (tal marca é representada pela seta na Figura 12.3). Ao aquecermos o gás, o fluido no tubo se deslocará devido à pressão exercida sobre ele, fazendo com que as posições dos topes das colunas em ambas as extremidades do tubo mudem de posição. Para que o gás volte ao volume inicial, o topo da coluna da extremidade do tubo ligada ao balão deve voltar ao nível original, o que pode ser feito deslocando a extremidade livre para cima. Só então devemos aferir a distância vertical h entre as colunas.

Como sabemos que existe uma relação linear da temperatura com a pressão, e uma relação linear da pressão com a altura h da coluna, podemos determinar uma relação linear entre a temperatura T e a altura h : de acordo com a Equação (12.2), podemos escrever

$$T = \frac{V}{nR}P, \quad (12.4)$$

ou, usando a Equação (12.3),

$$T = \frac{V}{nR}(P_0 + \rho gh) \quad (12.5)$$

$$= \frac{VP_0}{nR} + \frac{V\rho g}{nR}h. \quad (12.6)$$

Para que possamos definir valores numéricos específicos de temperatura, precisamos de duas temperaturas de referência, como as de fusão e ebulação da água, por exemplo. Uma vez determinados os valores arbitrários de temperatura T_f e T_e e as alturas h_f e h_e correspondentes a tais temperaturas, podemos determinar a relação entre T e h considerando que a tal relação é linear, o que implica em uma forma dada por

$$T = Bh + A, \quad (12.7)$$

onde

$$\begin{cases} Bh_e + A = T_e \\ Bh_f + A = T_f \end{cases} \quad (12.8)$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$B = \frac{T_e - T_f}{h_e - h_f} \quad (12.9)$$

$$A = T_f - \frac{T_e - T_f}{h_e - h_f}h_f, \quad (12.10)$$

de onde obtemos

$$T = (h - h_f)\frac{T_e - T_f}{h_e - h_f} + T_f. \quad (12.11)$$

12.1.2 Zero absoluto

Para qualquer gás utilizado no termômetro, a medida que a temperatura diminui, a pressão do gás também diminui. Essa relação deve ter

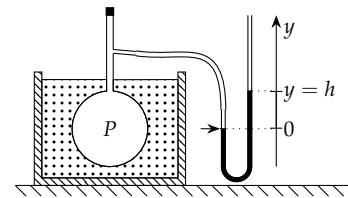


Figura 12.3: A pressão do gás pode ser determinada pela soma da pressão atmosférica com a pressão exercida pela coluna d'água cuja altura é h . O gás deve ser mantido a volume constante, o que implica que a coluna d'água na extremidade do tubo ligado ao balão deve ser mantida na marca de referência indicada pela flecha.

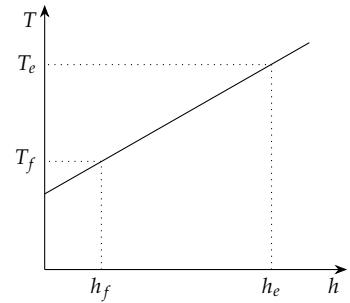
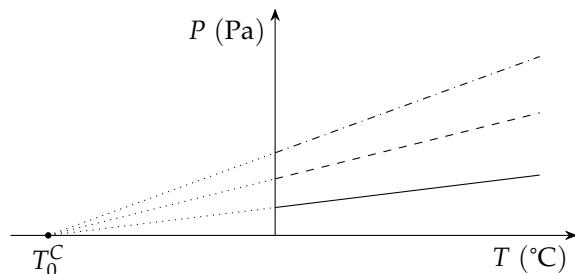


Figura 12.4: A relação entre a temperatura T e a altura h é linear, o que nos permite utilizá-la como a escala de um termômetro.

um valor para o qual a pressão exercida pelo gás é nula, correspondendo a uma temperatura mínima ou um *zero absoluto* para a escala de temperatura. Apesar de a inclinação das retas de $P \times T$ serem diferentes para gases diferentes, o valor para o qual a pressão é zero é o mesmo para qualquer gás, sendo que tal valor é determinado experimentalmente, correspondendo na escala Celsius a $T_0^C = -273,15^\circ\text{C}$.

Figura 12.5: Extrapolando a relação entre P e T para qualquer gás, obtemos sempre o mesmo valor de temperatura para o qual a pressão será nula. No caso da escala Celsius, tal valor corresponde a $T_0^C = -273,15^\circ\text{C}$.



Podemos então utilizar o valor do zero absoluto para definir uma escala de temperaturas — a escala Kelvin — em que a menor temperatura possível seja zero, correspondendo ao zero absoluto, e na qual a temperatura de fusão do gelo seja 273,15 K, sendo que a relação entre tal escala e a escala Celsius será dada por

$$T_K = T_C + 273,15. \quad (12.12)$$

De acordo com a interpretação cinética para os gases, a pressão exercida pelo gás está relacionada à energia cinética das partículas que o compõe: a pressão é exercida nas paredes de um recipiente pelas colisões sucessivas das partículas. Ao se atingir o zero absoluto, a pressão e a energia cinética serão nulas⁴, o que corresponderia classicamente a todas as partículas do gás repousarem no fundo do recipiente que as contém.

12.1.3 Determinação do zero absoluto

Se tomarmos um termômetro de gás a volume constante como o da Figura 12.2, podemos determinar o valor do zero absoluto com o auxílio de um segundo termômetro. Para isso, basta tomarmos dados da pressão do gás no balão, em função da temperatura do banho térmico no qual o balão está submerso.

Para isso, observamos que — através da expressão para a pressão de um gás ideal e da Equação (12.12) entre as temperaturas na escala Kelvin e na escala Celsius — obtemos a seguinte relação:

$$PV = nRT_K \quad (12.13)$$

$$= nR(T_C + T_0) \quad (12.14)$$

$$= nRT_C + nRT_0, \quad (12.15)$$

onde T_0 corresponde à diferença entre as escalas Celsius e Kelvin, o que corresponde a 273,15. Podemos então escrever a relação

$$P = \frac{nR}{V}T_C + \frac{nR}{V}T_0. \quad (12.16)$$

⁴ Se não há pressão, isso só pode ser explicado pela ausência de colisões entre as partículas do gás e as paredes do recipiente, o que implica que as partículas estão em repouso em relação ao recipiente e que — consequentemente — suas energias cinéticas são nulas.

Se o volume V do gás é mantido constante, a expressão acima segue um comportamento linear. Comparando-a à equação da reta $y = Bx + A$, verificamos que

$$B = \frac{nR}{V} \quad (12.17)$$

$$A = \frac{nR}{V} T_0, \quad (12.18)$$

de onde obtemos

$$T_0 = \frac{A}{B}. \quad (12.19)$$

Ao verificar os valores de pressão P em função da temperatura T utilizando o aparato da Figura 12.12, podemos determinar os valores de A e B , de onde podemos calcular o valor do zero absoluto na escala Celsius experimentalmente, um vez que

$$T_0^C = -T_0. \quad (12.20)$$

12.2 Experimento

12.2.1 Objetivos

1. Verificar que a relação entre a pressão de um gás com a temperatura é linear.
2. Calcular o valor do zero absoluto na escala Celsius.

12.3 Material Necessário

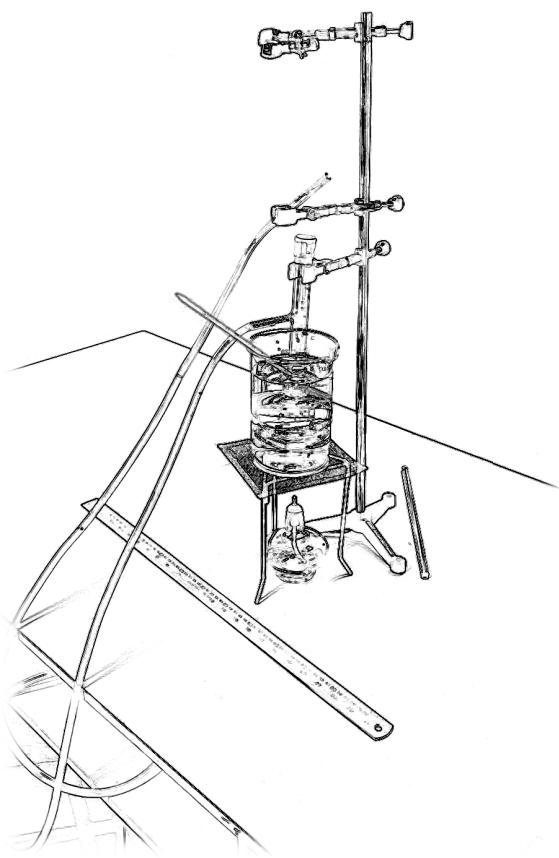
- Becker;
- Balão de destilação com saída lateral;
- Rolha;
- Suporte vertical com garras;
- Termômetro;
- Tubo flexível transparente longo;
- Réguas e trenas;
- Bastão de vidro;
- Recipiente com água;
- Tela de amianto e suporte para a tela;
- Lamparina e fósforos;
- Flanela.

12.4 Procedimento Experimental

12.4.1 Montagem do aparato

1. Disponha a tela de amianto sobre o suporte e coloque o becker sobre ela;
2. Disponha o suporte vertical próximo ao becker. Afixe nele uma garra e a utilize para segurar o balão de destilação. A parte arredondada do balão deve ficar disposta dentro do becker, porém sem tocar o fundo;

Figura 12.6: Aparato para a verificação do zero absoluto.



3. Adicione água ao tubo de forma que ele fique sem bolhas e com água até aproximadamente 20 cm de cada extremidade;
4. Prenda o tubo ao suporte com o auxílio de garras de forma que uma das extremidades possa ser presa ao balão e que a outra fique à mesma altura que a primeira (a parte restante do tubo deve ficar abaixo da mesa, no chão);
5. Prenda uma das extremidades do tubo à saída lateral do balão de destilação;
6. Se o balão estiver com a extremidade superior aberta, feche-a com a rolha;
7. Adicione água ao becker até cobrir a parte arredondada do balão e parte do gargalo;

12.4.2 Coleta dos dados experimentais

1. Verifique a pressão atmosférica P_0 e a anote na Tabela 12.1;
2. Verifique a temperatura da água com o termômetro e a anote na Tabela 12.1.
3. Verifique a *distância vertical*⁵ h entre os topo das colunas d'água nas duas extremidades da mangueira (Veja a Figura 12.3) e a anote na Tabela 12.1.⁶

⁵ Veja a Figura 12.3.

⁶ Se a altura da coluna na extremidade do tubo ligada ao balão for maior que a da coluna na extremidade livre, o valor de h deve ser marcado com um sinal negativo, pois a pressão no balão é menor que a atmosférica.

4. Na extremidade do tubo ligada ao balão, marque com caneta a posição do topo da coluna d'água. Essa marca é importante pois ao tomarmos medidas da distância vertical h precisamos garantir que o gás é mantido a volume constante.
5. Disponha a lamparina abaixo da tela de amianto e a acenda.
6. Agite a água constantemente com o bastão de vidro para que ela tenha uma temperatura homogênea;
7. Assim que a temperatura aumentar 2°C , levante a extremidade livre do tubo de forma que o nível na extremidade ligada ao balão volte à posição original, marcada no passo anterior. Verifique o valor da temperatura⁷ e a diferença vertical h entre as colunas d'água e anote na Tabela 12.1.
8. Aguarde até que a temperatura volte a subir $2,0^{\circ}\text{C}$, reajuste o nível da coluna d'água na extremidade do tubo ligada ao balão até que ele volte a coincidir com a marca inicial, e determine o novo valor de h . Anote os novos valores na Tabela 12.1.
9. Repita o processo do item anterior de forma a obter o maior número de dados experimentais possível, ou completar a Tabela 12.1.

⁷ Meça a temperatura próximo da metade da parte arredondada do balão, visando evitar possíveis regiões de temperatura não uniforme (o ideal é apagar a lamparina e agitar a água por alguns segundos, anotando a temperatura atingida no equilíbrio térmico).

Zero absoluto

Turma: _____ Data: _____

Aluno(a): _____ Matrícula: _____

12.5 Questionário

Questão 1. (1 ponto) Apresente os resultados de maneira clara e organizada. Mostre os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, evidenciando o raciocínio desenvolvido.

Questão 2. (1 ponto) Liste os equipamentos utilizados. Para os instrumentos de medida, descreva o tipo do equipamento, sua resolução, e seu erro de escala.

Questão 3. (1 ponto) Preencha as tabelas com o número adequado de algarismos significativos, unidades, e erros de escala apropriados.

Questão 4. (1.5 pontos) Elabore um gráfico de $P \times T$ para os dados da Tabela 12.1.

Questão 5. (1 ponto) Calcule a reta que melhor representa os dados experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados e a adicione ao gráfico.

Questão 6. (1 ponto) Utilizando as Equações 12.19 e 12.20 e os coeficientes para a regressão linear obtidos através do método de mínimos quadrados, calcule o valor de temperatura para o qual a pressão será zero. Verifique o erro percentual entre tal valor de temperatura e o valor de referência $T_0^{\text{ref}} = -273,15^\circ\text{C}$ através da expressão

$$E_{\%} = \left| \frac{x - x_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \right| \times 100. \quad (12.21)$$

Questão 7. (2 pontos) Calcule os erros associados aos coeficientes A e B da regressão linear e — a partir dos coeficientes, dos erros a eles associados, e das Equações 12.19 e 12.20 — calcule o erro associado a T_C^0 .

Questão 8. (1.5 pontos) Considerando os objetivos do experimento, listados na Seção 12.2.1, e os resultados obtidos nas questões anteriores, discuta quais objetivos foram atingidos com sucesso, justificando suas conclusões. Se algum objetivo não foi atingido, discuta quais

são os possíveis motivos do fracasso e que providências podem ser tomadas para que eles sejam alcançados.

12.6 Tabelas

Constantes

P_0
ρ

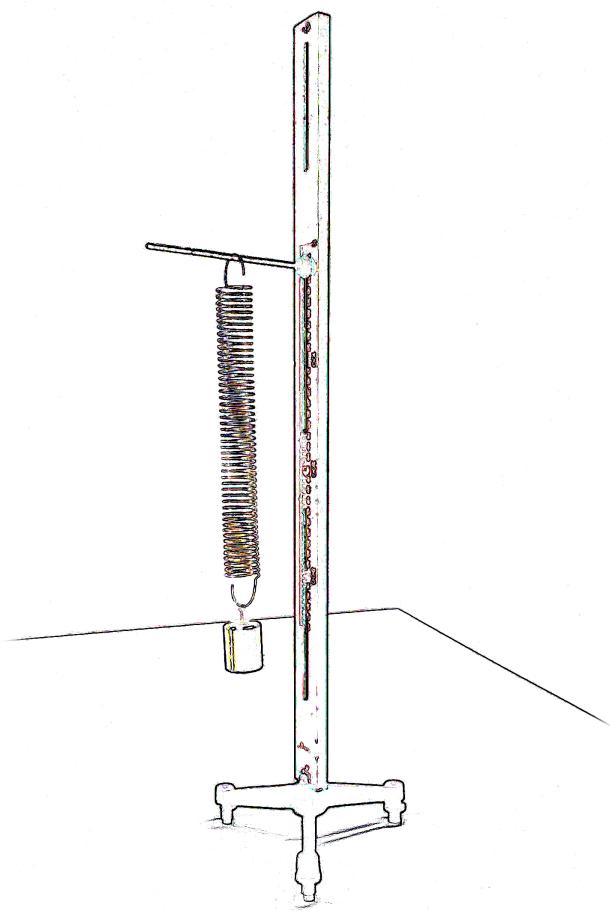
Dados para a altura da coluna

T	h	P

Tabela 12.1: Dados para a altura da coluna de água em função da temperatura.

Bibliografia

- Lambert, Johann Heirich. "Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung". Em: Tufte, Edward R. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001, p. 45. ISBN: 0-9613921-4-2.
- Marinelli, José Ricardo e Flavio Renato Ramos de Lima. *Laboratório de Física I*. 2^a Edição. UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. ISBN: 978-85-8030-001-7.
- Piacentini, João J. et al. *Introdução ao Laboratório de Física*. 2^a Edição. Editora da UFSC, 2001.
- Taylor, John R. *An Introduction to Error Analysis*. 2nd Edition. University Science Books, 1997. ISBN: 0-935702-75-X.
- Tufte, Edward R. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001. ISBN: 0-9613921-4-2.



ELABORADO USANDO L^AT_EX
DOCUMENTCLASS: TUFTE-BOOK
IMAGENS TRATADAS USANDO GIMP
FIGURAS ELABORADAS USANDO TIKZ