

Clebson Abati Graeff

*Notas de aula:
Laboratórios de Física 1 e 2*

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS PATO BRANCO



Este trabalho é licenciado de acordo com a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)¹. De acordo com essa licença você pode utilizar/compartilhar/adaptar este material desde que respeite as seguintes condições

❶ *Você deve dar os créditos apropriados ao autor, prover um link para a licença e indicar se mudanças foram efetuadas. Você pode fazê-lo de qualquer maneira razoável, porém não de forma a sugerir que o autor endossa seu trabalho.*

❷ *Você não pode usar o material para fins comerciais.*

❸ *Se você remixar, transformar, ou criar a partir do material, tem de distribuir as suas contribuições sob a mesma licença que o original.*

Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.

¹ http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.pt_BR

Horários de atendimento:

- 5^a 16:40 – 17:30
- 6^a 11:10 – 12:00, 16:40 – 17:30

Clebson Abati Graeff
cgraeff@utfpr.edu.br
agosto de 2019

CRONOGRAMA

As aulas seguirão o planejamento abaixo. No calendário ao lado, estão circuladas as datas das provas.

ENGENHARIA MECÂNICA

As aulas seguirão o planejamento abaixo.

Aula	Data	Conteúdo
1	13/08	Turmas A e B: Apresentação da disciplina.
2	20/08	Turma A: Exp. 1, Medidas.
3	27/08	Turma B: Exp. 1, Medidas.
4	03/09	Turma A: Exp. 2, MRU e MRUV.
5	10/09	Turma B: Exp. 2, MRU e MRUV.
6	17/09	Turma A: Exp. 3, Lei de Hooke.
7	24/09	Turma B: Exp. 3, Lei de Hooke.
8	01/10	Turma A: Exp. 4, Leis de Newton.
-	08/10	Recesso.
9	15/10	Turma B: Exp. 4, Leis de Newton.
10	22/10	Turma A: Exp. 5, Atrito.
11	29/10	Turma B: Exp. 5, Atrito.
12	05/11	Turma A: Exp. 6, Arrasto.
-	12/11	SEI/SICITE/INVENTUM.
13	19/11	Turma B: Exp. 6, Arrasto.
14	26/11	Turma A: Exp. 7, Trabalho e Energia.
15	03/12	Turma B: Exp. 7, Trabalho e Energia.
16	10/12	Turmas A e B: Prova.
17	17/12	Turmas A e B: Apresentação das notas finais de laboratório.

Agosto
5 6 7 8 9 10 11
12 13 14 15 16 17 18
19 20 21 22 23 24 25
26 27 28 29 30 31

Setembro
1
2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22
23 24 25 26 27 28 29
30

Outubro
1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11 12 13
14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27
28 29 30 31

Novembro
1 2 3
4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30

Dezembro
1
2 3 4 5 6 7 8
9 (10) 11 12 13 14 15
16 17 18 19

Sumário

I Medidas, Técnicas de Análise de Dados

1	<i>Medidas</i>	11
1.1	<i>Medição, tipos de medidas</i>	11
1.2	<i>Tipos de equipamentos, algarismos significativos</i>	12
1.2.1	<i>Medidas realizadas com equipamentos analógicos</i>	12
1.2.2	<i>Medidas realizadas com equipamentos não-analógicos</i>	13
1.2.3	<i>Unidades e algarismos significativos, notação científica</i>	16
1.2.4	<i>Operações envolvendo medidas</i>	18
1.2.5	<i>Arredondamento</i>	20
2	<i>Gráficos</i>	21
2.1	<i>Gráficos</i>	21
2.2	<i>Gráficos de dispersão</i>	23
2.2.1	<i>Principais elementos de um gráfico de dispersão</i>	23
2.2.2	<i>Problemas mais comuns em gráficos de dispersão</i>	25
2.2.3	<i>Elaborando um gráfico com papel milimetrado</i>	26
3	<i>Erros</i>	31
3.1	<i>Erros de medidas</i>	31
3.2	<i>Medidas e erros</i>	31
3.2.1	<i>Tipos de erros</i>	32
3.3	<i>Erros de escala em uma medida direta</i>	34
3.4	<i>Erros propagados</i>	35
3.4.1	<i>Constantes e erros propagados</i>	38
3.5	<i>Erros e algarismos significativos</i>	38

3.6	<i>Incerteza fracional e percentual</i>	39
3.6.1	<i>Erro percentual em relação a um valor de referência</i>	40
3.7	<i>Expressão geral para o cálculo do erro propagado</i>	41
4	<i>Régressão Linear</i>	43
4.1	<i>Linhos de Tendência</i>	43
4.2	<i>Régressão Linear</i>	45
4.2.1	<i>Régressão linear utilizando uma calculadora</i>	50
4.2.2	<i>Interpretação dos coeficientes</i>	52
4.3	<i>Linearização</i>	53
4.4	<i>Linearização e teste de hipóteses</i>	54
4.5	<i>Erros nos parâmetros de uma régressão linear</i>	57
5	<i>Desvio padrão</i>	59
5.1	<i>Histogramas</i>	59
5.2	<i>Desvio padrão</i>	59

II Experimentos

6	<i>Medidas</i>	65
7	<i>Movimento retilíneo uniforme (MRU) e uniformemente variado (MRUV)</i>	77

Introdução

Este livro/apostila tem como objetivo facilitar o desenvolvimento das atividades de laboratório. Para isso, todo o conteúdo de análise de dados e os próprios experimentos foram reunidos em um conjunto único.

Na primeira parte, as técnicas de análise de dados são introduzidas e discutidas. Nenhuma técnica muito avançada é apresentada, somente o básico, já que o texto é de nível introdutório. Os assuntos cobertos são medidas, erros, erros propagados, gráficos, regressão linear, e um pouco sobre desvio padrão e erros aleatórios.

Na segunda, os experimentos são analisados de um ponto de vista teórico, seguidos dos procedimentos para coleta de dados. Após isso, as equipes de alunos devem responder um questionário. Os experimentos utilizam diferentes técnicas de análise de dados, sendo que à medida que o semestre avança, o número e a complexidade das técnicas envolvidas aumenta. Isso não é completamente linear, no entanto, já que algumas experiências são mais complexas e mais ricas que outras de um ponto de vista de análise dos dados.

Fiz um esforço grande visando obter um texto de fácil compreensão e bem ilustrado, mas sempre restam pontos que podem ficar confusos — ou posso ter cometido um erro! —. Se isso acontecer, entre em contato comigo. Sugestões são sempre bem vindas.

Clebson Abati Graeff,
Pato Branco, agosto de 2019.

PARTE I: MEDIDAS, TÉCNICAS DE ANÁLISE DE DADOS

1 Medidas

Um dos principais objetivos da Física como ciência é determinar o resultado de experimentos não apenas qualitativamente, mas também quantitativamente. A realização de medidas está diretamente ligada a tal objetivo: para que possamos prever um resultado, precisamos de medidas de parâmetros relevantes do sistema e que servem de base para a previsão de novos valores através de um modelo matemático. Os valores previstos pelo modelo devem ser comparados com resultados experimentais, que — mais uma vez — devem ser medidos. Se as previsões concordarem com os resultados experimentais, o modelo deve ser submetido a mais testes; caso o modelo falhe, ele deve ser revisto.

O ato de realizar uma medição pode ser simples ou complexo, dependendo do tipo de medida a se realizar. Além disso, os valores obtidos estarão sempre sujeitos a erros que podem deturpar-lhos. Veremos abaixo alguns aspectos importantes para a determinação precisa de medidas.

1.1 *Medição, tipos de medidas*

O processo de obtenção do valor de uma medida é denominado *medição*. Tal processo consiste em comparar aquilo que se deseja medir com um padrão, obtendo o que se denomina como *medida direta*, ou no cálculo de um valor a partir de um conjunto de medidas diretas, o que se denomina como *medida indireta*.

Como exemplo de medida direta, podemos citar a determinação do comprimento de um objeto. Para obter o valor da medida, basta alinhar uma de suas extremidades ao zero de uma régua e verificarmos quantas marcas estão compreendidas no comprimento total do objeto. Temos, portanto, uma medida obtida através de uma comparação direta com um padrão de grandeza.

Algumas medidas, no entanto, não podem ser feitas de maneira direta — ou podem ser determinadas de maneira mais conveniente de forma indireta —. Se necessitamos saber a área de uma folha retangular, basta verificar as medidas laterais e então multiplicá-las. Desta forma, estamos determinando a área de uma maneira **indireta**. Da mesma maneira, o volume de um paralelepípedo pode ser determinado de maneira indireta através do produto de suas três dimensões. Para um sólido irregular, no entanto, é mais conveniente mergulhá-lo em um líquido e verificar através de uma escala graduada impressa no recipiente que o comporta qual é o volume deslocado. Portanto, uma grandeza qualquer pode ser determinada de maneira direta ou indireta, sendo que a escolha de um ou outro tipo de método é uma questão de conveniência.

1.2 Tipos de equipamentos, algarismos significativos

¹ Em equipamentos digitais que verificam o valor de uma quantidade que costuma sofrer pequenas variações em torno de um valor, os aparelhos geralmente realizam uma série de medidas durante um certo intervalo de tempo e mostram somente o valor médio de tais medidas. Um exemplo disso são os velocímetros digitais: devido a pequenas variações de velocidade que ocorrem durante a condução, o processo descrito acima deve ser realizado visando mostrar um número que sofra variações menos frequentes, distraindo menos o condutor.



Figura 1.1: Exemplo de equipamento analógico: régua.

Os equipamentos de medida podem ser divididos em dois tipos:

Analógicos Os equipamentos analógicos são aqueles que permitem que realizemos uma estimativa de valores entre duas marcas quaisquer de sua escala. São exemplos deste tipo de equipamento régua, velocímetros de ponteiro, relógios de ponteiros, etc.

Não-analógicos Equipamentos que não permitem a estimativa de valores são classificados como não-analógicos: nessa categoria se incluem os equipamentos digitais e aqueles dotados de escalas auxiliares. Nos equipamentos digitais, os dados da medida são mostrados através de um visor digital que permite a leitura direta dos valores numéricos¹. Já os equipamentos dotados de escala auxiliar — também conhecida como nônio ou vernier — possibilitam a leitura em uma escala analógica principal, porém com a leitura da subdivisão da escala principal na escala auxiliar. Como a escala auxiliar tem divisões muito “finas”, no entanto, não é possível estimar dígitos menores do que a menor divisão da escala auxiliar.

Vamos tratar as medidas realizadas por cada tipo de equipamento separadamente nas seções seguintes. Trataremos também a questão de *algarismos significativos* de uma medida.

Figura 1.2: Equipamentos eletrônicos geralmente utilizam um visor digital para expressar os valores medidos. Na figura, uma balança digital.

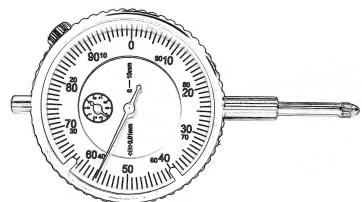
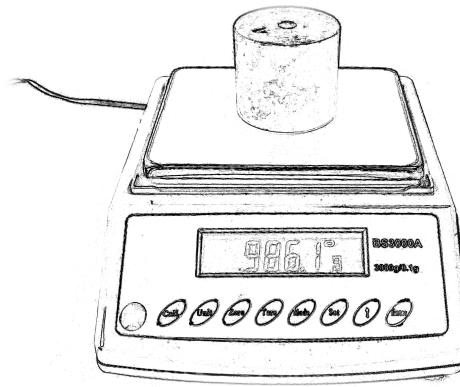


Figura 1.3: Equipamentos com ponteiros são exemplos comuns de equipamentos analógicos. Na figura temos um dilatômetro, equipamento utilizado para verificar pequenas variações de tamanho características de dilatação térmica (uma volta completa representa uma variação de 1,0mm).

1.2.1 Medidas realizadas com equipamentos analógicos

Suponhamos que precisamos usar uma trena para realizar uma medida de um muro. O equipamento em questão foi elaborado de tal forma que um metro está subdividido em 10 partes. Alinhamos uma extremidade da trena — aquela que contém o zero — com uma extremidade do muro e verificamos a outra extremidade. Vemos que o muro passa da marca dos 15 metros por três subdivisões, mas não passa da quarta subdivisão. O valor da medida do comprimento ℓ do muro está em algum ponto entre os valores correspondentes às duas marcas:

$$15,3 \text{ m} < \ell < 15,4 \text{ m}. \quad (1.1)$$

Sabemos que o muro termina em algum lugar entre a terceira e a quarta marca, sendo então maior que 15,3 m. Nesse caso, devemos estimar mais um algarismo. Se, por exemplo, a extremidade do muro está próxima da metade da distância entre as duas marcas da trena, porém antes dela, poderíamos estimar um valor 4 (isto é, quatro décimos da distância entre as duas subdivisões). Assim, podemos expressar a medida como,

$$\ell = 15,34 \text{ m.} \quad (1.2)$$

Poderíamos realizar uma estimativa com mais casas após o 4, mas a validade dela seria duvidosa: se já não temos certeza sobre a medida ser 4 (poderia ser 3 ou 5, em escalas menores é difícil efetuar uma estimativa), não temos ganho algum em denotar mais algarismos após o 4. Ao conjunto de algarismos que temos certeza (pois foram verificados no instrumento) e ao algarismo estimado, damos o nome de *algarismos significativos*. O último algarismo também é conhecido como *algarismo duvidoso*, pois seu valor pode mudar ao se utilizar um equipamento de medida mais preciso.

Em casos onde realizamos uma medida que coincide exatamente com uma marca, devemos considerar que o equipamento permitiria expressar divisões menores, se fosse o caso. Se, por exemplo, ao medirmos o muro com a trena mencionada a extremidade coincidir com a marca de 15 m, devemos expressar a medida como

$$\ell = 15,00 \text{ m,} \quad (1.3)$$

pois sabemos que não foi ultrapassada nenhuma submarca de décimos de metro, e determinamos que o algarismo estimado também é zero (pois se aparentemente coincide com a marca, não a ultrapassa em quantidade apreciável).

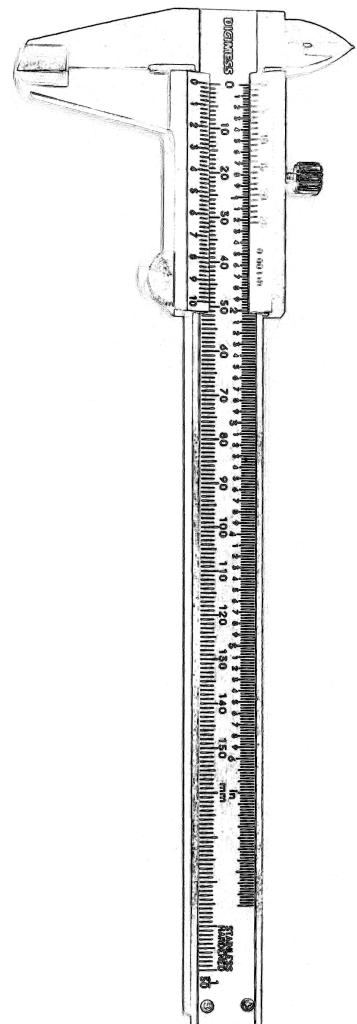


Figura 1.4: O paquímetro é um exemplo de equipamento *não-analógico*, pois é dotado de escala auxiliar (nônião).

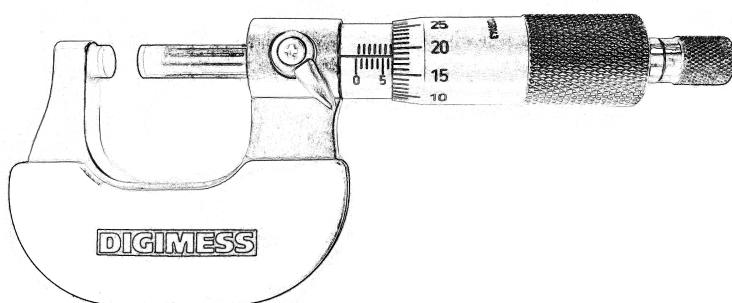


Figura 1.5: Um micrômetro pode ter ou não uma escala auxiliar: na figura, temos um exemplo em que não há escala auxiliar e por isso permite que um dígito seja estimado nas leituras. Os que possuem escala auxiliar tem uma série de marcas que podem se alinhar com as marcas do tambor (região numerada de 10 a 25 na figura e que pode girar), indicando a leitura apropriada para o último dígito (aquele que é estimado em um micrômetro sem escala auxiliar).

1.2.2 Medidas realizadas com equipamentos não-analógicos

No caso de equipamentos não-analógicos, podemos subdividi-los em equipamentos digitais e em equipamentos dotados de escalas

auxiliares. No caso do primeiro, a medida consiste em ler os números mostrados através de um visor. Todos os algarismos mostrados são significativos — exceto aqueles que simplesmente posicionam a vírgula, veja a seção seguinte —. Nesse caso, o último é o algarismo duvidoso, pois, novamente, seu valor poderia ser diferente se utilizássemos um equipamento mais preciso para realizar a medida.

No caso de equipamentos dotados de escalas auxiliares, apesar de não realizarmos a leitura de um visor digital, também não realizamos estimativas. Nesse caso realizamos a leitura a partir da escala auxiliar e, devido à precisão de tal escala, não conseguimos realizar estimativas. Novamente, todos os algarismos lidos são significativos², sendo que o último é denominado duvidoso devido ao fato de que pode mudar ao se utilizar um equipamento mais preciso.

² Exceto os que posicionam a vírgula, veja a Seção 1.2.3 para mais informações.

Funcionamento da escala auxiliar

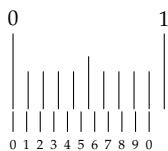


Figura 1.6: Escala de um equipamento dotado de escala auxiliar. A escala superior é a principal, enquanto a inferior é a auxiliar.

Em um equipamento dotado de uma escala auxiliar — como um paquímetro, por exemplo —, as medidas devem ser feitas utilizando-se a posição do zero da escala auxiliar na escala principal. Na Figura (1.6) vemos uma representação das escalas de leitura típicas de um equipamento dotado de escala auxiliar: a escala maior, superior, é a principal, enquanto a menor, inferior, é a auxiliar.

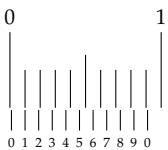


Figura 1.7: Escala auxiliar deslocada para a direita por um décimo da largura da menor divisão da escala principal. Note que a marca número 1 da escala auxiliar está alinhada com a primeira marca à direita do zero da escala principal.

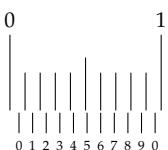


Figura 1.8: Escala auxiliar deslocada por 6 décimos da largura da menor divisão da escala superior. Note o alinhamento da marca número 6.

A ideia por trás da escala auxiliar é bastante simples: tomamos a menor divisão da escala principal, a subdividimos em n partes. Fazemos então uma escala auxiliar onde a menor divisão é a largura de $n - 1$ partes. Assim se a marca do zero da escala auxiliar estiver deslocado para a direita de uma marca i qualquer da escala principal pela largura da n -ésima parte, a marca imediatamente à direita do zero da escala auxiliar estará alinhado com a marca imediatamente à direita da i -ésima. Se a marca do zero estiver deslocada por duas vezes a largura da n -ésima parte, a segunda marca à direita do zero se alinhará à segunda marca à direita da i -ésima marca, e assim por diante. Dessa forma, podemos realizar uma leitura em que a menor divisão da escala é a largura da n -ésima parte.

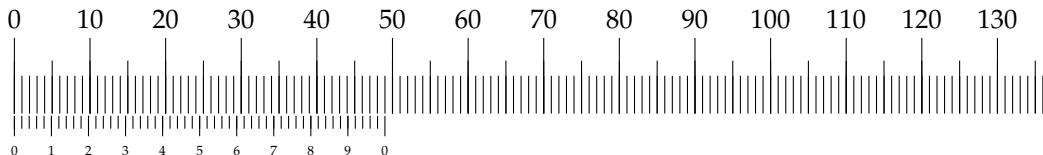
Nas Figuras 1.7 e 1.8 temos dois deslocamentos diferentes para a escala auxiliar da Figura 1.6. A escala auxiliar de tais figuras foi construída de forma que a menor divisão da escala principal foi subdividida em 10 partes. Tomando 9 partes, construímos a menor divisão da escala auxiliar. Assim, se o zero da escala auxiliar for deslocado — em relação ao zero da escala principal — para a direita por uma distância equivalente a um décimo da largura da menor divisão da escala principal, temos que a marca à direita do zero da escala auxiliar se alinhará à marca à direita do zero da escala principal (situação da Figura 1.7). Na Figura 1.8 o zero da escala auxiliar está deslocado em seis partes para a direita, o que leva ao alinhamento da marca número 6 da escala auxiliar com a sexta marca à direita do zero da escala principal.

Tomando medidas utilizando a escala auxiliar

A Figura 1.9 retrata uma medida tomada com um paquímetro cuja menor divisão da escala principal é de um milímetro e no qual a menor divisão da escala auxiliar é de $9/10$ da largura da menor divisão da escala principal. Para tomar a medida, fazemos o seguinte:

1. Efetuamos a leitura na escala principal através do zero da escala auxiliar. Consideramos a marcação imediatamente à esquerda do zero da escala auxiliar. Nesse caso temos 35 mm.
2. Verificamos qual é a marca da escala auxiliar que tem o melhor alinhamento com uma marca da escala principal. Nesse caso, temos que tal marca é a de número 6.
3. Como dividimos a menor divisão da escala principal em 10 partes para elaborar a escala auxiliar, ao alinharmos a sexta marca da escala auxiliar, temos $6/10$ de um milímetro, ou seja, 0,6 mm.
4. Somando essas duas contribuições, temos que a medida é 35,6 mm.

Veja que na prática basta *ler a escala principal através do zero da escala auxiliar, inserir uma vírgula, e anotar o número da marca na escala auxiliar que está alinhada à marca da escala principal*. Note ainda que o zero da direita na escala auxiliar serve para ajudar a verificar o alinhamento do zero da esquerda, pois ambos ficam alinhados ao mesmo tempo.



Paquímetro com divisão de 1 mm em 50 partes

Na Figura 1.10, temos a representação das escalas de um paquímetro no qual a menor divisão da escala principal foi subdividida em 50 partes para elaborar a escala auxiliar. Portanto, verificamos que a menor divisão da escala é de 0,02 mm ($1/50$ de um milímetro). Se tivermos uma leitura como a da Figura 1.12 em um instrumento desse tipo, procedemos a leitura através das seguintes etapas:

1. Verificamos qual a leitura na escala principal da marca imediatamente à esquerda da marca do zero da escala auxiliar. Nesse caso temos 47 mm.
2. Na escala auxiliar, procuramos a marca que está mais bem alinhada com alguma das marcas da escala principal. Em muitos casos, ficamos em dúvida sobre qual é a marca mais bem alinhada, como duas ou três candidatas. No caso de termos três, escolha a central. No caso em questão, vemos que a primeira, a segunda e a terceira marcas à direita da marca 2 da escala auxiliar estão bem alinhadas. Escolhendo a central, temos $12 \times 0,02 \text{ mm} = 0,24 \text{ mm}$.

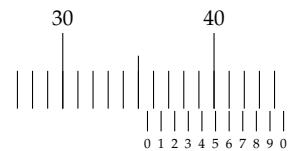


Figura 1.9: Exemplo de medida em um equipamento dotado de escala auxiliar.



Figura 1.10: Escalas de um paquímetro milimetrado em que a menor divisão da escala principal é subdividida em 50 partes para elaborar a escala auxiliar.

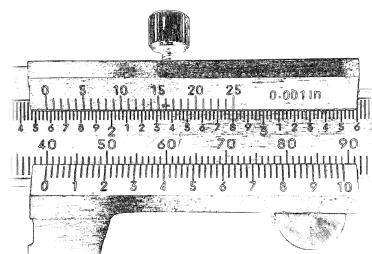


Figura 1.11: Detalhe mostrando a escala auxiliar de um paquímetro em que 1,0 mm é dividido em 50 partes.

3. A medida será composta pela soma dos dois resultados, isto é, 47,24 mm.

Na prática, a leitura é bastante simples:

1. Determinamos a leitura da escala principal — 47 mm —;
2. Colocamos uma vírgula após o valor dessa leitura — 47,0 mm —;
3. Verificamos a marca numerada imediatamente à esquerda da marca melhor alinhada e anotamos seu dígito — 47,2 mm —;
4. Finalmente, verificamos a posição da marca melhor alinhada a partir da última numerada — nesse caso, a segunda posição —. Como cada marca da escala auxiliar corresponde a 0,02 mm, “multiplicamos” por dois o “valor” da posição e anotamos o resultado ao fim — 47,24 mm —.

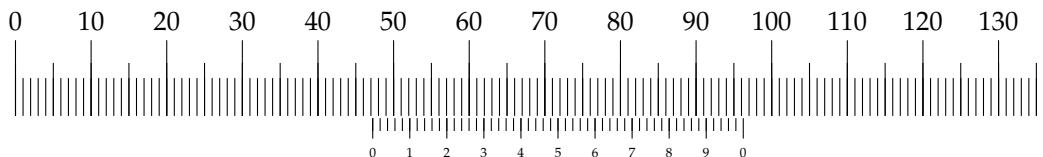


Figura 1.12: Leitura de 47,24 mm. Note o entre alinhamento a segunda marca após a marca “2” na escala auxiliar e a marca da escala principal.

Uma observação importante ao se utilizar equipamentos dotados de escala auxiliar é a realização de medidas que coincidem com as marcas maiores da escala auxiliar. Na Figura 1.13, por exemplo, temos uma medida em que a marca da escala auxiliar que está alinhada à da escala principal é a denotada pelo número 2. Efetuando a leitura, temos 33,2 mm. No entanto, temos o último dígito, dado pela “posição” da marca alinhada “multiplicada” por dois. Se a marca alinhada é a numerada, então a posição é zero. Logo, devemos adicionar um zero ao final da medida: 33,20 mm. Uma maneira mais simples de interpretar essa questão é verificarmos que o número de algarismos após a vírgula em uma dada unidade para um instrumento qualquer é sempre o mesmo. Assim, temos que no caso do paquímetro dos exemplos acima o número é sempre de duas casas após a vírgula ao se efetuar medidas em milímetros.

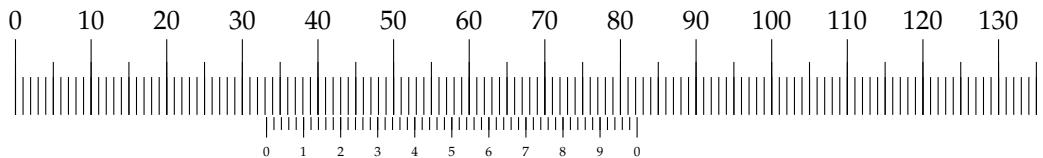


Figura 1.13: Leitura de 33,20 mm. Note o entre alinhamento a marca “2” na escala auxiliar e a marca da escala principal.

1.2.3 Unidades e algarismos significativos, notação científica

O número de algarismos significativos de uma medida está ligado à precisão do equipamento utilizado para realizá-la. Devido a isso,

se realizarmos uma conversão de unidades, não podemos ter uma alteração no número de algarismos significativos — afinal a precisão não aumenta nem diminui —. Isso nos leva a contemplar as duas seguintes situações:

1. Realizarmos uma medida e obtemos

$$\ell = 34,82 \text{ mm}, \quad (1.4)$$

onde o último algarismo foi estimado. Sabemos que temos quatro algarismos significativos e ao expressarmos esta medida em outras unidades, devemos manter o mesmo número de algarismos significativos. Podemos então expressá-la como

$$\ell = 3,482 \text{ cm} \quad (1.5)$$

$$= 0,3482 \text{ dm} \quad (1.6)$$

$$= 0,03482 \text{ m.} \quad (1.7)$$

Note que os zeros à esquerda não são algarismos significativos. Sua função é exclusivamente a de posicionar a vírgula, dando aos algarismos a ordem de grandeza adequada.

2. Realizamos uma medida de massa obtemos,

$$m = 11,2 \text{ kg}, \quad (1.8)$$

e desejamos expressá-la em gramas. Efetuando a conversão, poderíamos escrever em um primeiro momento

$$m = 11\,200 \text{ g.} \quad (1.9)$$

Uma medida assim expressa, no entanto, tem cinco algarismos significativos — pois o último algarismo anotado é o duvidoso —, enquanto a medida original tem três. Portanto, por mais que possamos adicionar zeros ao lado esquerdo sem modificar o número de significativos, não podemos fazê-lo do lado direito.

Para expressar essa medida com o número adequado de algarismos significativos, podemos utilizar a notação científica. Um número expresso em notação científica tem a forma $a \cdot 10^b$, onde a — denominada *mantissa* — é um número Real, e b — o expoente — é um número inteiro. O expoente também é conhecido como *ordem de grandeza*. Em um número expresso dessa forma, somente os algarismos da mantissa são significativos. Os prefixos kilo (k), hecto (h), deci (d), centi (c), mili (m), micro (μ), nano (n), etc., utilizados em unidades de medida são simplesmente formas abreviadas para as notações $\cdot 10^3$, $\cdot 10^2$, $\cdot 10^{-1}$, $\cdot 10^{-2}$, $\cdot 10^{-3}$, $\cdot 10^{-6}$, $\cdot 10^{-9}$, etc.

Utilizando a notação científica temos então

$$m = 112 \cdot 10^2 \text{ g.} \quad (1.10)$$

Portanto, temos as seguintes regras:

- Conversões de unidade não alteram a precisão das medidas e por isso não podem alterar o número de algarismos significativos.
- Zeros à esquerda não contam como algarismos significativos.
- Não podemos adicionar zeros à direita. Se for necessário fazê-lo ao efetuar uma conversão de unidades, devemos utilizar a notação científica.

1.2.4 Operações envolvendo medidas

Lembre-se que em uma medida direta, o algarismo duvidoso está ligado à ideia de que ele seria o algarismo que possivelmente sofreria alterações caso utilizássemos equipamentos mais precisos para realizar as medidas. Isso também se reflete nos valores calculados para medidas indiretas, afinal elas são calculadas a partir de medidas diretas, que têm um algarismo duvidoso. Portanto, ao obtermos uma medida indireta, também devemos denotá-la com o número adequado de algarismos significativos.

Para determiná-los, no entanto, devemos seguir algumas regras para as operações realizadas:

Multiplicação e divisão No caso da multiplicação ou da divisão, devemos limitar o número de algarismos significativos àquele da medida que tiver o menor número.

Para entender a razão dessa regra, podemos fazer a seguinte análise: Tomamos a medida indireta L dada por

$$L = \ell_1 \ell_2 \ell_3 \dots \quad (1.11)$$

onde $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$, são medidas diretas quaisquer. Vamos supor que ℓ_1 tem n algarismos significativos e que as demais têm mais algarismos significativos que ℓ_1 . Vamos supor ainda que o primeiro dígito (aquele com a maior ordem de grandeza) tem ordem de grandeza p , que o duvidoso ordem de grandeza d e que a diferença entre as ordens de grandeza desses dígitos é s . Agora fazemos o seguinte

1. Tomamos a ordem de grandeza d do algarismo duvidoso de ℓ_1 e multiplicamos pelas demais medidas;
2. Obtemos um valor com uma ordem de grandeza d' qualquer;
3. Qualquer dígito com uma ordem de grandeza menor que d' é então desprezível se comparado ao dígito com a ordem de grandeza d ;
4. Observamos no valor calculado para L que o dígito com a maior ordem de grandeza será p' . Esse dígito deve ser s' ordens de grandeza maior que d' .

A diferença s' nada mais é do que o número de algarismos significativos da medida L . Além disso s' é igual a s . Logo, o resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos que a medida ℓ_1 . Portanto, ao multiplicar duas ou mais medidas,

- Determinamos o número de algarismos significativos de cada uma das medidas que compõe o produto/divisão;
- Realizamos o produto/divisão;
- Ao fim, deixamos o resultado com o mesmo número de algarismos significativos que a medida que tem menos algarismos significativos.

Uma observação importante a se fazer é que se separarmos o cálculo em várias etapas, devemos levar mais algarismos do que o mínimo necessário entre as etapas (pelo menos um a mais). A razão disso é que a contribuição dos dígitos após o último significativo pode se acumular entre as etapas e dar um resultado levemente maior que no caso de os descartarmos. O descarte dos algarismos não-significativos deve ser feito ao final do cálculo.

EXEMPLO³:

$$12,03 \div 3,6 = 3,\bar{3}4 = 3,3 \quad (1.12a)$$

$$198,633 \times 3,211 = 637,\bar{8}1056 = 637,8. \quad (1.12b)$$

³ Utilizamos a barra para denotar o último algarismo significativo quando escrevemos dígitos além dele.

Soma e subtração Para o caso da soma ou subtração, mantemos o número de casas decimais da medida que tem o menor número de casas após a vírgula.

A razão disso é que se temos uma incerteza em um algarismo qualquer, dígitos à direita serão menores ou da ordem de grandeza da incerteza. Consequentemente, seria inútil expressá-los. Observe que para realizar a soma/subtração, é importante que todas as medidas sejam expressas na mesma unidade e ordem de grandeza.

EXEMPLO:

$$12,03 \text{ cm} + 3,6 \text{ cm} = 15,\bar{6}3 \text{ cm} \quad (1.13)$$

$$= 15,6 \text{ cm}. \quad (1.14)$$

Constantes Quando efetuamos uma operação envolvendo uma constante matemática e uma medida, conservamos no resultado o mesmo número de algarismos significativos da medida.

Nesse caso temos que a constante matemática não tem incerteza nenhuma, então podemos considerá-la com um número infinito de algarismos significativos.

EXEMPLO:

$$A = \pi \times (3,66 \text{ m})^2 \quad (1.15)$$

$$= \pi \times (13,\bar{3}956 \text{ m}^2) \quad (1.16)$$

$$= 42,\bar{0}8351855 \text{ m}^2 \quad (1.17)$$

$$= 42,1 \text{ m}^2. \quad (1.18)$$

Funções Quando uma medida é o argumento de uma função, mantemos para o resultado o número de algarismos significativos da medida.

⁴ Uma série de potência é uma forma de escrever uma função em termos de potências, somas e subtrações. Em geral, tais séries contém um número infinito de termos.

As funções trigonométricas $\sin x$ e $\cos x$, por exemplo, são descritas pelas séries

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

onde x é um ângulo expresso em radianos.

⁵ Isso é útil para podermos truncar a soma da série a um número pequeno de parcelas, afinal não faz sentido calcular parcelas que têm valores menores que a incerteza das parcelas dominantes

Uma maneira de entender isso é o fato de que podemos escrever funções como séries de potência⁴ — que são basicamente multiplicações, somas e subtrações —. Dessa forma, podemos verificar que ao tomarmos a medida e realizarmos o produto por ela mesma, devemos ter um resultado com o mesmo número de algarismos significativos para todas as parcelas que serão somadas/subtraídas, sendo que o número de casas após a vírgula fica determinado pelo primeiro termo que não é constante. Assim, ao somarmos, a parcela maior dominará e teremos que o resultado terá o mesmo número de algarismos significativos que o argumento da função⁵.

EXEMPLO:

$$x = \ln 3,555 \quad (1.19)$$

$$= 1,26\bar{8}355063 \quad (1.20)$$

$$= 1,268. \quad (1.21)$$

1.2.5 Arredondamento

Nos exemplos da seção anterior, usamos uma barra para denotar o último algarismo significativo antes de descartar os algarismos excedentes. Sempre que os descartarmos, devemos fazê-lo observando os critérios de arredondamento.

Quando obtemos resultados do tipo

$$\ell = 134,\bar{3}9487, \quad (1.22)$$

precisamos fazer um *arredondamento*. No exemplo acima, vemos que 134,4 é um número mais próximo do resultado do que 134,3. Portanto, adotamos as seguintes regras ao realizarmos o arredondamento:

1. Se o algarismo seguinte ao duvidoso for menor que 5, simplesmente descartamos os algarismos excedentes.
2. Se o algarismo seguinte ao duvidoso for maior ou igual a 5, aumentamos o duvidoso de uma unidade e descartamos os demais.

Esse critério de arredondamento não é único. Em algumas situações se utiliza uma regra específica para o caso de o algarismo seguinte ao duvidoso ser 5: analisa-se o algarismo seguinte a esse e caso ele for par, se arredonda para cima e caso for ímpar, para baixo.

2 Gráficos

Uma maneira simples de verificar a relação entre duas grandezas é a elaboração de um gráfico de dispersão. Apesar de não podermos verificar valores exatos em um gráfico, uma observação do comportamento geral de um conjunto de pontos pode ser muito esclarecedora, principalmente se levarmos em conta que todas as medidas efetuadas sofram uma dispersão aleatória em torno de seus valores ideais. Verificaremos como elaborar um gráfico de maneira a evidenciar o comportamento das variáveis consideradas e, no Capítulo 4, verificaremos como descrever de maneira idealizada a dependência entre as variáveis.

2.1 Gráficos

Um gráfico é uma maneira de transformar um conjunto de dados numéricos em uma figura, relacionando valores numéricos a escalas de cor, distâncias ou áreas. No livro *The Visual Display of Quantitative Information*¹, Edward R. Tufte afirma que

Gráficos mostram quantidades visualmente através do uso combinado de pontos, linhas, um sistema de coordenadas, números, símbolos, palavras, sombreamento, e cor.

e que

Gráficos modernos podem fazer muito mais que simplesmente substituir pequenas tabelas de dados. Quando utilizados em seu máximo potencial, gráficos são instrumentos para raciocinar sobre informações quantitativas. Frequentemente a maneira mais efetiva para descrever, explorar, e sumarizar um conjunto de números — mesmo um conjunto muito grande — é através de figuras de tais números.

Tufte afirma que talvez em virtude da diversidade de técnicas e informações necessárias — habilidades artísticas e matemáticas, dados experimentais — a utilização de figuras abstratas para representar números é relativamente recente (1750 em diante). Dentre os autores que desenvolveram o campo da representação gráfica de dados, ele destaca o trabalho de William Playfair, que desenvolveu melhorias para vários tipos de gráficos. Tufte também destaca o trabalho de Johann Heinrich Lambert,² que percebe que os gráficos não precisam necessariamente relacionar quantidades em analogia ao mundo físico — como séries temporais, isto é, a evolução de um valor qualquer de acordo com a evolução do tempo —, mas podem ser elaborados para quaisquer duas variáveis cujas relações desejamos verificar:

Temos em geral duas quantidades variáveis, x , y , que serão comparadas uma à outra por observação, de forma que para cada valor de x — que

¹ Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001. ISBN: 0-9613921-4-2

² Johann Heirich Lambert. "Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung". Em: Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001, p. 45. ISBN: 0-9613921-4-2

pode ser considerada como uma abscissa — determinamos a ordenada correspondente y . Se as observações experimentais fossem completamente precisas, essas ordenadas resultariam em um número de pontos através dos quais uma curva ou uma reta deveriam ser traçadas.²

Existem vários tipos de gráficos, cada um com o objetivo de evidenciar características específicas do conjunto de dados em questão:

- *Gráficos de setores* servem bem o propósito de mostrar a contribuição relativa de várias parcelas que perfazem um todo;
- *Gráficos de colunas/barras* servem para comparação entre diversos valores absolutos;
- *Gráficos de colunas/barras empilhadas* denotam valores absolutos e demonstram a composição relativa de várias contribuições para o todo. Une as propriedades dos dois tipos anteriores;
- *Séries temporais* denotam a evolução temporal de variáveis com o tempo;
- *Mapas de dados* servem para demonstrar dados que variam de acordo com a distribuição geográfica;
- *Gráficos de dispersão* permitem verificar a relação entre duas variáveis quaisquer;
- *Histogramas* são similares aos gráficos de barra, mas voltados à apresentação de contagens de eventos em diversos intervalos;

além de outros tipos. Em comum a todos os tipos de gráfico, está a utilização de dimensões como área e comprimento, ou tonalidades de cor, para representar informações numéricas.

Temos especial interesse nos gráficos de dispersão. Esse tipo de gráfico serve para verificar relações de causa e efeito entre duas variáveis quaisquer. De acordo com Tufte,

[...] Na literatura científica moderna, em torno de 40% dos gráficos publicados têm uma forma relacional, com duas ou mais variáveis. Isto não é sem propósito, já que os gráficos relacionais — em sua forma mais simples, o gráfico de dispersão e suas variantes — é o mais formidável de todos os tipos de gráficos. Eles ligam pelo menos duas variáveis, encorajando e mesmo suplicando que o leitor se pergunte qual é a possível relação causal entre elas. Eles confrontam as teorias causais [...] com evidências empíricas.

De fato, estamos interessados em verificar experimentalmente a relação entre diversas variáveis através de experimentos. Além disso, desejamos testar teorias científicas, procurando confirmar ou refutar suas validades.

Finalmente, como recomendações gerais para a elaboração de gráficos, Tufte destaca:

- *A representação de números através de medidas de superfície em um gráfico deve ser proporcional às quantidades numéricas representadas.*³

³ Esse item é bastante visível ao se analisar um gráfico de campanha política: o candidato que deseja evidenciar sua vantagem costuma realizar um corte de forma que o zero não seja no menor valor da escala mostrada e também adota uma largura maior para sua coluna. Dessa forma uma diferença insignificante (menor que o erro da própria pesquisa) parece muito grande.

- Cada parte de um gráfico gera expectativa visual sobre as outras partes. Se uma escala que se move em intervalos regulares, por exemplo, se espera que ela continue a fazê-lo. Mostre a variação dos dados, não variação na elaboração do gráfico.
- Em séries temporais, ao se mostrar dados relativos a dinheiro, geralmente é melhor utilizar quantidades corrigidas pela inflação.
- O número de dimensões utilizadas para demonstrar informações não deve exceder o número de dimensões dos dados⁴.
- Acima de tudo, mostre os dados.⁵

2.2 Gráficos de dispersão

Gráficos de dispersão são ferramentas muito usadas para visualizar relações matemáticas entre uma função e seu argumento. Por exemplo, sabemos que a função $f(x) = A + Bx$ é uma equação da reta, pois seu gráfico é uma reta. Cada função tem um gráfico característico.

Em experimentos de laboratório é comum procuramos estabelecer a relação entre duas grandezas. Uma delas variamos arbitrariamente e denominamos como **variável independente**, já a outra medimos e — como seus valores variam em resposta aos da variável independente — a denominamos como **variável dependente**. Tais variáveis são representadas nos eixo x (abscissas) e y (ordenadas), respectivamente, sendo o primeiro o eixo horizontal e o segundo o vertical.

O maior objetivo de uma teoria é justamente encontrar a relação matemática f que relaciona x e y , ou seja, que nos dá y em função de x : $y = f(x)$. Isso não é algo que possa ser retirado dos gráficos de uma maneira simples, por diversas razões. Primeiramente, os dados experimentais se distribuem em torno do comportamento ideal devido a variações aleatórias. Além disso, mesmo que possamos tirar uma conclusão a partir do gráfico, tal conclusão só é válida para o intervalo de valores que compreende as medidas, podendo ser diferente em outras regiões. Finalmente, uma relação extraída dos dados experimentais não consegue explicar em argumentos lógicos o mecanismo que relaciona uma variável à outra, portanto não explicando o comportamento. De qualquer forma, uma gráfico que mostra uma dependência confiável de uma variável em relação a outra já abre um caminho para a investigação. Também podemos utilizar os dados experimentais para *verificar a validade de previsões teóricas*.

2.2.1 Principais elementos de um gráfico de dispersão

Os elementos mais notáveis de um gráfico de dispersão são:

Eixos: Os valores das variáveis dependente e independente são expressos pelas distâncias ao longo dos eixos vertical e horizontal em relação à origem (encontro dos dois eixos). Muitas vezes os valores das variáveis são distantes de zero e não podem ser verificados adequadamente se um dos eixos — ou mesmo ambos —

⁴ As dimensões são as maneiras diferentes que os dados podem variar. Se, por exemplo, desejamos comparar o número de habitantes de diversas cidades, devemos utilizar uma figura com uma dimensão (um gráfico de barras) e não com duas (a área de um círculo).

⁵ Isto é, faça um gráfico simples, sem floreios, que mostre os dados.

iniciarem em zero. Por isso, é comum que se realizem “cortes” nos eixos de maneira que eles não iniciem em zero. Nesse caso, os valores são expressados por meio da distância relativa que os pontos ocupam entre duas marcas numeradas nos eixos (veja o item seguinte). Os eixos devem ser nomeados com a variável que está sendo representada e suas unidades.

Escalas: Para que a leitura do gráfico possa ser efetuada de uma maneira quantitativa, ainda que aproximada, é importante que se efetuem marcas nos eixos e que tais marcas sejam numeradas com os valores que elas representam no eixo. Tais marcas não precisam iniciar em zero, porém devem ser efetuadas em intervalos regulares e com números de fácil leitura. Nas escalas não devem ser marcados os valores das abscissas e ordenadas dos pontos⁶.

Pontos experimentais: Os dados experimentais são representados através de pontos na área retangular delimitada pelos eixos horizontal e vertical. A localização dos pontos é aquela do encontro das retas paralelas aos eixos horizontal e vertical e que passam pelas posições desses eixos que correspondem aos valores que desejamos representar. Para que o ponto seja facilmente visível, indica-se a utilização de quadrados, círculos, triângulos, etc. centrados no ponto de encontro das retas. Caso mais que um conjunto de dados seja representado no mesmo gráfico, devem ser utilizados símbolos diferentes para cada conjunto.

Como elementos opcionais, temos:

Legenda: Se temos somente um conjunto de dados, a legenda pode ser dispensada. No entanto, se temos dois ou mais conjuntos — ou mesmo curvas —, representados no mesmo gráfico, é essencial que seja feita uma legenda indicando o que cada símbolo representa.

Linha de tendência: Uma reta ou curva que represente o comportamento “médio” dos pontos é denominada como *linha de tendência*. Muitas vezes estaremos interessados nesse tipo de curva, porém verificaremos como calculá-las adequadamente no Capítulo 4. Tal curva deve ficar restrita à área do gráfico que contém os dados experimentais (entre os valores mínimo x_{min} e máximo x_{max} para as abscissas dos dados experimentais).

Título: Um título pode ser adicionado ao gráfico indicando como eles foram obtidos. Um exemplo de título adequado é “Valores do deslocamento de um corpo em queda livre em função do tempo”; Uma versão inadequada desse título seria “Gráfico de Δx em função de t ”.

Muitas vezes alguns desses elementos são omitidos. O título e a legenda, por exemplo, podem ser descritos na *legenda da figura* — o pequeno texto que aparece abaixo das figuras, como na Figura 2.1 —. Já a linha de tendência pode ser omitida por não ser de interesse do autor do gráfico.

⁶ Exceto no caso em que os próprios valores das variáveis ocorrem em intervalos regulares e tais intervalos correspondem ao mais adequado para a escala do eixo. Isso ocorre mais comumente com os valores do eixo independente (horizontal).

Exemplo de um gráfico de dispersão

Se tomarmos as medidas da Tabela 2.1, podemos fazer um gráfico como o da Figura 2.1. Nesse gráfico podemos perceber que foram aplicados alguns princípios básicos para a elaboração de um gráfico adequado:

- O gráfico deve ter os dois eixos com numerações que aparecem em *intervalos regulares* — a cada 100 no eixo x e a cada 10 no eixo y —.
- O eixo y foi “cortado”, iniciando em 20. Isto é adequado pois não existem dados cujos valores da variável dependente sejam menores que 20.
- Os eixos começam e terminam em valores que permitem que toda a área disponível do gráfico é bem utilizada.
- O gráfico possui uma legenda indicando o que os pontos representam.
- Os eixos foram nomeados e indicam as unidades dos dados.
- O título descreve sucintamente o que o gráfico representa.

Tubo 1		Tubo 2	
t (s)	T °C	t (s)	T °C
0	98	0	92
5,71	93	8,27	87
17,79	88	17,43	82
34,50	83	31,07	77
61,63	78	44,98	72
83,96	73	67,78	67
109,09	68	96,57	62
130,78	63	115,26	57
149,09	58	135,78	52
184,21	53	170,32	47
217,09	48	213,28	42
261,28	43	268,04	37
315,90	38	349,44	32
373,35	33	465,71	27
470,55	28	575,21	24
504,21	25		

Tabela 2.1: Dados para a temperatura de tubos metálicos em função do tempo para o processo de resfriamento convectivo.

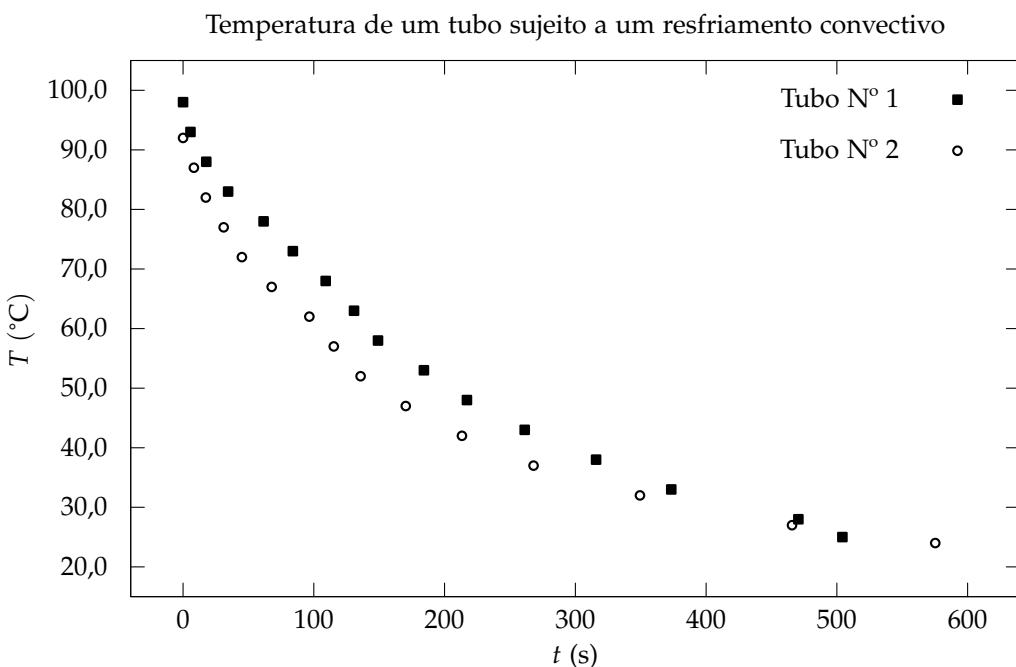


Figura 2.1: Gráfico dos dados da Tabela 2.1.

2.2.2 Problemas mais comuns em gráficos de dispersão

A elaboração de um gráfico não é uma tarefa que podemos reduzir a um certo número de passos. Um gráfico deve ser utilizado de maneira a evidenciar dados ou seu comportamento e muitas vezes isso implica em fugirmos das regras mais comuns: por exemplo, se desejamos mostrar com o auxílio de uma linha de tendência qual é

o valor estimado da variável dependente em uma região do gráfico distante dos pontos experimentais. De qualquer forma, podemos recomendar que os seguintes itens sejam evitados:

Não utilizar adequadamente a área do gráfico: Muitas vezes nossos dados não iniciam em zero. Nesse caso devemos escolher um número próximo, porém inferior, ao primeiro valor que ocorre naquele eixo e iniciar o eixo em tal número. Se, por exemplo, devemos marcar em um eixo os valores 107,25, 115,12, 129,90, 138,22, etc., uma boa escolha é iniciar o eixo em 100 e realizarmos as marcações no eixo a cada 10. Outra escolha adequada seria iniciar o eixo em 105 — porém, nesse caso, não marcamos o “canto” do gráfico como 105 —. Realizamos a marcação em 110 e daí em diante a cada 10.

Não utilizar espaçamento regular na numeração dos eixos: Marcações irregulares, isto é, com “espaçamento variável” não devem ser realizadas. Utilizando os dados do item acima, poderíamos realizar marcações no eixo em 105, 115, 130 e 140. Porém a distância entre essas marcações não é regular, o que dificulta a leitura do gráfico.

Marcar os valores de x e y dos pontos experimentais: Os valores de abscissas e de ordenadas dos pontos não devem aparecer nos eixos ordenados. Veja que no gráfico da Figura 2.1 ocorrem muitos valores que ficam entre duas marcações quaisquer, porém os valores correspondentes aos pontos não devem ser marcados no eixo.

Linhas que ligam os pontos aos eixos: Muitos alunos ligam os pontos aos eixos x e y usando linhas tracejadas. Tais linhas não têm propósito nenhum e dificultam a visualização dos pontos experimentais. Caso queiramos saber exatamente os valores das variáveis independente e dependente, podemos verificarlos na tabela de dados.

Linhas que ligam os pontos entre si: Os pontos marcados a partir de dados experimentais nunca devem ser ligados entre si. Quando marcamos curvas ou retas em um gráfico, isso significa que temos conhecimento sobre todos os pontos que compõe aquela curva. Isso só pode ser razoável para curvas matemáticas, não para dados experimentais. Estes são verificados “pontualmente” e não podemos afirmar nada sobre o que obteríamos entre dois pontos quaisquer. Portanto, a reta que liga dois pontos experimentais não carrega informação alguma e não deve ser traçada. Veja a Figura 2.2 para um exemplo do que não fazer.

2.2.3 Elaborando um gráfico com papel milimetrado

Hoje podemos fazer um gráfico rapidamente usando um programa de computador. No entanto, é interessante fazer alguns gráficos com papel milimetrado e lápis/caneta para sabermos o que tais programas estão fazendo.

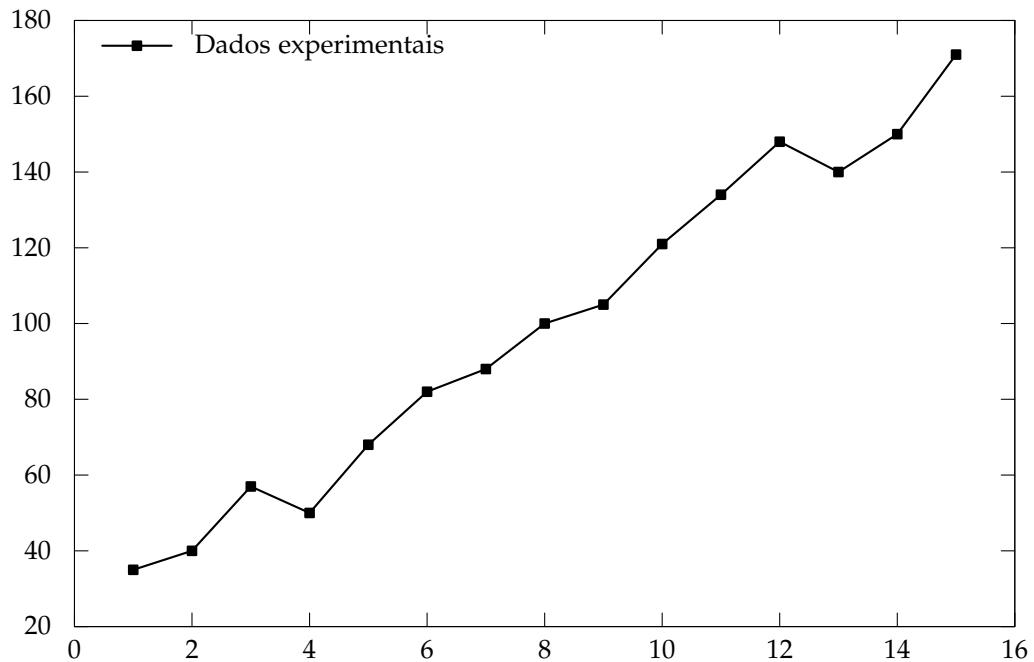


Figura 2.2: Exemplo do que não fazer:
ligar os pontos experimentais, não no-
mear os eixos, não colocar unidades.

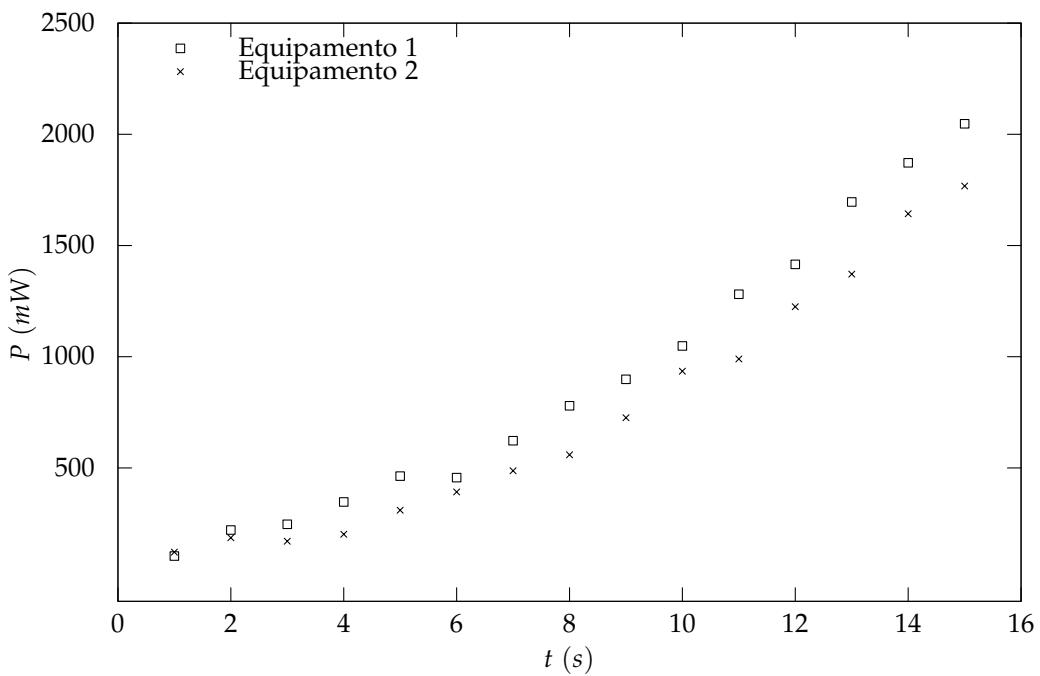


Figura 2.3: Exemplo de gráfico contendo
vários conjuntos de dados. Notem que
cada conjunto usa um símbolo diferente
para os dados e que não ligamos os pon-
tos. Além disso, fazemos um corte no
eixo x para aproveitar a área do gráfico.

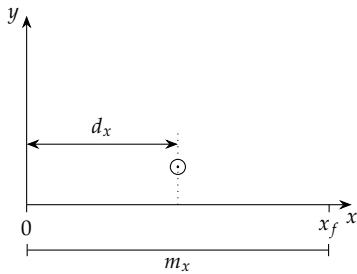


Figura 2.4: Variáveis para o cálculo da posição de um ponto em um gráfico em que o eixo x inicia em zero.

Elaborar um gráfico em papel milimetrado é uma questão de observar as regras gerais para a elaboração de gráficos e usar regras de três. O procedimento para elaborar o gráfico consiste no seguinte (veja a Figura 2.5):

1. Verificar quais os valores mínimo x_i e máximo x_f para o eixo x . Tais valores devem ser um pouco menor e um pouco maior que os valores mínimo e máximo para as abscissas dos dados experimentais, respectivamente.
2. Verificar quais os valores mínimo y_i e máximo y_f para o eixo y . Como no caso do eixo x , os valores escolhidos devem ser um pouco menor e um pouco maior que os valores das ordenadas dos pontos experimentais, respectivamente.
3. Verificar o tamanho do papel e desenhar os eixos *dentro da área milimetrada* e não na borda dessa área. Em geral, deixa-se um centímetro entre a borda da área milimetrada e o eixo para que possamos fazer as escalas. Com isso determinamos as medidas m_x e m_y dos eixos horizontal e vertical no papel.
4. Se escolhermos $x_i = 0$, temos que a distância m_x em relação à origem do eixo x representa o valor x_f que escolhemos para o final do eixo⁷. Isso é equivalente a dizer que cada unidade de medida no eixo x equivale a uma quantidade⁸

$$f_x = \frac{x_f}{m}. \quad (2.4)$$

Assim, se precisamos representar um valor x_p de um ponto $P = (x_p, y_p)$ qualquer, calculamos a distância d_x em relação à origem — veja a Figura 2.4 — através de⁹

$$d_x = \frac{x_p}{f_x} = x_p \frac{m_x}{x_f}. \quad (2.5)$$

Se fazemos um corte no eixo x em um valor x_i , temos que uma unidade de medida nesse eixo representa uma quantidade (veja a Figura 2.5)

$$f_x = \frac{x_f - x_i}{m_x}. \quad (2.6)$$

Dessa forma, se precisamos representar um valor x_p , devemos dividir pelo fator f_x somente o valor que *excede* o valor do corte x_i . Portanto, a distância d_x é dada por¹⁰,

$$d_x = \frac{(x_p - x_i)}{f_x} = (x_p - x_i) \frac{m_x}{x_f - x_i}. \quad (2.7)$$

Vamos considerar, por exemplo, um conjunto de dados cujas abscissas correspondem a uma variável t , cujas unidades são segundos. Verificamos que o menor valor de abscissa para os pontos é 36,29 s e o maior 104,04 s. Todas as abscissas estão compreendidas entre 30 s e 110 s e podemos escolher tais valores¹¹ como o início e o fim

⁷ O raciocínio para o eixo y é o mesmo, por isso mostramos somente para o eixo x .

⁸ O que temos é uma regra de *proporção*, ou seja, uma regra de três:

$$\frac{d}{m} = \frac{x_p}{x_f}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{m} = \frac{x_f}{x_f}, \quad (2.2)$$

o que resulta em

$$d_x = x_p \frac{m_x}{x_f}. \quad (2.3)$$

⁹ Note que a fração que aparece nessa equação é um valor constante. Calculando tal valor podemos simplesmente multiplicá-lo pelo valor x_p de cada ponto para descobrir quanto cada um dista da origem.

¹⁰ Veja que se tivermos um ponto em que x_p é igual a x_i , ele deve ficar sobre a posição de corte do eixo ($d_x = 0$), o que está de acordo com o que a equação prevê. Note também que novamente o valor da fração é constante, facilitando o cálculo da distância.

¹¹ Outra escolha possível seria entre 35 s e 105 s. No entanto, devemos tomar cuidado com a escolha pois alguns pontos podem ficar muito próximos dos eixos, dificultando a leitura do gráfico.

do eixo x . A medida do eixo no gráfico é $m_x = 25,00$ cm. Assim, se desejamos encontrar a distância d_x a partir do início do eixo em que devemos marcar um ponto cuja abscissa é $x_p = 47,20$ s temos

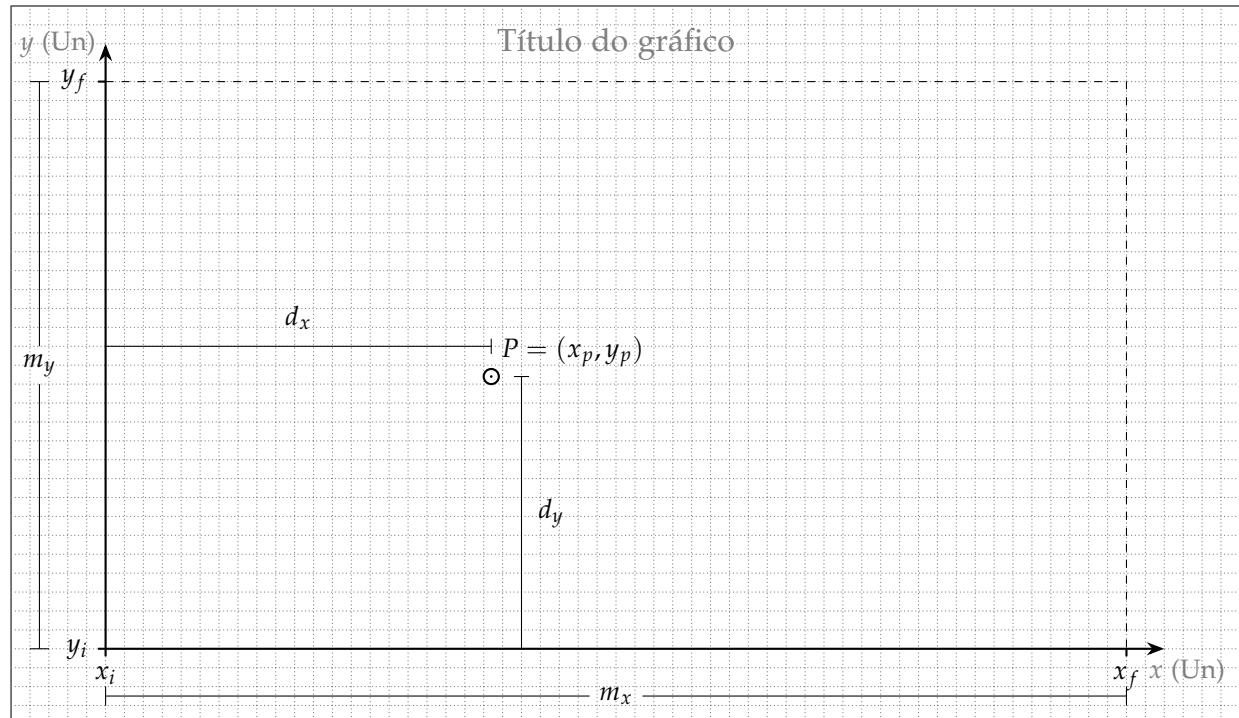
$$d_x = (47,20 - 30) \frac{25,00}{110 - 30} \quad (2.8)$$

$$= 5,375 \text{ cm.} \quad (2.9)$$

5. Podemos determinar a posição do ponto $P = (x_p, y_p)$ no eixo y de maneira análoga, calculando a distância d_y através de

$$d_y = (y_p - y_i) \frac{m_y}{y_f - y_i}. \quad (2.10)$$

6. Também podemos calcular a posição de uma marca das escalas dos eixos x e y utilizando as Equações (2.7) e (2.10). Para isso basta utilizarmos o valor que desejamos marcar no lugar da abscissa x_p ou da ordenada y_p . Após encontrarmos a posição das duas primeiras marcas, no entanto, basta verificar a distância entre elas e utilizá-la para marcar a posição das demais marcas, já que o espaçamento deve ser constante.



Utilizando o procedimento acima, todos os pontos experimentais estarão distribuídos dentro da área demarcada pelo valor máximo y_f no eixo y e pelo valor máximo x_f no eixo x — na Figura 2.5, a região retangular delimitada pelos eixos x e y , e pelas retas tracejadas —. Veja que o adequado aproveitamento dessa região está diretamente ligado aos valores escolhidos para x_i , y_i , x_f e y_f : se, por exemplo, escolhermos valores para x_i e y_i que não sejam menores que os valores mínimos das abscissas e ordenadas dos pontos, teremos pontos abaixo

Figura 2.5: Esquema para a elaboração de um gráfico em papel milimetrado.

do eixo x , à esquerda do eixo y , ou ambos. Outro problema, nesse caso, é que os pontos podem ficar sobre os eixos ou muito próximos deles, dificultando a sua visualização. Por outro lado, se escolhermos valores para x_i e y_i muito menores que os valores mínimos das abscissas e ordenadas dos pontos, teremos grandes regiões vazias à esquerda e/ou abaixo dos pontos do gráfico. Analogamente, devemos escolher valores de x_f e y_f que sejam maiores que os valores máximos das abscissas e ordenadas dos pontos, porém não muito maiores: se escolhermos valores menores que os máximos, teremos pontos fora do gráfico; se escolhermos valores muito maiores que os máximos, teremos regiões vazias à direita e/ou acima dos pontos experimentais.

Uma dificuldade prática dos cálculos acima é a de que muitas vezes eles incorrem em fatores de escala não muito práticos, pois resultam em números “quebrados” que tornam a marcação dos pontos no papel milimetrado suscetível a erros. Uma maneira de contornar esse problema é aproximarmos a escala: tomando o eixo x , por exemplo, calculamos através dos valores x_f , x_i e m_x um fator de escala f_x onde

$$f_x = \frac{x_f - x_i}{m_x}. \quad (2.11)$$

Após calculá-lo, o arredondamos para algum dos valores seguintes: 1, 2, 2,5, 4, 5 ou 10, ou qualquer múltiplo ou submúltiplo decimal desses (isto é, esses números multiplicados por 10 elevado a alguma potência inteira), sempre fazendo o arredondamento para cima. A partir desse valor arredondado f'_x , podemos calcular a distância d_x entre o início do eixo e o ponto através de

$$d_x = \frac{x_p - x_i}{f'_x}. \quad (2.12)$$

3 Erros

Se precisamos fabricar uma peça de um mecanismo, as tolerâncias nas medidas são em geral muito pequenas, portanto não podemos utilizar equipamentos de medida pouco precisos. Verificaremos que todas as medidas têm um limite de validade dado pela incerteza na medida, sendo que um aumento na precisão de uma medida significa uma diminuição em tal incerteza. Verificaremos quais as origens dos erros e como propagá-los no cálculo de uma medida indireta.

3.1 Erros de medidas

Se, por exemplo, tomarmos uma trena cujas divisões são em decímetros e a utilizarmos para medir o diâmetro de um tubo de PVC e com essa informação adquirir uma conexão para o tubo, corremos um grande risco de adquirir uma conexão com um diâmetro inadequado. Claramente estamos usando um instrumento de medida com uma escala inadequada. Nunca é possível se conhecer uma medida com exatidão: Sempre que efetuamos uma medida, a ela estará associada uma incerteza, ou um “erro”. Determinar esse erro nos permitirá conhecer o limite de utilidade de uma medida.

Outro fator que dificulta o processo de medida é o fato de que medições sucessivas podem resultar em valores diferentes: se cronometrarmos o tempo de queda de um objeto de uma certa altura com uma precisão razoável, observaremos valores diferentes em cada medida. O tratamento desse tipo de incerteza requer técnicas provenientes da análise estatística, possibilitando a obtenção de um valor mais provável.

Portanto, a determinação do valor de uma medida não é uma tarefa fácil. Além de requerer um método e equipamentos apropriados, precisamos também de uma análise matemática dos resultados para determinar o valor mais adequado. No caso de uma grandeza calculada a partir de outras, precisamos ainda determinar o erro associado, de forma a ter uma ideia de quanto confiável é o nosso resultado. Essas tarefas nem sempre são fáceis e dão origem a uma série de métodos que compõe uma *teoria de tratamento de erros e medidas*. No laboratório aplicaremos alguns conceitos descritos a seguir.

3.2 Medidas e erros

Ao efetuarmos uma medição no dia a dia, nos contentamos em atribuir à medida um valor e uma unidade. Expressamos a medida de uma sala, por exemplo, como

$$\ell = 4,32 \text{ m.} \quad (3.1)$$

Entretanto, associada a toda medida existe uma *incerteza* ou *erro*. Tal erro pode ser composto por três partes: erros sistemáticos, erros de escala e erros aleatórios. Podemos então descrever uma medida mais precisamente ao escrevermos

$$\ell = (4,32 \pm 0,05) \text{ m}, \quad (3.2)$$

o que nos diz que além de sabermos que nossa medida é da ordem de 4,32 m, ela pode variar de 0,05 m para mais ou para menos.

É importante destacarmos que o erro é expresso com somente um algarismo significativo. Uma exceção importante a essa regra é no caso de termos erros cujo primeiro algarismo é 1: nesse caso se admite um erro com dois algarismos significativos. Veremos abaixo os tipos de erro e como calculá-los.

3.2.1 Tipos de erros

De uma forma geral, os erros de medida podem ser classificados em três categorias^{1,2}:

Erros sistemáticos São erros cuja causa é bem definida e sempre afetam as medidas da mesma maneira. Um exemplo disso são relógios desenvolvidos para usar como padrão de tempo a frequência de oscilação da corrente elétrica de instalações elétricas residenciais. Ocorre, no entanto, que diferentes países adotam frequências diferentes de oscilação da corrente: alguns usam 50 Hz outros 60 Hz (isto é, 50 ou 60 oscilações por segundo). Utilizar um desses relógios em uma região inadequada fará com que ele subestime ou superestime a passagem do tempo. O problema na medida do tempo é sistemático e por isso pode ser corrigido, seja usando um relógio adequado, seja calculando o tempo correto com base no tempo medido.

Apesar do fato de que — uma vez conhecido o erro sistemático — sua eliminação é relativamente simples, na prática este é um erro bastante difícil de se identificar. O primeiro passo visando garantir que as medidas não tenham erros sistemáticos é calibrar os instrumentos de medida. Tal calibração não pode ser realizada para um único valor, pois o erro pode ser nulo para tal medida e aumentar conforme se aumenta o valor medido. Ainda que essas medidas sejam tomadas, um instrumento pode ter problemas conforme se aumenta a magnitude dos valores a serem medidos, pode não ser exatamente linear para alguma faixa de valores, dentre outros problemas possíveis. No entanto, apesar de todos os cuidados, uma fonte de erro pode passar desapercebida, prejudicando as medidas obtidas.

Erros aleatórios Um erro aleatório é todo erro que faz variar a medida de maneira imprevisível, porém com igual probabilidade de subestimar ou superestimar o “valor real” da medida. Este tipo de incerteza, portanto, se opõe ao erro sistemático, que tenta a

¹ João J. Piacentini et al. *Introdução ao Laboratório de Física*. 2^a Edição. Editora da UFSC, 2001

² José Ricardo Marinelli e Flavio Renato Ramos de Lima. *Laboratório de Física I*. 2^a Edição. UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. ISBN: 978-85-8030-001-7

subestimá-la *ou* superestimá-la. A aleatoriedade da incerteza possibilita que ela seja tratada através de métodos estatísticos, tornando factível a extração de valores de medida precisos através da rea-lização de várias medidas. O fato de a incerteza ser aleatória é algo bom: erros sistemáticos são muito mais difíceis de se eliminar, eliminar e tratar do que simplesmente aumentar o número de medidas e assim diminuir o erro, por mais que isso em geral envolva uma grande quantidade de trabalho para a obtenção dos dados.

Através de cálculos estatísticos, é possível se mostrar que ao se efetuar um grande número de medidas, a melhor estimativa para uma grandeza pode ser extraída através do cálculo da média das medidas. Assim, para um conjunto de medidas x_1, x_2, \dots, x_n , temos que o melhor valor é dado por³:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.4)$$

³ O símbolo $\langle \rangle$ em $\langle x \rangle$ denota a média da variável x .

Verificaremos no Capítulo 5 que a incerteza do processo de medição pode ser calculada através dos desvios das medidas em relação ao valor médio. Além disso, verificaremos que a incerteza na média das medidas diminui conforme o número de medidas aumenta, mesmo que cada uma delas tenham a mesma incerteza.

Erros de escala Ao realizarmos medidas utilizando um equipamento analógico, verificamos uma série de algarismos com absoluta cer-teza e estimamos um algarismo adicional. Este algarismo pode acabar sendo subestimado ou superestimado durante a leitura da escala do instrumento. Temos, portanto, uma fonte adicional de erros.

De maneira similar, em equipamentos digitais não sabemos qual seria o próximo dígito caso utilizássemos um equipamento com maior precisão e não sabemos se o equipamento simplesmente descarta os demais dígitos ou os utiliza para realizar arredonda-mentos. Assim a melhor estimativa da medida pode estar contida em um intervalo acima ou abaixo do valor apresentado pelo ins-trumento de medida. Portanto também temos fontes de incerteza relacionadas à medida no caso de um equipamento digital.

Em ambos os casos as incertezas estão ligadas à leitura das medidas e dependem das escalas utilizadas nos instrumentos de medida, dando origem ao que denominamos como *erros de escala*. Esse tipo de erro é o mais relevante para os experimentos realizados nos laboratórios didáticos, e o veremos em mais detalhes na próxima seção.

O erro total de uma medida é então composto pelos três erros descritos acima. Em uma situação qualquer, um deles pode ser muito maior que os demais, determinando o valor do erro. Um exemplo disso é o uso de cronômetros manuais nos quais a menor divisão

⁴ Veremos adiante como determinar o erro de escala.

da escala está em centésimos de segundo. Verificando o erro de escala, teremos um erro de um centésimo de segundo na medida⁴. No entanto, o tempo de reação do usuário do cronômetro é maior do que o erro de escala, levando a um erro aleatório da ordem de 0,2 s. Nesse caso o erro total é dado por 0,21 s, porém como utilizamos somente um algarismo significativo para denotar o erro, temos um erro de 0,2 s, que é o próprio erro aleatório — isto é, o erro aleatório é dominante —.

Quando temos um tipo de erro que é muito maior que os outros, precisamos considerar somente o erro dominante, descartando os demais. Em geral é isso o que acontece com medidas estáticas, como as realizadas por um paquímetro ou por uma régua: nesse caso o erro dominante é o de escala, enquanto o aleatório é desprezível. Como esse é o caso da maioria das medidas realizadas nas experiências de laboratório didático, focaremos nossa atenção predominantemente neste tipo de erro. Devido às dificuldades em tratar os erros sistemáticos, consideraremos que os aparelhos utilizados estejam devidamente calibrados e que não existe nenhum erro sistemático relevante.

3.3 Erros de escala em uma medida direta

Podemos dividir a questão do erro de escala de uma medida direta em dois casos, conforme o tipo de equipamento que estamos utilizando:

Equipamentos analógicos: Se utilizarmos um equipamento analógico — como uma régua milimetrada, por exemplo — podemos verificar medidas menores que 1 mm se estimarmos valores entre uma casa de milímetros e outra. Podemos dizer que o erro associado deve ser claramente menor que 1 mm, pois ao realizar uma medida de — por exemplo — 13,41 cm, um erro de 1 mm poderia levar essa medida ao valores extremos $\ell - \delta\ell = 13,31$ cm e $\ell + \delta\ell = 13,51$ cm: Claramente há um exagero, afinal tais medidas estariam muito próximas das marcas de 13,3 cm e 13,5 cm que conseguimos distinguir perfeitamente em uma régua. Um valor menor para o erro parece uma melhor ideia. Se tomarmos um valor para o erro de 0,5 mm, os valores extremos de ℓ se tornariam mais razoáveis, pois não poderíamos afirmar com tanta certeza de que não se tratam de valores claramente distinguíveis em uma medida: $\ell - \delta\ell = 13,36$ cm e $\ell + \delta\ell = 13,46$ cm.

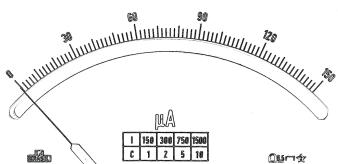


Figura 3.1: Para eliminar erros de leitura devidos à paralaxe, muitos equipamentos utilizam um espelho atrás do ponteiro (região curva abaixo da escala): quando a imagem do ponteiro no espelho está atrás do próprio ponteiro, temos certeza de que estamos vendo o ponteiro exatamente de frente, eliminando este tipo de erro.

Um erro pequeno pode ser cometido na própria leitura dos valores devido à paralaxe (deslocamento aparente entre dois objetos localizados a distâncias diferentes do observador quando este se move). Isso é bastante notável em equipamentos analógicos em que a medida é mostrada por um ponteiro, pois quando o observador se desloca uma pequena distância para um lado ou outro, a posição aparente do ponteiro muda. Para evitar o erro de paralaxe, a medida deve ser feita de forma que o ponteiro seja observado diretamente de frente. Alguns aparelhos têm uma região espelhada atrás do ponteiro para eliminar esse tipo de erro, sendo que a lei-

tura correta é feita quando a imagem do ponteiro fica escondida atrás dele.

Em alguns equipamentos, a menor divisão da escala — o que denominamos como *resolução* do equipamento — pode ser muito grande. Nesse caso, temos mais facilidade em avaliar o algarismo estimado. Podemos então reduzir o valor do erro para $1/3$ ou $1/4$ da medida. No entanto isso não é muito comum, pois em geral os fabricantes dos equipamentos optam por divisões pequenas com o intuito de possibilitar a realização de medidas precisas. Nos equipamentos que utilizaremos no laboratório didático, as divisões são em geral pequenas e por isso adotaremos sempre que o erro é equivalente à metade da menor divisão da escala.

Equipamentos digitais ou dotados de escala auxiliar: Se, por outro lado, o equipamento for digital podemos realizar uma medida como $M = 14,2\text{ g}$, por exemplo. Se utilizássemos um equipamento mais preciso, talvez essa medida pudesse variar entre $14,15\text{ g}$ até $14,25\text{ g}$ (incluindo o primeiro valor, porém não incluindo o último) devido a arredondamentos realizados pelo equipamento em virtude do número reduzido de casas decimais. Outra possibilidade é a de que o equipamento simplesmente descarte dígitos menores que décimos de grama, o que permitiria que as medidas variassem entre $14,20\text{ g}$ e $14,29\text{ g}$. Poderíamos escolher para o erro do equipamento o valor de metade da menor divisão da escala abaixo do valor mostrado e de uma divisão acima. Por simplicidade, no entanto, assumimos que no caso de equipamentos digitais o erro é equivalente à menor divisão da escala tanto acima quanto abaixo do valor indicado.

Se o equipamento é dotado de uma escala auxiliar, verificamos que ao realizar a leitura em geral percebemos que duas ou três marcas parecem alinhadas com as marcas da escala principal. Se tormarmos a do meio, por exemplo, poderíamos considerar que a medida pode variar dentro do intervalo compreendido pelas marcas à esquerda e à direita. Logo, também adotamos para o erro a menor divisão da escala. Como tanto os equipamentos digitais, quanto os dotados de escala auxiliar possuem erros dados pela mesma regra, equipamentos desses dois tipos são comumente referidos coletivamente como *não-analógicos*.

3.4 Erros propagados

Se precisamos calcular a área de uma folha, é mais fácil realizar um cálculo através do produto das medidas de ambos os lados, que comparar com um “padrão de área”. Se temos um erro nas medidas das laterais, no entanto, deve haver um erro associado à medida da área.

Na Figura 3.3 mostramos o cálculo da área a partir de duas medidas ℓ_1 e ℓ_2 . Como cada uma dessas medidas possui um erro associado, denotados por $\delta\ell_1$ e $\delta\ell_2$, respectivamente, devemos calcular os valores máximos e mínimos da área:

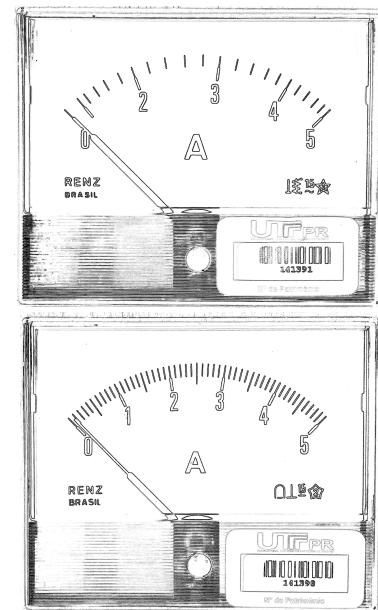


Figura 3.2: Dois equipamentos capazes de realizar medidas em um intervalo de zero a cinco ampéres. Note que a menor divisão da escala é menor no segundo caso.

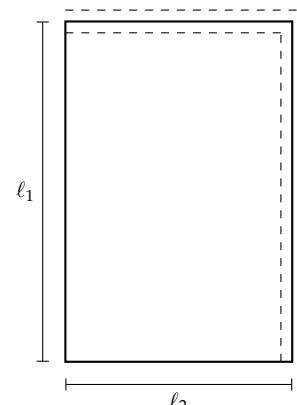


Figura 3.3: Erro no cálculo da área de um retângulo.

$$A_- = (\ell_1 - \delta\ell_1)(\ell_2 - \delta\ell_2) \quad (3.5)$$

$$= \ell_1\ell_2 - (\ell_1\delta\ell_2 + \ell_2\delta\ell_1 - \delta\ell_1\delta\ell_2) \quad (3.6)$$

$$A_+ = (\ell_1 + \delta\ell_1)(\ell_2 + \delta\ell_2) \quad (3.7)$$

$$= \ell_1\ell_2 + (\ell_1\delta\ell_2 + \ell_2\delta\ell_1 + \delta\ell_1\delta\ell_2). \quad (3.8)$$

Se desprezarmos o produto $\delta\ell_1\delta\ell_2$, que deve ser muito pequeno, já que os erros são — em geral — pequenas frações das medidas, podemos escrever as expressões acima como uma só:

$$A = \ell_1\ell_2 \pm (\ell_1\delta\ell_2 + \ell_2\delta\ell_1). \quad (3.9)$$

Temos então uma expressão para calcular o erro associado à área da folha.

A expressão acima, não está limitada ao cálculo de uma área, mas serve para qualquer multiplicação de dois números. Veremos adiante que podemos determinar um método geral para a obtenção do erro para qualquer expressão. A partir de tal método, é possível deduzir os resultados abaixo

$$(x \pm \delta x) + (y \pm \delta y) = (x + y) \pm (\delta x + \delta y) \quad (3.10a)$$

$$(x \pm \delta x) - (y \pm \delta y) = (x - y) \pm (\delta x + \delta y) \quad (3.10b)$$

$$(x \pm \delta x) \cdot (y \pm \delta y) = (x \cdot y) \pm (|x| \cdot \delta y + |y| \cdot \delta x) \quad (3.10c)$$

$$(x \pm \delta x) \div (y \pm \delta y) = (x \div y) \pm \frac{|x| \cdot \delta y + |y| \cdot \delta x}{y^2} \quad (3.10d)$$

$$(x \pm \delta x)^n = x^n \pm n \cdot x^{n-1} \cdot \delta x \quad (3.10e)$$

$$\ln(x \pm \delta x) = \ln x \pm \frac{\delta x}{x} \quad (3.10f)$$

$$\log(x \pm \delta x) = \log x \pm \frac{0,4343 \cdot \delta x}{x}. \quad (3.10g)$$

É importante observar, no entanto, que apesar de podermos calcular o erro propagado em uma operação complexa como uma sucessão de operações simples — como as do conjunto de equações acima — em geral esse erro é maior do que aquele que seria obtido se deduzíssemos a expressão para o erro a partir da expressão geral para o erro propagado.

Exemplos de cálculo de erro propagado

Vamos fazer agora alguns exemplos de operações envolvendo medidas. Para isso, vamos tomar duas medidas ℓ_1 e ℓ_2 , dadas por

$$\ell_1 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.11)$$

$$\ell_2 = (11,14 \pm 0,05) \text{ cm}. \quad (3.12)$$

No caso de termos uma soma de tais medidas, temos — usando a Equação (3.10a) —

$$\ell_1 + \ell_2 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} + (11,14 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.13)$$

$$= ([13,24 + 11,14] \pm [0,05 + 0,05]) \text{ cm} \quad (3.14)$$

$$= (24,30 \pm 0,10) \text{ cm}. \quad (3.15)$$

De maneira similar, podemos calcular a diferença entre tais medidas através da Equação (3.10b):

$$\ell_1 - \ell_2 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} - (11,14 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.16)$$

$$= ([13,24 - 11,14] \pm [0,05 + 0,05]) \text{ cm} \quad (3.17)$$

$$= (13,24 \pm 0,10) \text{ cm}. \quad (3.18)$$

Note que apesar de estarmos realizando uma subtração, os erros são *somados*.

Para o cálculo de um produto, a determinação do erro utilizando a Equação (3.10c) é um pouco mais elaborada que no caso da soma ou subtração:

$$\ell_1 \ell_2 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} \times (11,14 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.19)$$

$$= ([13,24 \cdot 11,14] \pm [|13,24| \cdot 0,05 + |11,14| \cdot 0,05]) \text{ cm}^2 \quad (3.20)$$

$$= (147,493\,6 \pm 1,219) \text{ cm}^2 \quad (3.21)$$

$$= (147,5 \pm 1,2) \text{ cm}^2. \quad (3.22)$$

Veja que no cálculo acima realizamos todas as operações com toda a precisão disponível — isto é, utilizamos todos os dígitos da calculadora —, mas como último passo descartamos os dígitos cuja ordem de grandeza é menor que a do último algarismo significativo. Esse procedimento deve ser adotado em todos os cálculos envolvendo medidas.

O cálculo do erro na operação de divisão através da Equação (3.10d) é similar ao caso da multiplicação, porém envolve um passo a mais devido à divisão do erro pelo denominador:

$$\ell_1 \div \ell_2 = (13,24 \pm 0,05) \text{ cm} \div (11,14 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (3.23)$$

$$= \left([13,24 \div 11,14] \pm \left[\frac{|13,24| \cdot 0,05 + |11,14| \cdot 0,05}{11,14^2} \right] \right) \quad (3.24)$$

$$= (1,188\,509\,874 \pm 0,009\,822\,755) \quad (3.25)$$

$$= (1,189 \pm 0,010). \quad (3.26)$$

Para a potencia, temos no caso geral a Expressão (3.10e). Tal equação deve ser particularizada para a potência em questão:

$$\ell_1^2 = [(13,24 \pm 0,05) \text{ cm}]^2 \quad (3.27)$$

$$= (13,24^2 \pm [2 \cdot 13,24^{(2-1)} \cdot 0,05]) \text{ cm}^2 \quad (3.28)$$

$$= (175,297\,6 \pm 1,324) \text{ cm}^2 \quad (3.29)$$

$$= (175,3 \pm 1,3) \text{ cm}^2. \quad (3.30)$$

Também podemos utilizar a Expressão (3.10e) para o cálculo de potências negativas. Para o caso $n = -1$ em especial, temos

$$\ell_1^{-1} = [(13,24 \pm 0,05) \text{ cm}]^{(-1)} \quad (3.31)$$

$$= (13,24^{(-1)} \pm [(-1) \cdot 13,24^{((-1)-1)} \cdot 0,05]) \text{ cm}^{-1} \quad (3.32)$$

$$= (0,075\,528\,701 \pm [13,24^{(-2)} \cdot 0,05]) \text{ cm}^{-1} \quad (3.33)$$

$$= (0,075\,528\,701 \pm 0,000\,285\,229) \text{ cm}^{-1} \quad (3.34)$$

$$= (0,075\,53 \pm 0,000\,3) \text{ cm}^{-1} \quad (3.35)$$

$$= (7,553 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}. \quad (3.36)$$

As operações exemplificadas acima são as que aparecem com maior frequência em cálculos. Muitas vezes, no entanto, será necessário aplicar mais que uma fórmula. Se, por exemplo, precisamos determinar o resultado de uma expressão do tipo

$$R = \frac{\ell_1(\ell_2 - \ell_3)}{\ell_4}, \quad (3.37)$$

devemos separar o cálculo em etapas, calculando o erro em cada uma delas:

- Primeiro calculamos a diferença $d = \ell_2 - \ell_3$;
- Após isso, calculamos o produto $p = \ell_1 \cdot d$;
- Finalmente, determinamos razão $R = p/\ell_4$.

3.4.1 Constantes e erros propagados

No caso de termos operações envolvendo constantes como π , ou qualquer outro valor conhecido absolutamente (como 2, 3, 4, etc.) — isto é, que não são medidas —, podemos simplesmente efetuar a operação com a constante e o erro da mesma forma que com a medida. Por exemplo

$$r = (4,0 \pm 0,5) \text{ mm} \quad (3.38)$$

$$p = 2\pi r \quad (3.39)$$

$$= 2\pi(4,0 \pm 0,5) \text{ mm} \quad (3.40)$$

$$= (2\pi 4,0 \pm 2\pi 0,5) \text{ mm} \quad (3.41)$$

$$= (25 \pm 3) \text{ mm} \quad (3.42)$$

sempre respeitando o número de algarismos significativos e os critérios de arredondamento.

3.5 Erros e algarismos significativos

Verificamos que as medidas fornecidas por instrumentos são expressas por um conjunto de algarismos significativos e que algarismos além deles são mera especulação. Também utilizamos regras gerais para determinar o número de algarismos significativos de uma medida indireta com base no número de algarismos significativos das medidas diretas. Agora que conhecemos o erro, podemos entender a origem dos algarismos significativos de uma maneira simples: eles são os algarismos cuja ordem de grandeza é maior ou igual àquela do erro.

Para verificar como funciona esse processo, vejamos o seguinte conjunto de medidas:

$$v_0 = (10,345 6 \pm 0,01) \text{ m/s} \quad (3.43)$$

$$a = (2,065 8 \pm 0,05) \text{ m/s}^2 \quad (3.44)$$

$$t = (3,000 \pm 0,001) \text{ s.} \quad (3.45)$$

Utilizando essas informações e as fórmulas para o erro propagado, obtemos — utilizando a relação $v = v_0 + at$ — o seguinte resultado:

$$v = (16,543 \pm 0,162\,065\,8) \text{ m/s.} \quad (3.46)$$

O erro é sempre expresso com um ou dois algarismos significativos⁵. Nesse caso, o erro da medida acima pode ser expresso como $\delta v = 0,16 \text{ m/s}$. Vemos também que a medida tem algarismos cuja ordem de grandeza é menor que o erro e são, portanto, sem significado. Podemos reduzir nossa medida para a velocidade a

$$v = (16,54 \pm 0,16) \text{ m/s.} \quad (3.47)$$

Analizando o erro das medidas mostradas nas Equações (3.43) a (3.45), percebemos que existem vários algarismos sem significado. Retirando-os, obtemos

$$v_0 = (10,35 \pm 0,01) \text{ m/s} \quad (3.48)$$

$$a = (2,07 \pm 0,05) \text{ m/s}^2 \quad (3.49)$$

$$t = (3,000 \pm 0,001) \text{ s.} \quad (3.50)$$

Verificamos agora que a medida para a aceleração a tem somente três algarismos significativos. Segundo a regra sobre o número de algarismos significativos para o resultado de uma multiplicação, devemos manter então somente três algarismos. Ao somarmos com o valor de v_0 , a regra nos diz para mantermos duas casas após a vírgula. De fato, isto nos dá um resultado que coincide com aquele obtido através da análise do erro propagado (Equação (3.47)).

3.6 Incerteza fracional e percentual

Se realizamos uma medição com um instrumento e obtemos $\ell_1 = (15,3 \pm 0,5) \text{ cm}$, o erro é de aproximadamente 3,3%. Se realizarmos outra medição com o mesmo instrumento e obtivermos $\ell_2 = (3,4 \pm 0,5) \text{ cm}$, teremos um erro de aproximadamente 14,7%. Claramente no segundo caso temos uma medida mais incerta que no primeiro, o que acarretará em consequências para o cálculo de medidas indiretas.

Para calcularmos o erro como uma fração da medida, basta o dividirmos pelo valor da medida:

$$E_f = \frac{\delta x}{x}. \quad (3.51)$$

Como x e δx possuem a mesma unidade, o erro fracional é adimensional. O erro percentual pode ser calculado multiplicando-se o erro fracional por 100:

$$E\% = 100 \cdot E_f. \quad (3.52)$$

É comum encontrar dispositivos eletrônicos cujo erro é dado como um número percentual. Por exemplo, podemos ter um resistor cuja resistência R é de 500Ω , com erro de 5 %. Isso significa que a medida da resistência é $R = (500 \pm 25) \Omega$, ou melhor, $R = (5,0 \pm 0,3) \cdot 10^2 \Omega$.

⁵ Lembre-se que utilizamos dois se o primeiro algarismo significativo do erro, isto é, o primeiro dígito diferente de zero, for 1; nos demais casos utilizamos somente um algarismo significativo.

Outro uso comum do erro percentual é ao se declarar a precisão de um instrumento de medida. Se um voltímetro declara sua precisão como 1 %, isso significa que em uma medida $V_1 = 13,45\text{ V}$ temos um erro $\delta V_1 = 0,13\text{ V}$. Já em uma medida $V_2 = 156,35\text{ V}$, temos um erro $\delta V_2 = 1,6\text{ V}$. Temos, portanto, um caso em que o erro da medida — também chamado de *erro absoluto* — varia, mas o erro percentual é constante, indicando que o instrumento é igualmente adequado (ou inadequado, dependendo de sua necessidade de precisão) para uma ampla faixa de valores de medida.

Os erros fracional e percentual nos indicam que sempre que desejarmos conhecer uma medida calculada a partir de outras, devemos procurar utilizar medidas diretas com um grande número de algarismos significativos, de forma a minimizar o erro percentual. Por exemplo, se calcularmos o valor da aceleração da gravidade através de

$$g = \frac{2\Delta x}{t^2}, \quad (3.53)$$

a partir das medidas

$$t_1 = (0,15 \pm 0,01) \text{ s} \quad (3.54)$$

$$\Delta x_1 = (0,11 \pm 0,02) \text{ m} \quad (3.55)$$

e

$$t_2 = (1,32 \pm 0,01) \text{ s} \quad (3.56)$$

$$\Delta x_2 = (8,54 \pm 0,02) \text{ m}, \quad (3.57)$$

obteremos os valores

$$g_1 = (9,8 \pm 2) \text{ m/s}^2 \quad (3.58)$$

$$g_2 = (9,80 \pm 0,1) \text{ m/s}^2. \quad (3.59)$$

Claramente as medidas diretas têm o mesmo erro absoluto, no entanto erros fracionais/percentuais diferentes. Isso se reflete na incerteza da medida indireta, onde no segundo caso obtemos um erro muito menor, devido ao menor erro fracional/percentual.

3.6.1 Erro percentual em relação a um valor de referência

Em experiências didáticas, é muito comum que estejamos interessados em determinar o valor de uma constante física cujo valor já é conhecido experimentalmente com grande precisão. Nesses casos, é interessante obter um valor percentual de diferença entre o valor obtido e o valor de referência. Tal valor também é conhecido como erro percentual, e pode ser calculado através da expressão

$$E_{\%} = \left| \frac{x - x_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \right| \cdot 100, \quad (3.60)$$

onde x representa o valor que obtemos experimentalmente e x_{ref} representa o valor de referência.

3.7 Expressão geral para o cálculo do erro propagado

Apesar de termos conseguido calcular o erro propagado de uma maneira relativamente simples para o caso do produto de duas medidas, precisamos de um método mais robusto, que possa ser aplicado a *qualquer tipo de função*. Se tivermos uma medida q , dada por $q = f(x, y, z, \dots, \xi, \dots)$, onde $x, y, z, \dots, \xi, \dots$ representam medidas diretas através das quais calculamos a medida indireta q , podemos calcular uma variação em q em relação a uma variação em uma das medidas — na medida ξ , por exemplo — através de uma derivada:

$$\frac{dq}{d\xi} = \frac{df(x, y, z, \dots, \xi, \dots)}{d\xi}. \quad (3.61)$$

Podemos então escrever a variação dq como

$$dq = \left(\frac{df(x, y, z, \dots, \xi, \dots)}{d\xi} \right) d\xi. \quad (3.62)$$

Assumindo que as variáveis x, y, z, \dots, ξ são todas independentes, podemos escrever a expressão acima como

$$dq = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots, \xi)}{\partial \xi} \right) d\xi. \quad (3.63)$$

Agora podemos identificar as variações $d\xi$ e dq na expressão acima com próprios erros nas medidas. Logo, a contribuição para o erro em q devido ao erro $\delta\xi$ é dada por

$$\delta q = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots, \xi)}{\partial \xi} \right) \delta \xi. \quad (3.64)$$

Cada uma das medidas dá origem a um termo análogo à expressão acima. Somando todas essas contribuições, obtemos

$$\delta q = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \delta z + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| \delta \xi, \quad (3.65)$$

onde tomamos o valor absoluto da derivada parcial para eliminar possíveis “compensações” devido a sinais diferentes para cada termo.

A partir da equação acima, podemos calcular o erro para qualquer função que nos dê uma medida indireta. Se, por exemplo, considerarmos a área de um retângulo

$$A = f(\ell_1, \ell_2) = \ell_1 \ell_2, \quad (3.66)$$

temos:

$$\delta A = \left| \frac{\partial(\ell_1 \ell_2)}{\partial \ell_1} \right| \delta \ell_1 + \left| \frac{\partial(\ell_1 \ell_2)}{\partial \ell_2} \right| \delta \ell_2 \quad (3.67)$$

$$= |\ell_2| \delta \ell_1 + |\ell_1| \delta \ell_2, \quad (3.68)$$

que é exatamente a expressão que encontramos quando analisamos os valores máximo e mínimo para a área do retângulo.

4 Regressão Linear

Apesar de podermos verificar previsões teóricas pela simples comparação com os dados experimentais obtidos (assumindo que eles sejam confiáveis), devido à dispersão dos dados não temos um bom método para extrair informações a partir das medidas. Veremos que para isso precisamos determinar a linha de tendência dos dados. A partir das informações para essa linha, conseguiremos extrair informações acerca de parâmetros físicos do sistema.

4.1 Linhas de Tendência

Quando realizamos um experimento, procuramos relacionar uma variável dependente a uma variável independente. Para visualizarmos a relação entre as duas, é interessante fazer uma representação gráfica da variável dependente em função dos valores da variável independente. Podemos assim verificar uma tendência geral dos pontos, que pode seguir padrões retilíneos, parabólicos, etc. Retomando a citação ao texto de Johann H. Lambert (e a extendendo), temos¹

Se as observações experimentais fossem completamente precisas, essas ordenadas resultariam em um número de pontos através dos quais uma curva ou uma reta deveriam ser traçadas. No entanto, esse não é o caso, a curva/reta desvia pouco ou muito dos pontos observados. Portanto, ela deve ser traçada de maneira que passe tão próxima quanto possível das posições verdadeiras e vá, como se fosse, pelo meio dos pontos em questão.

Muitas vezes tal padrão é muito claro, pois os pontos tem uma dispersão baixa. Outras vezes a dispersão é razoavelmente alta e fica difícil verificar tal padrão.

Mesmo em casos em que podemos verificar um padrão aparente ao fazer um gráfico, determinar a forma mais adequada para a *linha de tendência* que melhor descreve os pontos experimentais — ou mesmo afirmar que tais pontos seguem este padrão — pode ser complicado. Se, por exemplo, fizermos uma série de medidas que seguem um padrão parabólico, mas com medidas que se restringem a um intervalo pequeno da variável independente, o gráfico terá a aparência de uma reta (veja as Figuras 4.1 e 4.2).

Determinar o padrão seguido pelos pontos, é, portanto, uma tarefa que não pode ser feita a partir de um gráfico: o mais adequado é termos uma *teoria acerca do fenômeno físico* que descreva qual é o padrão que os pontos devem seguir, e usar um gráfico para determinar se tal descrição é coerente. Verificaremos posteriormente como determinar se uma teoria é plausível ou não, por hora vamos nos preocupar em determinar a *melhor reta* que ajusta um conjunto de dados.

¹Johann Heinrich Lambert. "Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung". Em: Edward R. Tufte. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001, p. 45. ISBN: 0-9613921-4-2

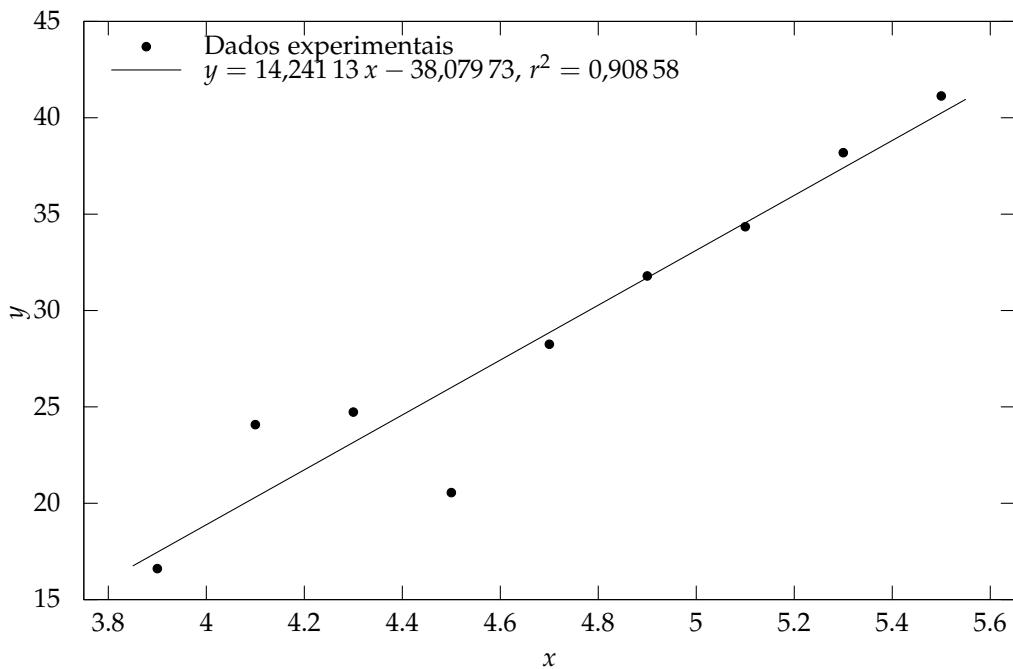


Figura 4.1: Gráfico de um conjunto de pontos que aparentemente seguem uma tendência linear. Veja também a Figura 4.2.

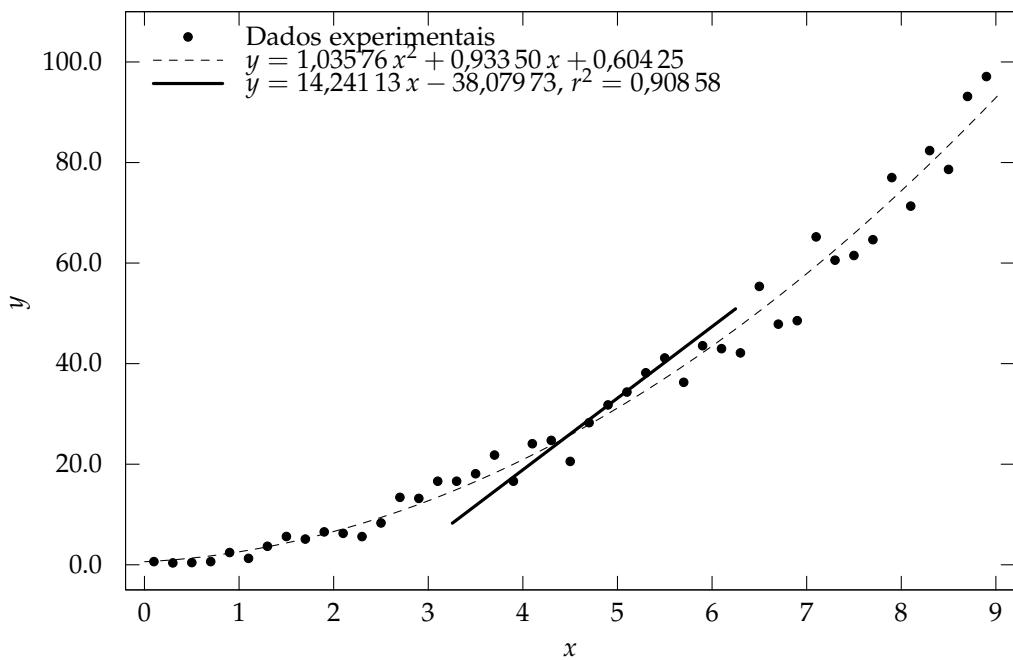


Figura 4.2: Gráfico do mesmo conjunto de pontos da Figura 4.1, juntamente com diversos outros pertencentes ao mesmo conjunto de dados. Verifique que a tendência linear aparente no primeiro gráfico já não é mais razoável. De fato, os dados correspondem a uma distribuição em torno de uma parábola.

Existem outros tipos de regressão, como a logarítmica ou exponencial, ou mesmo processos capazes de calcular os coeficientes para uma equação com uma forma qualquer. No entanto, nos restringiremos ao caso linear devido ao fato de que a maioria das calculadoras científicas é capaz de realizar tal processo. Além disso, uma vez conhecida a equação da reta, adicioná-la ao gráfico dos dados experimentais é uma questão de calcular dois pontos e traçar uma reta com uma régua.

4.2 Regressão Linear

Sempre que tivermos um conjunto de dados, podemos calcular a melhor reta que o representa através de um processo de *regressão linear*. Este processo consiste em aplicar um método matemático que tome os dados experimentais e calcule os coeficientes linear A e angular B para a equação da reta:

$$y = A + Bx. \quad (4.1)$$

A dimensão do coeficiente linear é a mesma que a da variável dependente y — ou seja, é a mesma que do eixo y em um gráfico $y \times x$ —, enquanto a dimensão do coeficiente angular é a mesma que a da razão entre a dimensão da variável dependente pela dimensão da variável independente — isto é, é a razão entre a dimensão do eixo y e a dimensão do eixo x em um gráfico $y \times x$.

O método utilizado para obter tais coeficientes é o de *mínimos quadrados*. Nele, são encontrados os coeficientes de forma a minimizar o quadrado da distância entre os pontos experimentais e a “melhor reta”. É possível mostrar², utilizando técnicas de cálculo, que para minimizarmos a soma do quadrado das distâncias entre os pontos e a melhor reta, os coeficientes linear e angular são dados por

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.2)$$

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (4.3)$$

onde as somas se dão sobre todas as medidas x_i e y_i , N representa o número de medidas, e as médias das medidas para as variáveis x e y são representadas por $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$, respectivamente. É importante lembrar que as relações acima são válidas somente para o caso em que os erros associados às medidas de x e y são constantes, isto é, a incerteza δx para as medidas de x são todas iguais, assim como a incerteza δy para as medidas de y . Após fazer a regressão, podemos utilizar os coeficientes para traçar as *retas de tendência* nos gráficos³.

Ao fazermos o processo de regressão linear, a calculadora também calculará o *coeficiente de correlação linear* r , dado por

$$r = \frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{\sqrt{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2 \sum (y_i - \langle y \rangle)^2}}. \quad (4.4)$$

Tal coeficiente pode ser interpretado como um “índice de confiança” e geralmente é calculado ao quadrado, pois seus valores podem variar

² John R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis*. 2nd Edition. University Science Books, 1997. ISBN: 0-935702-75-X

³ Quando tais retas forem calculadas, adicione as equações resultantes aos gráficos.

x	y_1	y_2	y_3
0,714	14,577	0,678	1,235
2,693	20,696	8,806	-0,153
4,389	25,226	20,988	-0,657
4,960	27,449	28,474	-0,592
6,245	30,242	40,030	0,961
7,277	33,378	55,780	1,149
7,579	34,195	64,904	1,635
7,719	35,715	64,394	1,476
7,912	35,011	66,412	1,739
8,280	37,529	74,632	1,249
9,034	40,590	87,455	0,200
9,442	39,156	94,785	0,146
10,306	43,238	113,030	-0,231
10,572	42,406	111,970	-0,575
11,177	44,796	129,481	0,121
15,335	57,611	235,805	0,446
17,023	63,832	294,533	-0,780
18,926	68,063	372,048	0,500
20,608	74,408	426,581	1,118
20,876	75,083	456,391	1,065
21,095	75,248	452,660	1,085
22,225	77,243	507,765	0,271
22,407	81,058	509,275	-0,230
22,469	78,821	521,414	0,394
23,077	80,714	554,175	-0,198
26,421	91,433	700,788	1,869
26,863	91,777	732,601	1,724
27,360	93,291	773,226	1,452

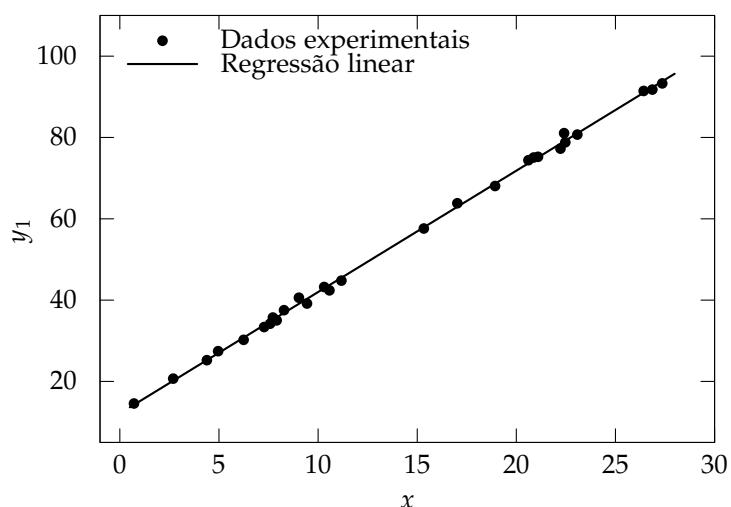
Tabela 4.1: Dados de três variáveis (y_1 , y_2 e y_3) em função de uma quarta (x).

entre -1 e 1 . Quanto mais próximo r for de ± 1 , menor é a dispersão dos pontos em relação ao comportamento retilíneo, ou seja, maiores são as chances de que o fenômeno estudado e que deu origem aos dados siga uma relação linear. Este número geralmente se parece com algo como $r^2 = 0,999\,98$, $r^2 = 0,997$, $r^2 = 0,990$, etc., quando os dados são altamente lineares e relativamente abundantes. Se a dispersão em relação ao comportamento linear for grande e forem poucos os pontos, r^2 pode cair para $0,7$, ou valores menores.

Um aspecto importante a ser considerado é se os dados realmente seguem uma tendência linear: uma distribuição qualquer de pontos, mesmo que visivelmente não linear, pode ser descrita por uma melhor reta. Caso a tendência não seja linear, o coeficiente r^2 resultará um valor baixo. Nas Figuras 4.3 a 4.5 mostramos três conjuntos de dados distintos juntamente com suas respectivas melhores retas e coeficientes de dispersão r^2 . Os dados foram gerados utilizando as expressões $y_1 = A + B(x + r_1) + r_2$, $y_2 = A(r_1 + x)^2 + B + r_2$ e $y_3 = A \operatorname{sen}(x + r_1) + B + r_2$, onde r_1 e r_2 são números aleatórios entre zero e um, enquanto A e B representam constantes arbitrárias — veja a Tabela 4.2 —. Verificamos que nos três casos podemos calcular uma melhor reta, ainda que para y_2 e y_3 o comportamento não seja linear.

Dentre as três figuras, a Figura 4.4 se destaca. Nesse caso, temos um comportamento não linear, porém verificamos que o valor do coeficiente r^2 é relativamente alto. Ocorre que o comportamento dos dados sofre uma distorção relativamente pequena — apesar de visivelmente não linear — em relação a um comportamento linear e por isso obtemos um valor grande para o coeficiente de dispersão. Muitas vezes um comportamento verdadeiramente linear pode apresentar uma distorção pequena como esta, porém devido a flutuações aleatórias, e não devido à não-lineariedade. A distinção entre essas duas possibilidades pode ser feita realizando mais medidas: Se o comportamento for verdadeiramente linear, o valor de r^2 tenderá a crescer, enquanto no caso de termos um comportamento não-linear, o valor desse coeficiente deve permanecer constante, ou diminuir.

Figura 4.3: Conjunto de dados 1. A reta da regressão linear é dada por $y(x) = 2,984\,480\,401x + 12,140\,462\,64$, $r^2 = 0,998\,901\,256$.



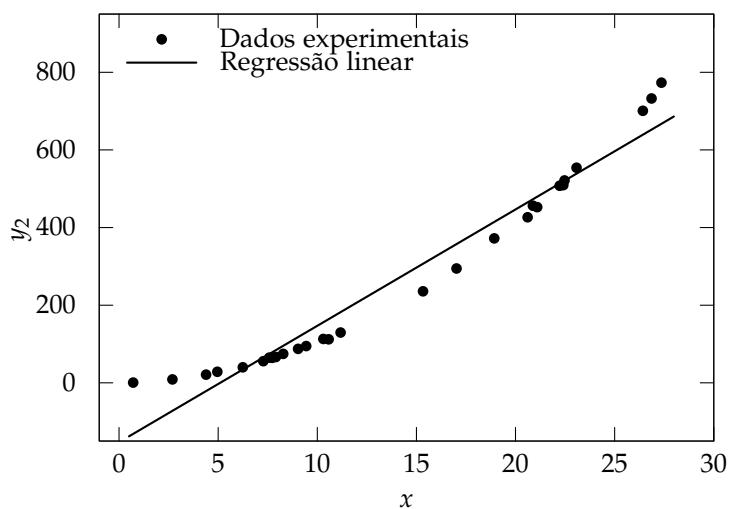


Figura 4.4: Conjunto de dados 2. A reta da regressão linear é dada por $y(x) = 29,978\,230\,68x - 152,924\,429$, $r^2 = 0,956\,577\,278$.

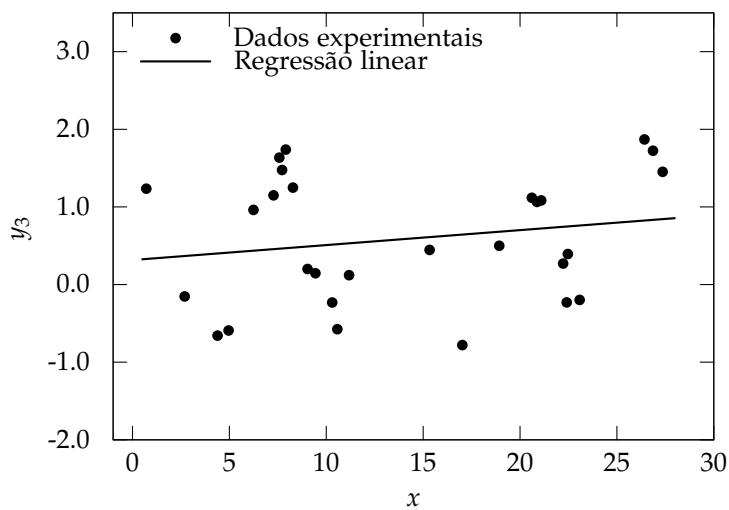


Figura 4.5: Conjunto de dados 3. A reta da regressão linear é dada por $y(x) = 0,019\,262\,681x + 0,316\,038\,383$, $r^2 = 0,035\,985\,674$.

Exemplo: Cálculo dos coeficientes da regressão linear

Para determinarmos os valores das constantes A , B , e do coeficiente r^2 é necessário calcularmos uma série de valores intermediários. Na Tabela 4.2 (página 49) apresentamos tais valores intermediários para o caso do cálculo dos coeficientes da regressão linear para a variável y_1 discutida acima. Através desses valores, obtemos para o coeficiente linear

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.5)$$

$$= \frac{7\,295,757 \cdot 1\,512,768 - 392,984 \cdot 26\,545,051}{28 \cdot 7\,295,757 - 392,984^2} \quad (4.6)$$

$$= 12,140\,462\,64. \quad (4.7)$$

Para o coeficiente angular, obtemos

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4.8)$$

$$= \frac{28 \cdot 26\,545,051 - 392,984 \cdot 1\,512,786}{28 \cdot 7\,295,757 - 392,984^2} \quad (4.9)$$

$$= 2,984\,480\,401. \quad (4.10)$$

Finalmente, para o coeficiente r obtemos

$$r = \frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{\sqrt{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2 \sum (y_i - \langle y \rangle)^2}} \quad (4.11)$$

$$= \frac{5\,312,883}{\sqrt{1\,780,170 \cdot 15873,637}} \quad (4.12)$$

$$= 0,999\,450\,477, \quad (4.13)$$

o que resulta em um r^2 dado por

$$r^2 = 0,998\,901\,256. \quad (4.14)$$

Note que o cálculo é bastante trabalhoso se for realizado manualmente. Felizmente, esse tipo de análise — a regressão linear — é algo que é implementado na maioria dos programas de computador que permitem a análise de dados. Mesmo em planilhas de cálculo existem funções que permitem calcular as constantes A e B , e o coeficiente r^2 facilmente. Funções para a determinação de tais valores também estão disponíveis em calculadoras científicas. Na seção seguinte verificaremos como proceder para inserir os dados experimentais e obter os coeficientes da regressão linear para alguns modelos comuns de calculadoras.

i	x_i	$y_{1,i}$	x_i^2	$x_i y_i$	$x_i - \langle x \rangle$	$y_i - \langle y \rangle$	$(x_i - \langle x \rangle)^2$	$(y_i - \langle y \rangle)^2$	$(x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)$
1	0,714	14,577	0,510	10,408	-13,321	-39,451	177,453	1 556,387	525,533
2	2,693	20,696	7,252	55,734	-11,342	-33,332	128,644	1 111,027	378,057
3	4,389	25,226	19,263	110,717	-9,646	-28,802	93,048	829,559	277,828
4	4,960	27,449	24,602	136,147	-9,075	-26,579	82,358	706,447	241,208
5	6,245	30,242	39,000	188,861	-7,790	-23,786	60,686	565,777	185,296
6	7,277	33,378	52,955	242,892	-6,758	-20,650	45,672	426,425	139,556
7	7,579	34,195	57,441	259,164	-6,456	-19,833	41,682	393,351	128,045
8	7,719	35,715	59,583	275,684	-6,316	-18,313	39,894	335,369	115,667
9	7,912	35,011	62,600	277,007	-6,123	-19,017	37,493	361,649	116,444
10	8,280	37,529	68,558	310,740	-5,755	-16,499	33,122	272,219	94,955
11	9,034	40,590	81,613	366,690	-5,001	-13,438	25,011 4	180,582	67,206
12	9,442	39,156	89,151	369,711	-4,593	-14,872	21,097	221,179	68,310
13	10,306	43,238	106,214	445,611	-3,729	-10,790	13,907	116,426	40,238
14	10,572	42,406	111,767	448,316	-3,463	-11,622	11,993	135,073	40,249
15	11,177	44,796	124,925	500,685	-2,858	-9,232	8,169	85,231	26,387
16	15,335	57,611	235,162	883,465	1,300	3,583	1,690	12,837	4,657
17	17,023	63,832	289,783	1 086,612	2,988	9,804	8,927	96,117	29,293
18	18,926	68,063	358,193	1 288,160	4,891	14,035	23,920	196,979	68,643
19	20,608	74,408	424,690	1 533,400	6,573	20,380	43,202	415,341	133,954
20	20,876	75,083	435,807	1 567,433	6,841	21,055	46,797	443,310	144,033
21	21,095	75,248	444,999	1 587,357	7,060	21,220	49,842	450,285	149,809
22	22,225	77,243	493,951	1 716,726	8,190	23,215	67,074	538,933	190,126
23	22,407	81,058	502,074	1 816,267	8,372	27,030	70,088	730,617	226,290
24	22,469	78,821	504,856	1 771,029	8,434	24,793	71,130	614,689	209,100
25	23,077	80,714	532,548	1 862,637	9,042	26,686	81,755	712,139	241,290
26	26,421	91,433	698,069	2 415,751	12,386	37,405	153,409	1 399,129	463,292
27	26,863	91,777	721,621	2 465,406	12,828	37,749	164,554	1 424,982	484,237
28	27,360	93,291	748,570	2 552,442	13,325	39,263	177,552	1 541,578	523,172
Σ	392,984	1 512,786	7 295,757	26 545,051	0	0	1 780,170	15 873,637	5 312,883
$\langle \cdot \rangle$	14,035	54,028							

Tabela 4.2: Tabela de cálculos para a determinação das constantes A e B , e do coeficiente r^2 . As linhas marcadas com Σ e $\langle \cdot \rangle$ denotam as somas e as médias dos valores apresentados para cada variável, respectivamente. Os valores apresentados na tabela foram limitados a três casas após a vírgula, porém os cálculos foram feitos com toda a precisão disponível.

4.2.1 Regressão linear utilizando uma calculadora

Geralmente calculadoras científicas são capazes de realizar regressões lineares e diversas outras, facilitando a obtenção da melhor reta. Apresentaremos abaixo como realizar tal cálculo em alguns modelos.

CASIO® fx-82TL

- Pressione o botão **[MODE]**. As informações abaixo aparecerão no visor:

COMP	SD	REG
1	2	3

- Pressione o botão **[3]**. Teremos no visor

Lin	Log	Exp	→
1	2	3	

Ao pressionarmos o botão **[1]**, a calculadora estará no modo de regressão linear, indicado por **REG** no visor.

- Podemos agora digitar o valor da variável independente x_1 , correspondente ao primeiro ponto, seguido do botão **[,]**. Digitamos após a vírgula o valor da variável dependente y_1 correspondente ao primeiro ponto. Após isso, basta pressionar **[M+]** para inserir o par de valores na memória da calculadora. Repetiremos esse processo para cada par x_i, y_i .
- Quando todos os valores tiverem sido inseridos, podemos recuperar os valores de A , B e r pressionando **[SHIFT]** seguido de
 - tecla **[7]** e então **[=]** para recuperar o valor de A ;
 - tecla **[8]** e então **[=]** para recuperar o valor de B ;
 - tecla **[9]** e então **[=]** para recuperar o valor de r .

Para recuperar outro valor, não é necessário inserir os pontos novamente, basta pressionar mais uma vez **[SHIFT]** seguido da tecla correspondente à variável que desejamos.

- Para realizar uma nova regressão, devemos antes apagar os dados da regressão anterior. Fazemos isso pressionando **[SHIFT]** e então **[AC/ON]** (função **Scl**). Na tela aparecerá **Scl**. Pressione **[=]** para confirmar a exclusão dos dados.

CASIO® fx-82MS

- Pressione o botão **[MODE]**. As informações abaixo aparecerão no visor:

COMP	SD	REG
1	2	3

- Pressione o botão **[3]**. Teremos no visor

Lin	Log	Exp	→
1	2	3	

Ao pressionarmos o botão **[1]**, a calculadora estará no modo de regressão linear, indicado por REG no visor.

- Podemos agora digitar o valor da variável independente x_1 , correspondente ao primeiro ponto, seguido do botão **[,]**. Digitamos após a vírgula o valor da variável dependente y_1 correspondente ao primeiro ponto. Após isso, basta pressionar **[M+]** para inserir o par de valores na memória da calculadora. Repetiremos esse processo para cada par x_i, y_i .
- Quando todos os valores tiverem sido inseridos, podemos recuperar os valores de A , B e r pressionando **[SHIFT]** seguido do botão **[2]** (função S-var). Neste momento, aparecerá na tela

\bar{x}	$x\sigma n$	$x\sigma n - 1$	→
1	2	3	

Se pressionarmos para a direita no botão direcional duas vezes, na tela teremos

A	B	r
1	2	3

Basta agora escolher qual variável desejamos, pressionar o botão correspondente — **[1]**, **[2]** ou **[3]** — e pressionar **[=]**. Para recuperar outro valor, não é necessário inserir os pontos novamente, basta pressionar mais uma vez **[SHIFT]** seguido de **[2]** (função S-var) e escolher outra variável.

- Para realizar uma nova regressão, devemos antes apagar os dados da regressão anterior. Fazemos isso pressionando **[SHIFT]** e então **[MODE]** (função CLR). Na tela aparecerá

Scl	Mode	All
1	2	3

Selecione **Scl** pressionando o botão **[1]** e pressione **[=]**.

CASIO® fx-570ES e fx-991ES Plus

- Ao pressionar a tecla **[MODE]**, aparecerão diversas opções, entre elas a opção '3: STAT'. Pressione a tecla **[3]** para selecioná-la. Uma nova tela aparecerá com opções.
- Selecione a opção '2: A+Bx' pressionando a tecla **[2]**. Ao selecionar esta opção, uma tabela surgirá para a entrada de dados.
- Coloque o valor da abscissa x_1 da primeira medida e pressione **[=]**. A calculadora passará ao próximo valor de abscissa automaticamente, o que torna mais fácil a entrada de todos os valores para

essa variável. Ao finalizar, navegue usando as teclas direcionais até o local de inserção da primeira ordenada. Insira o valor e tecle $=$. A calculadora passará automaticamente ao próximo campo, permitindo a inserção do próximo valor de ordenada. Como a calculadora tem o comportamento automático de passar ao próximo valor da mesma variável, é mais fácil segui-lo, porém podemos inserir os pares x, y se utilizarmos as teclas direcionais após pressionar $=$. Qualquer erro pode ser corrigido navegando novamente ao campo e reinserindo os valores.

- Após inserir todos os valores, pressione a tecla $[AC]$.
- Para recuperar os valores de A , B , e r , devemos pressionar a tecla $[SHIFT]$, seguida da tecla $[1]$ (função STAT). Uma nova tela de opções surgirá.
- No modelo *fx-570ES* devemos selecionar a opção '7: Reg' pressionando a tecla $[7]$. No modelo *fx-991ES Plus*, devemos pressionar a tecla $[5]$ (opção '5: Reg'). Uma tela surgirá com as opções correspondentes às variáveis A , B e r . Selecione a variável que deseja recuperar através das teclas numéricas correspondentes e então pressione $=$. Para recuperar outra variável, basta repetir os passos desse ítem, não sendo necessário digitar novamente os dados experimentais.
- Para realizar uma nova regressão, basta repetirmos os passos desde o início. Quando a tabela de inserção de dados surgir, ela estará vazia.

4.2.2 Interpretação dos coeficientes

A ideia por trás do cálculo da melhor reta é estabelecer quais seriam os coeficientes mais adequados para uma relação linear que descreve o fenômeno estudado. *Esses coeficientes são importantes pois estão, em geral, ligados a constantes físicas cujo valor estamos interessados em medir.* Além disso, esse processo é mais preciso do que simplesmente calcular o valor dos coeficientes da reta associados aos pontos medidos e depois fazer uma média.

Vamos considerar, por exemplo, o conjunto de dados para a velocidade em função do tempo dados na Tabela 4.3, representados na Figura 4.6. Verificamos nos dados da tabela que a velocidade se altera com o tempo. Supondo que tenhamos um movimento com aceleração constante, podemos descrever os dados em função do tempo como

$$v = v_0 + at. \quad (4.15)$$

Comparando esta equação com a equação da reta $y = A + Bx$, verifi-

$(t \pm 0,01) \text{ s}$	$(v \pm 0,01) \text{ m/s}$
0,10	24,04
0,20	25,14
0,30	25,79
0,40	27,08
0,50	27,33
0,60	28,79
0,70	29,98
0,80	30,61
0,90	31,15
1,00	32,94
1,10	34,04
1,20	34,78
1,30	35,22
1,40	36,10
1,50	37,91

Tabela 4.3: Dados medidos para a velocidade em função do tempo para um experimento hipotético.

camos as relações

$$y = v \quad (4.16)$$

$$A = v_0 \quad (4.17)$$

$$B = a \quad (4.18)$$

$$x = t. \quad (4.19)$$

Para determinar a relação entre as variáveis das duas equações, devemos verificar qual variável dos dados foi varrida arbitrariamente — e que então deve corresponder à variável independente x — e qual foi lida em resposta à primeira — correspondendo à variável dependente y . Vemos na Tabela 4.3 que os valores de tempo são mais condizentes com uma variação arbitrária (valores “redondos” ou semi-inteiros, isto é, variados com um passo regular) do que no caso dos valores da velocidade. No caso de realizarmos um experimento, não teremos problemas em determinar quem foi a variável independente, pois realizaremos essa escolha ao idealizá-lo.

Dessa forma, se tomarmos os dados e realizarmos uma regressão linear, vamos obter os valores de v_0 e de a — que são desconhecidos — através das constantes A e B . Para os valores da tabela obtemos $v_0 = 22,734\,285\,714\,3$ e $a = 9,907\,142\,857\,1$. Verificaremos adiante que nem todos os dígitos obtidos para as constantes A e B são relevantes e por isso deveremos descartar alguns deles. Por ora podemos expressá-las com o mesmo número de casas após a vírgula que a variável (x ou y) que tem menos casas após a vírgula:

$$A = v_0 = 22,73 \text{ m/s} \quad (4.20)$$

$$B = a = 9,91 \text{ m/s}^2. \quad (4.21)$$

4.3 Linearização

É comum realizarmos um experimento e obtermos um conjunto de dados que não segue uma tendência linear. Em um experimento de queda livre, por exemplo, a distância percorrida pelo objeto que cai está ligada ao tempo através de

$$\Delta y = v_0^y t + \frac{a_y t^2}{2}. \quad (4.22)$$

Como em geral estamos interessados em extrair dos dados experimentais informações acerca de constantes físicas, podemos recorrer a um processo de regressão. No entanto, não podemos utilizar uma regressão linear neste caso, pois os dados claramente não seguirão uma tendência linear. Podemos recorrer a uma regressão quadrática ou realizar uma *linearização*.

Realizar uma linearização nada mais é do que fazer uma mudança de variáveis. No entanto, nem todos os casos são passíveis de serem linearizados. No caso da queda livre, por exemplo, precisamos garantir que v_0 seja muito próximo de zero. Nesse caso, podemos escrever

$$\Delta y = \frac{a_y t^2}{2}. \quad (4.23)$$

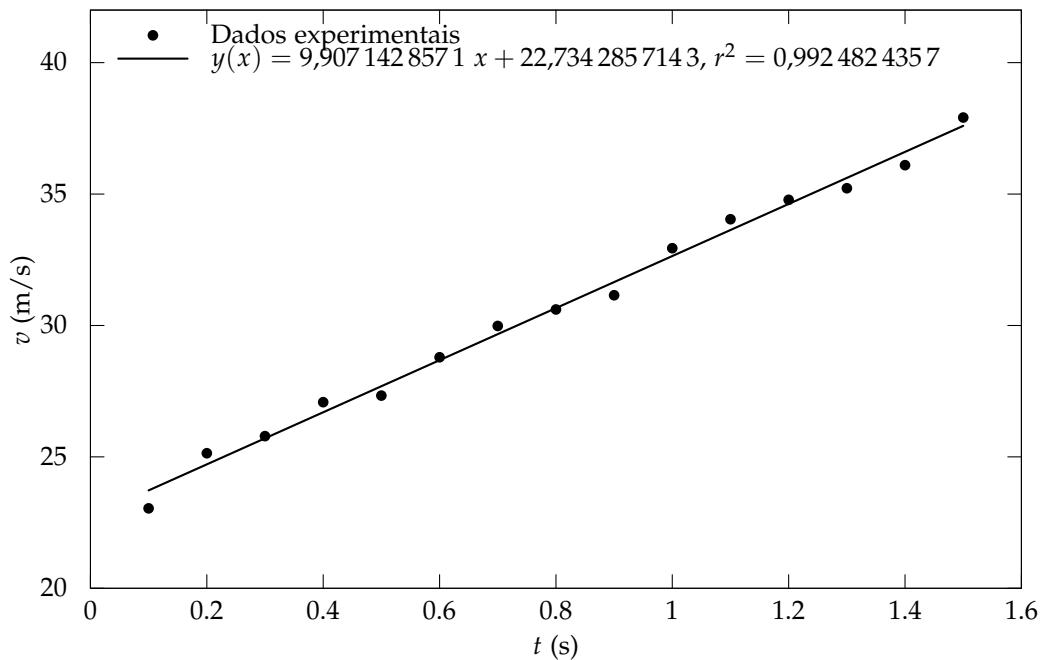


Figura 4.6: Gráfico dos dados da Tabela 4.3.

Fazendo agora a mudança de variáveis $\tau = t^2$, obtemos

$$\Delta y = \frac{a_y}{2} \tau. \quad (4.24)$$

Comparando a equação acima com a equação da reta $y = A + Bx$, verificamos as seguintes relações, se considerarmos que o tempo é a variável independente:⁴

$$y = \Delta y \quad (4.25)$$

$$A = 0 \quad (4.26)$$

$$B = a/2 \quad (4.27)$$

$$x = \tau. \quad (4.28)$$

⁴ Veja que aqui estamos usando y para duas coisas distintas: um eixo vertical através do qual calculamos o deslocamento Δy de um corpo sujeito à gravidade, e o eixo da variável dependente de um gráfico (que é representado no sentido "da parte inferior da página, para a parte superior").

Podemos, portanto, utilizar o processo de linearização associado ao processo de regressão linear para obtermos informações a respeito de constantes físicas mesmo que o conjunto de dados experimentais obtidos não siga uma tendência linear.

4.4 Linearização e teste de hipóteses

Nos casos em que um fenômeno não segue uma tendência linear, se tivermos um modelo do fenômeno físico considerado, podemos empregar o processo da linearização com o intuito de transformar o conjunto de dados de forma que ele passe a representar uma reta. O sucesso desse procedimento, no entanto, depende de a teoria usada como referência estar correta. Muitas vezes ocorre que não temos conhecimento acerca da teoria que descreve um fenômeno ou temos mais de uma teoria, sem ter certeza de qual é a mais adequada. Podemos então utilizar uma regressão linear como um método de

teste, validando uma ou outra teoria com base nos valores obtidos para o coeficiente de dispersão linear r^2 .

Digamos que ao fazer uma série de medidas de uma grandeza ξ em função de outra grandeza ρ (Tabela 4.4), tenhamos um conjunto que segue uma forma que não é uma reta (Figura 4.7). Além disso, temos duas teorias, cada uma com as seguintes previsões:

$$\xi = \begin{cases} \alpha e^{\beta \rho}, & \text{Teoria 1} \\ \alpha \rho^2 + \beta, & \text{Teoria 2.} \end{cases} \quad (4.29)$$

Podemos realizar a regressão linear em ambos os casos e comparar os coeficientes r para verificar qual das duas teorias descreve melhor os dados obtidos. Tomando o logaritmo no primeiro caso, temos

$$\ln(\xi) = \ln(\alpha e^{\beta \rho}) \quad (4.30)$$

$$\ln(\xi) = \ln(\alpha) + \beta \rho \quad (4.31)$$

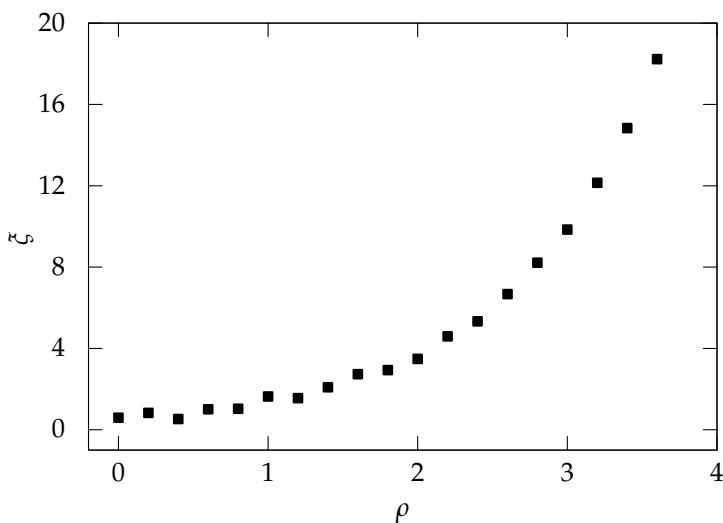


Tabela 4.4: Dados medidos para ξ em função de ρ .

Figura 4.7: Dados medidos de ξ em função de ρ . Visivelmente o comportamento é não linear.

Logo,

$$y = \ln(\xi) \quad (4.32)$$

$$x = \rho \quad (4.33)$$

$$A = \beta \quad (4.34)$$

$$B = \ln(\alpha) \quad (4.35)$$

No segundo caso, temos uma identificação mais simples:

$$y = \xi \quad (4.36)$$

$$x = \rho^2 \quad (4.37)$$

$$A = \alpha \quad (4.38)$$

$$B = \beta. \quad (4.39)$$

Podemos então usar os resultados dessas linearizações para transformar a tabela inicial em duas outras tabelas, cada uma considerando

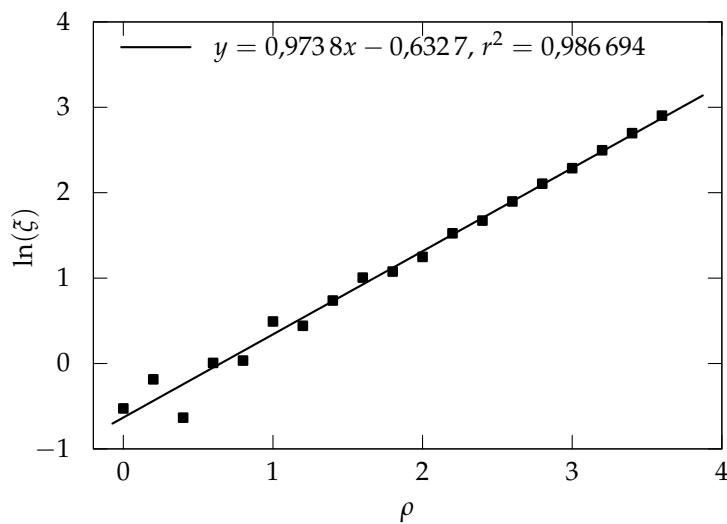
as previsões de cada uma das Teorias e com a esperança de que alguma delas siga o comportamento linear, indicando que a Teoria correspondente tem fundamento.

Baseando-se nas medidas e nos valores transformados dados na Tabela 4.5, podemos realizar as regressões lineares. Os resultados podem ser vistos nas Figuras 4.8 e 4.9. Concluímos, portanto, que a Teoria 1 descreve melhor os resultados medidos.

Tabela 4.5: Dados medidos para ξ em função de ρ e os resultados das transformações baseadas nas Teorias 1 e 2.

ρ	$\ln(\xi)$	Teoria 1		Teoria 2	
		ρ^2	ξ	ρ^2	ξ
0.00	-0.5260	0.00	0.5909		
0.20	-0.1850	0.04	0.8310		
0.40	-0.6346	0.16	0.5301		
0.60	0.0065783	0.36	1.0066		
0.80	0.033918	0.64	1.0345		
1.00	0.49249	1.00	1.6364		
1.20	0.44133	1.44	1.5547		
1.40	0.73770	1.96	2.0911		
1.60	1.0055	2.56	2.7331		
1.80	1.0763	3.24	2.9338		
2.00	1.2485	4.00	3.4851		
2.20	1.5249	4.84	4.5948		
2.40	1.6740	5.76	5.3332		
2.60	1.8980	6.76	6.6722		
2.80	2.1060	7.84	8.2156		
3.00	2.2870	9.00	9.8453		
3.20	2.49719	10.24	12.1483		
3.40	2.69717	11.56	14.8377		
3.60	2.90308	12.96	18.2303		

Figura 4.8: Dados ajustados segundo as previsões da Teoria 1.



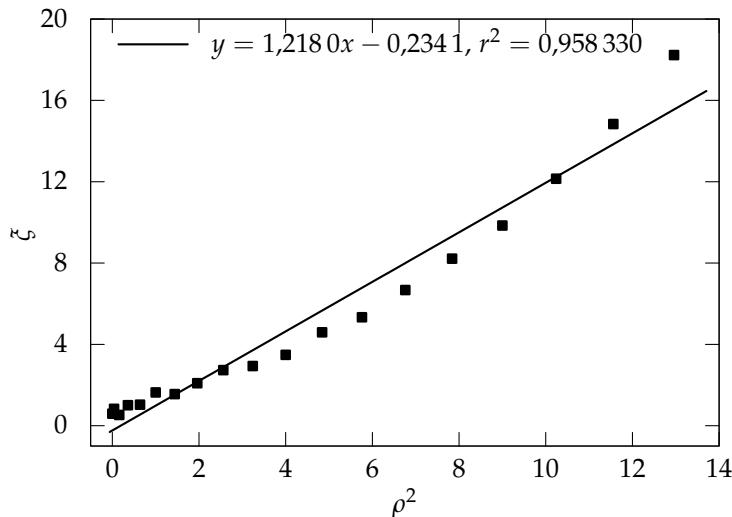


Figura 4.9: Dados ajustados segundo a Teoria 2.

4.5 Erros nos parâmetros de uma regressão linear

Diferentemente da parte teórica, onde assumimos o conhecimento de constantes como a aceleração da gravidade g e calculamos o deslocamento de uma partícula com o passar do tempo, no laboratório podemos medir o tempo e o deslocamento facilmente. O valor da gravidade, por outro lado, é mais difícil de ser determinado. Utilizando uma regressão linear, podemos identificar a relação entre o coeficiente B da equação da reta e g . Sabemos, no entanto, que a toda medida temos um erro associado. Qual seria, nesse caso, o erro associado ao valor de g ?

Utilizando algumas considerações⁵ acerca da distribuição das medidas y_i em torno de seus valores ideais correspondentes, temos que o erro associado aos parâmetros A e B são dados por

$$\delta A = \xi_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \quad (4.40)$$

$$\delta B = \xi_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad (4.41)$$

onde N é o número de pontos experimentais e a soma se dá sobre todos os pontos experimentais. Além disso,

$$\xi_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum (y_i - A - B x_i)^2} \quad (4.42)$$

$$\Delta = N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2. \quad (4.43)$$

Podemos então calcular não só o melhor valor associado a uma constante física através dos coeficientes A e B da melhor reta, mas também determinar qual o erro associado a cada uma dessas constantes. Nem sempre temos uma correspondência simples entre uma constante física e um dos parâmetros da equação da reta, nesses casos, ao calcular o valor da constante física, precisamos calcular o erro propagado através da fórmula geral discutida no Capítulo 3.

⁵ John R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis*. 2nd Edition. University Science Books, 1997. ISBN: 0-935702-75-X

i	x_i	$y_{1,i}$	$(y_{1,i} - A - Bx_i)^2$
1	0,714	14,577	0,0934
2	2,693	20,696	0,2687
3	4,389	25,226	0,0002
4	4,960	27,449	0,2555
5	6,245	30,242	0,2879
6	7,277	33,378	0,2309
7	7,579	34,195	0,3190
8	7,719	35,715	0,2887
9	7,912	35,011	0,5516
10	8,280	37,529	0,4584
11	9,034	40,590	2,2134
12	9,442	39,156	1,3547
13	10,306	43,238	0,1152
14	10,572	42,406	1,6548
15	11,177	44,796	0,4928
16	15,335	57,611	0,0879
17	17,023	63,832	0,7863
18	18,926	68,063	0,3156
19	20,608	74,408	0,5827
20	20,876	75,083	0,4077
21	21,095	75,248	0,0225
22	22,225	77,243	1,5069
23	22,407	81,058	4,1791
24	22,469	78,821	0,1427
25	23,077	80,714	0,0896
26	26,421	91,433	0,1932
27	26,863	91,777	0,2868
28	27,360	93,291	0,2549
Σ		17,4411	

Tabela 4.6: Tabela com os valores de $(y_{1,i} - A - Bx_i)^2$ e da soma $\sum(y_{1,i} - A - Bx_i)^2$.

⁶ Algumas calculadoras disponibilizam os valores de $\sum x_i$ e $\sum x_i^2$ juntamente com os valores de A , B , e r .

Exemplo: Cálculo dos erros dos coeficientes A e B

Vamos determinar os erros associados aos coeficientes da regressão linear apresentada no exemplo da Seção 4.2. Note que os termos $\sum x_i$ e $\sum x_i^2$ que aparecem nas Equações (4.40) e (4.43) estão disponíveis na Tabela (4.2), porém na prática utilizamos uma calculadora ou um programa de computador para realizar o cálculo dos coeficientes da regressão linear, e por isso não temos de antemão tais valores⁶. Nesse caso, será necessário determinar os valores de $\sum x_i$ e de $\sum x_i^2$, além do valor de $\sum(y_{1,i} - A - Bx_i)^2$ — novamente, a elaboração de uma tabela ajuda na determinação de tal valor, como mostrado na Tabela 4.6. Uma vez determinados tais valores, determinar os erros δA e δB é relativamente simples:

$$\xi_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum (y_i - A - Bx_i)^2} \quad (4.44)$$

$$= \sqrt{\frac{17,4411}{28-2}} \quad (4.45)$$

$$= 0,05814, \quad (4.46)$$

$$\Delta = N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \quad (4.47)$$

$$= 28 \cdot 7295,757 - (392,984)^2 \quad (4.48)$$

$$= 49\,844,766, \quad (4.49)$$

$$\delta A = \xi_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \quad (4.50)$$

$$= 0,05814 \cdot \sqrt{\frac{7295,757}{49\,844,766}} \quad (4.51)$$

$$= 0,022244, \quad (4.52)$$

$$\delta B = \xi_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad (4.53)$$

$$= 0,05814 \cdot \sqrt{\frac{28}{49\,844,766}} \quad (4.54)$$

$$= 0,001378. \quad (4.55)$$

Assim, podemos denotar os coeficientes linear e angular com seus devidos erros:

$$A = (12,140\,462\,642 \pm 0,022\,244) \text{ Un}_y \quad (4.56)$$

$$B = (2,984\,480\,401 \pm 0,001\,378) \text{ Un}_{x/y}. \quad (4.57)$$

Note que, como discutido anteriormente, a unidade do coeficiente angular é a mesma que a da variável dependente, enquanto a unidade do coeficiente angular é dada pela razão entre as unidades da variável dependente e da variável independente. Acima denotamos conceitualmente tais unidades como Un_y e $\text{Un}_{x/y}$, respectivamente. Resta ainda notar que não devemos carregar dígitos cuja ordem de grandeza é menor que a do erro, assim obtemos finalmente

$$A = (12,14 \pm 0,02) \text{ Un}_y \quad (4.58)$$

$$B = (2,984 \pm 0,0014) \text{ Un}_{x/y}. \quad (4.59)$$

5 Desvio padrão

Como mencionado no Capítulo 3, podemos interpretar o desvio das medidas em relação à média como uma medida relacionada à incerteza — ou erro — das medidas. Verificaremos o por quê dessa afirmação e como chegar ao valor da incerteza — tanto para cada uma das medidas, quanto para o valor da incerteza associada ao valor médio das medidas —.

5.1 Histogramas

Um método útil para verificar a distribuição das medidas em torno de seu valor mais provável é a elaboração de um *histograma*. Imagine o seguinte experimento: Pegamos uma tábua e afixamos uma série de pregos, de forma que suas pontas fiquem presas à tábua e o resto do comprimento dos pregos fique acima dela. Prendemos a tábua de forma que ela permaneça inclinada, com a superfície com os pregos para cima. Abaixo da região de pregos, colocamos várias pequenas caixas numeradas, com a de número 25 exatamente no centro da tábua. Soltamos então uma pequena bola de gude da posição central acima dos pregos. A bola descerá colidindo com os pregos aleatoriamente e finalmente cairá em uma das caixas. Se repetirmos esse procedimento várias vezes e contarmos quantas vezes a bola cai em cada caixa, podemos fazer um gráfico (um histograma) como o da Figura 5.1.

Se utilizássemos caixas menores, numerando-as como 21,1, 21,2, etc., e aumentássemos o número de vezes que soltamos a bola de gude, chegamos — em um limite de caixas muito pequenas e um número de lançamentos muito grande — a uma curva chamada de *distribuição normal* ou *distribuição gaussiana* (veja a Figura 5.1).

5.2 Desvio padrão

No caso de realizarmos uma medida qualquer, temos valores numéricos pertencentes ao conjunto dos números Reais, não aos Inteiros como na numeração das caixas. Nesse caso, contamos o número de ocorrências entre dois valores quaisquer. Se por exemplo, as caixas que colocamos abaixo da tábua no exemplo anterior tinham 1,00 cm de largura, podemos dizer que as bolas que caem na 23^acaixa caem entre 23,0 cm e 24,0 cm à direita do início da tábua. Vemos então que para qualquer medida, mesmo que sejam números pertencentes aos Reais ao invés de Inteiros, podemos fazer um histograma.

É possível se mostrar¹ que o centro da distribuição normal é igual

¹John R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis*. 2nd Edition. University Science Books, 1997. ISBN: 0-935702-75-X

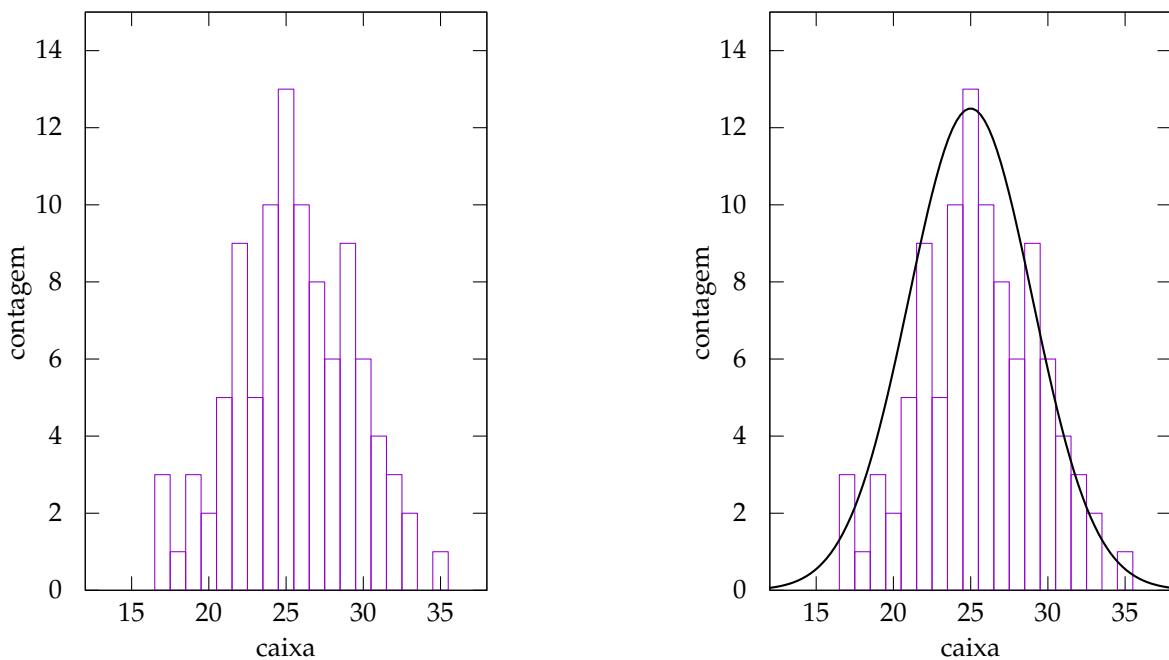


Figura 5.1: *Esquerda:* Histograma do número de vezes que a bola de gude cai em cada caixa. *Direita:* Histograma juntamente com a curva da distribuição normal.

à média dos valores obtidos para as medidas. Vemos que esse valor é o *mais provável* de obtermos. Logicamente, temos que o valor médio é então o melhor valor para uma série de medidas. Vemos também que a distribuição normal aparentemente nos dá um *limite inferior* e um *limite superior* para o valor de uma medida. O problema principal reside no fato de que a distribuição diminui, porém não chega a zero à medida que nos afastamos do pico central.

Podemos calcular, a partir das próprias medidas, um parâmetro que leva em conta as variações em torno do valor médio, denominado *variância* e definido como²

$$\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}{N}. \quad (5.1)$$

Quanto mais as medidas diferem do valor médio — isto é, quanto mais elas se espalham, tornando a largura do pico maior —, maior será o valor da variância. No entanto, como esse valor não tem as mesmas unidades das medidas que estamos tratando, podemos utilizar o *desvio padrão*, definido como a raiz quadrada da variância e representado por σ :

Desvio padrão populacional.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (5.2)$$

Essa grandeza, ao contrário da variância, possui as mesmas unidades que as medidas. Se tomarmos a faixa de valores entre o valor médio *menos* o desvio padrão e o valor médio *mais* o desvio padrão, temos aproximadamente 63% das medidas realizadas. **O valor do desvio padrão pode então ser interpretado como a incerteza de uma medida qualquer realizada**, pois podemos afirmar que “o valor real de uma medida está contido entre $x_i - \sigma$ e $x_i + \sigma$ com 63% de certeza”.

²Jay L. Devore, Probabilidade e estatística para engenharia e ciências.

Se precisamos de mais certeza de que a medida se encontra entre dois valores quaisquer, podemos utilizar como incerteza o valor de 2σ .

A definição mostrada acima para o desvio padrão não é a que usamos na prática. Tal definição é dada para uma *população*, isto é, para todos os valores possíveis de uma dada grandeza. Não podemos calcular tal valor quando tratamos de medidas, pois podemos ter um número infinito delas. Podemos, no entanto, utilizar o *desvio padrão amostral*: Como os valores das medidas x_i estão mais próximos do valor médio da amostra $\langle x \rangle$, do que do valor médio da população, o valor do somatório será menor que se utilizássemos a média da população. Tal problema pode ser contornado utilizando-se como denominador $N - 1$, obtendo

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (5.3) \quad \text{Desvio padrão amostral.}$$

Dessa forma, o desvio padrão calculado para uma amostra aproxima adequadamente o desvio padrão calculado para a população.

Uma maneira mais simplista de interpretar a questão de utilizar uma fórmula ou outra é o fato de que o desvio padrão amostral resulta em um valor um pouco maior, dando um “garantia” maior quando σ é usado como erro. Além disso, se temos somente um valor de medida, o valor de σ torna-se indefinido, o que reflete o desconhecimento acerca do valor do erro. Resta dizer ainda que o valor do desvio padrão é uma característica do equipamento e método de medida utilizado. A partir de 5 ou 10 medidas, o valor de σ varia muito pouco.

Finalmente, não parece razoável que essa incerteza seja a mesma para o valor médio $\langle x \rangle$, pois conforme o número de medidas aumenta, esperamos que o valor da incerteza diminua. De fato, podemos considerar que a incerteza no valor médio pode ser calculada através de

$$\sigma_{\langle \rangle} = \sigma / \sqrt{N}, \quad (5.4) \quad \text{Desvio padrão da média.}$$

onde $\sigma_{\langle \rangle}$ é chamado de *desvio padrão da média*. Portanto, temos que a melhor estimativa para uma medida X qualquer é

$$X = (\langle x \rangle \pm \sigma_{\langle \rangle}). \quad (5.5) \quad \text{Melhor estimativa para uma medida.}$$

PARTE II: EXPERIMENTOS

6 Medidas

Realizaremos um experimento visando determinar a densidade de alguns sólidos. Para isso, revisaremos o conceito de densidade e o cálculo do volume de sólidos geométricos. Aplicaremos os conceitos sobre medidas diretas e indiretas realizadas com equipamentos analógicos e não-analógicos (equipamentos digitais e equipamentos dotados de escala auxiliar), observando ao obter os dados o número adequado de algarismos significativos.

6.1 Unidades, notação científica e prefixos do SI

A maior parte dos parâmetros físicos que podem ser medidos têm algum tipo de unidade associada a eles. Ao determinarmos o valor numérico associado a um comprimento, por exemplo, devemos indicar qual foi a unidade utilizada para determinar tal valor. Assim, sempre devemos indicar a unidade juntamente com a medida:

$$\ell = 22,3 \text{ cm} \quad (6.1)$$

$$v = 14,82 \text{ m/s} \quad (6.2)$$

$$A = 8,0 \text{ m}^2, \quad (6.3)$$

etc.

Além disso, é comum associarmos alguns prefixos multiplicativos às unidades. No primeiro exemplo acima, cm não se refere a uma unidade, mas sim a *centésimos de metro*, onde o c indica *centésimos* da unidade m (o metro). Isso é um recurso amplamente adotado pois muitas vezes apresentar os valores usando sempre a unidade base pode ser inconveniente. Abaixo listamos os prefixos mais comuns:

$$n = 0,000\,000\,001 \quad (6.4)$$

$$\mu = 0,000\,001 \quad (6.5)$$

$$m = 0,001 \quad (6.6)$$

$$c = 0,01 \quad (6.7)$$

$$d = 0,1 \quad (6.8)$$

$$da = 10 \quad (6.9)$$

$$h = 100 \quad (6.10)$$

$$k = 1\,000 \quad (6.11)$$

$$M = 1\,000\,000 \quad (6.12)$$

$$G = 1\,000\,000\,000. \quad (6.13)$$

Muitas vezes também pode ser conveniente substituir os prefixos por potências de 10, sendo que o resultado é equivalente. Os prefixos

acima, por exemplo, correspondem às seguintes potências:

$$n = 1 \cdot 10^{-9} \quad (6.14)$$

$$\mu = 1 \cdot 10^{-6} \quad (6.15)$$

$$m = 1 \cdot 10^{-3} \quad (6.16)$$

$$c = 1 \cdot 10^{-2} \quad (6.17)$$

$$d = 1 \cdot 10^{-1} \quad (6.18)$$

$$da = 1 \cdot 10^1 \quad (6.19)$$

$$h = 1 \cdot 10^2 \quad (6.20)$$

$$k = 1 \cdot 10^3 \quad (6.21)$$

$$M = 1 \cdot 10^6 \quad (6.22)$$

$$G = 1 \cdot 10^9. \quad (6.23)$$

6.2 Tipos de Medidas: Medidas Diretas e Indiretas

¹O conteúdo descrito nas seções seguintes é um resumo do Capítulo 1.

As medidas¹ podem ser classificadas em dois tipos: diretas e indiretas. Realizar uma medida de uma grandeza, significa fazer uma *comparação direta* ou *indireta* entre o que desejamos medir e um padrão de medida. No caso de, por exemplo, estarmos interessados em verificar o tamanho de um lápis, basta alinhar sua base ao zero de uma régua e verificarmos quantas marcas estão compreendidas no comprimento de tal lápis. Temos, portanto, uma medida direta de uma grandeza.

Algumas medidas, no entanto, não podem ser feitas de maneira direta – ou podem ser determinadas de maneira mais conveniente de forma indireta. Se necessitamos saber a área de uma folha retangular, basta verificarmos as medidas laterais e então multiplicá-las. Desta forma, estamos determinando a área de uma maneira *indireta*.

O volume de um paralelepípedo pode ser determinado de maneira indireta através do produto de suas três dimensões. Para um sólido irregular, no entanto, é mais conveniente mergulhá-lo em um líquido e verificar através de uma escala graduada impressa no recipiente que comporta tal líquido qual é o volume deslocado. Portanto, uma grandeza qualquer pode ser determinada de maneira direta ou indireta, sendo que a escolha de um ou outro tipo de método é uma questão de conveniência.

6.3 Tipos de equipamentos: analógicos e não-analógicos

Os equipamentos de medida podem ser divididos em dois tipos: analógicos e não analógicos. Os equipamentos analógicos são aqueles que permitem que realizemos uma estimativa de valores entre duas marcas quaisquer de sua escala. São exemplos deste tipo de equipamento réguas, velocímetros de ponteiro, relógios de ponteiros, etc.

Outra classe de equipamento são não analógicos: nela se incluem os equipamentos digitais e aqueles dotados de escalas auxiliares. Nos equipamentos digitais, os dados da medida são mostrados através de

um visor digital que permite a leitura direta dos valores numéricos. Já os equipamentos dotados de escala auxiliar — também conhecida como nônio ou vernier — possibilitam a leitura em uma escala analógica principal, porém com a leitura da subdivisão da escala principal na escala auxiliar. Como a escala auxiliar tem divisões muito “finas”, no entanto, não é possível estimar dígitos menores do que a menor divisão da escala auxiliar.

6.4 Medidas e Algarismos Significativos

Suponhamos que precisamos usar uma trena para realizar uma medida de um muro. Tal equipamento foi elaborado de tal forma que um metro está subdividido em 10 partes. Alinhamos uma extremidade da trena — aquela que contém o zero — com uma extremidade do muro e verificamos a outra extremidade. Vemos que o muro passa da marca dos 15 metros por três subdivisões, mas não passa da quarta subdivisão. Cada uma dessas subdivisões corresponde a um décimo de um metro, o que resulta no seguinte valor para a medida:

$$\ell = 15,3 \text{ m.} \quad (6.24)$$

No entanto, sabemos que o muro termina em algum lugar entre a terceira e a quarta marca, sendo então maior que 15,3 m. Nesse caso, podemos estimar mais um algarismo. Se, por exemplo, a extremidade do muro está próxima da metade da distância entre as duas marcas da trena, porém antes dela, poderíamos estimar um valor 4 (isto é, quatro décimos da distância entre as duas subdivisões). Finalmente,

$$\ell = 15,34 \text{ m.} \quad (6.25)$$

Poderíamos realizar uma estimativa com mais casas após o 4, mas a validade dela seria duvidosa: se já não temos certeza sobre a medida ser 4 (poderia ser 3 ou 5, em escalas menores é muito difícil efetuar uma estimativa razoável), não temos ganho algum em denotar mais algarismos após o 4. Ao conjunto de algarismos que temos certeza (pois foram verificados no instrumento) e ao algarismo estimado, damos o nome de *algarismos significativos*. O último algarismo também é conhecido como *algarismo duvidoso*.

Em casos onde realizamos uma medida que coincide exatamente com uma marca, devemos considerar que o equipamento permitiria expressar divisões menores, quando for o caso. Se, por exemplo, ao medirmos o muro com a trena mencionada a extremidade coincidir com a marca de 15 m, devemos expressar a medida como

$$\ell = 15,00 \text{ m,} \quad (6.26)$$

pois sabemos que não foi ultrapassada nenhuma submarca de décimos de metro, e determinamos que o algarismo estimado também é zero (pois se aparentemente coincide com a marca, não a ultrapassa em quantidade apreciável).

Em equipamentos não-analógicos, como um equipamento com um mostrador digital ou um equipamento dotado de nônio, não

podemos efetuar a leitura de um algarismo estimado. Nesse caso, temos somente os algarismos dados pela leitura. Finalmente, temos que os zeros à esquerda têm a função de posicionar a vírgula e, portanto, não são algarismos significativos. Por exemplo, a medida 0,00567 s só tem três algarismos significativos.

6.4.1 Operações envolvendo medidas

Quando efetuamos contas utilizando duas medidas, é comum obtermos resultados com várias casas após a vírgula. No caso da multiplicação, devemos limitar o número de algarismos significativos àquele da medida que tiver o menor número. Por exemplo

$$12,03 \div 3,6 = 3,\bar{3}4 = 3,3 \quad (6.27a)$$

$$198,633 \times 3,211 = 637,\bar{8}1056 = 637,8, \quad (6.27b)$$

onde a barra representa o último algarismo significativo.

Para o caso da soma ou subtração, mantemos o número de casas decimais da medida que tem o menor número de casas após a vírgula:

$$12,03 + 3,6 = 15,\bar{6}3 \quad (6.28)$$

$$= 15,6. \quad (6.29)$$

Quando efetuamos uma operação envolvendo uma constante matemática e uma medida, conservamos no resultado o mesmo número de algarismos significativos da medida. Isso também ocorre quando uma medida é o argumento de uma função. Por exemplo,

$$A = \pi \times (3,66 \text{ m})^2 \quad (6.30)$$

$$= \pi \times (13,\bar{3}956 \text{ m}^2) \quad (6.31)$$

$$= 42,\bar{0}8351855 \text{ m}^2 \quad (6.32)$$

$$= 42,1 \text{ m}^2 \quad (6.33)$$

$$x = \ln 3,555 \quad (6.34)$$

$$= 1,26\bar{8}355063 \quad (6.35)$$

$$= 1,268 \quad (6.36)$$

6.4.2 Arredondamento

Nos exemplos acima, usamos uma barra para denotar o último algarismo significativo. Fazemos isso pois o procedimento de descarte dos algarismos excedentes deve ser realizado somente no final da conta, sempre observando os critérios de *arredondamento*.

Quando em situações como as das Equações (6.27) obtemos resultados do tipo

$$\ell = 134,\bar{3}9487, \quad (6.37)$$

precisamos fazer um arredondamento. No exemplo acima, vemos que 134,4 é um número mais próximo do resultado do que 134,3. Portanto, adotamos as seguintes regras ao realizarmos o arredondamento:

1. Se o algarismo seguinte ao duvidoso for menor que 5, simplesmente descartamos os algarismos excedentes.
 2. Se o algarismo seguinte ao duvidoso for maior ou igual a 5, aumentamos o duvidoso de uma unidade e descartamos os demais.
- .

Consideremos ainda o seguinte caso

$$m = 956 \times 102,25 = 977\bar{5}1. \quad (6.38)$$

Se adotarmos o procedimento acima, teremos o número 978 e teremos um número aproximadamente 100 vezes menor que o resultado. Nesse caso, utilizamos a notação científica:

$$m = 9,78 \times 10^4. \quad (6.39)$$

6.5 Experimento: Determinação da densidade volumétrica de massa de sólidos

Para explorar os conceitos mencionados acima, vamos calcular a densidade de alguns sólidos. Verificaremos as dimensões dos corpos utilizando régulas e paquímetros e utilizaremos esses resultados para calcular o volume, nos preocupando com o número de algarismos significativos adequado. Após isso, vamos calcular a densidade dos corpos utilizando o valor obtido para a massa com o auxílio de uma balança.

6.5.1 Volume de sólidos geométricos

Para que possamos determinar a densidade de um corpo qualquer, é importante que saibamos determinar seu volume. Se seu formato é o de um sólido geométrico, o volume pode ser determinado através de suas medidas. Abaixo listamos algumas formas comuns, juntamente com as expressões utilizadas para determinar seus volumes.

$$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c \quad (6.40)$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (6.41)$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3. \quad (6.42)$$

6.5.2 Volume de sólidos irregulares

No caso de termos um sólido com forma irregular, uma maneira simples de determinar seu volume é o submergindo em um fluido e verificando a alteração do volume ocupado por ele. Para isso podemos utilizar uma *proveta*. A proveta é um cilindro com diâmetro uniforme com uma escala volumétrica graduada impressa em sua lateral. Tal volume corresponde ao produto da área da seção circular da proveta pela altura em relação ao fundo dela. Assim, se temos um certo volume de fluido, ao submergirmos um corpo notaremos um

aumento do volume lido na proveta. Esse aumento corresponde ao volume do corpo submerso.

É claro que a utilização desse método está sujeita a algumas restrições. Primeiramente, o corpo não pode absorver o fluido. Além disso, a *densidade volumétrica de massa* do corpo precisa ser maior que a do fluido.

6.5.3 Densidade

² Existem outros tipo de densidade como por exemplo as densidades linear e superficial de massa, densidades de carga elétrica, etc.

A *densidade²* volumétrica de massa de um corpo é uma medida da razão entre sua massa e seu volume:

$$\rho \equiv \frac{M}{V}. \quad (6.43)$$

Essa razão é útil para corpos em geral: sabemos que se um corpo é capaz de boiar na água, sua densidade é necessariamente menor que a densidade da água. Um navio, por exemplo, tem uma densidade menor que a da água em virtude dos espaços vazios em seu casco, que são ocupados por ar. Além disso, a densidade também é uma informação útil ao tratarmos de materiais homogêneos, como uma barra metálica, pois é um valor característico de cada substância. Se precisamos determinar o tipo de metal de uma barra, basta determinarmos sua densidade e compararmos com uma tabela de referência.

6.5.4 Objetivos

1. Determinar as dimensões de vários sólidos utilizando régua e paquímetros;
2. Determinar o número de algarismos significativos às medidas;
3. Calcular o volume dos sólidos;
4. Determinar o volume de um corpo irregular usando uma proveta;
5. Verificar com auxílio de uma balança a massa dos corpos;
6. Utilizar os dados obtidos para calcular as densidades dos sólidos.

6.6 Material Necessário

- Três paralelepípedos de tamanhos diferentes;
- Dois cilindros de tamanhos diferentes;
- Dois corpos irregulares de tamanhos diferentes;
- Régua;
- Paquímetro;
- Proveta com água;
- Balança.

6.7 Procedimento Experimental

Tome três paralelepípedos e dois cilindros e os utilize no decorrer do experimento. Anote os resultados obtidos nas próximas seções nas tabelas fornecidas, sempre observando o número de algarismos significativos adequados.

6.7.1 Determinação das medidas utilizando uma régua

Atenção: as medidas realizadas com a régua permitem a estimativa de um algarismo significativo após a casa dos milímetros. Efetue esta estimativa.

1. Utilizando uma régua, determine as medidas ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 das laterais dos paralelepípedos, e o diâmetro \varnothing e o comprimento ℓ dos cilindros.
2. Determine o volume V de cada sólido observando o número de algarismos significativos. *Explique seus cálculos no verso.*

6.7.2 Determinação das medidas utilizando um paquímetro

Atenção: as medidas realizadas com o paquímetro consistem de duas partes: a verificação do valor na escala principal e a leitura do valor excedente em relação ao valor principal na escala auxiliar (nônio).

1. Utilizando o paquímetro, determine as medidas ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 das laterais dos paralelepípedos, e o diâmetro \varnothing e o comprimento ℓ dos cilindros.
2. Determine o volume V de cada sólido observando o número de algarismos significativos.

6.7.3 Determinação do volume de um corpo irregular usando uma proveta

Atenção: a proveta permite que façamos estimativas entre duas marcações quaisquer por se tratar de um instrumento de medida analógico.

1. Preencha a proveta com um volume V_i de água suficiente para cobrir o corpo.
2. Anote o valor inicial de volume na tabela correspondente.
3. Submerja os corpos irregulares e anote as novas leituras V_f de volume na tabela correspondente.
4. Determine o volume V dos corpos através da diferença entre os volumes final V_f e inicial V_i .

6.7.4 Determinação das massas e densidades dos sólidos

1. Utilize a balança para determinar a massa m de cada sólido com o número de algarismos significativos adequado;
2. Determine a densidade ρ de cada sólido observando o número de algarismos significativos. Para os sólidos regulares, utilize as medidas de volume obtidas através das medidas realizadas com o paquímetro.

Medidas

Turma: _____ Data: _____

Aluno(a): _____ Matrícula: _____

6.8 Questionário

Questão 1. (2 pontos) Apresente os resultados de maneira clara e organizada. Mostre os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, evidenciando o raciocínio desenvolvido.

Questão 2. (8 pontos) Preencha as tabelas com as medidas e os cálculos de volume e densidade, sempre observando o número adequado de algarismos significativos e unidades adequados. (1 ponto por tabela.)

6.9 Tabelas

Paralelepípedo	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_2	V
1				
2				
3				

Tabela 6.1: Resultados obtidos para os paralelepípedos utilizando uma régua.

Cilindro	\varnothing	ℓ	V
1			
2			

Tabela 6.2: Resultados obtidos para os cilindros utilizando uma régua.

Paralelepípedo	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	V
1				
2				
3				

Tabela 6.3: Resultados obtidos para os paralelepípedos utilizando um paquímetro.

Cilindro	\varnothing	ℓ	V
1			
2			

Tabela 6.4: Resultados obtidos para os cilindros utilizando um paquímetro.

Corpo	V_i	V_f	V
1			
2			

Tabela 6.5: Resultados obtidos para os corpos irregulares.

Paralelepípedo	m	V	ρ
1			
2			
3			

Tabela 6.6: Resultados obtidos para a massa e para a densidade dos paralelepípedos.

Cilindro	m	V	ρ
1			
2			

Tabela 6.7: Resultados obtidos para a massa e para a densidade dos cilindros.

Corpo	m	V	ρ
1			
2			

Tabela 6.8: Resultados obtidos para a massa e para a densidade dos corpos irregulares.

7 Movimento retilíneo uniforme (MRU) e uniformemente variado (MRUV)

Realizaremos dois experimentos distintos de forma a verificar as características do Movimento Retilíneo Uniforme – MRU e do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado – MRUV. No primeiro caso, verificaremos a velocidade de uma esfera que se move em um fluido, sendo que ela atingirá uma velocidade terminal constante¹. No segundo realizaremos um experimento de queda livre. Utilizaremos os conceitos de medidas, algarismos significativos, e gráficos.

7.1 Gráficos

Gráficos² são ferramentas muito usadas para visualizar relações matemáticas entre uma função e seu argumento. Por exemplo, denominamos a função $f(x) = A + Bx$ como *equação da reta*, pois seu gráfico é uma reta. Cada função tem um gráfico característico.

Em experimentos de laboratório é comum procurarmos estabelecer a relação entre duas grandezas. Para uma dessas variáveis escolhemos valores de acordo com nossa conveniência e a denominamos como *variável independente*. Já a outra variável é mensurada e a denominamos como *variável dependente*, pois seus valores dependem dos valores escolhidos para a variável independente. Denotamos a variáveis independente e dependente por x e y , respectivamente. Nossa maior interesse, nesses casos, é justamente encontrar a função matemática f que relaciona x e y , ou seja, que nos dá y em função de x : $y = f(x)$.

Nos preocuparemos em estabelecer essa relação nos próximos experimentos. Hoje vamos discutir como elaborar um gráfico e o apresentar de forma clara.

7.1.1 Elaborando um gráfico

Hoje podemos fazer um gráfico rapidamente usando um programa de computador. No entanto, é interessante fazer alguns gráficos com papel milimetrado e lápis/caneta para sabermos o que tais programas estão fazendo. Além disso, existem vários tipos de gráficos, mas estamos interessados em um tipo específico, denominado em alguns programas como *gráficos de dispersão*.

Um gráfico de dispersão consiste em dois eixos — um horizontal e outro vertical — em relação aos quais denotamos os valores de nossas medidas em pares ordenados. Se tomarmos as medidas da Tabela 7.1, podemos fazer um gráfico como o da Figura 7.1.

Neste gráfico podemos perceber que foram aplicados alguns prin-

¹ Veremos o conceito de *velocidade terminal* em detalhes na Experiência ??.

² O conteúdo dessa seção é um resumo do Capítulo 2.

Tubo 1		Tubo 2	
t (s)	T °C	t (s)	T °C
0	98	0	92
5,71	93	8,27	87
17,79	88	17,43	82
34,50	83	31,07	77
61,63	78	44,98	72
83,96	73	67,78	67
109,09	68	96,57	62
130,78	63	115,26	57
149,09	58	135,78	52
184,21	53	170,32	47
217,09	48	213,28	42
261,28	43	268,04	37
315,90	38	349,44	32
373,35	33	465,71	27
470,55	28	575,21	24
504,21	25		

Tabela 7.1: Dados para a temperatura de tubos metálicos em função do tempo para o processo de resfriamento convectivo.

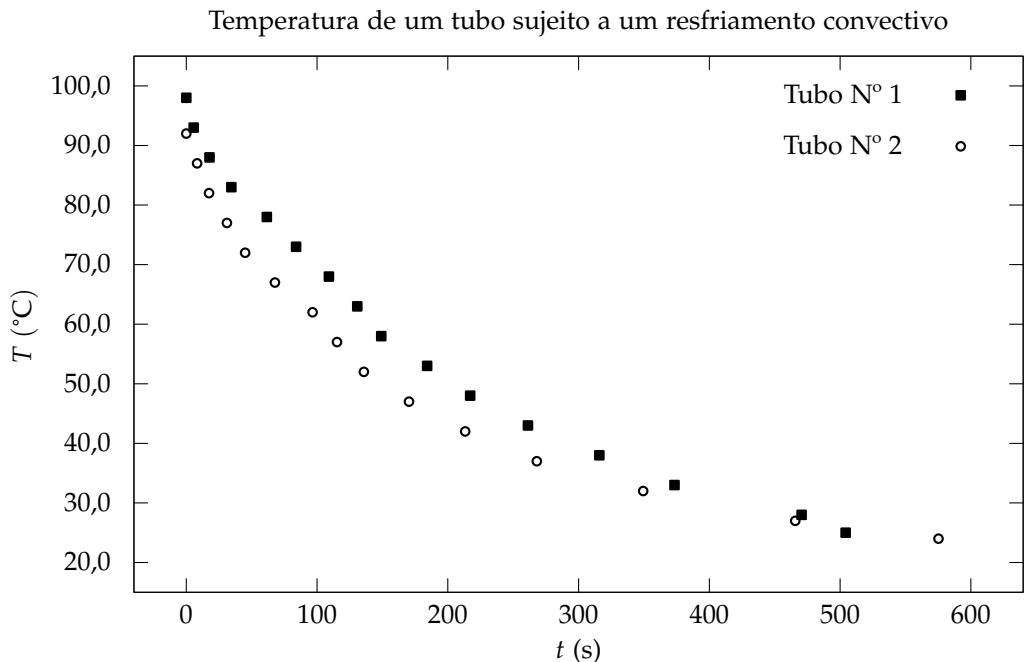


Figura 7.1: Gráfico dos dados da Tabela 7.1.

cípios básicos para a elaboração de um gráfico adequado:

1. O gráfico tem dois eixos devidamente nomeados com as variáveis que representam e com as unidades das medidas representadas.
2. Ambos os eixos apresentam marcações com numerações que aparecem em *intervalos regulares* — 100 em 100 no eixo x e a cada 10 no eixo y —.
3. O eixo y foi “cortado”, iniciando em um valor um pouco menor que 20. Isto é adequado pois não existem dados cujos valores da variável dependente sejam menores que 20,0 °C.
4. Os eixos começam e terminam de forma que toda a área disponível do gráfico é bem utilizada.
5. O gráfico possui uma legenda indicando o que os pontos representam.
6. Nenhum ponto fica excessivamente próximo dos eixos.
7. Como há dois conjuntos de dados, temos uma diferenciação clara entre os pontos de cada conjunto.

7.1.2 Erros mais comuns ao elaborar um gráfico

É difícil estabelecer um roteiro para elaborar um gráfico adequado, pois isso depende muito do que pretendemos mostar com ele. No entanto, existe uma série de *erros comuns* ao elaborar um gráfico e que devem ser evitados:

Não utilizar adequadamente a área do gráfico: Muitas vezes nossos dados não iniciam em zero. Nesse caso devemos escolher um número próximo, porém inferior, ao primeiro valor que ocorre naquele eixo e iniciá-lo em tal número. Se, por exemplo, devemos marcar em um eixo os valores 107,25, 115,12, 129,90, 138,22, etc., uma boa escolha é iniciar o eixo em 100 e realizarmos as marcações no eixo a cada 10. Outra escolha adequada seria iniciar o eixo em 105 — porém, nesse caso, não marcamos o “canto” do gráfico³ como 105 —. Realizamos a marcação em 110 e daí em diante a cada 10.

³ Foi o que escolhemos fazer no gráfico da Figura 7.1, cujo eixo y começa em 15.

Não realizar marcações regulares nos eixos: Marcações com “espaçamento variável” não devem ser realizadas. Utilizando os dados do item acima, poderíamos realizar marcações no eixo em 105, 115, 130 e 140. Porém a distância entre essas marcações não é regular, o que dificulta a leitura do gráfico. Note que em um gráfico estamos interessados no comportamento qualitativo geral dos pontos, não nos valores específicos das variáveis que eles representam. Se desejarmos os valores, devemos buscá-los na tabela de dados.

Marcar os valores de x e y dos pontos experimentais: Os valores de abscessas (valor no eixo x) e de ordenadas (valor no eixo y) dos pontos não devem aparecer nos eixos ordenados. Novamente, no gráfico não estamos interessados nos valores exatos das variáveis correspondentes aos pontos, mas sim no seu comportamento geral.

Linhas que ligam os pontos aos eixos: Muitos alunos ligam os pontos aos eixos x e y usando linhas tracejadas. Não façam isso, mais uma vez, caso queiramos saber exatamente os valores nos eixos x e y , podemos verificá-los na tabela de dados.

Linhas que ligam os pontos entre si: Os pontos marcados a partir de dados experimentais nunca devem ser ligados entre si. Quando marcamos curvas ou retas em um gráfico, isso significa que temos conhecimento sobre todos os pontos que compõe aquela curva. Isso só pode ser razoável para os casos onde sabemos exatamente a função matemática que relaciona as variáveis x e y , não para dados experimentais. Estes são verificados “pontualmente” e não podemos afirmar nada sobre o que obteríamos entre dois pontos quaisquer. Portanto, a reta que liga dois pontos experimentais não carrega informação alguma e não deve ser traçada.

Não diferenciar conjuntos de pontos diferentes: É comum fazermos gráficos com mais que um conjunto de dados, com o intuito de compararmos seus comportamentos. Nesse caso, os conjuntos precisam ser diferenciados entre si. Para isso, basta utilizar símbolos diferentes para marcar os pontos, como quadrados, círculos, triângulos, etc., ou mesmo cores diferentes.

7.1.3 Elaborando um gráfico com papel milimetrado

Elaborar um gráfico em papel milimetrado é uma questão de observar as regras gerais para a elaboração de gráficos e usar regras de três. O

procedimento para elaborar o gráfico consiste no seguinte:

1. Verificar quais os valores mínimo x_{\min} e máximo x_{\max} para a variável do eixo x .
2. Verificar quais os valores mínimo y_{\min} e máximo y_{\max} para a variável do eixo y .
3. Verificar o tamanho do papel e desenhar os eixos *dentro da área milimetrada* e não na borda. Em geral, deixa-se um centímetro entre a borda da área milimetrada e o eixo para que possamos fazer as escalas dos eixos.
4. Decidimos os valores x_i , x_f , y_i , e y_f em que os eixos x e y começam e terminam. Notem que devemos escolher valores tais que

$$x_i < x_{\min} \quad x_f > x_{\max} \quad (7.1)$$

$$y_i < y_{\min} \quad y_f > y_{\max} \quad (7.2)$$

5. Sabendo os valores x_i e x_f em que o eixo x começa e termina, e que o eixo tem a medida m no papel milimetrado, podemos marcar a ordenada do ponto x_p a uma distância d do início do eixo, onde d é calculada como:

$$d = \frac{m(x_p - x_i)}{x_f - x_i}. \quad (7.3)$$

Se, por exemplo, temos um conjunto de dados todo compreendido entre 30 e 110 e decidimos usar esses limites para fazer um gráfico de 25 cm, podemos encontrar a distância d a partir do início do eixo em que devemos marcar o ponto $x_p = 47,2$ através de

$$d = \frac{25 \cdot (47,2 - 30)}{110 - 30} \quad (7.4)$$

$$= 5,375 \text{ cm.} \quad (7.5)$$

6. O cálculo do item acima muitas vezes não é prático. Outra possibilidade é aproximarmos a escala: tomamos x_f , x_i e m e calculamos

$$f = \frac{x_f - x_i}{m} \quad (7.6)$$

onde f representa um “fator de escala” e após o calcularmos, o arredondamos para algum dos valores seguintes: 1, 2, 2,5, 4, 5 ou 10, ou qualquer múltiplo ou submúltiplo decimal desses valores (isto é, esses números multiplicados por 10 elevado a alguma potência inteira), sempre fazendo o arredondamento para cima. A partir desse valor arredondado f' , podemos calcular a distância d entre o início do eixo e o ponto através de

$$d = \frac{x_p - x_i}{f'}. \quad (7.7)$$

7.2 Movimento retilíneo uniforme – MRU

Para um movimento unidimensional, a definição de velocidade média é dada por

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (7.8)$$

Para o caso particular em que a velocidade é constante, para qualquer intervalo de tempo tomado, a razão acima resulta no mesmo valor. Nesse caso, dizemos que a velocidade é constante, ou *uniforme*, e que a velocidade instantânea é idêntica à própria velocidade média:

$$v \equiv \langle v \rangle. \quad (7.9)$$

Explorando esse fato, podemos reescrever a Equação (7.8), obtendo

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (7.10)$$

$$\Delta x = \langle v \rangle \Delta t \quad (7.11)$$

$$= v \Delta t, \quad (7.12)$$

ou,

$$x_f = x_i + vt, \quad (7.13)$$

onde usamos $t_i \equiv 0$, $t_f \equiv t$. As variáveis x_i e x_f se referem aos valores de posição para os valores de t_i e t_f considerados, o que muitas vezes leva a notação

$$x = x_0 + at. \quad (7.14)$$

A expressão acima corresponde a uma função do tempo, uma vez que para cada valor dessa variável, temos um valor de posição distinto:

$$x(t) = x_0 + vt. \quad (7.15)$$

Comparando a equação acima com a equação de uma reta, verificamos que se fizermos um gráfico $x \times t$ — isto é, um gráfico de posição em função do tempo, ou seja um gráfico onde o eixo horizontal representa o tempo e o vertical a posição —, obteremos uma reta, como mostrado na Figura 7.2.

Evolução temporal da posição para movimentos com velocidade constante.

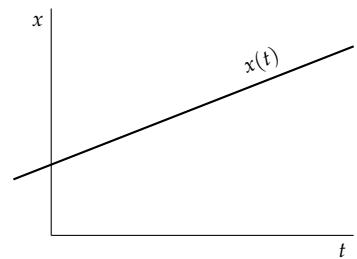


Figura 7.2: Para um movimento com velocidade constante, ao fazermos um gráfico $x \times t$ obtemos uma reta. Em particular, a figura acima representa a evolução da posição no tempo para um corpo cuja velocidade é positiva.

7.3 Movimento retilíneo uniformemente variado – MUV

Para o movimento retilíneo com aceleração constante, podemos verificar de uma maneira análoga a descrita na seção anterior que a razão

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (7.16)$$

resulta sempre no mesmo valor, e a aceleração instantânea é igual ao próprio valor da aceleração média. Isso nos permite escrever

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (7.17)$$

$$\Delta v = \langle a \rangle \Delta t \quad (7.18)$$

$$v_f = v_i + a \Delta t. \quad (7.19)$$

Note que a expressão acima indica uma variação uniforme na velocidade — isto é, uma variação linear/proportional ao tempo transcorrido —, por isso o movimento sujeito a uma aceleração constante é conhecido como *uniformemente variado*. Em particular, se escolhermos $t_i = 0$, $t_f = t$, podemos escrever

Evolução temporal da velocidade para movimentos com aceleração constante.

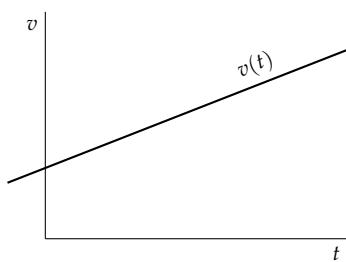


Figura 7.3: Para um movimento com aceleração constante, ao fazermos um gráfico $v \times t$ obtemos uma reta. Em particular, a figura acima representa a evolução da posição no tempo para um corpo cuja aceleração é positiva.

onde v_0 representa a velocidade quando $t = 0$. De maneira análoga ao caso anterior, comparando a equação acima com a equação da reta, verificamos que ao fazer um gráfico $v \times t$ é dado por uma reta (Figura 7.3).

Em um gráfico da velocidade em função do tempo para uma função $v(t)$ qualquer, podemos determinar o deslocamento sofrido pelo corpo cuja velocidade é descrita por tal função, em um dado intervalo de tempo, através da área delimitada pela curva $v(t)$, pelo eixo horizontal t , e pelas retas verticais que passam pelos valores t_i e t_f que delimitam o intervalo de tempo. Para o caso de um movimento que ocorre com velocidade constante, temos a área destacada na Figura 7.4. Podemos determinar uma expressão para o deslocamento ao dividir tal área em um retângulo e um triângulo, de onde obtemos A área A_1 é dada por

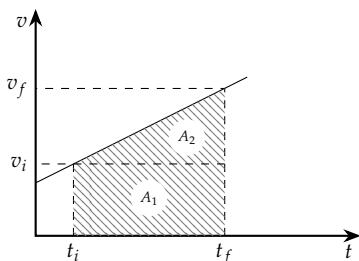


Figura 7.4: Para o caso de aceleração constante, podemos calcular a área a dividindo em um retângulo e um triângulo.

Evolução temporal da posição para aceleração constante.

$$A_1 = v_i \Delta t \quad (7.21)$$

$$A_2 = \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (7.22)$$

Logo,

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{(v_f - v_i) \Delta t}{2}. \quad (7.23)$$

Utilizando a equação $v_f = v_i + at$, e fazendo ainda $t_i = 0$ e $t_f = t$, temos

$$\Delta x = v_i t + \frac{(v_i + at - v_i)t}{2} \quad (7.24)$$

e, finalmente,

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{at^2}{2}. \quad (7.25)$$

Se escrevermos a expressão acima como uma função, temos

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (7.26)$$

onde x_0 e v_0 representam a posição e a velocidade, respectivamente, para $t = 0$. Ao fazermos um gráfico $x \times t$ da posição em função do tempo, obtemos uma *parábola* (Figura 7.5). Isso se deve ao fato de que a expressão acima segue a forma

$$y = Ax^2 + Bx + C, \quad (7.27)$$

que define a parábola.

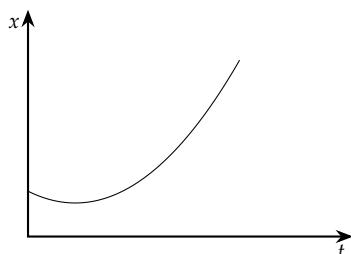


Figura 7.5: Gráfico da função $x(t)$ para o caso $a > 0$. Note que a velocidade em $t = 0$ é negativa, por isso x diminui com o passar do tempo até chegar a um valor mínimo para só então passar a aumentar.

7.4 Experimento

Como exemplos de movimento retilíneo uniforme e de movimento retilíneo uniformemente variado, vamos realizar dois experimentos simples.

O primeiro consistirá em verificar o movimento de uma esfera metálica dentro de um tubo cilíndrico transparente, sendo que o volume interno do tubo está preenchido por um fluido viscoso e transparente. O tubo está afixado a um plano inclinado articulado, de forma que podemos variar o ângulo de inclinação. Devido à força de arrasto oferecida pelo fluido, a esfera se move a uma velocidade constante. Vamos coletar dados experimentais para duas posições de referência, bem como para o tempo necessário para que a distância entre tais posições seja transcorrida pela esfera metálica. Tais dados serão utilizados para a elaboração de um gráfico, além de determinarmos a velocidade da esfera.

No segundo caso, vamos verificar o movimento de uma esfera metálica ferromagnética em queda livre, sujeita à aceleração da gravidade. Vamos coletar dados para a posição inicial e final de dois sensores óticos, além do tempo necessário para que uma esfera em queda livre transcorra a distância entre eles. A esfera é inicialmente suspensa devido a ação de um eletroímã e, após ser solta, atravessa os dois sensores óticos, sendo que o primeiro dispara um cronômetro e o segundo o para. Através dos dados, vamos elaborar um gráfico e também determinaremos a aceleração da gravidade.

7.4.1 Objetivos

1. Verificar as características do Movimento Retilíneo Uniforme – MRU através do gráfico do tempo em função do deslocamento;
2. Verificar as características do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado – MREV através do gráfico do tempo em função do deslocamento;
3. Calcular a velocidade do MRU;
4. Determinar a aceleração da gravidade no MREV;

7.5 Material Necessário

- Plano inclinado articulado com tubo lateral preenchido com fluido e dotado de esfera metálica ferromagnética livre para se mover dentro do tubo;
- Aparato de queda livre dotado de sensores óticos de movimento e de cronômetro eletrônico;
- Cronômetro manual;
- Régua (1,00 m);
- Ímã permanente.

7.5.1 Procedimento Experimental

MRU – Deslocamento da esfera no tubo com fluido viscoso:

1. Ajuste o plano inclinado para um ângulo de 30,0°;
2. Com um imã, atraia a esfera para a parte superior antes da posição 0,0 cm;
3. Zere o cronômetro;
4. Solte a esfera e inicie o cronômetro quando a ela passar pela posição 0,0 cm. Pare o cronômetro quando a ela passar pela posição final 10,0 cm. Anote os valores da posição inicial, final, e o tempo registrado pelo cronômetro na Tabela 7.2;
5. Repita este procedimento para os seguintes valores de posição final: 15 cm, 20 cm, 25 cm, 30 cm, 35 cm, 40 cm. A cada medida, anote os valores da posição inicial, final, e o tempo registrado pelo cronômetro na Tabela 7.2;
6. Ajuste o plano inclinado para um ângulo de 60°;
7. Repita os procedimentos do itens 2 a 5 e anote os dados obtidos na Tabela 7.3.

MRUV – Queda livre:

1. Ligue o cronômetro através do botão na parte de trás do aparelho;
2. Certifique-se de que o cronômetro esteja operando na função F1 e que o potenciômetro na parte de trás esteja na posição 5;
3. Ligue o eletroímã através do disjuntor;
4. Prenda a esfera no eletroímã;
5. Posicione o sensor superior de forma que ele fique muito próximo de ativar o cronômetro (erga o sensor com o cronômetro ligado e, quando o sensor ativar, desça um pouco, afixando sua posição). Verifique a posição⁴ inicial do sensor e a anote na Tabela 7.4;
6. Posicione o sensor inferior 5,00 cm abaixo do primeiro e anote o valor de sua posição⁵ na Tabela 7.4;
7. Certifique-se de que o cronômetro esteja zerado;
8. Desligue o eletroímã e anote o valor do tempo registrado pelo cronômetro para a passagem da esfera na Tabela 7.4;
9. Repita a medida de tempo mais duas vezes, anotando os resultados;
10. Desloque o sensor inferior mais 5,0 cm anotando o valor de sua nova posição na Tabela 7.4;
11. Ligue o eletroímã através do disjuntor e prenda nele a esfera;

⁴ Use a escala do próprio suporte vertical do aparato.

⁵ Novamente, use a escala do próprio suporte vertical do aparato.

12. Zere o cronômetro;
13. Desligue o eletroímã e anote o valor do tempo registrado pelo cronômetro para a passagem da esfera na Tabela 7.4, repetindo a medida mais duas vezes e anotando os resultados;
14. Repita os itens a partir do item 10 até completar a Tabela 7.4 ou não ser mais possível deslocar o sensor inferior.

Movimento retilíneo uniforme (MRU) e uniformemente variado (MRUV)

Turma: _____ Data: _____

Aluno(a): _____	Matrícula: _____

7.6 Questionário

Questão 1. (1 ponto) Apresente os resultados de maneira clara e organizada. Mostre os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, evidenciando o raciocínio desenvolvido.

Questão 2. (2 pontos) Preencha as colunas de dados experimentais das tabelas com o número adequado de algarismos significativos e unidades.

Questão 3. (2 pontos) Calcule o deslocamento Δx , o tempo médio $\langle t \rangle$, e a velocidade para dos dados das Tabelas 7.2 e 7.3. Observe o número adequado de algarismos significativos e unidades.

Questão 4. (2 pontos) Elabore em papel milimetrado um gráfico dos valores de *tempo* registrados em função do *distância* percorrida pela esfera contida no tubo do plano inclinado, isto é, com a distância no eixo *x* e o tempo no eixo *y*.⁶

Questão 5. (1 ponto) Calcule o o deslocamento Δx e o tempo médio $\langle t \rangle$ para os dados da Tabela 7.4. Considerando que a velocidade inicial da esfera no movimento de queda livre é nula, calcule a aceleração da gravidade. Observe o número adequado de algarismos significativos e unidades.

Questão 6. (2 pontos) Elabore em papel milimetrado um gráfico do *tempo* cronometrado em função da *distância* percorrida pela esfera em queda livre.⁷

⁶ Note que a variável independente em nosso experimento é o deslocamento; o tempo é nossa variável dependente.

⁷ Novamente, a variável independente é o deslocamento; o tempo é a variável dependente.

7.7 Tabelas

Dados Experimentais

x_0	x_f	t_1	t_2	t_3

Dados calculados

Δx	$\langle t \rangle$	$v = \Delta x / \langle t \rangle$

Tabela 7.2: Valores de tempo e deslocamento para o MRU para o ângulo de 30°.

Dados Experimentais

x_0	x_f	t_1	t_2	t_3

Dados calculados

Δx	$\langle t \rangle$	$v = \Delta x / \langle t \rangle$

Tabela 7.3: Valores de tempo e deslocamento para o MRU para o ângulo de 30°.

Dados Experimentais

x_0	x_f	t_1	t_2	t_3

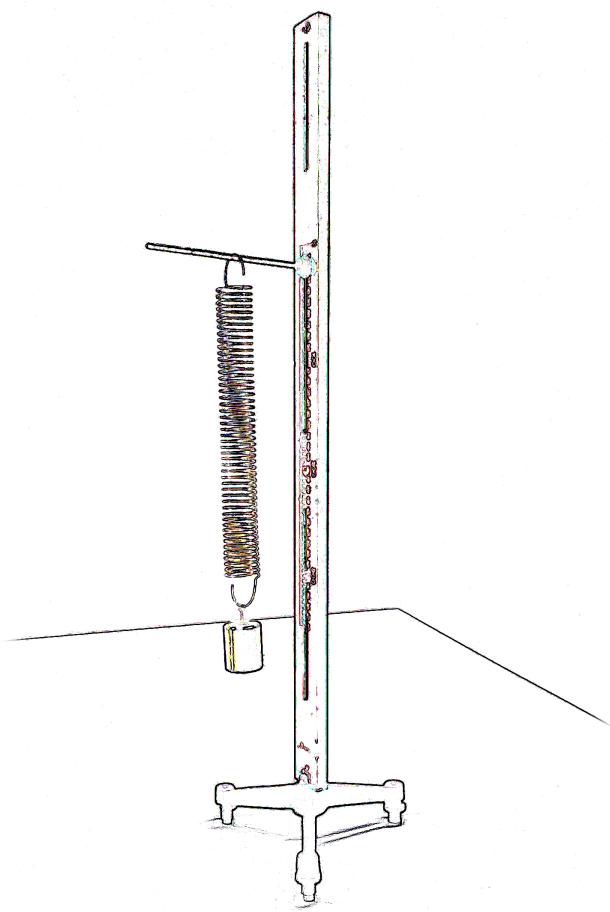
Dados calculados

Δx	$\langle t \rangle$	$g = 2\Delta x / \langle t \rangle^2$

Tabela 7.4: Dados do MRUV

Bibliografia

- Lambert, Johann Heirich. "Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung". Em: Tufte, Edward R. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001, p. 45. ISBN: 0-9613921-4-2.
- Marinelli, José Ricardo e Flavio Renato Ramos de Lima. *Laboratório de Física I*. 2^a Edição. UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. ISBN: 978-85-8030-001-7.
- Piacentini, João J. et al. *Introdução ao Laboratório de Física*. 2^a Edição. Editora da UFSC, 2001.
- Taylor, John R. *An Introduction to Error Analysis*. 2nd Edition. University Science Books, 1997. ISBN: 0-935702-75-X.
- Tufte, Edward R. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 2001. ISBN: 0-9613921-4-2.



ELABORADO USANDO L^AT_EX
DOCUMENTCLASS: TUFTE-BOOK
IMAGENS TRATADAS USANDO GIMP
FIGURAS ELABORADAS USANDO TIKZ