Darstellungsformen eines geordneten Körpers

0. Ausgangspunkt: Was ist ein geordneter Körper?

Ein *geordneter Körper* ist eine mathematische Struktur

$$(K,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1,\ <),$$

wobei

- $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist,
- $<$ eine totale Ordnung auf K ist,
- die Ordnung mit Addition und Multiplikation verträglich ist.

Wichtig ist: Ein geordneter Körper ist primär ein *Strukturbegriff*, kein Objekt einer bestimmten ontologischen Kategorie wie Zahl oder Menge.

1. Darstellung als Zahl (arithmetische Kodierung)

In der Metamathematik kann ein geordneter Körper durch eine einzelne natürliche Zahl kodiert werden, etwa mittels Gödelnummerierung.

$$\ulcorner (K, +, \cdot, 0, 1, <) \urcorner \ \in\ \mathbb{N}.$$

Dabei gilt:

- Symbole, Formeln und Axiome werden numerisch kodiert,
- die gesamte Theorie des geordneten Körpers wird auf eine Zahl abgebildet.

Schematisch:

$$\mathrm{OrdFld} \ =\ 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdots$$

Bedeutung. Diese Darstellung ist vollständig syntaktisch. Die algebraische und ordnungstheoretische Struktur ist nicht direkt sichtbar, sondern nur implizit über die Kodierung gegeben.

2. Darstellung als Menge (ZFC-Standard)

In der üblichen mengentheoretischen Grundlegung wird ein geordneter Körper als Menge mit Zusatzstruktur realisiert.

$$(K, +, \cdot, <)$$

wobei

$$\begin{aligned} + &\subseteq K \times K \times K, \\ \cdot &\subseteq K \times K \times K, \\ < &\subseteq K \times K. \end{aligned}$$

Eine mögliche formale Kodierung ist etwa:

$$\{\{0, K\}, \{1, +\}, \{2, \cdot\}, \{3, <\}\}.$$

Beispiel: Die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}\} / \sim$$

mit den üblichen Definitionen von $+$, $\cdot$ und $<$ als Mengen von Tupeln.

Bedeutung. Diese Darstellung ist mathematisch präzise und operativ, aber nicht kanonisch: Isomorphe Körper sind im Allgemeinen nicht gleich als Mengen.

3. Darstellung als Klasse (strukturelle Sicht)

3.1 Klasse aller geordneten Körper

$$\mathsf{OrdFld} = \{(K, +, \cdot, <) \mid K \text{ ist ein geordneter Körper}\}.$$

Dies ist im Allgemeinen eine echte Klasse, keine Menge.

3.2 Isomorphietyp eines Körpers

Für einen konkreten Körper, etwa $\mathbb{R}$:

$$[\mathbb{R}] = \{K \mid K \cong \mathbb{R} \text{ als geordneter Körper}\}.$$

3.3 Kategorientheoretische Sicht

In der Kategorie der geordneten Körper

$$\mathbf{OrdFld}$$

ist ein Körper kein singuläres Objekt im ontologischen Sinn, sondern ein Isomorphietyp innerhalb der Kategorie.

Bedeutung. Die Klassendarstellung abstrahiert vollständig von konkreten Implementierungen und erfasst die Struktur bis auf Isomorphie.

4. Vergleich der drei Darstellungsformen

Form	Schreibweise	Status
Zahl	$\ulcorner K \urcorner \in \mathbb{N}$	syntaktischer Code
Menge	$(K, +, \cdot, <)$	konkretes Objekt
Klasse	OrdFld, $[K]$	Strukturtyp

5. Zentrale Einsicht

Der geordnete Körper selbst ist weder Zahl, noch Menge, noch Klasse. Er ist ein *Strukturbegriff*, der je nach metatheoretischem Rahmen unterschiedlich realisiert wird:

- als Zahl: syntaktische Repräsentation,
- als Menge: implementierte Struktur,
- als Klasse: semantischer Typ.

Dies ist direkt vergleichbar mit:

- Programm als Bitstring,
- Programm als abstrakter Syntaxbaum,
- Programm als mathematische Funktion.

6. Kurzfassung

Ein geordneter Körper kann als natürliche Zahl kodiert, als strukturierte Menge implementiert oder als Klasse von isomorphen Modellen aufgefasst werden keine dieser Formen ist der geordnete Körper selbst, sondern jeweils eine Darstellung auf einer anderen Abstraktionsebene.