

Laboratório de Sistemas de Controle II

João Carlos Basilio
Marcos Vicente Moreira



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Escola Politécnica – Departamento de Eletrotécnica
2008

Capítulo 1

Introdução

Este laboratório representa a continuação do Laboratório de Sistemas de Controle I (Basilio 1999, Basilio 2002). O objetivo principal é desenvolver o projeto de um sistema de controle a partir do modelo em espaço de estados de uma planta. Assim como no laboratório de Sistemas de Controle I, a planta a ser utilizada é o grupo motor-gerador.

Apesar de utilizar uma planta específica, esse laboratório será desenvolvido de forma a permitir que os mesmos passos aqui apresentados possam ser seguidos quando do projeto de qualquer controlador, dentro de uma abordagem de espaço de estados. A única especificidade do grupo motor-gerador a ser utilizado nesse laboratório é o fato de que as variáveis de estados (grandezas) a serem utilizadas na realimentação são acessíveis, isto é, mensuráveis. Contudo, do ponto de vista didático, isto é fundamental (Basilio & Moreira 2004), pois permitirá comparar os resultados obtidos a partir de simulações com os valores reais das grandezas quando da implementação do controlador.

A estrutura desse laboratório é a seguinte:

1. Tutorial sobre a ferramenta *Real Time Windows Target* do Simulink dando ênfase à aquisição de sinais analógicos pelo computador (conversão analógica/digital) e à exportação de sinais gerados no Simulink (conversão digital/analógica) (capítulo 2).

2. Obtenção de modelos discretos equivalentes de sistemas contínuos e implementação de controladores PID digitais utilizando o *Real Time Windows Target* do Simulink (capítulo 3);
3. Desenvolvimento de um modelo em variáveis de estados do grupo motor-gerador e realização de experimentos para a identificação dos seus parâmetros (capítulo 4);
4. Projeto de controladores utilizando realimentação de estados, considerando o problema de rastreamento robusto (capítulo 5).

Capítulo 2

Utilizando o *Real-Time Windows Target* do Simulink

O objetivo deste capítulo é dar aos alunos o conhecimento necessário para trabalhar com a ferramenta *Real-Time Windows Target* do SIMULINK em um contexto de aquisição de sinais analógicos (conversão analógica/digital) e conversão de sinais de controle gerados internamente no computador em sinais analógicos a serem aplicados ao sistema a ser controlado (conversão digital/analógica). A principal motivação para esse estudo é o desenvolvimento de controladores digitais, isto é, a manipulação do sinal de erro com vistas a gerar um sinal de controle, que é o objetivo principal desse laboratório.

2.1 A placa PCI-1711

A placa de aquisição de dados utilizada nesse laboratório é a PCI-1711 (Advantech 2001) fabricada pela Advantech. Além da sua aplicação na aquisição de dados, pode ser também utilizada no controle de processos, automação industrial e em laboratórios, como o deste curso. A placa PCI-1711 pode também ser usada na aquisição e exportação de dados digitais. As suas principais características são:

1. Dezesesseis canais de entrada analógica;
2. Conversor analógico digital, sendo a taxa máxima de amostragem igual a 100 kHz;
3. Ajuste dos valores máximo e mínimo permitidos dos sinais analógicos de entrada via *software*, podendo ser definidos como: -10 a +10V, -5 a +5V, -2,5 a +2,5V, -1,25 a +1,25V e -0,625 a +0,625V;
4. Dois canais de saída analógica.

Observação 2.1 É importante ressaltar que o sinal analógico gerado a partir da placa não tem potência suficiente para atuar como sinal de controle. É necessário, portanto, passar esse sinal por um amplificador de potência. O amplificador de potência utilizado no Laboratório de Sistemas de Controle II tem as seguintes características:

1. O ganho é constante e igual a -5, sendo portanto um inversor (esse ganho deve ser levado em conta quando da implementação de um controlador em um sistema real);
2. Permite ajuste de *offset*. □

2.2 Estrutura de um programa SIMULINK para aquisição e exportação de dados

Nesta seção serão apresentadas as estruturas principais que deverão fazer parte de um modelo SIMULINK para se fazer a aquisição de dados. Essas estruturas serão definidas de acordo com as versões 7.1 do MATLAB e 6.3 (R14) do SIMULINK.

A instalação dos componentes e da biblioteca do Real Time Windows Target deve ser feita durante a instalação do MATLAB. A fim de poder usar o Real-Time Windows Target, é necessário instalar o seu Kernel no

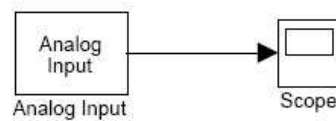


Figura 2.1: Estrutura em *SIMULINK* para a aquisição de sinais analógicos.

ambiente MATLAB. Para isso, executa-se a seguinte linha de comando no prompt do MATLAB:

```
>>rtwintgt -setup
```

Com isso instala-se o Kernel do Real-Time Windows Target. É importante ressaltar que esse comando só precisa ser executado uma única vez e somente no momento da instalação do Real-Time Windows Target.

2.2.1 Aquisição de dados

Para se fazer a aquisição de sinais analógicos, deve-se construir um diagrama de blocos em *SIMULINK* contendo os blocos mostrados na figura 2.1. O bloco **Analog Input** faz parte da biblioteca **Real-Time Windows Target** do *SIMULINK*. O bloco **Scope**, que faz parte da biblioteca **Sink** do *SIMULINK*, é utilizado apenas para a visualização do sinal de entrada e armazenamento dos pares ordenados tempo \times valor do sinal. Desta forma, este bloco não precisa, necessariamente, fazer parte do diagrama de blocos *SIMULINK* para aquisição de dados analógicos.

Para que se possa fazer a aquisição dos dados pelo *SIMULINK* é necessário primeiro configurar o bloco **Analog Input**. A janela de configuração do bloco **Analog Input** pode ser vista na figura 2.2.

Esta janela deve ser ajustada da seguinte forma:

- Pressionar o botão **Install new board**;

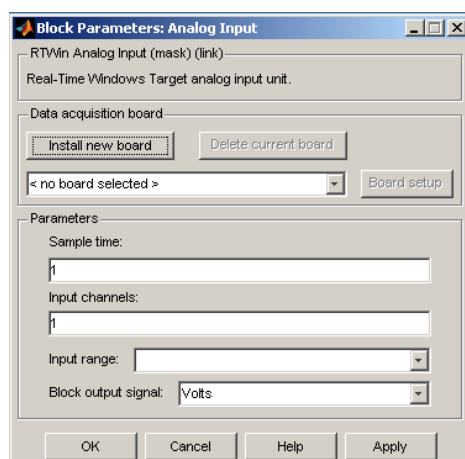


Figura 2.2: Janela do bloco Analog Input do SIMULINK.

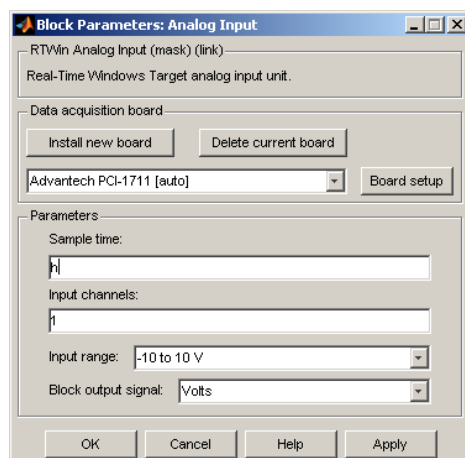


Figura 2.3: Janela configurada do bloco Analog Input do SIMULINK.

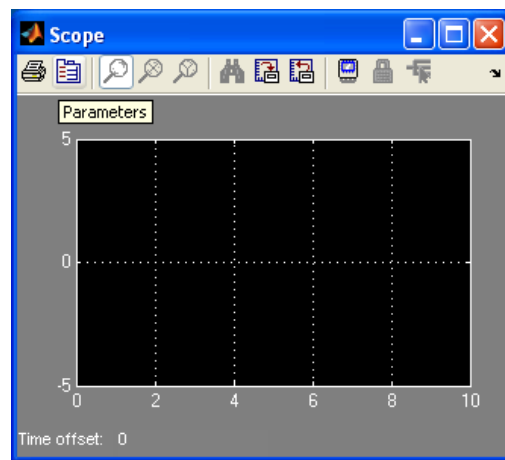


Figura 2.4: Janela do Scope.

- Escolher o driver da placa a ser utilizada: PCI-1711;
- Escolher o período de amostragem h , lembrando-se que a frequência de amostragem máxima é de 100kHz.
- Escolher o canal entre 1 a 16 a ser utilizado para aquisição do sinal.
- Selecionar o intervalo de amplitude da entrada. Esta escolha é importante uma vez que permite o aumento da resolução da medida.

A figura 2.3 mostra a janela de configuração do bloco **Analog Input** com as configurações mencionadas.

O **Scope** é utilizado para: (i) visualizar graficamente os sinais cujas aquisições estão sendo realizadas; (ii) armazenar os valores dos sinais em variáveis que podem ser utilizadas no MATLAB. Para se ajustar o **Scope** procede-se da seguinte forma:

- Clicar no bloco **Scope** e abrir a janela mostrada na figura 2.4.
- Escolha o botão **parameters** e abrir a janela da figura 2.5.

- Escolher a opção `Data history`.
- Ajustar o número de linhas da matriz que armazenará os dados lidos de acordo com o intervalo de amostragem, levando-se em conta possíveis limitações de memória. Por exemplo, se o intervalo de amostragem é igual a $1ms$ e se serão feitos apenas $5s$ de aquisição de dados, então a matriz onde os dados serão armazenados deve ter 5000 linhas, conforme mostra a figura 2.5.
- Utilizar variável do tipo *structure* para armazenar os dados e dar um nome a essa variável. O primeiro campo dessa variável é o tempo e o segundo campo é o valor do sinal em cada instante. Na figura 2.5, os valores lidos serão armazenados na variável `tet`. Para se recuperar os instantes de amostragem e os respectivos valores, o seguinte comando Matlab deve ser utilizado:

```
>> t=tet.time; et=tet.signals.values;
```

2.2.2 Exportação de dados

Para a exportação dos dados gerados no computador utilizando-se o SIMULINK, deve-se construir um programa que contém os blocos indicados na figura 2.7. O bloco **Analog Out** faz parte da biblioteca **Real-Time Windows Target** do SIMULINK, enquanto o bloco **Sine Wave** faz parte da biblioteca **Source**, sendo utilizado para gerar um sinal senoidal. Deve ser ressaltado que, não necessariamente, deseja-se gerar um sinal senoidal e, por essa razão, esse bloco pode ser substituído por outro que realize a operação desejada. Assim sendo, somente o bloco **Analog Out** é realmente necessário no processo de exportação de dados. A figura 2.6 mostra a janela de configuração do bloco **Analog Output** já configurado.

2.2 Estrutura de um programa SIMULINK para aquisição e exportação de dados

9

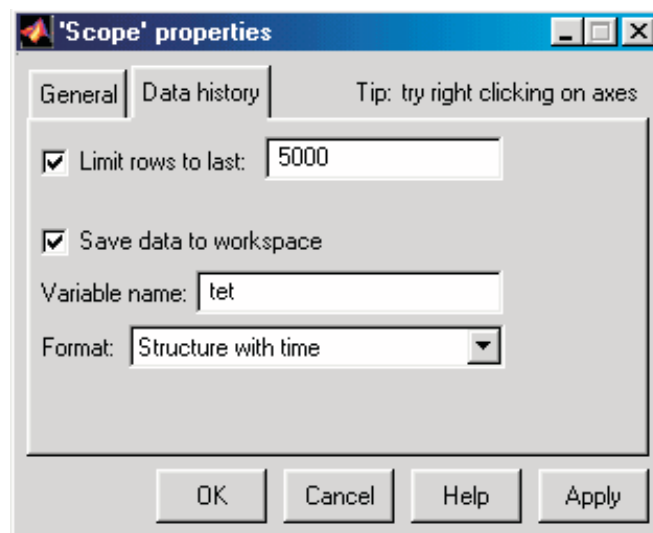


Figura 2.5: Janela para ajuste dos parâmetros do Scope.

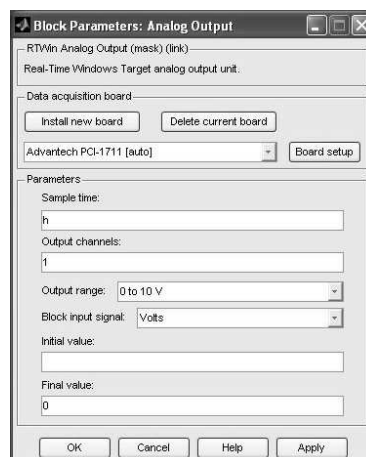


Figura 2.6: Janela configurada do bloco Analog Output do SIMULINK.

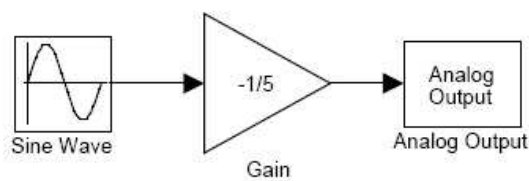


Figura 2.7: Estrutura em SIMULINK para a exportação de dados e conversão em sinais analógicos.

Note, ainda, na figura 2.7 que o ganho do bloco **Gain** foi ajustado em $-1/5$. Isto se deve ao fato de que como o amplificador de potência tem ganho -5 , então o sinal interno deve ser dividido por -5 .

2.2.3 Ajustes finais e compilação

Para a utilização do Real-Time Windows Target é necessário que seja instalado o programa Watcom, que é um compilador capaz de gerar um código fonte na linguagem C a partir da estrutura de blocos definida no SIMULINK. Assim, supondo que o programa Watcom tenha sido instalado corretamente, deve-se seguir os seguintes passos:

1. Escolher o compilador a ser usado no Real-Time Windows Target:
 - No menu **Tools**, escolher a opção **Real-Time Windows Target -> Options**. Será então aberta uma janela idêntica à mostrada na figura 2.8 com as opções **Solver**, **Workspace I/O**, **Diagnostics** e **Real-Time Workshop**.
 - Clicar em **Browse** e selecionar o compilador **rtwin.tlc - Real Time Windows Target** e selecionar **Apply** ou **Close**.

Ao final desses passos, a janela deve tornar-se igual à da figura 2.8.

2. Definir os parâmetros da aquisição e do método numérico a ser adotado na discretização

2.2 Estrutura de um programa SIMULINK para aquisição e exportação de dados

11

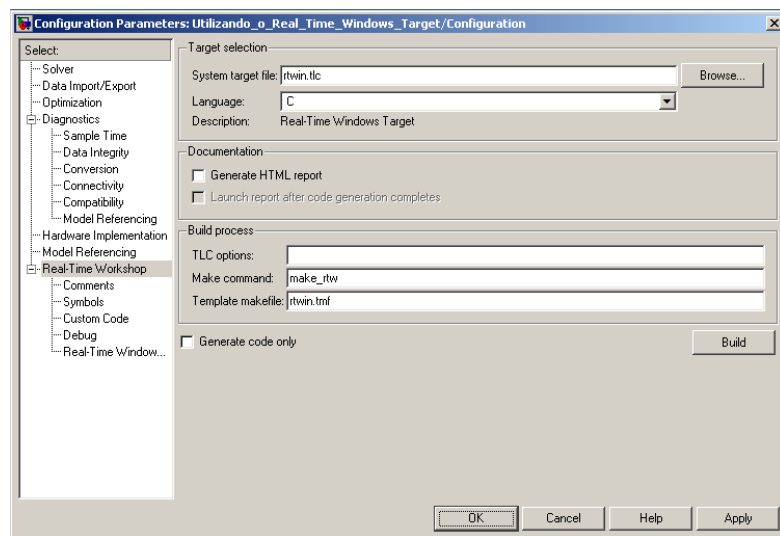


Figura 2.8: Janela para escolha do compilador a ser usado no Real-Time Windows Target.

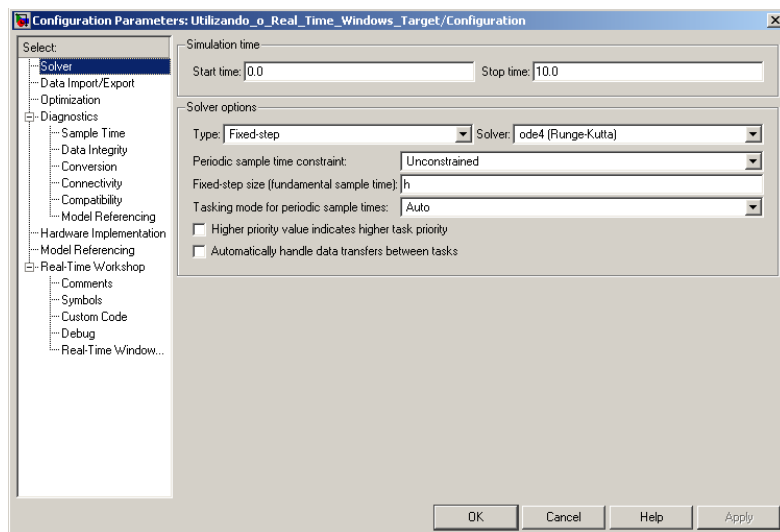


Figura 2.9: Janela para definição do tempo de simulação e do método numérico adotado para o Solver.

- Escolher, agora, a opção **Solver**, que fará aparecer uma janela como aquela mostrada na figura 2.9.
- Escolher os tempos inicial e final de aquisição, **Start time** e **Stop time**, respectivamente.
- Definir o método numérico a ser usado na solução das equações diferenciais. Para tanto, deve-se atribuir **Fixed step** para **Type** e, em seguida, definir **Fixed step size** igual a **h** (neste caso o intervalo de amostragem deve ser definido no **Workspace** do MATLAB) e, por último, selecionar **ode4 (Runge-Kutta)**.
- Escolher para **Mode** a opção **Single tasking**.

Ao final desses passos, deve ser obtida uma janela idêntica àquela da figura 2.9.

3. Gerar o arquivo **.c** e compilar. Para tanto, clicar na opção **Tools** no topo da tela e selecionar **Real-Time Windows Target -> Build Model**.
4. Ajustar o painel de controle
 - Clicar na opção **Tools** no topo da tela e selecionar **External model control panel**. Uma janela como a mostrada na figura 2.10(a) deverá aparecer.
 - Escolher a opção **Signal & triggering**, que fará aparecer uma janela como aquela mostrada na figura 2.10(b).
 - Escolher um dos osciloscópios listados (**Scope**), clicar nele e, em seguida, apertar o botão **Trigger signal**.
 - Selecionar **Source = manual**, **Mode = normal** e definir a opção **Arm when connected to target**.
 - Escolher o número de pontos amostrados **Duration** em função do tempo total de aquisição (tempo final menos tempo inicial) e do intervalo de amostragem.

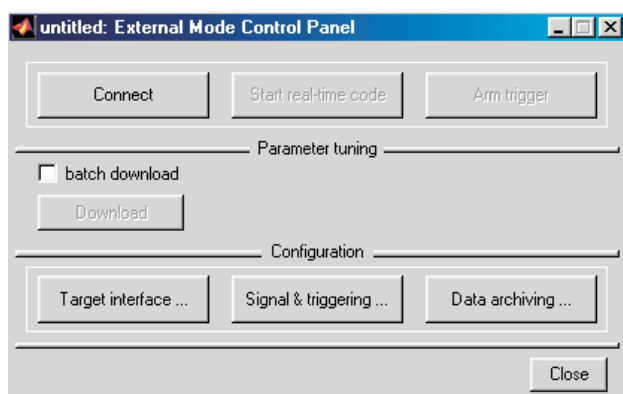
Ao final desses passos, a janela deve ficar semelhante a da figura 2.10(b).

2.2.4 Execução em tempo real

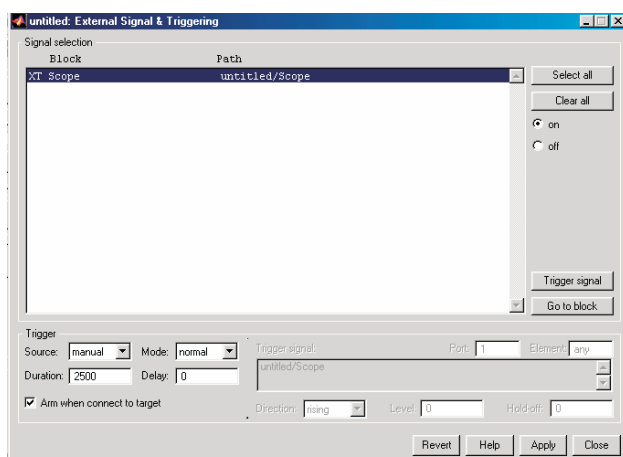
Um vez que a compilação tenha sido realizada e não tendo sido encontrados erros, pode-se, então, fazer a aquisição e exportação de dados. Para tanto, deve-se selecionar a opção **Simulation** no topo da janela do SIMULINK e escolher, na ordem apresentada, as seguintes opções:

- **External**
- **Connect to target**
- **Start real time code**

Observação 2.2 A execução do programa em tempo real terminará de acordo com o instante definido para o tempo final de simulação (**Stop time**). Caso o usuário defina **Stop time = inf** o programa continuará sendo executado indefinidamente. Quando for este o caso, a execução do programa pode ser terminada escolhendo-se a opção **Stop real time code**. □



(a)



(b)

Figura 2.10: Janelas para ajuste do painel de controle.

2.3 Experimentos

2.3.1 Objetivo

Os experimentos propostos a seguir têm como objetivo capacitar o aluno a fazer programas em SIMULINK para realizar a aquisição de sinais analógicos e a exportação de sinais gerados no interior de um programa SIMULINK.

2.3.2 Experimento 1

Neste experimento, o aluno fará a aquisição de um sinal produzido por um gerador de funções. Para tanto, deve proceder da seguinte forma:

1. Utilizando um osciloscópio, faça os ajustes necessários para que na saída do gerador de funções seja obtido uma senóide de frequência e amplitude aproximadamente iguais a $2Hz$ e $4,5V$, respectivamente.
2. Conecte a saída do gerador de funções ao canal 1 da placa. Defina como intervalo de amostragem $h = 1ms$.
3. Construa um diagrama de blocos SIMULINK como o da figura 2.1, armazenando os valores obtidos ao final da aquisição na variável `tet`.
4. Compare o sinal obtido com aquele mostrado na tela do osciloscópio real. Apresente conclusões qualitativas e quantitativas.

2.3.3 Experimento 2

Neste experimento, o aluno fará a exportação de um sinal gerado a partir de um programa SIMULINK. Isso será feito em duas etapas. Na primeira etapa será feito o ajuste do *offset* do amplificador de potência de tal sorte que as referências interna e externa estejam, ambas, em zero; isso é necessário tendo em vista que, conforme mostrado na seção 2.2.2 a saída analógica da placa tem um offset de $+5V$. Na segunda etapa será feita a

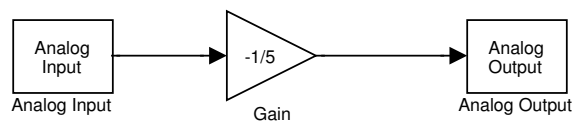


Figura 2.11: Estrutura em SIMULINK para a exportação de dados e conversão em sinais analógicos.

exportação do sinal gerado por uma fonte dentro do diagrama de blocos do SIMULINK. Para tanto, o aluno deve proceder da seguinte forma:

1. Construa um diagrama de blocos em SIMULINK como aquele mostrado na figura 2.7.
2. Ajuste a função senoidal para que esta tenha amplitude nula e frequência igual a $1Hz$.
3. Ajuste o intervalo de amostragem em $1ms$.
4. Conecte a saída 2 da placa à entrada do amplificador de potência.
5. Conecte a saída do amplificador de potência a um osciloscópio.
6. Ajuste o *offset* do amplificador de potência de modo que o valor médio da tensão de saída seja da ordem de miliVolts.
7. Modifique a amplitude da função senoidal para $4,5V$;
8. Compare o sinal gerado com aquele mostrado na tela do osciloscópio real. Apresente conclusões qualitativas e quantitativas.

2.3.4 Experimento 3

Neste experimento, o aluno irá fazer a aquisição e, em seguida, a exportação, de um sinal gerado a partir de um gerador de funções. Para tanto, o aluno deve proceder como se segue:

1. Conecte a saída do gerador de funções (com o mesmo sinal utilizado no experimento 1) ao canal 10 da placa de aquisição de dados e ao canal 1 do osciloscópio.
2. Construa um diagrama de blocos em SIMULINK como aquele mostrado na figura 2.11.
3. Conecte a saída da placa de aquisição de dados à entrada do amplificador de potência e a saída deste ao canal 2 do osciloscópio.
4. Defina como intervalo de amostragem $h = 1ms$.
5. Compare os sinais obtidos nos canais 1 e 2 do osciloscópio. Apresente conclusões qualitativas e quantitativas.
6. Defina, agora, como intervalo de amostragem $h = 20ms$.
7. Compare os sinais obtidos nos canais 1 e 2 do osciloscópio. O que aconteceu? Apresente conclusões qualitativas e quantitativas.

Capítulo 3

Modelo discreto equivalente de um sistema contínuo no tempo

Neste capítulo serão desenvolvidos modelos a tempo-discreto (denominado neste laboratório como modelo discreto) equivalentes de modelos a tempo-contínuo (aqui referidos como modelos contínuos) de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT). O objetivo desse desenvolvimento é possibilitar que controladores projetados utilizando técnicas de projeto de sistemas contínuos possam ser implementados em computadores digitais. Este capítulo está estruturado da seguinte forma. Na seção 3.1 serão obtidas as equações a diferenças lineares para implementação em computadores digitais de controladores proporcional(P), integral(I) e derivativo(D) e, também, de controladores PI e PID. Na seção 3.2 será apresentado um roteiro das atividades a serem desenvolvidas no laboratório.

3.1 Implementação digital de controladores PID

3.1.1 Controladores PID

Controladores PID (proporcional+integral+derivativo) são amplamente utilizados em sistemas de controle industriais devido ao reduzido número de parâmetros a serem ajustados. O sinal de saída (sinal de controle) dos controladores PID é proporcional ao sinal de erro (ação proporcional), à integral do erro (ação integral) e à derivada do erro (ação derivativa). Matematicamente, tem-se:

$$u(t) = u_p(t) + u_I(t) + u_D(t) \quad (3.1a)$$

onde

$$u_p(t) = K_p e(t) \quad (3.1b)$$

$$u_I(t) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda \quad (3.1c)$$

$$u_D(t) = K_p T_d \frac{d}{dt} e(t). \quad (3.1d)$$

Na prática, contudo, a implementação da parcela derivativa traz alguns problemas. Note, inicialmente, que

$$e(t) = r(t) - \hat{y}(t), \quad (3.2)$$

onde $r(t)$ denota o sinal de referência e $\hat{y}(t)$ a saída controlada (medida pelo sensor), e, portanto, para um sinal de referência do tipo degrau (o que é mais usual na prática), tem-se que em $t = 0$ a parcela derivativa terá um valor excessivamente alto e, instantes depois, dependerá somente de $\hat{y}(t)$, uma vez que $r(t)$ torna-se constante. Assim, é mais realístico considerar somente a derivada em relação a $\hat{y}(t)$, fazendo com que a equação (3.1d)

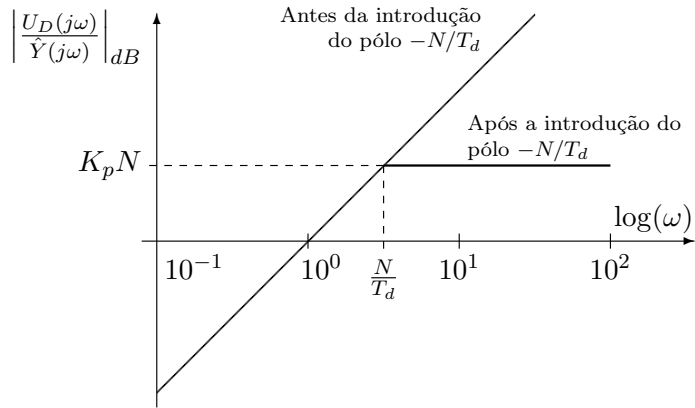


Figura 3.1: Diagramas de módulo de Bode de $U_D(s)/\hat{Y}(s)$ antes e depois da introdução de um pólo em $s = -N/T_d$.

assuma a seguinte forma:

$$u_D(t) = -K_p T_d \frac{d}{dt} \hat{y}(t) \quad (3.3)$$

A forma apresentada na equação (3.3) pode, ainda, trazer problemas de implementação. Conforme foi observado no Laboratório de Sistemas de Controle I, o sinal medido é corrompido por ruídos introduzidos pelo sensor. Assim, $\hat{y}(t) = y(t) + \eta(t)$, onde $\eta(t)$ denota o sinal de ruído, que, geralmente, é um sinal com componentes de altas frequências. Para entender o problema de implementação da componente derivativa da lei de controle como apresentada na equação (3.3), suponha que o sinal de ruído seja dado por $A \cos(\omega t)$, onde $\omega \gg 0$. Logo, a contribuição do sinal de ruído para a lei de controle será dada por:

$$u_n(t) = K_p T_d A \omega \text{Sen}(\omega t). \quad (3.4)$$

A partir da equação (3.4), é fácil perceber que a amplitude do sinal de controle é arbitrariamente elevada se o ruído possui uma frequência suficientemente elevada. Para solucionar esse problema, deve-se limitar a amplificação dos sinais de alta frequência. Para entender o que deve ser

feito, note que a função de transferência do sistema derivador descrito pela equação (3.3) é dada por:

$$\frac{U_D(s)}{\hat{Y}(s)} = -K_p T_d s. \quad (3.5)$$

O diagrama de módulo de Bode (assíntotas) desse sistema está mostrado na figura 3.1, de onde se observa que, pelo fato de somente possuir um zero em $s = 0$, haverá somente uma assíntota com inclinação de 20dB/dec. Para contornar esse problema introduz-se um pólo em $s = -N/T_d$, onde N/T_d deve ser maior ou igual a 10 vezes a parte real do pólo da planta mais afastado do eixo imaginário. Na prática, contudo, o valor de N usualmente adotado é igual a 10. Assim, a função de transferência adotada para a implementação da parcela derivativa será dada por:

$$\frac{U_D(s)}{\hat{Y}(s)} = -\frac{K_p T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}, \quad (3.6)$$

cujo diagrama de módulo de Bode está também mostrado na figura 3.1, onde $G(s)$ denota a função de transferência da planta, $R(s)$, $U(s)$, $Y(s)$, $\hat{Y}(s)$ e $N(s)$ denotam, respectivamente, as transformadas de Laplace dos sinais de referência, controle, saída, saída observada e ruído de medição.

Considerando, então, as transformadas de Laplace das parcelas proporcional e integral dadas nas equações (3.1b) e (3.1c) e juntando a elas a equação (3.6), tem-se que transformada de Laplace do sinal de controle será dada por:

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - \frac{K_p T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \hat{Y}(s). \quad (3.7)$$

Assim, na prática, a implementação de um controlador PID será feita de acordo com o diagrama de blocos da figura 3.2.

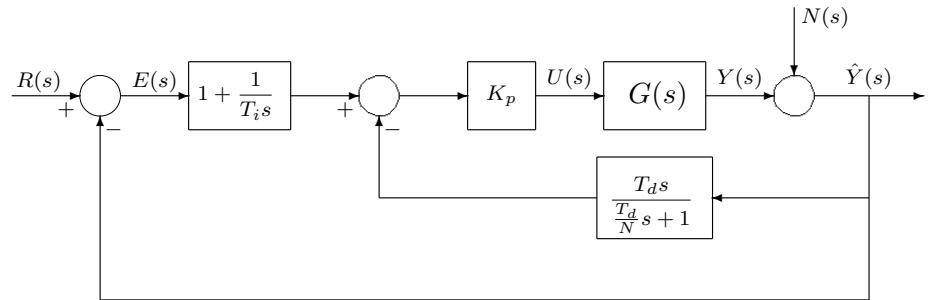


Figura 3.2: Diagrama de blocos para implementação de um controlador PID na prática.

3.1.2 Equações a diferenças lineares para as parcelas proporcional, integral e derivativa

O objetivo dessa seção é obter um modelo discreto (equação a diferenças linear) equivalente ao modelo a tempo-contínuo dado pela equação (3.7).

Considere, inicialmente a ação proporcional. Substituindo-se $t = t_k$ na equação (3.1b), resulta:

$$u_p(t_k) = K_p e(t_k), \quad (3.8)$$

que representa a equação a diferenças linear desejada.

Considere, agora, a ação integral. Fazendo $t = t_k$ na equação (3.1c), obtém-se:

$$u_I(t_k) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^{t_k} e(t) dt.$$

Note que a integral da equação acima pode ser escrita como a soma de duas integrais: a primeira de 0 a t_{k-1} e a segunda de t_{k-1} até t_k . Portanto, a equação acima é equivalente a:

$$u_I(t_k) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^{t_{k-1}} e(t) dt + \frac{K_p}{T_i} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e(t) dt. \quad (3.9)$$

É imediato visualizar que a primeira parcela do lado direito da equação (3.9) representa $u_I(t_{k-1})$ e que a segunda parcela representa a área sob

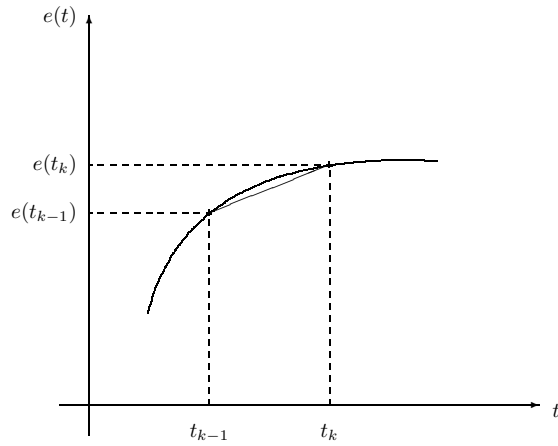


Figura 3.3: Representação gráfica para cálculo da área sob o sinal $e(t)$ entre os instantes t_{k-1} e t_k .

a curva $e(t)$ entre os instantes t_{k-1} e t_k , conforme mostrado na figura 3.3. Desta forma, o equivalente discreto da segunda parcela dependerá da aproximação que se deseja para a integral. Uma aproximação bastante utilizada é a chamada regra do trapézio, isto é:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} e(t)dt \approx \frac{e(t_{k-1}) + e(t_k)}{2}(t_k - t_{k-1}) = \frac{h}{2}[e(t_{k-1}) + e(t_k)], \quad (3.10)$$

onde h denota o intervalo de amostragem. Conseqüentemente, a equação (3.9) pode ser escrita como:

$$u_I(t_k) = u_I(t_{k-1}) + \frac{K_p h}{2T_i}[e(t_{k-1}) + e(t_k)]. \quad (3.11)$$

Uma vez obtida a equação a diferenças linear referente à parcela integral, o próximo passo é a obtenção do modelo a tempo-discreto da componente derivativa. Para tanto, considere, inicialmente, a equação (3.3). Observe que essa equação pode ser re-escrita como:

$$\hat{y}(t) = -\frac{1}{K_p T_d} \int_0^t u_D(\lambda) d\lambda, \quad (3.12)$$

onde, por hipótese, $\hat{y}(0) = 0$, sem perda de generalidade. Assim, por um procedimento idêntico ao realizado para obter a equação a diferenças linear da parcela integral, resulta:

$$u_D(t_k) = -u_D(t_{k-1}) - \frac{2K_p T_d}{h} [\hat{y}(t_k) - \hat{y}(t_{k-1})]. \quad (3.13)$$

Embora não seja a equação a ser usada na implementação da parte derivativa do controlador, a equação (3.13), juntamente com a equação (3.11), irá fornecer uma importante relação a ser aplicada diretamente à equação (3.6). Para tanto, note que as funções de transferência para os modelos a tempo-contínuo do integrador e do derivador (sem saturação nas altas frequências) são dadas por:

$$\frac{U_I^c(s)}{E^c(s)} = \frac{K_p}{T_i s} \quad (3.14a)$$

e

$$\frac{U_D^c(s)}{\hat{Y}^c(s)} = -K_p T_d s, \quad (3.14b)$$

onde o superescrito c foi introduzido para indicar que se refere a tempo-contínuo.

Calculando, agora, as funções de transferências para os modelos a tempo-discreto do integrador e do derivador, dados, respectivamente, pelas equações (3.11) e (3.13), obtém-se:

$$\frac{U_I^d(z)}{E^d(z)} = \frac{K_p}{T_i} \frac{h(z+1)}{2(z-1)} \quad (3.15a)$$

e

$$\frac{U_D^d(z)}{\hat{Y}^d(z)} = -K_p T_d \frac{2(z-1)}{h(z+1)}, \quad (3.15b)$$

onde o superescrito d foi utilizado para indicar que se refere a tempo-discreto.

Comparando as equações (3.14a) e (3.15a) e as equações (3.14b) e (3.15b), vê-se que as funções de transferências (3.15a) e (3.15b) poderiam ser obtidas diretamente das equações (3.14a) e (3.14b) fazendo-se a

seguinte substituição:

$$s = \frac{2}{h} \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (3.16)$$

que é conhecida como transformação bilinear ou Regra de Tustin.

Desta forma, substituindo s definido de acordo com a equação (3.16) na equação (3.6) e após manipulações algébricas simples, tem-se que a função de transferência discreta a ser implementada na prática é:

$$\frac{U_D^d(z)}{\hat{Y}^d(z)} = -\frac{2K_p T_d N (z - 1)}{(2T_d + Nh)z + (Nh - 2T_d)}. \quad (3.17)$$

Observe que, fazendo $N \rightarrow \infty$ na equação acima, obtém-se a equação (3.15b), conforme era de se esperar.

Assim, a equação a diferenças lineares utilizada para implementar a parcela derivativa na prática será dada por:

$$u_D(t_k) = \frac{2T_d - Nh}{2T_d + Nh} u_D(t_{k-1}) - \frac{2K_p T_d N}{(2T_d + Nh)} [\hat{y}(t_k) - \hat{y}(t_{k-1})] \quad (3.18)$$

3.1.3 Equação a diferenças linear para um controlador PID

A implementação digital de controladores PID pode ser feita de duas formas:

1. Diretamente a partir das equações a diferenças lineares (3.8), (3.11) e (3.18). Neste caso, partindo de uma condição inicial nula, isto é, $u_p(t_0) = u_I(t_0) = u_D(t_0) = 0$ calcula-se:

$$u_p(t_k) = K_p e(t_k), \quad (3.19a)$$

$$u_I(t_k) = u_I(t_{k-1}) + \frac{K_p h}{2T_i} [e(t_{k-1}) + e(t_k)], \quad (3.19b)$$

$$u_D(t_k) = \frac{2T_d - Nh}{2T_d + Nh} u_D(t_{k-1}) - \frac{2K_p T_d N}{2T_d + Nh} [\hat{y}(t_k) - \hat{y}(t_{k-1})] \quad (3.19c)$$

e, em seguida, obtém-se

$$u(t_k) = u_p(t_k) + u_I(t_k) + u_D(t_k) \quad (3.19d)$$

para $k = 1, 2, \dots$

2. Usando a transformação bilinear (3.16) diretamente na equação (3.7), resulta:

$$U^d(z) = K_p E^d(z) + \frac{K_p h(z+1)}{2T_i(z-1)} E^d(z) - \frac{2K_p T_d N(z-1)}{(2T_d + Nh)z + (Nh - 2T_d)} \hat{Y}^d(z). \quad (3.20)$$

Realizando manipulações algébricas simples na equação acima e, em seguida, calculando a transformada \mathcal{Z} inversa, obtém-se:

$$\begin{aligned} u(t_k) = & \frac{Nh - 2T_d}{2T_d + Nh} u(t_{k-2}) + \frac{4T_d}{2T_d + Nh} u(t_{k-1}) \\ & + \frac{K_p}{2T_i} \left[\frac{2T_i + h}{2T_d + Nh} \right] e(t_k) \\ & + \frac{K_p}{T_i} \left[\frac{Nh^2 - 4T_d T_i}{2T_d + Nh} \right] e(t_{k-1}) \\ & + \frac{K_p}{2T_i} \left[\frac{Nh^2 - 2hT_d - 2T_i Nh + 4T_d T_i}{2T_d + Nh} \right] e(t_{k-2}) \\ & - \frac{2K_p T_d N}{2T_d h + Nh} [\hat{y}(t_k) - 2\hat{y}(t_{k-1}) + \hat{y}(t_{k-2})]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Observação 3.1 Outros controladores muito utilizados na prática são os controladores PI e PD, cujas equações a diferenças lineares são obtidas diretamente a partir da equação (3.20), conforme será mostrado a seguir.

(a) Equação a diferenças linear para o controlador PI

$$u(t_k) = u(t_{k-1}) + \frac{K_p}{2T_i} [(2T_i + h)e(t_k) + (h - 2T_i)e(t_{k-1})]. \quad (3.22)$$

(b) Equação a diferenças linear para o controlador PD.

$$\begin{aligned} u(t_k) = & \frac{2T_d - Nh}{2T_d + Nh} u(t_{k-1}) + K_p \left[e(t_k) + \frac{Nh - 2T_d}{2T_d + Nh} e(t_{k-1}) \right] + \\ & - \frac{2K_p T_d N}{2T_d + Nh} [y(t_k) - y(t_{k-1})]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

□

3.2 Experimentos a serem desenvolvidos no laboratório

3.2.1 Objetivo

O objetivo desse experimento é implementar um controladores PI utilizando o Real-Time Windows Target do Simulink.

3.2.2 Preparatório

Considere o modelo de primeira ordem do motor CC dado por:

$$V_t = \frac{\bar{K}}{\tau s + 1} V_a, \quad (3.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{K} &= 1,2592, \\ \tau &= 0,21s. \end{aligned}$$

Considere também a função de transferência do controlador PI:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (3.25)$$

onde $T_i = 1/F_i$.

Assim, a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$H(s) = \frac{\bar{K} K_p (s + F_i) / \tau}{s^2 + \left(\frac{1 + \bar{K} K_p}{\tau} \right) s + \bar{K} K_p F_i / \tau} \quad (3.26)$$

A função de transferência padrão de um sistema de 2ª ordem sem zeros finitos é dada por:

$$H(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}. \quad (3.27)$$

Para o sistema representado pela equação (3.27) sabe-se que:

$$t_s = \frac{4}{\zeta w_n}$$

$$PO = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\%$$

Simule o sistema realimentado com o controlador PI para uma entrada igual a um degrau aplicado em 2s, com valor inicial de 3V, e valor final de 5V, atendendo às seguintes especificações:

$$PO \leq 10\%$$

$$t_s \leq 2s.$$

É importante ressaltar que o sinal de controle satura em 15V devido ao amplificador.

3.2.3 Implementação do controlador PI

Neste caso, deve-se construir um diagrama de blocos Simulink correspondente ao diagrama da figura 3.4. Note que $\hat{y}(t_k)$ é obtida a partir da aquisição do sinal de saída do tacômetro e deve ser importado para o computador, $r(t_k)$ deve ser gerado internamente e $u(t_k)$ deve ser exportado, passando pelo amplificador de potência, antes de chegar ao motor. Assim, devem ser inseridos, além dos blocos necessários para a implementação da equação a diferenças linear do controlador PI, todos aqueles necessários para a aquisição e exportação de sinais.

Um aspecto importante a ser lembrado quando da construção do diagrama de blocos Simulink para o sistema da figura 3.4 é quanto à necessidade de se colocar um bloco MUX na entrada do bloco de função **Fcn**. Isto se deve ao fato do bloco **Fcn** possuir uma única entrada; embora essa entrada possa também ser um vetor. Assim ao implementar a função deve-se associar $u(t_{k-1})$ a $u(1)$, $e(t_k)$ a $u(2)$ e $e(t_{k-1})$ a $u(3)$.

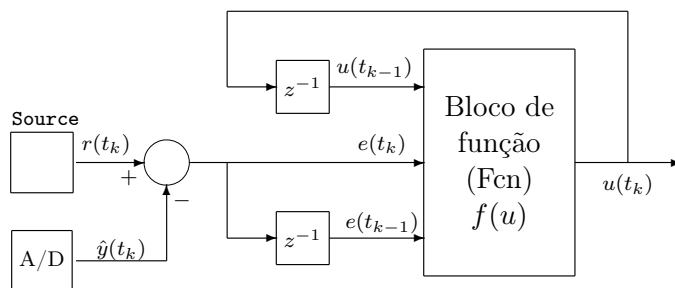


Figura 3.4: Diagrama de blocos para implementação de um controlador PI utilizando o Simulink

Uma vez construído o diagrama de blocos do Simulink, execute os seguintes passos:

1. Atribua aos valores de K_p e T_i , aqueles obtidos a partir do preparatório;
2. Defina como tempo total de simulação 5s e como intervalo de amostragem 1ms;
3. Aplique um degrau em 1s com valor inicial de 3V e valor final de 5V;

Obtida a resposta, responda as seguintes questões:

1. Houve rastreamento do sinal de referência?
2. Qual a velocidade final do motor?
3. Por que foi necessário definir um degrau com valor inicial de 3V?

Finalmente, determine, aproximadamente:

1. O tempo de subida;
2. O percentual de ultrapassagem;
3. O tempo de pico;
4. O tempo de acomodação da resposta.

Capítulo 4

Identificação dos parâmetros do motor

Assim como no Laboratório de Sistemas de Controle I (Basilio 1999), na disciplina de Laboratório de Controle II, o motor será adotado como a planta a ser controlada. Também aqui, a variável a ser controlada é a velocidade angular do eixo do motor. O enfoque, contudo, é diferente, uma vez que o objetivo agora é desenvolver um projeto de um sistema de controle que envolve técnicas de variáveis de estado. Para tanto, será desenvolvido um novo modelo matemático para o motor (modelo linear de segunda ordem) levando em consideração também o estado interno do sistema.

Neste capítulo, experimentos para a obtenção de todos os parâmetros do modelo de um motor CC controlado pela armadura serão apresentados. A estrutura do capítulo é a seguinte. Na seção 4.1 será apresentado o desenvolvimento matemático para a obtenção das equações dinâmicas de um modelo a tempo-discreto, a partir das equações dinâmicas de um modelo a tempo-contínuo, de um sistema linear invariante no tempo (SLIT). Na seção 4.2 será desenvolvido um modelo matemático para um motor CC controlado pela armadura, em que as variáveis de estado adotadas são a corrente de armadura e a velocidade angular do motor. Na seção 4.3

será proposto um experimento para a determinação da região linear de operação do motor, o que permitirá definir a faixa de valores de tensão de entrada que deve ser utilizada nos experimentos para a obtenção dos parâmetros do modelo linear. Na seção 4.4 será apresentado um experimento para a determinação dos ganhos K_g e K_a e, finalmente, na seção 4.5 serão descritos os experimentos que devem ser realizados para determinar os parâmetros R_a , L_a , J e f .

4.1 Equações dinâmicas de um modelo discreto equivalente a um modelo a tempo-contínuo

Suponha, inicialmente, que o modelo por variáveis de estados de um SLIT a tempo-contínuo seja dado por:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \\ y(t) &= \underline{c}\underline{x}(t) + du(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

O objetivo do estudo a ser realizado agora é saber como esse sistema se comporta em dois instantes consecutivos de amostragem (t_k e t_{k+1}) espaçados no tempo por um intervalo (h), isto é, $h = t_{k+1} - t_k$, denominado intervalo de amostragem. Suponha, ainda, que seja utilizado um bloqueador (conversor digital-analógico ou, simplesmente D/A) de ordem zero, isto é:

$$u(t) = u(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (4.2)$$

Assim, deseja-se obter uma nova descrição para o sistema descrito pela equação (4.1) que represente o comportamento do sistema nos instantes de amostragem t_k e t_{k+1} , ou seja,

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \Phi\underline{x}(t_k) + \underline{\gamma}u(t_k) \quad (4.3)$$

e a relação entre os estados e a saída. É fácil verificar que fazendo-se $t = t_k$ na equação de saída do modelo (4.1), obtém-se:

$$y(t_k) = \underline{c}x(t_k) + du(t_k), \quad (4.4)$$

que representa a relação desejada entre os estados e a saída. É de se esperar que a matriz Φ e o vetor $\underline{\gamma}$, definidos na equação (4.3), sejam expressos em função da matriz A e do vetor \underline{b} do modelo a tempo-contínuo dado na equação (4.1). Isto de fato ocorre, conforme será mostrado no desenvolvimento a seguir.

É sabido que se o estado inicial do sistema (4.1) for igual a \underline{x}_0 , então, para um instante qualquer $t > 0$, o vetor de estados será dado por:

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + e^{At} \star \underline{b}u(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\underline{b}u(\tau)d\tau, \quad (4.5)$$

onde \star denota a integral de convolução. Portanto, para $t = t_k$ e $t = t_{k+1}$, a equação acima torna-se, respectivamente:

$$\underline{x}(t_k) = e^{At_k}\underline{x}_0 + \int_0^{t_k} e^{A(t_k-\tau)}\underline{b}u(\tau)d\tau, \quad (4.6a)$$

$$\underline{x}(t_{k+1}) = e^{At_{k+1}}\underline{x}_0 + \int_0^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}\underline{b}u(\tau)d\tau. \quad (4.6b)$$

Substituindo $t_{k+1} = t_k + h$ na equação (4.6b) e colocando e^{Ah} em evidência, obtém-se:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t_{k+1}) &= e^{Ah} \left[e^{At_k}\underline{x}_0 + \int_0^{t_k} e^{A(t_k-\tau)}\underline{b}u(\tau)d\tau \right] \\ &\quad + e^{Ah} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_k-\tau)}\underline{b}u(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Observe que o termo entre colchetes da equação (4.7) acima é idêntico ao termo do lado direito da equação (4.6a). Pode-se, portanto, escrever:

$$\underline{x}(t_{k+1}) = e^{Ah}\underline{x}(t_k) + e^{Ah} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_k-\tau)}\underline{b}u(\tau)d\tau. \quad (4.8)$$

Neste ponto é importante ter em mente que o objetivo do presente desenvolvimento é obter uma expressão da forma da equação (4.3). Note que a primeira parcela do termo do lado direito da equação (4.8) já está na forma desejada. Para escrever também a segunda parcela do lado direito de (4.8) de acordo com a equação (4.3), lembre-se que, de acordo com a equação (4.2), $u(t) = u(t_k)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, sendo, portanto, constante no intervalo de integração considerado na equação (4.8). Em seguida, fazendo na integral a transformação de variáveis $t_{k+1} - \tau = x$, tem-se, após manipulações algébricas simples, que:

$$\underline{x}(t_{k+1}) = e^{Ah}\underline{x}(t_k) + \int_0^h e^{Ax}dx\underline{b}u(t_k). \quad (4.9)$$

Conseqüentemente, o modelo discreto equivalente do modelo matemático a tempo-contínuo dado pela equação (4.1) é dado por:

$$\begin{cases} \underline{x}(t_{k+1}) &= \Phi\underline{x}(t_k) + \underline{\gamma}u(t_k) \\ y(t_k) &= \underline{c}\underline{x}(t_k) + du(t_k) \end{cases}, \quad (4.10a)$$

onde

$$\Phi = e^{Ah} \quad (4.10b)$$

e

$$\underline{\gamma} = \int_0^h e^{Ax}dx\underline{b}. \quad (4.10c)$$

Exemplo 4.1 *Obtenha a equação a diferenças linear correspondente a um sistema de primeira ordem contínuo no tempo cuja função de transferência é dada por:*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad (4.11)$$

onde $U(s)$ e $Y(s)$ denotam, respectivamente, as transformadas de Laplace dos sinais de entrada e saída do sistema.

Solução. O primeiro passo é obter uma representação em espaço de estados para $G(s)$. É imediato perceber que a equação diferencial ordinária correspondente a esse sistema é dada por:

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t).$$

Definindo $x(t) = y(t)$, resulta

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{\tau}x(t) + \frac{K}{\tau}u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{cases}.$$

Assim, é fácil verificar que o modelo discreto equivalente do sistema dado pela equação (4.11) será:

$$\begin{cases} x(t_{k+1}) &= \phi x(t_k) + \gamma u(t_k) \\ y(t_k) &= x(t_k) \end{cases}, \quad (4.12a)$$

onde

$$\phi = e^{-\frac{1}{\tau}h} \quad (4.12b)$$

e

$$\gamma = K(1 - e^{-\frac{1}{\tau}h}) = K(1 - \phi). \quad (4.12c)$$

Finalmente, para a obtenção da equação a diferenças linear, deve-se primeiro calcular a função de transferência do modelo discreto. É sabido que

$$\hat{G}(z) = \underline{c}(zI - \Phi)^{-1}\underline{\gamma} + d,$$

e, então, de acordo com as equações (4.12a) a (4.12c), tem-se que

$$\hat{G}(z) = \frac{K(1 - \phi)z^{-1}}{1 - \phi z^{-1}}.$$

Conseqüentemente:

$$y(t_k) - \phi y(t_{k-1}) = K(1 - \phi)u(t_{k-1}), \quad (4.13)$$

que representa a equação a diferenças linear para o sistema descrito pela função de transferência (4.11). \square

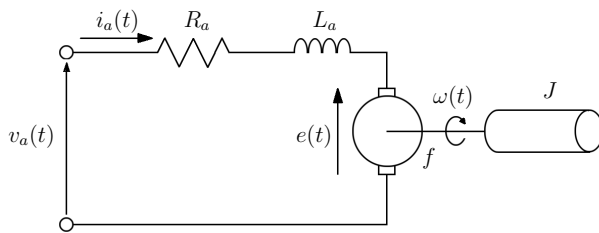


Figura 4.1: Circuito equivalente de um motor CC controlado pela armadura.

4.2 Um modelo em espaço de estados para um motor CC controlado pela armadura

Considere o circuito equivalente de um motor CC controlado pela armadura representado na figura 4.1 onde R_a e L_a representam, respectivamente, a resistência e a indutância de armadura, J denota o momento de inércia e f representa o atrito viscoso. É importante ressaltar que, embora o único atrito a ser considerado na modelagem é o atrito viscoso, um modelo mais completo exige que seja considerado um outro tipo de atrito, que é o atrito seco (ou de Coulomb). O atrito seco aparece devido ao contato entre as escovas e o comutador e também devido aos mancais, enquanto o atrito viscoso é devido principalmente à ventilação.

Aplicando-se as leis das tensões de Kirchhoff e de Newton ao sistema da figura 4.1, obtém-se

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + e(t) \quad (4.14a)$$

$$t_m(t) - t_d(t) - f\omega(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t) \quad (4.14b)$$

onde $t_m(t)$ denota o torque produzido pelo motor e $t_d(t)$ o torque externo de perturbação. A relação entre as equações elétrica (4.14a) e mecânica

(4.14b) é feita pelas seguintes equações:

$$e(t) = K_g \omega(t), \quad (4.15a)$$

$$t_m(t) = K_a i_a(t), \quad (4.15b)$$

onde $\omega(t)$ denota a velocidade angular do eixo do motor, K_g and K_a são, respectivamente, as constantes de força contra-eletromotriz e de torque.

Substituindo as equações (4.15a) e (4.15b) em (4.14a) e (4.14b), respectivamente, e definindo como entrada a tensão externa a ser aplicada ao circuito de armadura do motor, $v_a(t)$, e como variáveis de estado, a corrente de armadura, $i_a(t)$, e a velocidade angular do eixo do motor, $\omega(t)$, obtém-se o seguinte modelo em espaço de estado para o motor:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_a(t) \\ \frac{d}{dt} \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_g}{L_a} \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} v_a(t). \quad (4.16)$$

Observe ainda que a medição da velocidade angular $\omega(t)$ pode ser feita por um tacômetro ou um “encoder”, que são elementos que produzem uma tensão no seus terminais ($v_t(t)$) que é proporcional a $\omega(t)$, isto é:

$$v_t(t) = K_t \omega(t). \quad (4.17)$$

Assim, substituindo-se a equação (4.17) na equação (4.16), resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_a(t) \\ \frac{d}{dt} v_t(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_g}{K_t L_a} \\ \frac{K_a K_t}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ v_t(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} v_a(t). \quad (4.18)$$

A equação (4.18) mostra que para uma completa descrição do modelo de segunda ordem em espaço de estados de um motor CC controlado pela armadura, é necessário identificar os parâmetros R_a , L_a , J , f , K_g and K_a . A identificação de R_a and L_a pode ser feita utilizando-se conceitos de máquinas elétricas (Chapman 1991), porém a maioria dos livros

de máquinas elétricas apresentam modelos que são somente válidos para regime permanente, desprezando, portanto, o efeito da indutância da armadura. O momento de inércia J pode ser determinado utilizando-se conceitos de mecânica; porém os experimentos exigem que o motor seja desmontado. Um outro ponto importante a ser observado é que o atrito viscoso f varia linearmente em função da velocidade do motor e, portanto, é necessário obter um valor médio de f para toda a região linear de operação do motor. Neste laboratório, serão apresentadas maneiras alternativas para se identificar R_a , L_a , f e J . Esses experimentos exigirão apenas conceitos apresentados nos cursos de Sistemas de Controle I e II e no Laboratório de Sistemas de Controle I.

4.3 Determinação da região linear de operação

Em mancais bem lubrificados, o atrito possui duas componentes (Leonhard 1997): a primeira (atrito viscoso) é devido ao fluxo laminar do lubrificante, sendo predominante quando o motor já está em movimento; a segunda componente (atrito seco) ocorre quando o motor inicia seu movimento de rotação. Deve ser ainda observado que o atrito de Coulomb tem uma contribuição significativa para que o motor tenha um comportamento não-linear quando tensões de baixas amplitudes são aplicadas. Este efeito é conhecido na literatura como zona morta e poderá ser observado a partir do experimento para determinação da região linear de operação do motor.

O modelo descrito pela equação (4.18) é obtido a partir da hipótese da planta ser linear. Contudo, devido ao atrito de Coulomb, esta hipótese não é verdadeira. Desta forma, o primeiro experimento tem como objetivo determinar a região linear de operação do motor, *i.e.*, os valores de $v_a(t)$ para os quais o sistema pode ser aproximado por um sistema linear.

Ao serem aplicados sinais de baixa tensão nos terminais da armadura, o conjugado elétrico resultante será igual ao torque mecânico presente

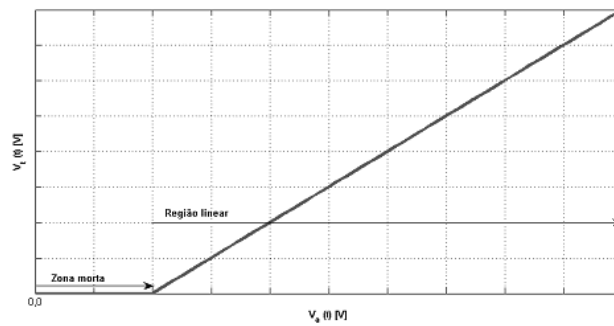


Figura 4.2: Zona morta e região linear de um motor cc.

devido ao atrito estático do eixo do motor, impossibilitando assim a sua rotação nessa faixa de operação. Tal faixa é denominada zona morta de operação. Para a determinação da zona morta, pode-se utilizar uma rampa com baixa inclinação como sinal de tensão a ser aplicado nos terminais do circuito de armadura do motor CC. Ao se aplicar a rampa, é também necessário obter os valores correspondentes da tensão no tacômetro, de maneira que a partir da formação do par cartesiano (v_a, v_t) se obtenha uma representação gráfica e, por inspeção, a zona morta e a região linear. Espera-se, portanto que a representação gráfica obtida a partir dos vetores V_a e V_t seja da forma mostrada na figura 4.2.

A região linear pode ainda ser determinada analisando-se a derivada do polinômio obtido por mínimos quadrados, que melhor se ajusta aos pontos de tensão na armadura e tensão no tacômetro, obtidos após o motor CC entrar em regime permanente, sendo a região linear dada pela região onde a derivada é aproximadamente constante. Desta forma, a região linear pode ser determinada realizando-se o seguinte passos.

Experimento 4.1

PASSO 1. Aplique tensões DC de diferentes amplitudes $(V_{a_i}, i = 1, 2, \dots, n)$ ao circuito de armadura e registre os correspondentes valores de

regime permanente das tensões nos terminais do tacômetro (V_{t_i} , $i = 1, 2, \dots, n$).

PASSO 2. Represente graficamente os pontos (V_{a_i}, V_{t_i}) , $i = 1, 2, \dots, n$ e use o método dos mínimos quadrados (Basilio 1999) para aproximar os pontos por um polinômio de grau q , ($q \ll n$), isto é,

$$\hat{V}_t = a_0 V_a^q + a_1 V_a^{q-1} + \dots + a_{q-1} V_a + a_q. \quad (4.19)$$

PASSO 3. Calcule a derivada de $\hat{V}_t = p(V_a)$ em relação a V_a , no intervalo $[V_{a_1}, V_{a_n}]$.

PASSO 4. A região linear de operação será dada pelo intervalo onde a derivada é aproximadamente paralela ao eixo das abscissas.

□

O cálculo dos coeficientes a_i , $i = 0, 1, \dots, q$ do polinômio $\hat{V}_t = p(V_a)$, descrito pela equação (4.19), utilizando-se o método dos mínimos quadrados, é feito da seguinte forma: a partir dos pontos (V_{a_i}, V_{t_i}) , $i = 1, 2, \dots, n$ obtidos experimentalmente, é possível formar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} V_{t_1} \\ V_{t_2} \\ \vdots \\ V_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a_1}^q & V_{a_1}^{q-1} & \dots & V_{a_1} & 1 \\ V_{a_2}^q & V_{a_2}^{q-1} & \dots & V_{a_2} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ V_{a_n}^q & V_{a_n}^{q-1} & \dots & V_{a_n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

que pode ser escrita como

$$\underline{b} = A \underline{x} \quad (4.21a)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} V_{a_1}^q & V_{a_1}^{q-1} & \dots & V_{a_1} \\ V_{a_2}^q & V_{a_2}^{q-1} & \dots & V_{a_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{a_n}^q & V_{a_n}^{q-1} & \dots & V_{a_n} \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

e

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} V_{t_1} & V_{t_2} & \cdots & V_{t_n} \end{bmatrix}^t. \quad (4.21c)$$

Note que, como o número de pontos obtidos experimentalmente, n (que define o número de linhas da matriz A) é, em geral, muito maior que o grau do polinômio a ser ajustado, q (que define o número de colunas da matriz A), então o sistema definido pela equação (4.21a) não terá solução; daí a necessidade de se utilizar o ajuste por mínimos quadrados. É sabido que (Basilio 1999):

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_q \end{bmatrix}^t = (A^t A)^{-1} A^t \underline{b} \quad (4.22)$$

é a solução desejada.

Observação 4.1

- (i) No caso do motor CC, $a_q = 0$ uma vez que quando não há tensão aplicada ao motor, este permanece em repouso.
- (ii) Uma maneira de se determinar o grau q do polinômio é a seguinte: faça $q = 1$ e calcule $\|\underline{e}\|_2 = \|A\underline{x} - \underline{b}\|_2$ e, em seguida, aumente q até que a matriz A fique aproximadamente singular ou, então, até que o decaimento de $\|\underline{e}\|_2$ deixe de ser significativo.
- (iii) Em alguns casos, os passos 2 a 4 do experimento 4.1 podem ser substituídos pela simples aproximação dos pontos por uma reta $\hat{V}_t = aV_a + b$ quando os pontos (V_{a_i}, V_{t_i}) de uma determinada faixa de valores de valores de V_a estiverem visivelmente próximos de uma linha reta.
- (iv) Além de representar uma maneira sistemática de determinar a região linear de operação de um sistema, o experimento 4.1 também permite a identificação do tipo de não linearidade da planta. No caso de motores CC, poderá ser verificada a existência de uma não-linearidade conhecida como zona morta. \square

4.4 Determinação dos ganhos K_g e K_a

Considere a seguinte função de transferência referente a uma planta de primeira ordem:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\bar{K}}{\tau s + 1}. \quad (4.23)$$

onde \bar{K} é o ganho DC e τ é a constante de tempo. Ao se aplicar um degrau unitário como entrada, obtém-se a resposta mostrada na figura 4.3.

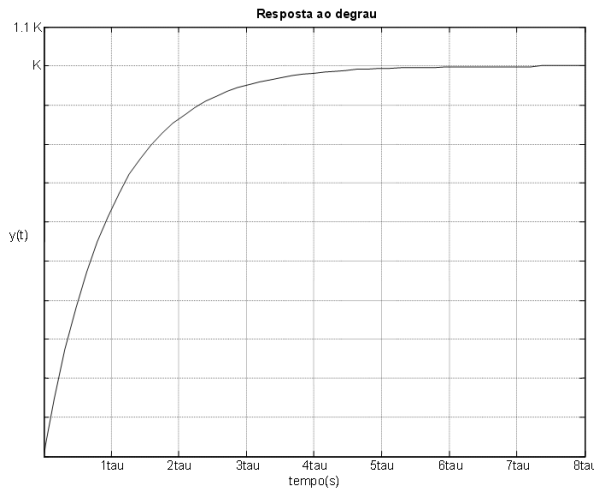


Figura 4.3: Resposta ao degrau unitário de uma função de transferência de primeira ordem sem zeros finitos.

A partir da figura 4.3, duas grandezas podem ser definidas: o tempo de acomodação do sistema, t_s , e o valor de regime permanente, y_{ss} . O tempo de acomodação é definido como o tempo em que a resposta ao degrau, $y(t)$, demora para atingir 98% de seu valor de regime permanente. Como pode ser verificado em (Ogata 1998), para um valor de $t \geq 4\tau$, a resposta $y(t)$ está a menos de 2% do seu valor de regime permanente. Sendo assim, τ pode ser definido experimentalmente a partir da seguinte relação:

$$\tau = \frac{t_s}{4}. \quad (4.24)$$

Considere, agora, a aplicação de um degrau de amplitude A , na entrada do sistema descrito pela equação (4.23). Portanto, a transformada de Laplace da resposta será dada por:

$$Y(s) = \frac{A\bar{K}}{s(\tau s + 1)}. \quad (4.25)$$

A fim de se determinar o valor de regime permanente (y_{ss}), utiliza-se o teorema do valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A\bar{K}}{(\tau s + 1)} = A\bar{K}. \quad (4.26)$$

Portanto, o ganho DC pode ser determinado da seguinte forma:

$$\bar{K} = \frac{y_{ss}}{A}. \quad (4.27)$$

Como mostrado na equação (4.27), o ganho DC da planta pode ser determinado a partir da obtenção de y_{ss} e da amplitude do degrau aplicado (A). Contudo, uma vez que a função de transferência representa um sistema linear, o ganho DC deve ser obtido em torno de um ponto de operação definido dentro da região linear de operação do motor. Como a proposta é trabalhar com modelos lineares e invariantes no tempo, torna-se, portanto, necessária a obtenção de um ganho DC médio (\bar{K}) e um ganho K_t em torno da faixa de operação linear do motor CC.

A fim de se determinar os ganhos \bar{K} e K_t da planta (motor + tacômetro) (figura 4.4), aplicam-se tensões nos terminais do circuito de armadura do motor e são medidas, respectivamente, as tensões nos terminais do tacômetro e com o auxílio de um tacômetro óptico, as velocidades angulares do eixo do motor CC. Com isso podem ser obtidas relações cartesianas envolvendo tensão de entrada x tensão de saída e tensão de saída x velocidade angular.

Sabe-se que uma relação linear é dada por uma equação do tipo $y(x) = ax$, sendo a o coeficiente angular da reta, definida a partir dos pares cartesianos (x, y) . Assim, o objetivo aqui é obter funções do tipo $\Delta v_t(t) =$

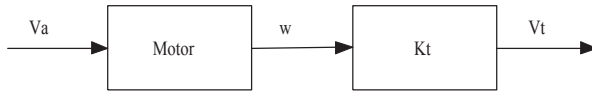


Figura 4.4: Diagrama em Bloco do motor e tacômetro.

$K_t \Delta \omega(t)$ e $\Delta v_t(t) = \bar{K} \Delta v_a(t)$, onde $\Delta v_t(t) = v_t(t) - V_{t_0}$, $\Delta \omega(t) = \omega(t) - W_0$, $\Delta v_a(t) = v_a(t) - V_{a_0}$, e (V_{t_0}, W_0, V_{a_0}) denota o ponto de operação do motor escolhido dentro da região linear.

Como toda medida de uma determinada grandeza está sujeita a erros, então, para um sistema sobredeterminado (mais equações que incógnitas), não é possível obter-se uma única relação de x em $y(x)$. A fim de superar tal dificuldade, utiliza-se o método dos mínimos quadrados. O método dos mínimos quadrados é uma técnica de otimização matemática que leva ao melhor ajuste para um conjunto de dados, minimizando a soma dos quadrados das diferenças ordenadas, chamados resíduos, entre funções de ajuste e dados.

Assim, de posse dos dados, formam-se três vetores: ΔV_a , ΔV_t e ΔW e aplica-se o método dos mínimos quadrados para uma relação de primeira ordem, obtendo-se \bar{K} a partir do par $(\Delta V_a, \Delta V_t)$ e K_t a partir do par $(\Delta W, \Delta V_t)$. É fácil verificar que, considerando somente os pontos obtidos em torno de um ponto de operação dentro da região linear, \bar{K} e K_t serão dados por:

$$\bar{K} = \frac{(\Delta V_a)^T (\Delta V_t)}{(\Delta V_a)^T (\Delta V_a)}, \quad (4.28)$$

$$K_t = \frac{(\Delta W)^T (\Delta V_t)}{(\Delta W)^T (\Delta W)}. \quad (4.29)$$

O conhecimento dos valores dos ganhos \bar{K} e K_t é necessário para a identificação paramétrica utilizada para a obtenção do modelo em espaço de estados do motor CC e que será apresentada na próxima seção. A utilização do ganho \bar{K} no modelo de espaço de estados não é feita de maneira explícita, porém seu conhecimento é necessário para a determi-

nação de uma estimativa da constante de força contra-eletromotriz, K_g , que é uma das constantes utilizadas na obtenção do modelo em espaço de estados.

Uma maneira de se obter o valor de K_g é através da medição da tensão nos terminais da armadura do motor CC quando este é posto em movimento a partir de um segundo motor ou de um gerador CC operando como motor. Contudo, devido à falta de acoplamento mecânico entre o eixo do motor CC com algum outro dispositivo, torna-se necessário desenvolver uma nova metodologia que contorne essa restrição. Para tanto, uma estimativa deste ganho será feita a partir do modelo de primeira ordem do motor CC expresso em (4.23) onde $\bar{K} = KK_t$ e

$$K = \frac{K_a}{R_a f + K_a K_g}. \quad (4.30)$$

Sabendo que, quando expressas em unidades do S.I., $K_a = K_g$, e, ainda que em geral, $R_a f \ll K_a K_g$, então a equação (4.30) se reduz a:

$$K = \frac{1}{K_g}. \quad (4.31)$$

Substituindo-se (4.31) em $\bar{K} = KK_t$ resulta em:

$$K_g = \frac{K_t}{\bar{K}}. \quad (4.32)$$

O experimento para determinação dos ganhos \bar{K} , K_t e K_g é descrito a seguir.

Experimento 4.2

PASSO 1. Escolha um ponto de operação dentro da região linear do motor (V_{a0}, V_{t0}, W_0) .

PASSO 2. Forme os vetores ΔV_a , ΔV_t e ΔW .

PASSO 3. Determine os ganhos \bar{K} , K_t e K_g a partir das equações (4.28), (4.29) e (4.32), respectivamente.

4.5 Estimação dos parâmetros R_a , L_a , J e f

Uma vez que os parâmetros K_g e K_a foram estimados e supondo que K_t seja conhecido, o próximo passo é a identificação dos parâmetros R_a , L_a , J e f . Para tanto, note que as equações (4.14a) e (4.14b) podem ser reescritas como:

$$L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + R_a i_a(t) = v_a(t) - \frac{K_g}{K_t} v_t(t) \quad (4.33a)$$

$$J \frac{d}{dt} v_t(t) + f v_t(t) = K_a K_t i_a(t) \quad (4.33b)$$

Assim, definindo

$$u_e(t) = v_a(t) - \frac{K_g}{K_t} v_t(t) \quad (4.34a)$$

$$u_m(t) = K_a K_t i_a(t), \quad (4.34b)$$

tem-se que as equações (4.33a) e (4.33b) tornam-se, respectivamente:

$$L_a \frac{d}{dt} i_a(t) + R_a i_a(t) = u_e(t), \quad (4.35a)$$

$$J \frac{d}{dt} v_t(t) + f v_t(t) = u_m(t). \quad (4.35b)$$

Essas equações podem ser vistas como as equações diferenciais de dois sistemas lineares de primeira ordem: um sistema elétrico (E) e um sistema mecânico (M), cujas realizações em espaço de estados podem ser escritas como:

$$(E) \begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_e u_e(t) \\ y_e(t) = x_e(t) \end{cases}, \quad (4.36a)$$

onde $x_e(t) = i_a(t)$, $A_e = -R_a/L_a$ e $B_e = 1/L_a$, e

$$(M) \begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \\ y_m(t) = x_m(t) \end{cases}, \quad (4.36b)$$

onde $x_m(t) = v_t(t)$, $A_m = -f/J$ e $B_m = 1/J$.

Note, de acordo com a equação (4.34a), que $u_e(t)$ depende de $v_a(t)$, que é uma variável externa ao sistema e, portanto, pode, de alguma forma, ser controlada, e de $v_t(t)$, que representa a saída do sistema em consideração. O mesmo raciocínio se aplica a $u_m(t)$, que depende de $i_a(t)$, que foi definida como um dos estados do sistema. A primeira consequência desse fato é que a identificação de R_a , L_a , J and f não pode ser feita utilizando-se técnicas de identificação baseadas em resposta ao degrau, uma vez que $u_e(t)$ e $u_m(t)$ jamais poderão assumir esta forma. Esta aparente dificuldade pode ser contornada utilizando-se técnicas de identificação para sistemas discretos no tempo.

É fácil verificar que os sistemas (E) e (M) descritos pelas equações (4.36a) e (4.36b) possuem, respectivamente, as seguintes funções de transferências:

$$G_e(s) = \frac{K_e}{\tau_e s + 1}, \quad (4.37a)$$

$$G_m(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1}, \quad (4.37b)$$

onde $K_e = 1/R_a$, $\tau_e = L_a/R_a$, $K_m = 1/f$, and $\tau_m = J/f$. Portanto, de acordo com as equações (4.11), (4.12b) e (4.12c), os modelos discretos equivalentes para os sistemas (E) e (M) são dados, respectivamente, por:

$$(E) \begin{cases} x_e(t_{k+1}) = \Phi_e x_e(t_k) + \Gamma_e u_e(t_k) \\ y_e(t_k) = x_e(t_k) \end{cases}, \quad (4.38a)$$

onde $\Phi_e = e^{-h/\tau_e}$ e $\Gamma_e = K_e(1 - \Phi_e)$, e

$$(M) \begin{cases} x_m(t_{k+1}) = \Phi_m x_m(t_k) + \Gamma_m u_m(t_k) \\ y_m(t_k) = x_m(t_k) \end{cases}, \quad (4.38b)$$

onde $\Phi_m = e^{-h/\tau_m}$ e $\Gamma_m = K_m(1 - \Phi_m)$. Conseqüentemente, o comportamento dos sistemas (E) e (M) nos instantes de amostragem t_k , $k = 0, 1, \dots$, pode ser descrito pela seguintes equações a diferenças lineares, obtidas di-

retamente da equação (4.13):

$$(E) \quad y_e(t_k) = \Phi_e y_e(t_{k-1}) + \Gamma_e u_e(t_{k-1}) \quad (4.39a)$$

$$(M) \quad y_m(t_k) = \Phi_m y_m(t_{k-1}) + \Gamma_m u_m(t_{k-1}). \quad (4.39b)$$

As equações (4.39a) e (4.39b), acima, mostram que se os parâmetros Φ_e , Φ_m , Γ_e , e Γ_m forem determinados, então os ganhos K_e , K_m (e, conseqüentemente, $R_a = 1/K_e$ e $f = 1/K_m$, respectivamente), e as constantes de tempo τ_e e τ_m (e, de forma análoga, $L_a = R_a \tau_e$ and $J = f \tau_m$) poderão ser imediatamente determinadas. Além disso, como $y_e(t_k) = i_a(t_k)$, $y_m(t_k) = v_t(t_k)$, $u_e(t_k) = v_a(t_k) - (K_g/K_t)v_t(t_k)$ e $u_m(t_k) = K_a K_t i_a(t_k)$, então, aplicando-se um sinal de tensão $v_a(t)$ do tipo PRBS (*PseudoRandom Binary Signal*), isto é, definido por um trem de pulsos de larguras variáveis (Astrom & Wittenmark 1990, pag. 423) e, fazendo-se a aquisição de $v_a(t_k)$, $i_a(t_k)$ e $v_t(t_k)$ nos instantes de amostragem t_k , $k = 0, 1, \dots, n$ ($n \gg 2$), resulta:

$$\begin{bmatrix} i_a(t_1) \\ i_a(t_2) \\ i_a(t_3) \\ \vdots \\ i_a(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a(t_0) & u_e(t_0) \\ i_a(t_1) & u_e(t_1) \\ i_a(t_2) & u_e(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ i_a(t_{n-1}) & u_e(t_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_e \\ \Gamma_e \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{i}_a = \underline{M}_e \underline{x}_e \quad (4.40a)$$

e

$$\begin{bmatrix} v_t(t_1) \\ v_t(t_2) \\ v_t(t_3) \\ \vdots \\ v_t(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_t(t_0) & u_m(t_0) \\ v_t(t_1) & u_m(t_1) \\ v_t(t_2) & u_m(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ v_t(t_{n-1}) & u_m(t_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_m \\ \Gamma_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{v}_t = \underline{M}_m \underline{x}_m. \quad (4.40b)$$

As soluções por mínimos quadrados para os sistemas de equações (4.39a) e (4.40b) são dadas por:

$$\underline{x}_e = (M_e^t M_e)^{-1} M_e^t \underline{i}_a \quad (4.41a)$$

$$\underline{x}_m = (M_m^t M_m)^{-1} M_m^t \underline{v}_t. \quad (4.41b)$$

Conseqüentemente, os parâmetros R_a , L_a , f , and J serão dados por:

$$R_a = \frac{1 - \Phi_e}{\Gamma_e}, \quad L_a = -\frac{R_a h}{\ln(\Phi_e)}, \quad f = \frac{1 - \Phi_m}{\Gamma_m}, \quad J = -\frac{f h}{\ln(\Phi_m)}, \quad (4.42)$$

onde h é o intervalo de amostragem.

O desenvolvimento acima conduz ao seguinte experimento para estimar os parâmetros R_a , L_a , J , and f .

Experimento 4.3

PASSO 1 Aplique um sinal de tensão aos terminais do circuito de armadura e faça a aquisição dos sinais $v_a(t)$, $i_a(t)$ e $v_t(t)$ nos instantes de amostragem $t = t_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

PASSO 2 Calcule $u_e(t_k) = v_a(t_k) - (K_g/K_t)v_t(t_k)$ e $u_m(t_k) = K_a K_t i_a(t_k)$, e forme os vetores \underline{i}_a e \underline{v}_t , e as matrizes M_e and M_m , definidos nas equações (4.40a) e (4.40b).

PASSO 3 Calcule Φ_e , Φ_m , Γ_e e Γ_m de acordo com a equação (4.41a) e (4.41b).

PASSO 4 Use as expressões (4.42) para calcular R_a , L_a , J e f . \square

Observação 4.2

- (i) Conforme mencionado anteriormente, o sinal de tensão a ser aplicado aos terminais da armadura deve ser um trem de pulsos de larguras variáveis (PRBS).
- (ii) Uma vez que os parâmetros do motor são determinados para um modelo linear, a amplitude do pulso deve ser tal que o sinal de entrada permaneça sempre na região linear de operação determinada no experimento 4.1, *i.e.*, os valores máximo e mínimo da tensão aplicada ao circuito de armadura do motor devem ser, respectivamente, menor que o extremo direito e maior que o extremo esquerdo do intervalo que define a região linear.

- (iii) Note que $u_e(t_k)$ nunca pode ser zero para todo instante t_k , uma vez que o motor tem uma resposta monotonicamente crescente, o que impede $u_e(t_k)$ de ser identicamente zero, pelo menos no intervalo correspondente à resposta transitória. \square

4.6 Experimentos a serem realizados no laboratório

Os experimentos necessários para estimar os parâmetros do modelo matemático do motor considerado nesse laboratório serão realizados em duas etapas. Na primeira etapa serão realizados dois experimentos: (i) para a determinação da região linear de operação; (ii) para a determinação dos parâmetros K_g , K_a e o ganho do tacômetro (K_t). Na segunda etapa, será realizado um experimento que permitirá determinar os parâmetros R_a , L_a , J e f . Para a realização desse experimento, a região linear de operação do motor já deverá ter sido determinada. Como consequência, serão necessárias dois tempos de aula para a realização dos experimentos.

4.6.1 Experimento para a determinação da região linear de operação

Neste experimento serão utilizados os seguintes equipamentos: um computador com a placa de aquisição de dados e um tacômetro óptico.

De acordo com a seção 4.3, uma das formas de se determinar a zona morta e a região linear de operação é aplicar nos terminais da armadura do motor cc um sinal do tipo rampa com baixa inclinação. Para realizar esse experimento, deve-se montar o diagrama de blocos no *Simulink*, mostrado na figura 4.6.

De posse dos valores coletados no laboratório:

1. Determine a região linear de operação;

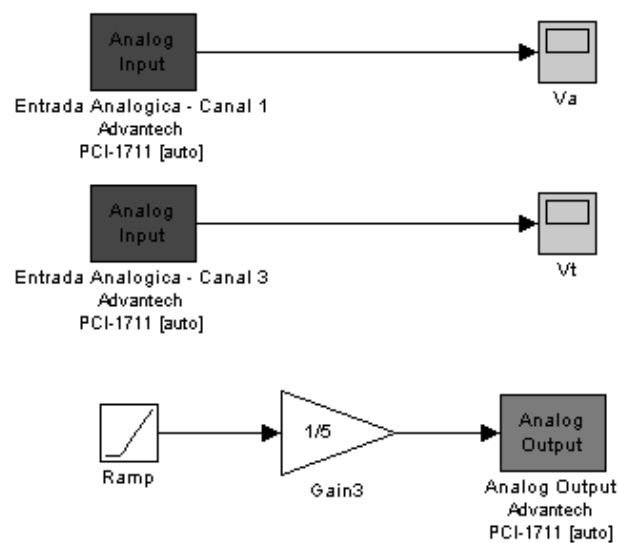


Figura 4.5: Diagrama em Bloco para o experimento de obtenção da zona morta.

4.6.2 Experimentos para determinação dos ganhos K_g , K_a e K_t

Para a determinação dos ganhos K_g , K_a e do ganho K_t , são necessários os valores de regime permanente da resposta ao degrau para diferentes amplitudes. O aluno deverá proceder da seguinte forma:

1. Conecte os terminais do circuito de armadura do motor cc à fonte de tensão.
2. Conecte a ponta de prova do Canal A do osciloscópio aos terminais da armadura.
3. Conecte os terminais do Canal B do osciloscópio ao tacômetro.
4. Configure o osciloscópio para que este forneça o valor médio dos canais A e B.

5. Eleve a tensão do motor em incrementos pequenos, anotando o valor de tensão nos terminais da armadura a cada incremento de tensão, até que este se ponha em movimento.
6. Anote o valor de tensão dos terminais de armadura correspondente ao término da zona morta.
7. Eleve a tensão do motor em incrementos de 0.5 V, tomando-se nota dos valores de V_a , V_t e ω para cada nível de tensão.

Observação 4.3 Embora a velocidade angular tenha sido medida em *rpm*, o ganho K_t deve ser expresso em unidades do sistema internacional, isto é, $V/(rad/s)$. \square

De posse dos valores coletados no laboratório:

1. Determine o ganho K_g , K_a e K_t
2. Verifique a exatidão do ganho K_t determinado no item anterior, representando graficamente os pontos (W, V_t) levantados no laboratório — com cruzeiros (+) — e os pontos $(W, K_t W)$ — linhas contínuas.
3. Verifique a exatidão do ganho \bar{K} determinado no item anterior, representando graficamente os pontos (V_t, V_a) levantados no laboratório — com cruzeiros (+) — e os pontos $(V_t, (K_g/K_t)V_t)$ — linhas contínuas.

Observação 4.4 Note que, embora os valores numéricos de K_g e K_a sejam idênticos, quando expressos em unidades do sistema internacional, K_g e K_a têm unidades diferentes, isto é, K_g é expresso em $V/(rad/s)$ enquanto K_a é expresso em Nm/A . \square

[illegible]

4.6.3 Experimento para determinação de R_a , L_a , J e f

Nesse experimento serão necessários os seguintes equipamentos: uma fonte geradora de sinal, um amplificador de potência e um sensor de corrente. Para a realização do experimento, o aluno deve proceder da seguinte forma:

1. Conecte os terminais de armadura do motor cc ao amplificador de potência, fazendo com que um dos fios passe pelo sensor de Hall da placa de condicionamento de sinal de corrente.
2. Conecte os terminais de saída da placa de condicionamento de sinal de corrente, os terminais do tacômetro do motor cc e os terminais de saída de tensão do amplificador de potência a canais de entradas analógicas da placa de aquisição de dados, a fim de fazer a aquisição de uma tensão referente ao sinal de corrente na armadura do motor, da tensão relativa à velocidade angular do motor e do sinal de tensão de entrada no motor.
3. Energize a placa de condicionamento de sinal de corrente com tensões de -15 , 0 e $+15$ Volts.
4. Utilizando o Simulink, aplique um sinal de tensão do tipo PRBS nos terminais do circuito de armadura e faça a aquisição dos sinais $v_a(t)$, $i_a(t)$ e $v_t(t)$ nos instantes de amostragem $t = t_k$, onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.
5. Monte no Simulink o diagrama de blocos mostrado na figura 4-6.

Observação 4.5 Para que o valor de $i_a(t_k)$ seja igual ao valor de $i_a(t)$ nos instantes de aquisição $t = t_k$, é necessário introduzir no diagrama *Simulink* um ganho de 2,8633. \square

Feitas as aquisições dos sinais $v_a(t)$, $i_a(t)$ e $v_t(t)$:

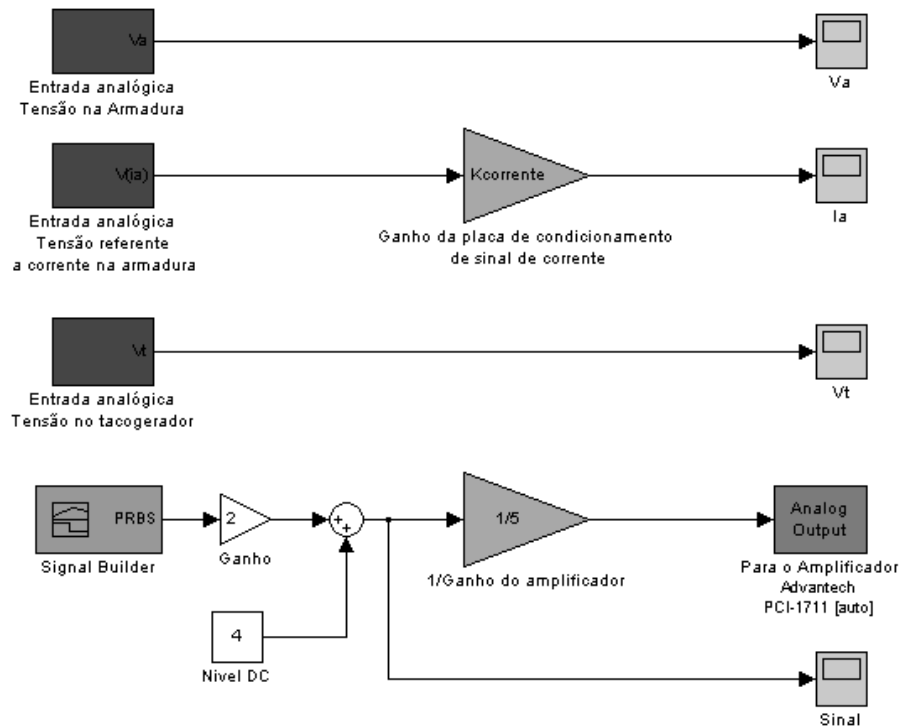


Figura 4.6: Diagrama em Bloco para o experimento de obtenção dos parâmetros.

1. Determine os valores de R_a , L_a , J e f de acordo com o descrito experimento 4.3;
2. Construa um diagrama de simulação em *Simulink* para o modelo em espaço de estados da equação (4.18) com os valores de K_a , K_t , K_g , R_a , L_a , J e f determinados experimentalmente e excite o sistema com o mesmo sinal de tensão $v_a(t)$ aplicado ao sistema real;
3. Compare, representando em um mesmo gráfico, as respostas $i_a(t)$ e $v_t(t)$ obtidas a partir do sistema real e do modelo construído no *Simulink*.

Capítulo 5

Realimentação de estados e rastreamento robusto

Neste capítulo será desenvolvido um controlador para o grupo motorizador a partir do modelo em espaço de estados obtido no capítulo anterior. A técnica de projeto a ser utilizada será a de realimentação de estados em conjunto com uma realimentação de saída, em que o sinal de erro passará por um integrador para garantir o rastreamento de sinais do tipo degrau (Basilio 1999). As condições de estabilidade e desempenho serão garantidas utilizando-se técnicas de posicionamento de pólos.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma. Inicialmente (seção 5.1) serão descritos os objetivos de um sistema de controle e como esses objetivos podem ser atingidos. Em seguida (seção 5.2) serão descritos os objetivos tipos de problema de controle. Na seção 5.3 será considerada a estabilização por realimentação de estados e na seção 5.3 será mostrado o problema do rastreamento pode ser considerado dentro de um contexto de realimentação de estados. Conforme será visto, a realimentação de estados sozinha não é capaz de garantir o rastreamento robusto (rastreamento quando há incertezas no modelo) de sinais do tipo degrau, sendo necessário utilizar também uma realimentação de saída.

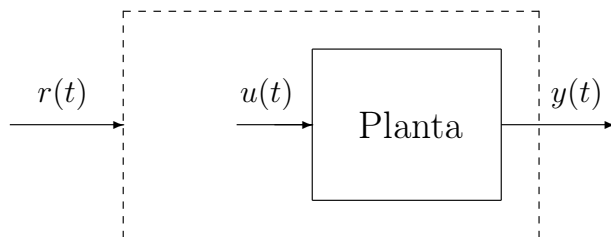


Figura 5.1: Esquema básico do problema de controle.

5.1 Objetivos de um sistema de controle

Considere o sistema da figura 5.1 onde $u(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, o sinal de entrada da planta e a variável a ser controlada e $r(t)$ denota o sinal de referência, isto é, o sinal desejado para $y(t)$. O projeto de um sistema de controle consiste em desenvolver um mecanismo capaz de variar convenientemente a variável $u(t)$ (por essa razão $u(t)$ é usualmente referida como variável de controle) de forma que a saída da planta $y(t)$ siga o sinal $r(t)$ tão próximo quanto possível. Isto pode ser feito das seguintes formas:

(i) Controle em malha aberta. Neste caso, $u(t)$ depende somente de $r(t)$, conforme ilustrado na figura 5.2(a).

(ii) Controle em malha fechada. Isto pode ser feito de duas formas:

(ii.a) Através de realimentação de saída. Neste caso, a saída real do sistema $y(t)$ é comparada a todo instante com a saída desejada $r(t)$, gerando um sinal de erro $e(t) = r(t) - y(t)$, conforme mostrado na figura 5.2(b). Desta forma, o sinal de controle $u(t)$ dependerá de $u(t)$ e $y(t)$.]

(ii.b) Utilizando realimentação de estados. Neste caso, os estados internos do sistema são realimentados. O sinal de controle será, portanto, função de $r(t)$ e dos estados do sistema, conforme pode ser visto na figura 5.2(c). A principal vantagem da realimentação de estados é que o controlador é formado apenas por ganhos. Um aspecto negativo da realimentação de estados é que os estados do sistema devem ser acessíveis, o que

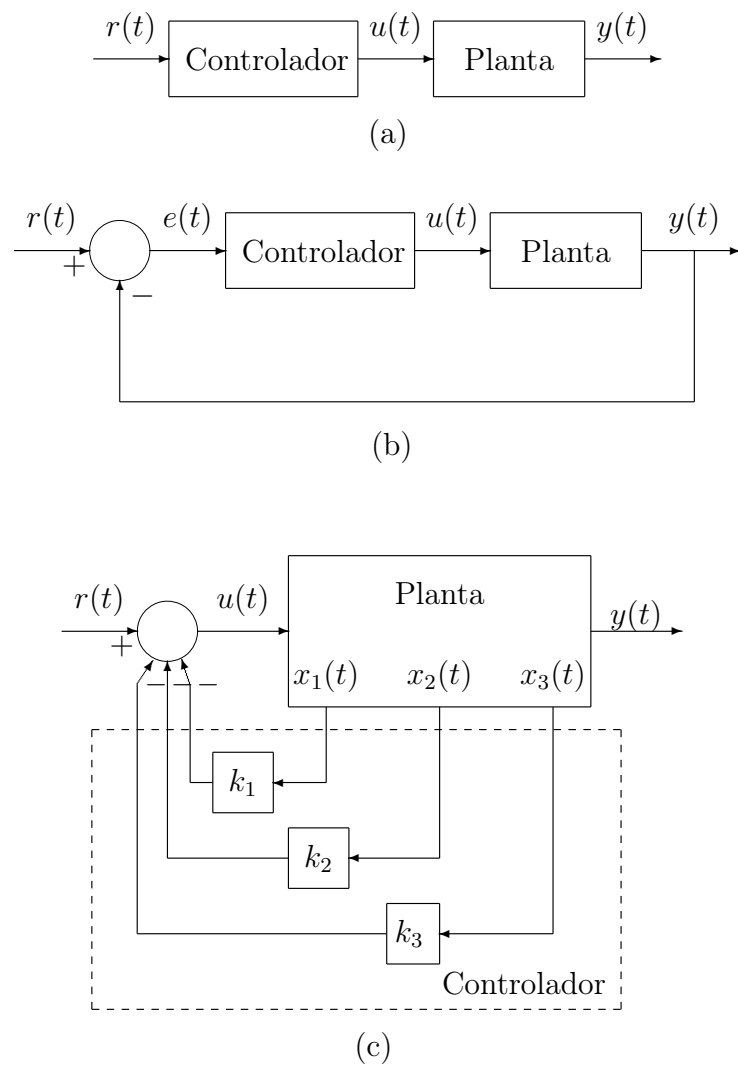


Figura 5.2: Tipos de compensação: (a) malha aberta; (b) realimentação de saída e (c) realimentação de estados.

não necessariamente ocorre.

5.2 Tipos de problemas de controle

Os principais problemas de controle, no que se refere ao sinal de referência, podem ser classificados em: regulação, rastreamento e servomecanismo.

No problema de regulação, o sinal de referência $r(t)$ é identicamente nulo ($r(t) = 0, \forall t$). O objetivo é, para um estado inicial $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \neq \underline{0}$ levar a saída $y(t)$ para zero, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

A condição necessária e suficiente para que isso ocorra é que o sistema realimentado seja assintoticamente estável. Assim, para que isso ocorra dentro de um contexto de realimentação de estados, basta alocar os pólos no semi-plano esquerdo do plano complexo.

O problema do servomecanismo consiste em fazer com que a saída $y(t)$ siga um sinal de referência qualquer $r(t)$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |r(t) - y(t)| = 0.$$

Um caso particular do problema do servomecanismo é o chamado problema do rastreamento, no qual o sinal de referência é o degrau, isto é, $r(t) = A, t \geq 0$. O objetivo de controle é ter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A.$$

5.3 Estabilização de um sistema linear invariante por realimentação de estados

Seja um SLIT com a seguinte realização

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \\ y(t) &= \underline{c}\underline{x}(t) + du(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

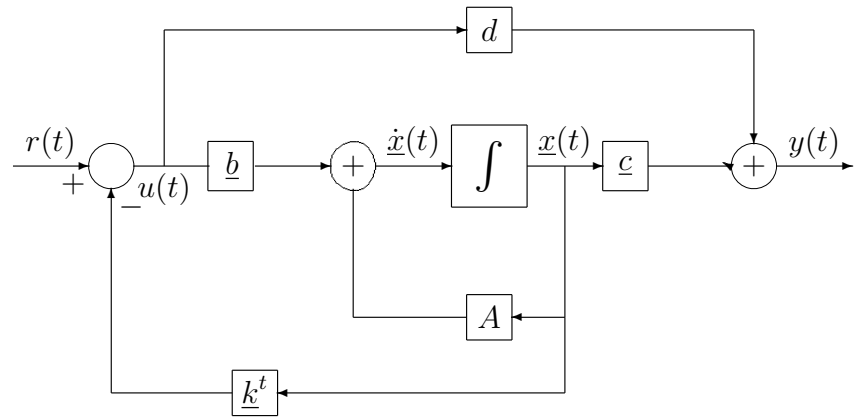


Figura 5.3: Diagrama de blocos de um SLIT com realimentação de estados.

O problema de se estabilizar esse sistema utilizando realimentação de estados, pode ser formulado da seguinte forma: supondo que os estados $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sejam acessíveis, encontre um vetor

$$\underline{k}^t = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

tal que o sistema realimentado da figura 5.3 seja estável.

Para resolver este problema, note que, a partir da figura 5.3, tem-se que o sinal de controle $u(t)$ pode ser escrito como:

$$u(t) = r(t) - \underline{k}^t \underline{x}(t).$$

Substituindo, então, $u(t)$ na equação (5.1), resulta:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= (A - \underline{b}\underline{k}^t)\underline{x}(t) + \underline{b}r(t) \\ y(t) &= (\underline{c} - d\underline{k}^t)\underline{x}(t) + dr(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

Assim sendo, para que o sistema realimentado da figura 5.3 seja assintoticamente estável, todos os autovetores da matriz $A - \underline{b}\underline{k}^t$ devem ter parte real negativa. Isto mostra que a realimentação de estados tem o efeito de mudar a posição dos autovalores da matriz de evolução de estados do

sistema. Assim, os autovalores do sistema em malha aberta com parte real positiva ou nula devem ser deslocados para o semi-plano esquerdo do plano complexo. Surge, porém, a seguinte pergunta: será que todos os modos de um sistema podem ser movidos em função do vetor de ganhos \underline{k} ? A resposta a essa questão é simples: somente os modos controláveis de um sistema podem ser movidos, conforme mostra o seguinte teorema.

Teorema 5.1 Seja um sistema descrito pela equação de estados 5.1 e seja $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$, o vetor de realimentação de estados. Definindo $u(t) = r(t) - \underline{k}^t x(t)$, tem-se que os autovalores de $A_f = A - \underline{b}\underline{k}^t$ podem ser alocados arbitrariamente (desde que os autovalores complexos sejam arbitrados com seus correspondentes conjugados) se e somente se (A, \underline{b}) for controlável. \square

Existem diversas maneiras de se calcular o vetor \underline{k} para alocação dos pólos de $A_f = A - \underline{b}\underline{k}^t$. A mais imediata, porém, às vezes mais trabalhosa é utilizar a própria definição de polinômio característico. Assim, a partir dos pólos desejados para o sistema após a realimentação, calcula-se um polinômio de grau n onde os coeficientes são conhecidos, isto é:

$$\Delta_f(s) = s^n + a_{1_f}s^{n-1} + a_{2_f}s^{n-2} + \dots + a_{(n-1)_f}s + a_{n_f} \quad (5.3a)$$

onde os coeficientes a_{i_f} , $i = 1, 2, \dots, n$, são reais e conhecidos. Em seguida, a partir da definição de polinômio característico, calcula-se

$$\begin{aligned} \Delta_f(s, \underline{k}) &= \det(sI - A_f) \\ &= s^n + a_{1_f}(\underline{k})s^{n-1} + a_{2_f}(\underline{k})s^{n-2} + \dots + a_{(n-1)_f}(\underline{k})s + a_{n_f}(\underline{k}). \end{aligned} \quad (5.3b)$$

Comparando-se os coeficientes dos polinômios característicos desejado (equação (5.3a)) e dados em função de \underline{k} (equação (5.3b)), obtêm-se os ganhos k_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Deve ser ressaltado que quanto mais afastados do eixo imaginário forem posicionados os pólos, mais rápida será a resposta do sistema. Contudo,

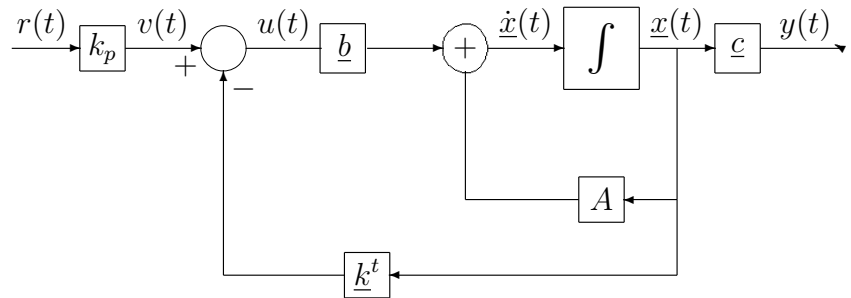


Figura 5.4: Diagrama de blocos para rastreamento em um contexto de realimentação de estados.

isso, em geral, implica em um aumento na amplitude do sinal de controle $u(t)$, o que pode levar o sistema à saturação e, portanto, a sair da faixa linear de operação. Assim sendo, embora arbitrária, a escolha dos modos do sistema realimentado sofre restrições de natureza prática.

Observação 5.1 Os zeros da função de transferência da planta não se alteram com a realimentação de estados. Assim, caso a realimentação de estados faça um pólo do sistema realimentado coincidir com um zero da planta (levando a um cancelamento), este modo não desaparecerá, tornando-se um modo escondido (não-observável). \square

5.4 Rastreamento robusto utilizando-se realimentação de estados e de saída

Uma forma de se considerar o rastreamento em um ambiente de realimentação de estados é introduzir um ganho k_p , conforme representado na figura 5.4. Para tanto, sejam

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \\ y(t) &= \underline{c}\underline{x}(t) \end{cases} \quad (5.4a)$$

e

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= A_f\underline{x}(t) + \underline{b}v(t) \\ y(t) &= \underline{c}\underline{x}(t) \end{cases} \quad (5.4b)$$

as equações de estados dos sistemas antes e depois da realimentação de estados, respectivamente. Note que, por simplicidade o termo de transmissão direta foi retirado, porém, ele poderia ser considerado sem complicação adicional. Sejam, ainda,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \underline{c}(sI - A)^{-1}\underline{b} \quad (5.5a)$$

e

$$G_f(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \underline{c}(sI - A_f)^{-1}\underline{b} \quad (5.5b)$$

as funções de transferências dos sistemas antes e depois da realimentação de estados. Definindo, de acordo com a figura 5.4, $u(t) = k_p r(t) - \underline{k}^t \underline{x}(t)$ e como, de acordo com a equação (5.5b), $Y(s) = G_f(s)V(s)$, resulta:

$$Y(s) = k_p G_f(s)R(s). \quad (5.6)$$

Supondo que a realimentação de estados estabilize o sistema, então $G_f(s)$ é uma função de transferência estável. Além disso, como está sendo considerado o problema do rastreamento, tem-se que $R(s) = A/s$, onde A denota a amplitude do degrau. Isto permite que o teorema do valor final possa ser usado para calcular o comportamento de $y(t)$, quando t tende para infinito. Desta forma:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s k_p G_f(s) \frac{A}{s} = k_p G_f(0)A \quad (5.7)$$

O objetivo de rastreamento assintótico requer que $y(t) = A$ quando $t \rightarrow \infty$. A partir da equação (5.7), esta condição será satisfeita se e somente se

$$k_p = \frac{1}{G_f(0)}. \quad (5.8)$$

Podem-se, portanto, tirar as seguintes conclusões:

1. $G_f(0)$ deve ser diferente de zero, o que implica dizer que o sistema realimentado não tenha zeros na origem. Como a realimentação de estados não modifica os zeros da planta, isto é equivalente a exigir que a planta não tenha zeros na origem.

2. $G_f(0)$ é o ganho DC do sistema após a realimentação de estados, que é função do ganho DC da planta e, portanto, não pode ser calculado/identificado exatamente (ver (Basilio 1999)). Por conseguinte, esta metodologia, embora teoricamente correta, não funciona na prática.

Assim sendo, não se pode garantir sempre o rastreamento para a estrutura da figura 5.4 uma vez que erros na determinação do ganho DC do sistema implicarão em erros no valor de estado permanente de $y(t)$. Em outras palavras, o rastreamento obtido através do sistema da figura 5.4 não é robusto a incertezas no modelo da planta.

Para se conseguir um rastreamento robusto, é necessário envocar o princípio do modelo interno (Basilio 1999). De acordo com o princípio do modelo interno, para que um sistema realimentado com realimentação de saída rastreie assintoticamente (isto é, quando $t \rightarrow +\infty$) um degrau de amplitude A e rejeite, também assintoticamente, um degrau de perturbação de amplitude D , é necessária uma realimentação de saída seguida de uma ação integral, isto é:

$$v(t) = k_i \int_0^t e(\lambda) d\lambda = k_i \int_0^t [r(\lambda) - y(\lambda)] d\lambda, \quad (5.9)$$

onde $v(t)$ é o sinal a ser aplicado ao sistema após a realimentação de estados e de saída, conforme mostrado na figura 5.5. Neste caso, o problema passa a ser o de calcular o vetor de realimentação de estados \underline{k} e o ganho do integrador k_i .

Note, a partir da figura 5.5 que os estados do sistema realimentado serão os estados do sistema original (planta) mais o estado introduzido pela ação integral $x_i(t)$. Assim, o objetivo, agora, é obter as equações dinâmicas relacionando a entrada $r(t)$, os estados $\underline{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}(t) & x_i(t) \end{bmatrix}^t$ e a saída $y(t)$.

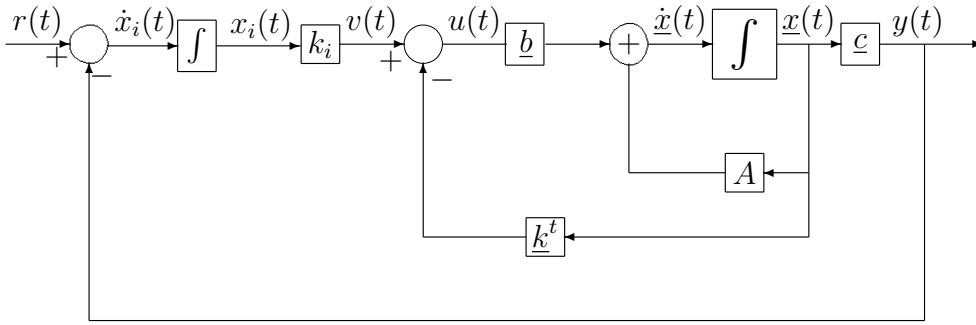


Figura 5.5: Rastreamento robusto com realimentação de estados e de saída.

A partir da figura 5.5, pode-se escrever:

$$\dot{x}_i(t) = e(t), \quad (5.10a)$$

$$v(t) = k_i x_i(t), \quad (5.10b)$$

$$u(t) = v(t) - \underline{k}^t \underline{x}(t), \quad (5.10c)$$

$$e(t) = r(t) - y(t). \quad (5.10d)$$

Substituindo a equação (5.10b) na equação (5.10c) e, em seguida, substituindo a equação resultante na equação (5.4a), obtém-se:

$$\dot{\underline{x}}(t) = (A - \underline{b}\underline{k}^t)\underline{x}(t) + \underline{b}k_i x_i(t). \quad (5.11a)$$

Substituindo, agora, a equação (5.10d) na equação (5.10a) e usando a equação de saída de (5.4a), resulta:

$$\dot{x}_i(t) = -\underline{c}\underline{x}(t) + r(t). \quad (5.11b)$$

Assim sendo, as equações dinâmicas do sistema representado na figura 5.5 podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{x}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \underline{b}\underline{k}^t & k_i \underline{b} \\ -\underline{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \underline{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.12)$$

A equação (5.12), acima, mostra que o problema de rastreamento robusto utilizando realimentação de estados e de saída, se reduz a calcular o vetor $\underline{k} = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n]$ e o ganho k_i de modo a posicionar os autovalores da matriz

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A - \underline{b}\underline{k}^t & k_i\underline{b} \\ -\underline{c} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

A solução desse problema é garantida pelo seguinte teorema.

Teorema 5.2 Se o par (A, \underline{b}) é controlável e se a planta não possui nenhum zero na origem, então todos os autovalores da matriz A_{cl} , definida na equação (5.13), podem ser alocados arbitrariamente a partir de uma escolha apropriada de \underline{k}^t e k_i . \square

5.5 Observadores de estado

Seja um SLIT cuja realização em espaço de estados é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \\ y(t) &= \underline{c}\underline{x}(t) + du(t) \end{cases}. \quad (5.14)$$

Para que uma realimentação de estados ou mesmo uma realimentação para rastreamento robusto seja possível, é necessária a informação da evolução dos estados ao longo do tempo, o que nem sempre é possível. Muitas vezes as variáveis de estado não têm significado físico, ou então, os estados podem ser tais que seja impossível medi-los, devido a restrições tecnológicas e ou financeiras, uma vez que os sensores necessários podem ser extremamente caros. A partir da teoria de observadores de estado, tais dificuldades podem ser contornadas, visto que, ao invés de serem medidos, os estados serão então estimados. Existem dois tipos de observadores de estado: observador em malha aberta e observador em malha fechada.

O observador em malha aberta nada mais é do que um modelo matemático em espaço de estados para a planta a ser controlada, sendo utilizado no presente trabalho a fim de validar os parâmetros do motor cc obtidos por

meio dos experimentos. O observador em malha aberta tem o decaimento do seu erro de estimação determinado pela matriz de estado do sistema, que deve ser bem próxima da matriz real do sistema. Essa limitação é superada através do uso de observadores em malha fechada, que podem ter os autovalores de sua matriz de evolução de estados alocados de maneira que tenham constante de tempo menor que a do sistema original, possibilitando o seu uso na estabilização ou no rastreamento robusto dos sistemas em consideração.

5.6 Observadores de estado em malha fechada

A dinâmica do estado estimado é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = A\hat{\underline{x}}(t) + \underline{b}u(t) + l[y(t) - \hat{y}(t)]. \quad (5.15)$$

Denotando por

$$\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t) \quad (5.16)$$

o erro de estimação, tem-se que:

$$\dot{\underline{e}}(t) = (A - \underline{l}c)\underline{e}(t). \quad (5.17)$$

Definindo

$$\hat{A} = A - \underline{l}c \quad (5.18)$$

resulta em:

$$\dot{\underline{e}}(t) = \hat{A}\underline{e}(t). \quad (5.19)$$

A solução da equação (5.19) é dada por:

$$\underline{e}(t) = \underline{e}^{\hat{A}t}\underline{e}(0) = \underline{e}^{\hat{A}t}[\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}(0)]. \quad (5.20)$$

Assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}(t) = \underline{0} \quad (5.21)$$

se e somente se \hat{A} for estável, ou seja, se os autovalores de \hat{A} estiverem no semiplano da esquerda do plano complexo (parte real negativa). Para tanto, deve-se calcular o vetor de ganhos \underline{l} que leva a matriz \hat{A} a possuir autovalores, de maneira que o observador em malha fechada tenha uma taxa de decaimento aceitável.

O problema de posicionamento dos autovalores da matriz \hat{A} é análogo ao problema de alocação de pólos no projeto de controladores por realimentação de estados. Para que seja possível tal alocação através da escolha apropriada de um vetor \underline{l} , é necessário que o par (\underline{c}, A) seja observável. Quando isso ocorre, é possível verificar que todos os autovalores de \hat{A} podem ser alocados arbitrariamente.

5.7 Rastreamento robusto utilizando observador de estado em malha fechada

Nesta seção será considerado o problema de se projetar um controlador que rastreie assintoticamente sinais de referência do tipo degrau utilizando-se realimentações de estado e de saída, sendo a realimentação de estados realizada a partir de um observador em malha fechada. A justificativa para isso está no fato de que quando um ou mais estados não são acessíveis, ou mesmo se o estado a ser medido não está associado a uma grandeza física, a obtenção deste estado, para fins de realimentação do sistema deve ser feita a partir de observadores de estado. Como será mostrado adiante, a introdução de um observador de estado para superar tais dificuldades não altera o projeto do controlador robusto. O desacoplamento entre os sistemas faz com que o projeto do vetor de ganho \underline{l} para o observador possa ser realizado de maneira independente do vetor \underline{k} (realimentação de estados) e k_i (ganho integral).

Considere a realimentação de estados a partir de um observador de

estados em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + \underline{b}u \\ y &= \underline{c}\underline{x} \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\underline{x}}} &= A\hat{\underline{x}} + \underline{b}u + \underline{l}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \underline{c}\hat{\underline{x}} \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A\hat{\underline{x}} + \underline{b}u + \underline{l}(\underline{c}\underline{x} - \underline{c}\hat{\underline{x}}) \quad (5.24)$$

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A\hat{\underline{x}} + \underline{b}u + \underline{l}\underline{c}(\underline{x} - \hat{\underline{x}}). \quad (5.25)$$

Definindo

$$\underline{e} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}, \quad (5.26)$$

tem-se que

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} \quad (5.27)$$

Substituindo as equações (5.22) e (5.25) em (5.27) obtém-se:

$$\dot{\underline{e}} = (A - \underline{l}\underline{c})(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) = (A - \underline{l}\underline{c})\underline{e} \quad (5.28)$$

e aplicando (5.26) em (5.28), a seguinte equação de estado é obtida:

$$\dot{\underline{e}} = (A - \underline{l}\underline{c})\underline{e}. \quad (5.29)$$

Note que o sinal de controle $u(t)$ é dado por:

$$u = -\underline{k}^T \hat{\underline{x}} + k_I x_I, \quad (5.30)$$

e, portanto, substituindo-se a equação (5.30) em (5.22), resulta:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}(-\underline{k}^T \hat{\underline{x}} + k_I x_I) \quad (5.31)$$

Fazendo uma mudança de variáveis em $\hat{\underline{x}}$, obtém-se:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} - \underline{b}\underline{k}^T(\underline{x} - \underline{e}) + \underline{b}k_I x_I \quad (5.32)$$

Assim, a equação de estado para $\underline{\dot{x}}$ é dada por:

$$\underline{\dot{x}} = (A - \underline{bk}^T)\underline{x} + \underline{bk}^T\underline{e} + \underline{bk}_I x_I \quad (5.33)$$

A terceira equação de estado é direta e pode ser obtida por simples inspeção da figura 2-6, sendo assim:

$$x_I = r - cx \quad (5.34)$$

Colocando as equações de estado, 5.29, 5.33 e 5.34 em forma matricial, tem-se a seguinte representação em espaço de estados para o sistema realimentado da figura 2-6.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - \underline{bk}^T) & \underline{bk}_I & \underline{bk}^T \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (A - \underline{lc}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \\ \underline{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (5.35)$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ x_I \\ \underline{e} \end{bmatrix}$$

Como pode ser observado na equação (2.112), o estado e , influenciado pelo observador, está desacoplado do resto do sistema, dependendo somente de seus valores passados. Uma vez que a matriz de evolução dos estados pode ser diagonalizável por blocos, o que justifica a afirmação de que o projeto dos ganhos de realimentação de estados e do integrador (K e K_i respectivamente) podem ser feitos em separado dos ganhos do observador em malha fechada.

5.8 Experimentos a serem realizados no laboratório

5.8.1 Objetivo

O objetivo desse experimento é implementar controlador robusto utilizando observador de estado em malha fechada através do Real-Time Windows Target do Simulink.

5.8.2 Preparatório

1. Cálculo dos ganhos do controlador robusto
2. Cálculo dos ganhos do observador de estado em malha fechada
3. Controlador robusto utilizando observador de estado em malha fechada

5.8.3 Implementação

Referências Bibliográficas

Advantech (2001), *User's Manual 1711*.

Astrom, K. J. & Wittenmark, B. (1990), *Computer-controlled Systems: Theory and Design*, 2nd edn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA.

Basilio, J. C. (1999), *Laboratório de Sistemas de Controle I*, Escola Politécnica - UFRJ.

Basilio, J. C. (2002), 'A laboratory for a first course in control systems', *International Journal of Electrical Engineering Education* **39**, 54–70.

Basilio, J. C. & Moreira, M. V. (2004), 'State-space parameter identification in a second control laboratory', *IEEE - Transactions on Education* **47**, 204–210.

Chapman, S. J. (1991), *Electric Machinery Fundamentals*, 2nd edn, McGraw-Hill, Inc., New York.

Chen, C. T. (1999), *Linear System Theory and Design*, 3rd edn, Oxford University Press, New York, USA.

Dorf, R. C. (1992), *Modern Control Systems*, 6th edn, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, USA.

Leonhard, W. (1997), *Control of Electrical Drives*, 2nd edn, Springer Verlag, Berlin.

Ogata, K. (1998), *System Dynamics*, 3rd edn, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.