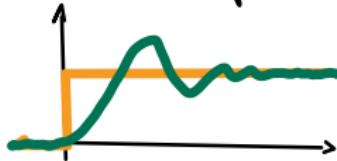


Quadro para desenvolvimento

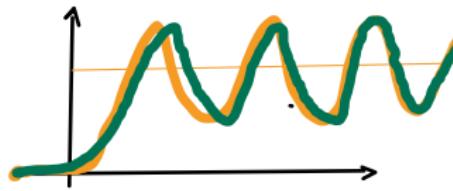
PROJETO DE CONTROLOADORES

1 - Objetivos da realimentação

- a) Estabilidade. O sistema realimentado deve ter todos os polos com parte real negativa
- b) Redução/eliminação do erro de regime permanente (rastreamento do sinal de referência)



Rastreamento



Sobreexcitamento

Quadro para desenvolvimento

c) Melhoria da resposta transitoria.

Exemplo: Encontre um controlador de tal forma que o sistema realimentado tenha um tempo de acomodação menor que um dado t_s e percentual de ultrapassagem menor que P.O. (%)

Solução: Aproximando por um sistema de segunda ordem com zeros, temos:

$$\text{P.O.} \leq \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \Rightarrow \ln \text{P.O.} \leq -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow$$

$$\left[\sqrt{1-\xi^2}(\ln \text{P.O.})\right]^2 \leq \left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2 \Rightarrow (1-\xi^2)\ln^2(\text{P.O.}) \leq \xi^2\pi^2$$

Quadro para desenvolvimento

$$ln^2(p_0) - ln(p_0) \geq 2 - \pi^2 \geq 0$$

$$[\pi^2 + \ln^2(P.O.)] \leq \pi^2 - \ln^2(P.O.) \geq 0$$

$$\frac{\zeta^2 - \frac{\ln^2(P.O.)}{\pi^2 + \ln^2(P.O.)}}{\underbrace{\alpha^2}_{\zeta > 0}} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \zeta \geq \alpha \\ \zeta \leq -\alpha \end{cases} \Rightarrow \zeta \geq \alpha$$

$$\therefore \frac{\ln(P.O.)}{\sqrt{\Pi^2 + \ln^2(P.O.)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Pi}{\ln(P.O.)}\right)^2}}$$

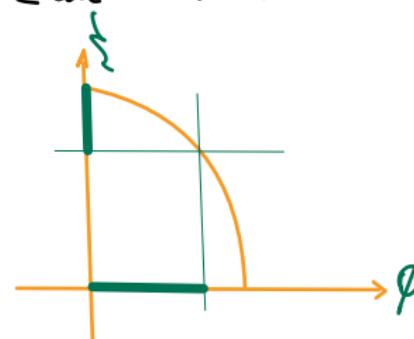
Quadro para desenvolvimento

Como $\phi = \arccos \xi = \arcsin \sqrt{1-\xi^2} = \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$, então

$$\phi = \arccos \xi$$

$$\xi = \cos \phi \geq b$$

$$\phi \leq \arccos b$$



$$\phi \leq \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\ln(\rho_0)} \right)^2}} \right)$$

$$\cdot G(j\omega) = \frac{j\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n j + \omega_n^2}$$

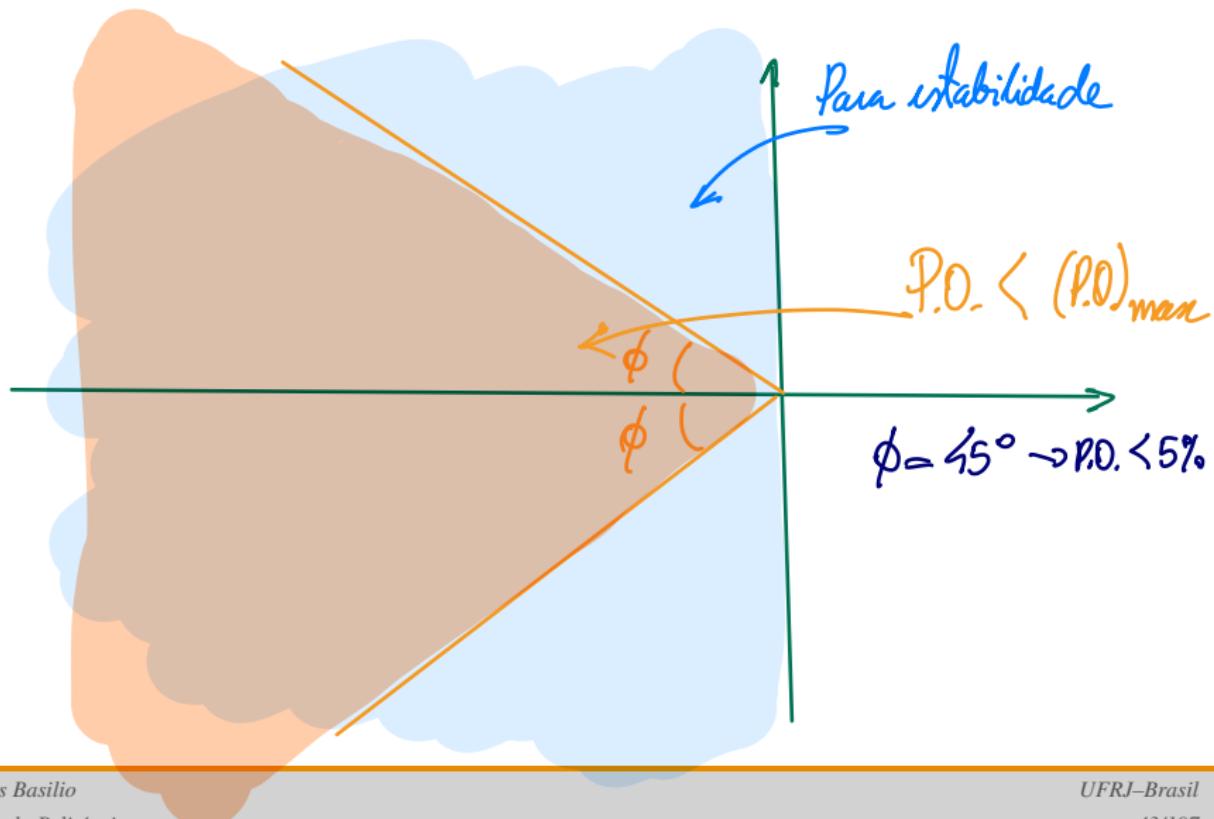
$$\cdot 0 < \xi < 1$$



$$\operatorname{Res} \phi = \frac{\sum \omega_n}{\omega_n} = \xi$$

$$\operatorname{Sen} \phi = \frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{\omega_n} = \sqrt{1 - \xi^2}$$

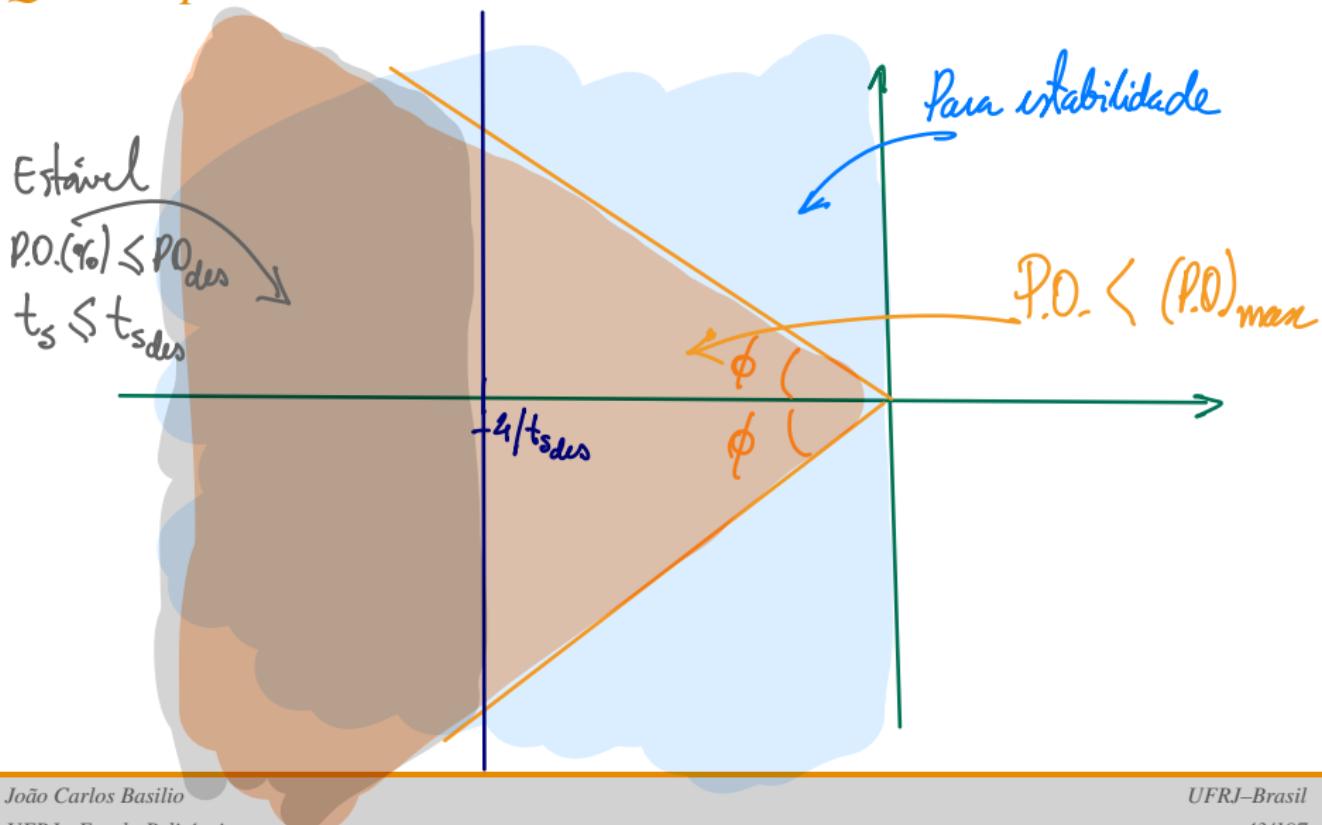
Quadro para desenvolvimento



Quadro para desenvolvimento

D.O.	$\phi = \arctan \frac{\Im}{\Re} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Im}{\Re} \right)^2}} \right)$
$15\% = 0,15$	$\sim 59^\circ$
$10\% = 0,10$	$\sim 54^\circ$
$5\% = 0,05$	$\sim 46^\circ \longrightarrow 45^\circ$
$2\% = 0,02$	$\sim 39^\circ$

Quadro para desenvolvimento



Quadro para desenvolvimento

Cálculo da região para a qual $t_s \leq t_{sdes}$

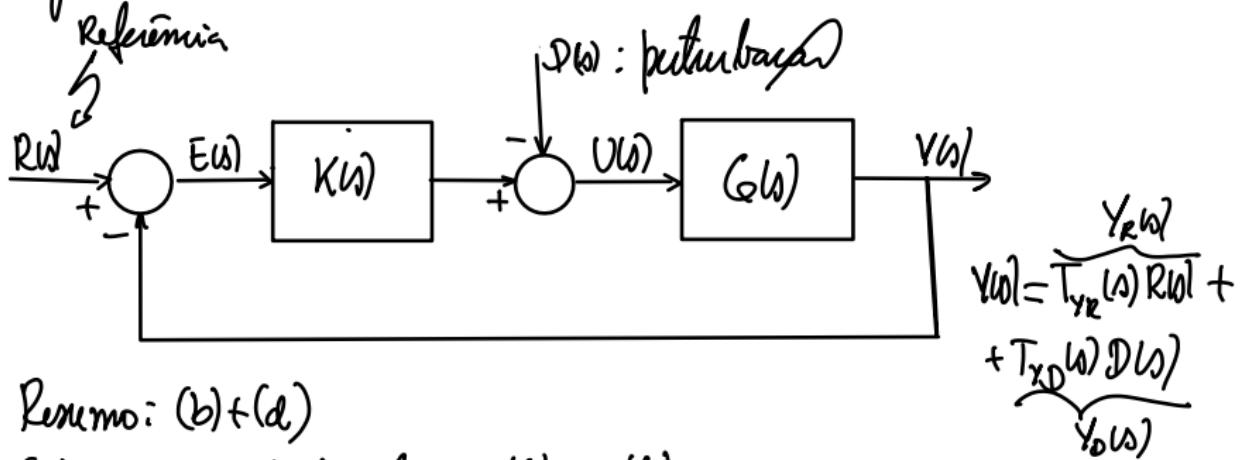
$t_s = \frac{4}{\sum \omega_n}$ (sistema de segunda ordem subamortecido: considerando 98% do valor de regime permanente)

$$\frac{4}{\sum \omega_n} \leq t_{sdes} \Rightarrow \boxed{\sum \omega_n \geq \frac{4}{t_{sdes}}}$$

Pólos do sistema realimentado (segunda ordem subamortecido)
 $p = -\sum \omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, $p^* = -\sum \omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

Quadro para desenvolvimento

d) Rejeição dos efeitos externos de perturbações



Resumo: (b)+(d)

(b) $r(t) \rightarrow y_r(t) : \lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = r(t)$

(d) $d(t) \rightarrow y_d(t) : \lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) = 0$

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_D(s)$$

$$y(t) = y_r(t) + y_d(t)$$

Quadro para desenvolvimento

Nota que: $Y(s) = \frac{G(s)X(s)}{1 + G(s)X(s)} R(s) + \frac{-G(s)}{1 + G(s)X(s)} D(s)$

Portanto: $Y_R(s) = \frac{(G(s)K(s))}{1 + (G(s)K(s))} R(s)$

$$Y_D(s) = \frac{-G(s)}{1 + G(s)K(s)} D(s)$$

Sejam $G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}$ e $K(s) = \frac{n_K(s)}{d_K(s)}$

$$(1) Y_R = \frac{\frac{n_G n_K}{d_G d_K}}{1 + \frac{n_G n_K}{d_G d_K}} \cdot R = \frac{n_G n_K}{n_G n_K + d_G d_K} R$$

Quadro para desenvolvimento

$$\text{Suf: } R(s) = \frac{A(s)}{\beta(s)} = \frac{a(s)}{\beta^+(s)\beta^-(s)}, \quad \begin{array}{l} \beta^+(s): \text{fatores de } \beta(s) \text{ com raízes com parte real} \\ \text{maior ou igual a zero} \\ \beta^-(s) = \beta(s)/\beta^+(s) \end{array}$$

$$\text{Ex: } r(t) = A u_0(t) \Rightarrow R(s) = \frac{A}{s} \Rightarrow \beta(s) = s \Rightarrow \beta^+(s) = s, \beta^-(s) = 1$$

$$r(t) = e^{-st} u_0(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s+3} \Rightarrow \beta(s) = s+3 \Rightarrow \beta^+(s) = 1, \beta^-(s) = s+3$$

$(s+ju_0)(s-ju_0)$

$$r(t) = A \cos(\omega_0 t) \cdot u_0(t) \Rightarrow R(s) = \frac{A s}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \beta(s) = s^2 + \omega_0^2 \Rightarrow \beta^+(s) = s^2 + \omega_0^2$$

$\beta^-(s) = 1$

Quadro para desenvolvimento

$$Y_R = \frac{n_G n_N}{n_G n_N + d_G d_N} R$$

$$R(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{d(s)}{\beta^+(s)\beta^-(s)}$$

$$\text{Defina: } E_R(s) = R(s) - Y_R(s) = R - \frac{n_G n_N}{n_G n_N + d_G d_N} R = \frac{n_G n_N + d_G d_N - n_G n_N}{n_G n_N + d_G d_N} \cdot R$$

$$\text{Portanto: } E_R(s) = \frac{d_G d_N}{n_G n_N + d_G d_N} \cdot \frac{\alpha(s)}{\beta^+(s)\beta^-(s)}$$

$$Y_R(t \rightarrow \infty) (t \rightarrow +\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_R(t) = 0 = \lim_{s \rightarrow 0} E_R(s)$$

(1) Estabilidade: $b(s) = n_G(s)n_N(s) + d_G(s)d_N(s)$ tem todas as raízes com parte real negativa

(2) Para aplicar o TVF é necessário que $E_R(s)$ tenha todos os polos com parte real negativa ou um polo na origem $\Rightarrow \beta^+(s)$ tem que ser cancelado $\Rightarrow \beta^+(s)$ tem que ser um divisor de $p_0(s) = d_G(s)d_N(s)$

Quadro para desenvolvimento

Conclusão: Para sistemas/automatismos análogos (regime permanente)

$$d_G(s) d_K(s) = \tilde{\beta}_0(s) \beta^+(s)$$

(2) Reação de perturbações

Seja $D(s) = \frac{\omega_D(s)}{\beta_0(s)} = \frac{\omega_D(s)}{\beta_0^+(s) \beta_0^-(s)}$

$$Y_D(s) = \frac{-G(s)}{1 + G(s) K(s)} D(s)$$

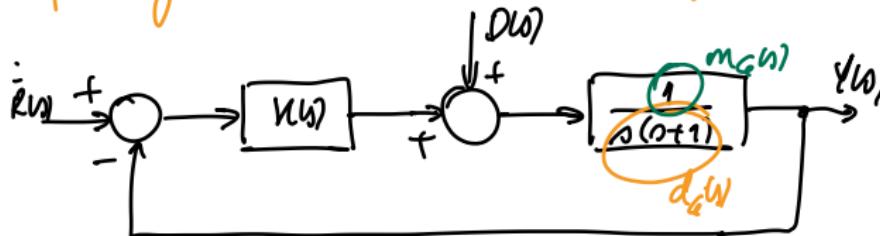
$$Y_D(s) = \frac{-\frac{n_G}{d_G} \frac{d_K}{d_K}}{1 + \frac{n_G n_K}{d_G d_K}} D(s) = \frac{-n_G d_K}{n_G n_K + d_G d_K} \cdot \frac{\omega_D(s)}{\beta_0^+(s) \beta_0^-(s)}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_D(t) = 0 = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_D(s) \Leftrightarrow n_G d_K = \tilde{\beta}_0^+(s) \beta_D^+(s)$$

Quadro para desenvolvimento

Conclusão: para rejetar perturbações, é necessário que $\eta_w(u) d_w(u) = \sum \omega_i \beta_i^T(u)$

Exemplo:



A. Suponha que $R(u) = \frac{A}{\omega}$ e $D(u) = \frac{B}{\omega}$

- 1) Rastrear um degrau
- 2) Rejetar um degrau

Rastreamento de degrau: $\beta(u) = 1 \Rightarrow \beta^T(u) = 1$ e $\beta^T(u) = 1 \Rightarrow d_w(u) d_w(u) = \beta(u) \beta^T(u)$

$$\Rightarrow d_w(u) d_w(u) = 1 \beta(u) \text{ ja é satisfeita}$$

$\underbrace{0}_{0 \neq 1}$

Quadro para desenvolvimento

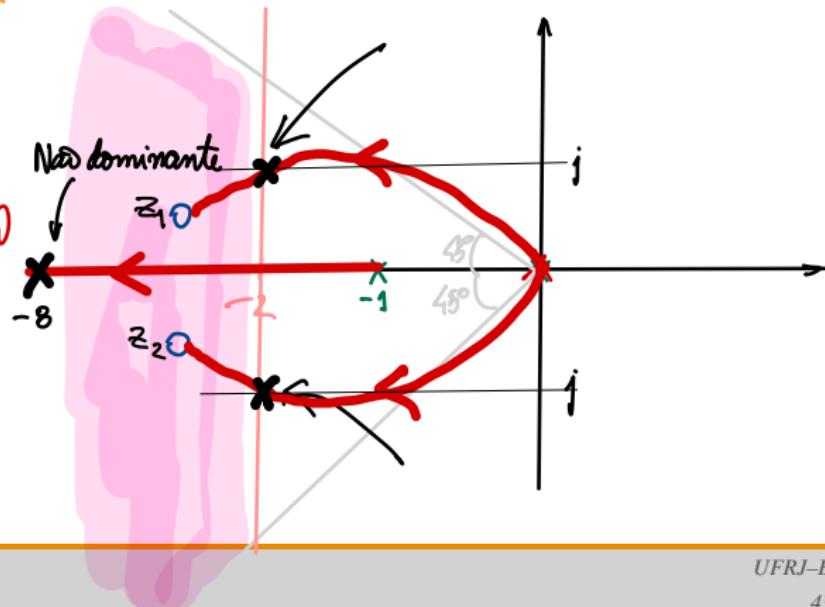
Rejetar o degrau: $\Re \omega = 8 \Rightarrow \beta_D^+(0) = 8, \beta_D^-(0) = 1$

Condição de rejeição: $\underbrace{m_{\text{c}}(0)}_{1} \underbrace{\Re \omega(0)}_{q(0)} = q(0) \beta_D^+(0) = q(0) \cdot 8$

Portanto: $k(0) = \frac{m_{\text{c}}(0)}{\Re \omega(0)}$

- ✗ Polos da planta
- ✗ Polo inórido para rejeição de perturbações

-
- ✗ Polos desejados do sistema atalimentado
 - o giro do controlador PID



Quadro para desenvolvimento

$$(b) t_{sq} \leq 2 \Rightarrow t_s = \frac{1}{\zeta \omega_n} \leq 2 \Rightarrow 2\omega_n \geq 1$$

$$PO_d \leq 5\% \Rightarrow \phi \leq 45^\circ$$

(c) polos do sistema realimentado (atribuído pelo profitista)

$$p_1 = -2 + j, \quad p_2 = -2 - j, \quad p_3 = -8 \quad \rightarrow \quad p_4 = -10$$

Polinômio característico de malha fechada:

$$P_{cl}(s) = (1-p_1)(1-p_2)(s-p_3) = (1^2 + 4s + 5)(s+8) = s^3 + 12s^2 + 37s + 40$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 37 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$m_x(b) = K(s+z_1)(s+z_2) = K(s^2 + (z_1+z_2)s + z_1z_2) = Ks^2 + K(z_1+z_2)s + Kz_1z_2 = as^2 + bs + c$$

$$d_x(b) = 1$$

$$m_q(b) = 1$$

$$d_q(b) = a(b+1) = a^2 + a$$

Quadro para desenvolvimento

$$f_c(b) = m_q(b) m_h(b) + d_q(b) d_h(b)$$

$$1(a\omega^2 + b\omega + c) + (s^2 + \zeta\omega) s = s^3 + 12s^2 + 37s + 40$$

$$a\omega^2 + b\omega + c = \cancel{s^3 + 12s^2 + 37s + 40} - \cancel{s^3} - s^2$$

$$a\omega^2 + b\omega + c = 11s^2 + 37s + 40$$

$$a=11 \Rightarrow k=11$$

$$b=37 \Rightarrow k(z_1+z_2)=37 \Rightarrow z_1+z_2 = 37/11 = 3,4$$

$$c=40 \Rightarrow k z_1 z_2 = 40 \Rightarrow z_1 z_2 = \frac{40}{11} = 3,6 \quad \underbrace{k_p + \frac{k_I}{\tau} + k_D s}_{\text{Controller}}$$

Controlador PID: $u(s) = \frac{m_u(s)}{d_u(s)} = \frac{11s^2 + 37s + 40}{s} = \underbrace{37}_{P} + \underbrace{\frac{40}{11}}_{I} + \underbrace{11s}_{D} = 37 \left(1 + \frac{10/37}{s} + \frac{11}{37} s \right)$

$$u(s) = 37 \left(1 + \frac{1}{0,925s} + 0,297s \right)$$

$$\underbrace{k_p \left(1 + \frac{1}{T_{I,p}} + \frac{1}{T_{D,p}} s \right)}_{\text{Controller}}$$

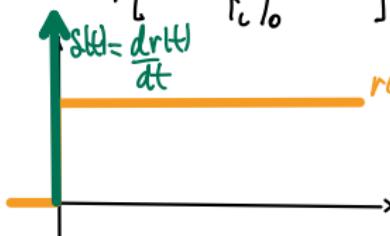
Quadro para desenvolvimento

Implementação do controlador PID

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda \right] + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$e(t) = r(t) - y(t)$

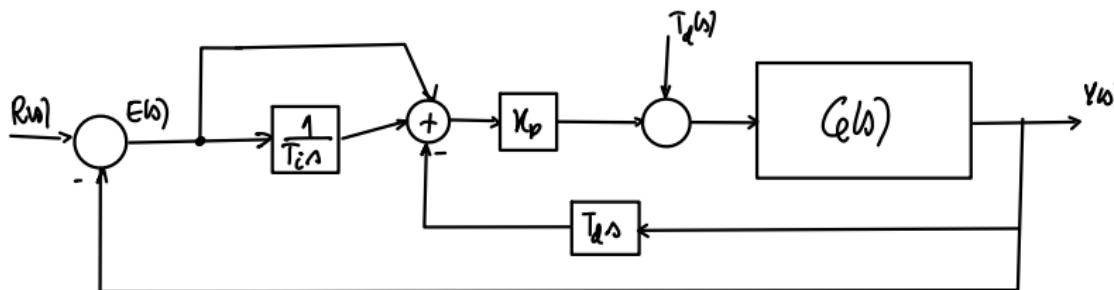
$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda \right] + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} - K_p T_d \frac{dy(t)}{dt}$$



→ Efeito infinito em $t=0$
Efeito nulo em $t>0$

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda \right] - K_p T_d \frac{dy(t)}{dt}$$

Quadro para desenvolvimento



Objetivos da realimentação (continuação)

e) Robustez

Sistema realimentado permanece estável mesmo em presença de erros de modelagem (dinâmicas não modeladas ou envelhecimento dos componentes da planta)

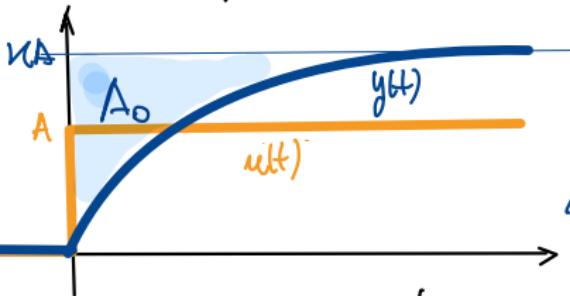
f) Abraçar os ruídos de medida

Inserção de filtro no controlador ou controle robusto H_∞ .

Quadro para desenvolvimento

2) Aproximação de sistemas por modelos de primeira e segunda ordem.

a) Sistema de primeira ordem



$$G(s) = \frac{K}{T_s + 1}$$

$$u(t) = A u_0(t) \rightarrow u(t) = A(1 - e^{-\frac{1}{T}t})$$

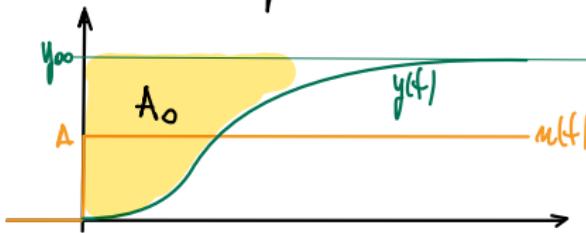
→ Utilizada quando o sistema possui característica superamortecida ou cairamamente amortecida.

→ Problema: determinar os parâmetros K e T do modelo.

Quadro para desenvolvimento

Enunciado:

1) Aplicar um degrau no sistema e obter a correspondente resposta



2) Determinação de K

$$K = \frac{y_{\infty}}{A}$$

Quadro para desenvolvimento

3) Determinação de τ .

A partir da regra de degrau do sistema de 1^a ordem, temos que:

$$A_0 = \int_0^{+\infty} (KA - y(t)) dt = \int_0^{+\infty} (KA - KA + KAe^{-\frac{1}{\tau}t}) dt = KA \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\tau}t} dt$$

$$A_0 = -\frac{KA}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} \Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{KA}{\tau} \Rightarrow A_0 = \frac{KA}{\tau}$$

Portanto, τ é calculado da seguinte forma:

$$\tau = \frac{Y_{00}}{A_0}$$

Quadro para desenvolvimento

Resumo: modelagem de um sistema com resposta subexponencial por um sistema de 1^o ordem:

$$\cdot G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

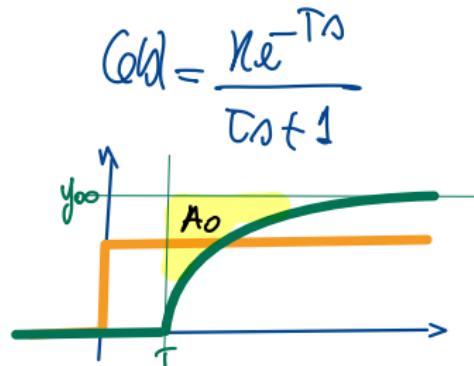
1º) Executar o sistema com um degrau de amplitude A e obter a resposta $y(t)$

2º) Calcular $y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$

3º) Calcular numericamente a área A_0

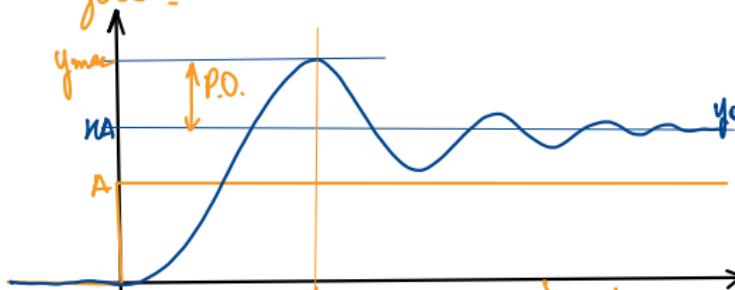
4º) Determinar K e T da seguinte forma:

$$K = \frac{y_{\infty}}{A} \quad \text{e} \quad T = \frac{y_{\infty}}{A_0}$$



Quadro para desenvolvimento

b) Aproximação de sistemas por摸dulos de 2^o ordem subamortecido sem zéros.



$$\rightarrow G(s) = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

$$u(t) = A \mu_0(t) \rightarrow$$

$$y(t) = KA \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta w_n t} \sin(w_n t + \phi) \right), t \geq 0 \quad \phi = \arccos \zeta$$

Problema: determinar os parâmetros: K , w_n e ζ

$$(i) K = \frac{y_oo}{A}, \quad P.O. = \exp\left(-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right), \quad t_p = \frac{\pi - \phi}{w_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad t_s = \frac{4}{\zeta w_n}$$

Quadro para desenvolvimento

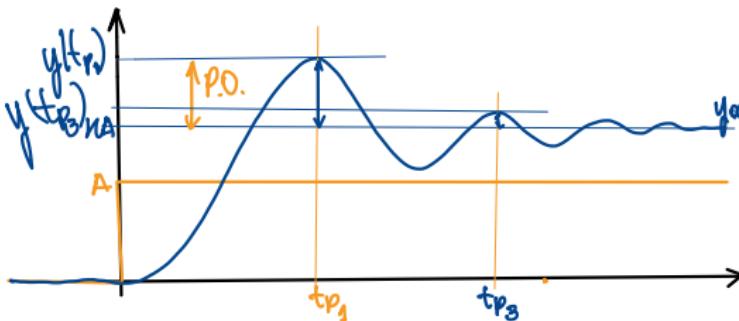
Problemas de (i)

- Não leva em conta a razão de decaimento
- Não determina um valor de ω_n em função da real oscilação do sistema.

Soluções:

$$t_{p_k} = \frac{k\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-3^2}}$$

$$|y(t_{p_k})| = KA - (-1)^k KA \exp\left(\frac{-3\pi k}{\sqrt{1-3^2}}\right), \quad k=1,2,3,\dots$$



Quadro para desenvolvimento

$$\Delta t_{13} = t_{p_3} - t_{p_1} = \frac{3\pi - \phi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\pi - \phi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \Delta t_{13} = \frac{2\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$y(t_{p_1}) = NA + NA \exp\left(\frac{-\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$y(t_{p_3}) = NA + NA \exp\left(\frac{-3\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$S_{31} = \frac{NA + NA \exp\left(-3\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right) - NA}{NA + NA \exp\left(-\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right) - NA}$$

$$S_{31} = \exp\left(\frac{-2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Quadro para desenvolvimento

Resumo: aproximar o comportamento de um sistema subamortecido por um modelo de segunda ordem sem zeros.

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

1º) Executar o sistema com um degrau de amplitude **A** e obter a resposta $y(t)$

2º) Calcular $y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$, t_{p_1} e t_{p_3} , $y(t_{p_1})$ e $y(t_{p_3})$

3º) Calcular $\Delta t_{p_{13}} = t_{p_3} - t_{p_1}$ e $S_{31} = \frac{y(t_{p_3})}{y(t_{p_1})}$.

Quadro para desenvolvimento

4º) Calcular χ_1 utilizando as seguintes expressões:

$$\chi = \frac{f_{\infty}}{A}$$

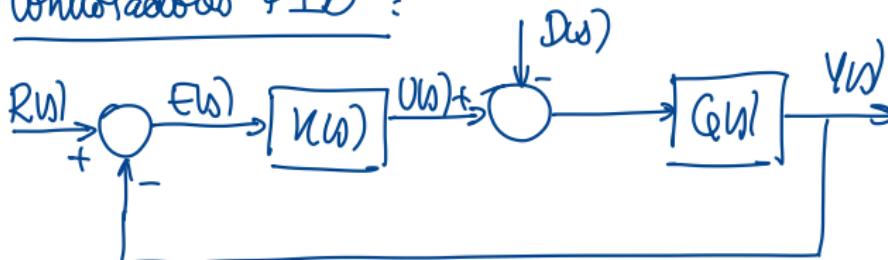
$$\zeta_{s1} = \exp\left(\frac{-2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

5º) Com o valor de ζ calculado no passo anterior, calcular w_n utilizando a expressão:

$$\Delta t_{t_{13}} = \frac{2\pi}{w_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Quadro para desenvolvimento

Contidadores PID :



Objetivo: calcular um controlador PID (Proporcional + Integral + Diferencial)

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

↑
P ↑
I ↑
D

Up: ganho proporcional
 T_i, T_d : tempos integral
e derivativo.

Quadro para desenvolvimento

Função de transferência de um controlador PID:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$v(\omega) = K_p \left(E(\omega) + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{E(\omega)}{\omega} + T_d \omega E(\omega) \right) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \omega} + T_d \omega \right) E(\omega)$$

$$K_{PID}(\omega) = \frac{K_p (T_i T_d \omega^2 + T_i \omega + 1)}{T_i \omega} = \frac{K_p T_i T_d (\omega^2 + (1/T_d) \omega + 1/(T_i T_d))}{T_i \omega}$$

$$K_{PID}(\omega) = \frac{\bar{K} (1+z_1)(1+z_2)}{\omega}, \quad z_1 + z_2 = \frac{1}{T_d}, \quad z_1 z_2 = \frac{1}{T_i T_d} \quad e \quad \bar{K} = K_p T_d$$

Quadro para desenvolvimento

Exercícios para o clássico: 3^ª feira, após 13:00 (5 primeiros com resposta certa, receberão +0,5 P2)

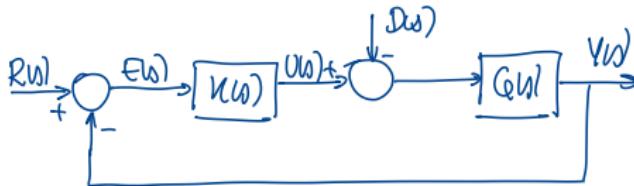
. Obtenha as f.l. do controlador P, PI e PD exerendo como na equação final do controlador PID.

Quadro para desenvolvimento

Análise das ações proporcional, integral e derivativa

1) Ação proporcional :

- Dependendo do valor de K_p , o controlador reage de forma mais ou menos intensa a uma variação do estado atual
- Reduz o erro de regime permanente a uma entrada ao degrau porém não elimina esse erro quando a planta não possui polos na origem.



$$\begin{aligned}
 E(s) &= R(s) - G(s)K(s)E(s) \\
 (1 + G(s)K(s))E(s) &= R(s) \\
 E(s) &= \frac{1}{1 + G(s)K(s)}R(s)
 \end{aligned}$$

Quadro para desenvolvimento

$$E(j\omega) = \frac{1}{1 + G(j\omega)k_p} R(j\omega)$$

Suje: $R(j\omega) = \frac{A}{\omega}$ (degrau de amplitude A), $|k_p| = k_p$ e suponha que k_p estabilize o sistema realimentado.

$$E(j\omega) = \frac{1}{1 + G(j\omega)k_p} \cdot \frac{A}{\omega}$$

$$e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(j\omega) = \frac{A}{1 + G(0)k_p}$$

$G(j\omega)$ finito uma vez que $G(j\omega)$ não possui polos na origem

Quadro para desenvolvimento

$$L_{\infty} = \frac{A}{1+G(0)K_p} \rightarrow \begin{array}{l} K_p \text{ aumenta} \rightarrow L_{\infty} \text{ diminui} \\ K_p \text{ finito} \rightarrow L_{\infty} \neq 0 \end{array}$$

2) Acção integral

$$K_I(\omega) = \frac{K_p}{T_i \Delta} \Rightarrow E(\omega) = \frac{1}{1+G(\omega)K_p} \frac{A}{\Delta} = \frac{AT_i \cancel{\Delta}}{T_i \Delta + G(\omega)K_p} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta}} = \frac{AT_i}{T_i \Delta + G(\omega)K_p}$$

Suposições: (i) $K_I(\omega)$ estabiliza $G(\omega) \rightarrow p_c(\omega) = 0 \Rightarrow T_i \Delta + G(\omega)K_p = 0$ tem somente raízes com parte real negativa

(ii) $G(\omega)$ não tem zero em $\omega = 0$

\Rightarrow Se $G(0)$ tem zero em $\omega = 0 \Rightarrow G(0) = \frac{A(0)}{B(0)}$

$$K_I(\omega) \cdot G(\omega) = \frac{K_p}{T_i \Delta} \times \frac{A(0)}{B(0)}$$



Cancelamento de zeros inestáveis.

Quadro para desenvolvimento

→ Um controlador integral não poderia ser empregado.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} SEW = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{A \dot{T}_i \neq 0}{T_i + Gb)k_p \neq 0} = 0.$$

$|G(b)| \neq 0$

Conclusão: controlador Integral elimina o erro de regime permanente para uma entrada de referência igual ao degrau.

* Pode-se também mostrar que a ação integral permite que um sinal de perturbação do tipo degrau seja eliminado. $\rho(s) \rightarrow m_0 s \underline{d(s)}$

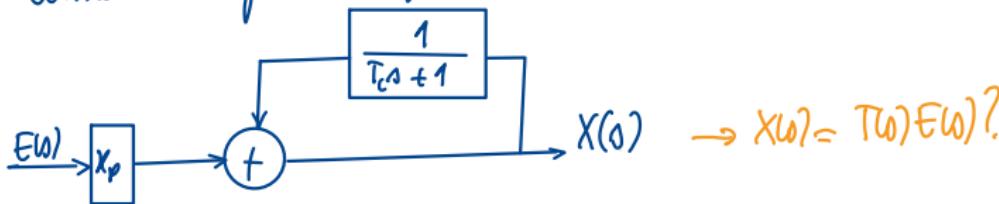
Quadro para desenvolvimento

Interpretação dinâmica da ação integral aplicada à proporcional (controlador PI)

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda \right] \Rightarrow u(t) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i} \right] e(t)$$

$$u(t) = \frac{K_p}{T_i} [T_i s + 1] e(t) \dots \dots (1)$$

Considere o seguinte diagrama de blocos?

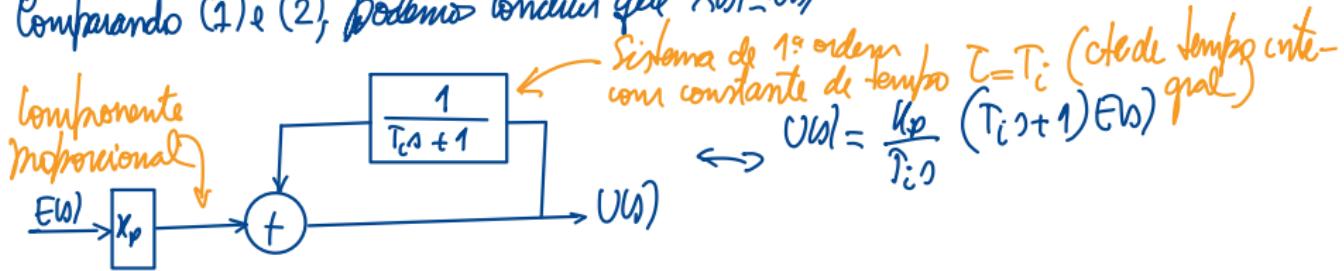


$$X(t) = K_p E(t) + \frac{1}{T_i s + 1} X(t) \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{T_i s + 1}\right) X(t) = K_p E(t) \Rightarrow$$

Quadro para desenvolvimento

$$\frac{T_i \cdot n + 1}{T_i \cdot n + 2} x(b) = k_p E(b) \Rightarrow x(b) = \frac{k_p}{T_i \cdot n} (T_i \cdot n + 1) E(b) \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), podemos concluir que $x(b) = U(b)$



Conclusão: a introdução da ação integral tem o efeito de atualizar a componente proporcional em função da saída em cada instante de tempo.

* Notifique, mesmo quando $c(t) = 0$, a ação integral continuará influenciando o sinal de controle $u(t)$. A esse efeito, dá-se o nome de "wind up".

Quadro para desenvolvimento

3) Ação derivativa:

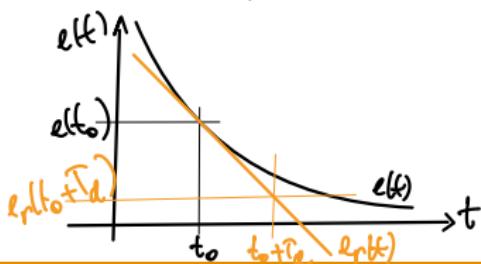
Objetivo: aumentar a velocidade da resposta de malha fechada.

$$K_d(s) = K_p T_d s \Leftrightarrow K_d(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p T_d s \Rightarrow V(s) = K_p T_d s E(s)$$

$$M_d(t) = K_p T_d \frac{d\epsilon(t)}{dt}$$

i) Interpretação dinâmica da ação derivativa

$$t_0 \rightarrow \epsilon(t_0)$$



Equação da reta tangente a $\epsilon(t)$ em $t=t_0$:

$$\frac{\epsilon(t) - \epsilon(t_0)}{t - t_0} = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} \Rightarrow \epsilon(t) = a(t - t_0) + \epsilon(t_0)$$

$$\epsilon(t) = at - a t_0 + \epsilon(t_0)$$

~~$$\text{Para } t = t_0 + T_d \Rightarrow \epsilon(t_0 + T_d) = at_0 + aT_d - a t_0 + \epsilon(t_0)$$~~

Quadro para desenvolvimento

$$e_r(t_0 + T_d) = \cancel{a t_0} + a T_d - \cancel{a t_0} + e(t_0) \Rightarrow e_r(t_0 + T_d) = T_d \frac{de(t)}{dt} \bigg|_{t=t_0} + e(t_0) \dots (1)$$

valor do erro approximado por uma reta tangente a $e(t)$ em $t=t_0 + T_d$.

Considere um controlador PD com ganho proporcional $K_p = 1$.

$$u(t) = K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \Rightarrow u(t) = e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$\text{Seja } t=t_0 \Rightarrow u(t_0) = T_d \frac{de(t)}{dt} \bigg|_{t=t_0} + e(t_0) \dots (2) \rightarrow \text{saída do controlador PD em } t=t_0$$

Comparando (1) e (2): o sinal de controle em um instante t_0 é igual ao valor estimado do erro em um instante $t_0 + T_d$ (T_d segundos após t_0) do erro supondo-se que este varie como se fosse uma reta tangente a $e(t)$ em $t=t_0$.

Quadro para desenvolvimento

3) Ação derivativa:

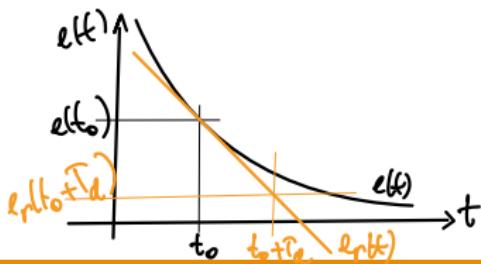
Objetivo: aumentar a velocidade da resposta de malha fechada.

$$K_d(s) = K_p T_d s \Leftrightarrow K_d(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_p T_d s \Rightarrow V(s) = K_p T_d s E(s)$$

$$M_d(t) = K_p T_d \frac{d\epsilon(t)}{dt}$$

i) Interpretação dinâmica da ação derivativa

$$t_0 \rightarrow \epsilon(t_0)$$



Equação da reta tangente a $\epsilon(t)$ em $t=t_0$:

$$\frac{\epsilon(t) - \epsilon(t_0)}{t - t_0} = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} \Rightarrow \epsilon(t) = a(t - t_0) + \epsilon(t_0)$$

$$\epsilon(t) = at - a t_0 + \epsilon(t_0)$$

~~$$\text{Para } t = t_0 + T_d \Rightarrow \epsilon(t_0 + T_d) = at_0 + aT_d - a t_0 + \epsilon(t_0)$$~~

Quadro para desenvolvimento

$$e_r(t_0 + T_d) = \cancel{a t_0} + a T_d - \cancel{a t_0} + e(t_0) \Rightarrow e_r(t_0 + T_d) = T_d \frac{de(t)}{dt} \bigg|_{t=t_0} + e(t_0) \dots (1)$$

valor do erro approximado por uma reta tangente a $e(t)$ em $t=t_0 + T_d$.

Considere um controlador PD com ganho proporcional $K_p = 1$.

$$u(t) = K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \Rightarrow u(t) = e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$\text{Seja } t=t_0 \Rightarrow u(t_0) = T_d \frac{de(t)}{dt} \bigg|_{t=t_0} + e(t_0) \dots (2) \rightarrow \text{saída do controlador PD em } t=t_0$$

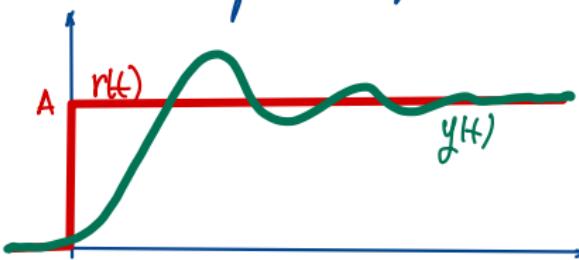
Comparando (1) e (2): o sinal de controle em um instante t_0 é igual ao valor estimado do erro em um instante $t_0 + T_d$ (T_d segundos após t_0) do erro supondo-se que este varie como se fosse uma reta tangente a $e(t)$ em $t=t_0$.

Quadro para desenvolvimento

Modificações do termo derivativo

$$1) u_o(t) = K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{termo derivativo})$$

Comunique o seguinte exemplo



$$t=0 \Rightarrow e(t) = A u_o(t) \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} \approx A \delta(t) \quad (\text{Agora derivativa é muito acentuada})$$

$$t > t_s \Rightarrow e(t) \approx 0 \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} \approx 0 \quad (\text{Agora derivativa quase não tem influência})$$

Quadro para desenvolvimento

$$e(t) = r(t) - y(t) \Rightarrow u_0(t) = k_p T_a \frac{d}{dt}[r(t) - y(t)]$$

\downarrow

$u_0(t) \quad (t \approx 0)$

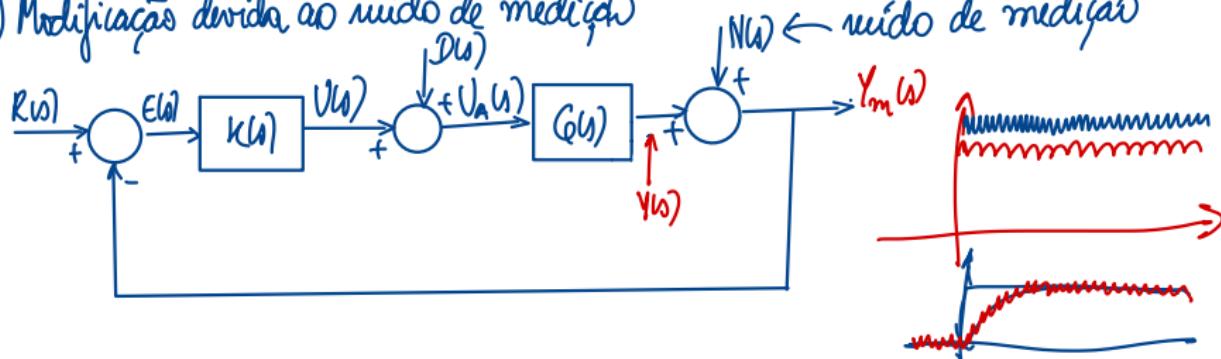
\downarrow

$A(t \rightarrow \infty)$

Na prática:

$$u_0(t) = -k_p T_a \frac{dy(t)}{dt}$$

2) Modificação devida ao ruído de medição



Quadro para desenvolvimento

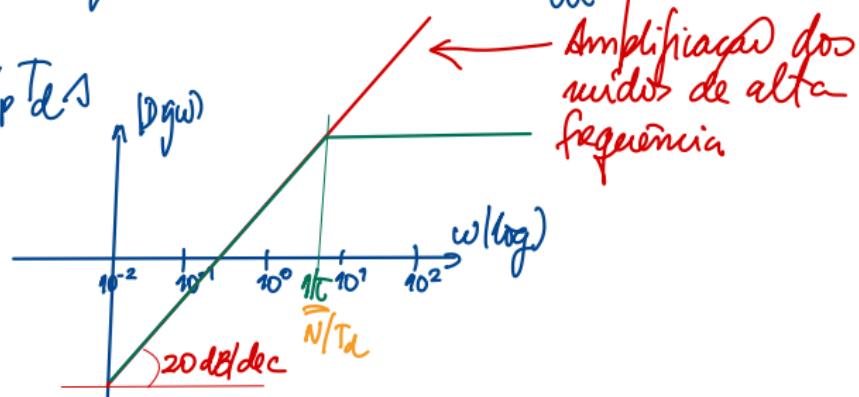
Na prática: $u_b(t) = -K_p T_d \frac{dy_m(t)}{dt} = -K_p T_d \frac{d}{dt} [y(t) - \eta(t)] =$

$$u_b(t) = -K_p T_d \frac{dy(t)}{dt} + K_p T_d \frac{d\eta(t)}{dt}$$

Em regime permanente:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \text{ (resposta ao degrau)} \Rightarrow u_b(t) = K_p T_d \frac{d\eta(t)}{dt}$$

$$\text{F.E.: } D(s) = \frac{U_b(s)}{N(s)} = K_p T_d s$$



Quadro para desenvolvimento

Solução: limitar o ganho derivativo nas altas frequências

$$D(s) = \frac{-K_p T_d s^N}{T_d s + 1}, \text{ sendo } \frac{1}{T} = \frac{N}{T_d} \quad (N \geq 10)$$

$$D(s) = \frac{-K_p T_d s^N}{\frac{T_d}{N} s + 1}$$

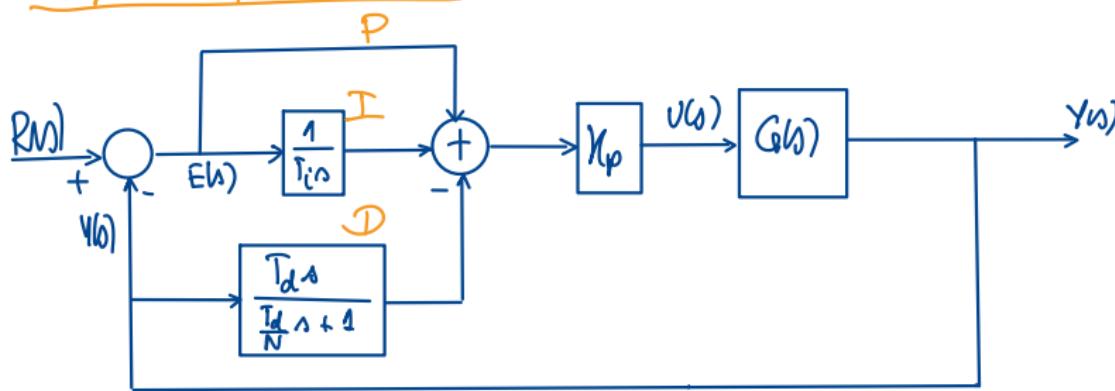
Note que: $D(j\omega) = \frac{-K_p T_d j\omega}{\frac{T_d}{N} (j\omega) + 1} \Rightarrow |D(j\omega)| = \frac{K_p T_d \omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{T_d \omega}{N}\right)^2}}$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |D(j\omega)| = \frac{K_p \infty}{\frac{T_d \infty}{N}} \Rightarrow |D(j\omega)| = K_p N$$

Em alta frequência, o ruído de medição é ampliado por $K_p N$.

Quadro para desenvolvimento

Implementação do PID:

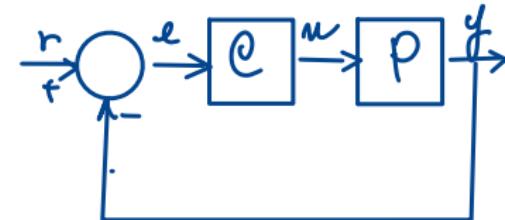
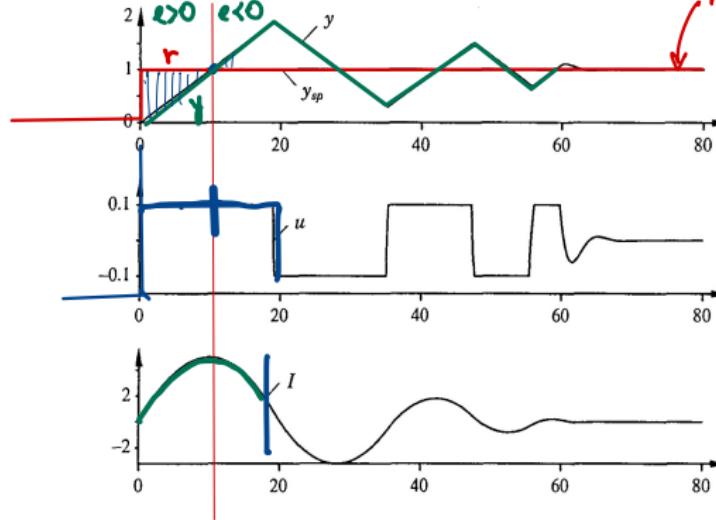


Anti wind-up \rightarrow modificar a parte integral.

Quadro para desenvolvimento

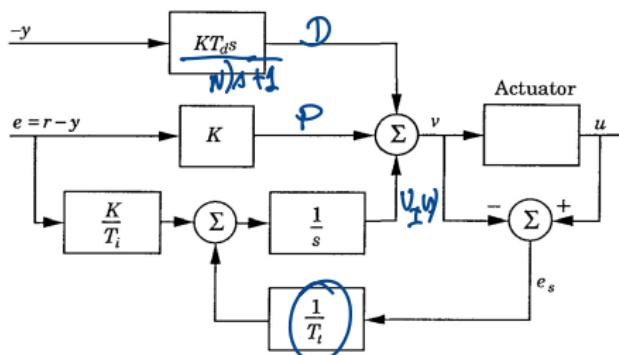
Efeito wind-up :

Sistema realimentado



Quadro para desenvolvimento

Consequência: modificar a implementação da ação integral a fim de anular o seu efeito quando o controlador bate o sinal de controle à saturação.



(i) Sem saturação: $u = v$

$$e_s = u - v = 0$$

$$\frac{1}{T_i} \cdot e_s = 0 \Rightarrow V_I(w) = \frac{K}{T_i s}$$

(ii) Com saturação: $v > u$

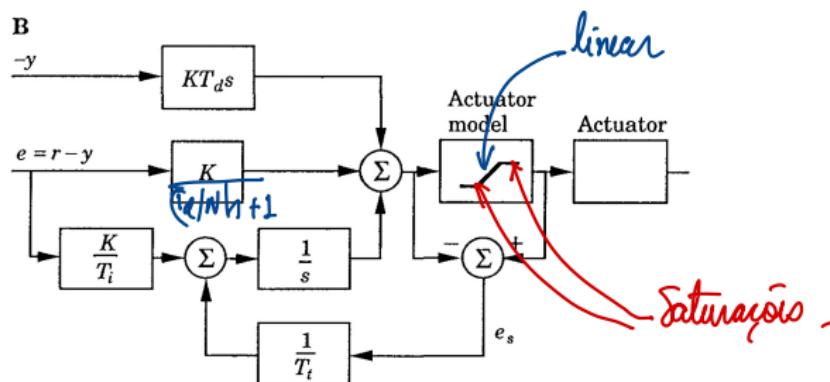
$$e_s = u - v < 0$$

$$V_I(w) = \frac{1}{s} \left(\frac{K}{T_i} E(w) + \frac{1}{T_i} [V(w) - v(w)] \right)$$

$$V_I(w) = \frac{K}{T_i s} E(w) + \frac{1}{T_i s} [v(w) - V(w)]$$

Quadro para desenvolvimento

Implementação do controlador PID na prática

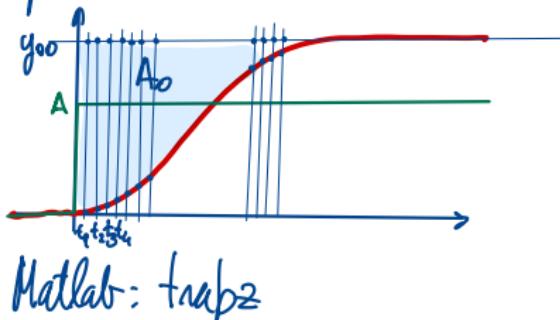


Valor prático para T_t : $T_t = \sqrt{T_i T_d}$

Quadro para desenvolvimento

Projeto de controladores PID (método de Basilio & Mafos)

- Consiste na modelagem de sistemas com respostas amortecidas e subamortecidas por modelos de segunda ordem cíclicamente amortecido e subamortecido, respectivamente.

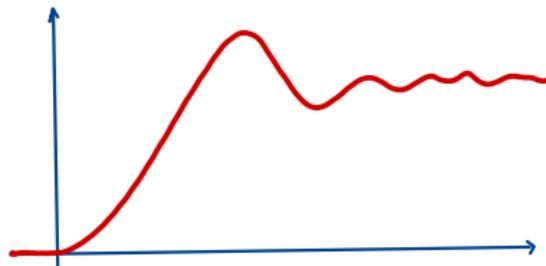


$$G(s) = \frac{K}{(T_s + 1)^2}, \text{ por analogia com a f.t. de primeira ordem } K/(T_s + 1)$$

$$G(s) = \frac{K}{T^2 (1 + 1/T)^2} = \frac{K/T^2}{(1 + 1/T)^2} = \frac{\tilde{K}}{(s + \tilde{b})^2}$$

Calcular os parâmetros K e T .

Quadro para desenvolvimento



$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Calcular os parâmetros K , ω_n e ξ .

Cálculo dos parâmetros K e ξ .

1) Obter a resposta a um degrau de amplitude A

$$2) \text{Calcular } K = \frac{y_{\infty}}{A}$$

3) Calcular numericamente a área A_0

$$4) \text{Calcular } \xi = \frac{A_0}{2y_{\infty}}$$

Quadro para desenvolvimento

Projeto de um controlador PI para sistemas com resposta ao degrau amortecida



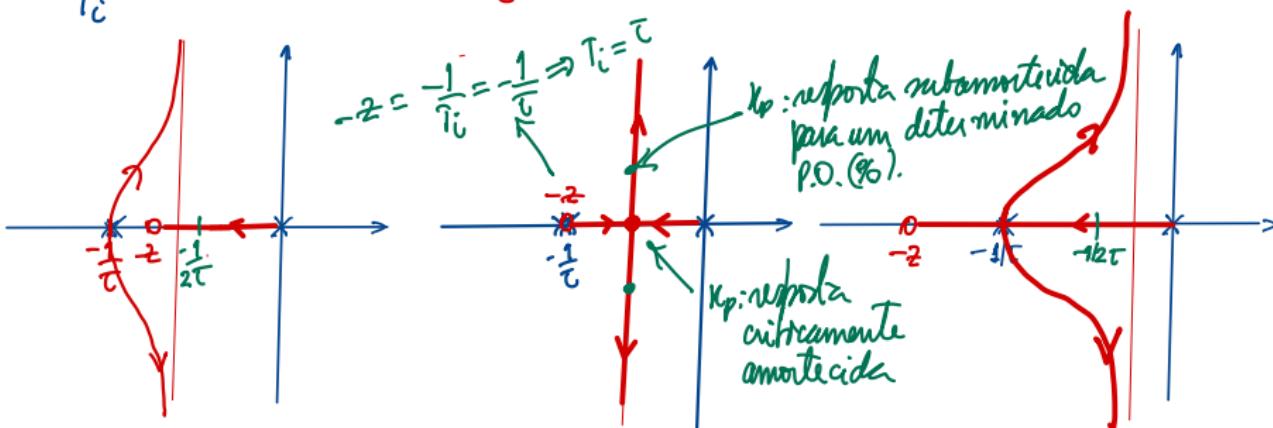
$$z = \frac{1}{T_c}$$

$$p_0 = 0$$

$$p_1 = p_2 = -\frac{1}{T_c}$$

$$K_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_c s} \right) = \frac{K_p (T_c s + 1)}{T_c s}$$

$$K_{PI}(s) = \frac{K_p T_c}{s} \left(1 + \frac{1}{T_c} \right) = \frac{K_p (s + 1/T_c)}{s}$$



Quadro para desenvolvimento

$$\tau_a = \frac{-2\zeta\tau + 2}{\tau - 1} = \frac{-\frac{2}{\tau} + \frac{2}{\tau}}{\frac{\tau}{\tau} - \frac{1}{\tau}} = -\frac{1}{\tau} + \frac{2}{2}$$

$$1) z < \frac{1}{\tau} \Rightarrow \sigma_a < -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2\tau} = -\frac{1}{2\tau}$$

$$2) z = \frac{1}{\tau} \Rightarrow G(\sigma + j\omega) = \frac{KK_p(\sigma + j\omega)}{\tau\zeta^2(\sigma + j\omega)^2} = \frac{KK_p}{\tau\zeta^2(\sigma + j\omega)^2}$$

Quadro para desenvolvimento

Projeto de controladores PID para sistemas com resposta subamortida

