

本质是个线性常微分方程的求解

$$G \dot{x}(t) + C \ddot{x}(t) = Bu(t)$$

1). 惯性问题, 定系数: B, C, G 与 t 无关.

2). 定步长: $\dot{x}(t) = \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$

$$\Rightarrow (G + \frac{C}{h}) \dot{x}(t) = Bu(t) + \frac{C}{h} x(t-h)$$

通过固定步长 h 来求解这个微分方程—本质: 迭代— $t-h$ 项来求 t 项

采用梯形法进行离散化处理的话:

$$C \frac{dx(t)}{dt} + Gx(t) = Bu(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = -C^{-1}Gx(t) + C^{-1}Bu(t)$$

$$\hat{=} M = -C^{-1}G \quad N = C^{-1}Bu(t)$$

梯形法:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Mx(t) + Nu(t) \Rightarrow f(t, x)$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} [f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1})]$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} [Mx_i + Nu_i + Mx_{i+1} + Nu_{i+1}]$$

$$\Downarrow$$

$$x_{i+1} = (1 + \frac{h}{2}M)x_i + \frac{h}{2}Nu_i + \frac{h}{2}Mx_{i+1} + \frac{h}{2}Nu_{i+1}$$

$$(1 - \frac{h}{2}M)x_{i+1} = (1 + \frac{h}{2}M)x_i + \frac{h}{2}N(u_i + u_{i+1})$$

$$\Downarrow$$

$$(1 + \frac{h}{2}C^{-1}G)x(t_{i+1}) = (1 - \frac{h}{2}C^{-1}G)x(t_i) + \frac{h}{2}C^{-1}B(u_i + u_{i+1})$$

$$\Downarrow$$

$$(C + \frac{h}{2}G)x(t_{i+1}) = (C - \frac{h}{2}G)x(t_i) + \frac{h}{2}B(u_i + u_{i+1})$$

两边同乘 2

$$(2C + hG)x(t_{i+1}) = (2C - hG)x(t_i) + hB(u_i + u_{i+1})$$

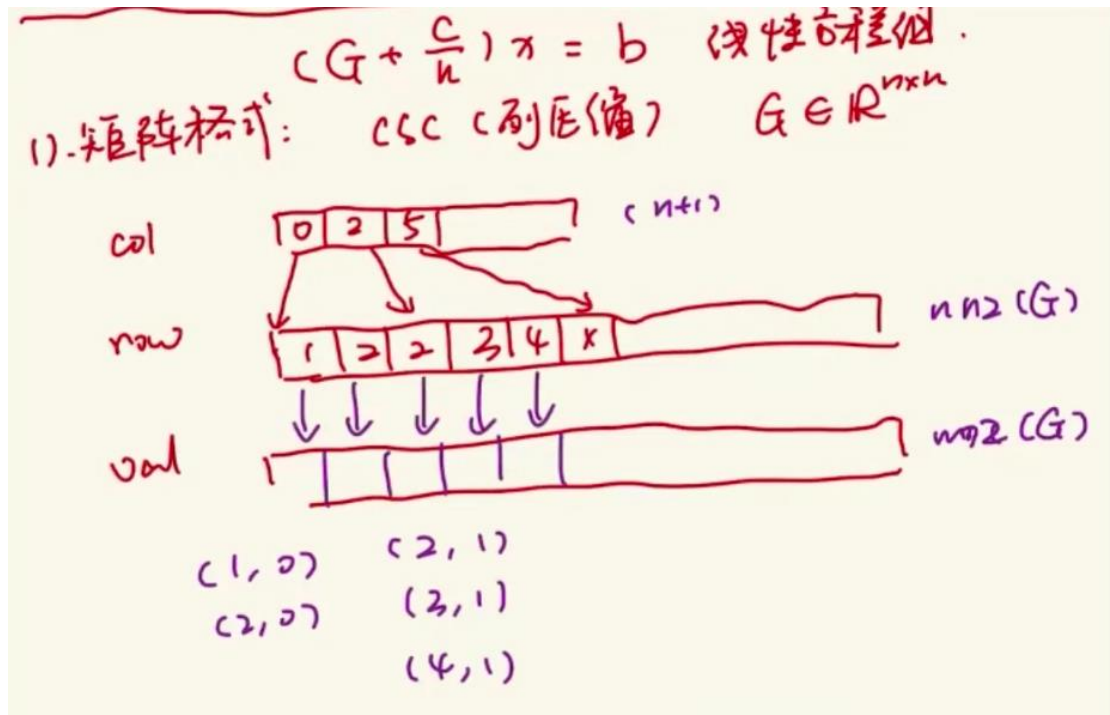
$$\Downarrow$$

$$A = 2C + hG$$

$$b = (2C - hG)x(t_i) + hB(u_i + u_{i+1})$$

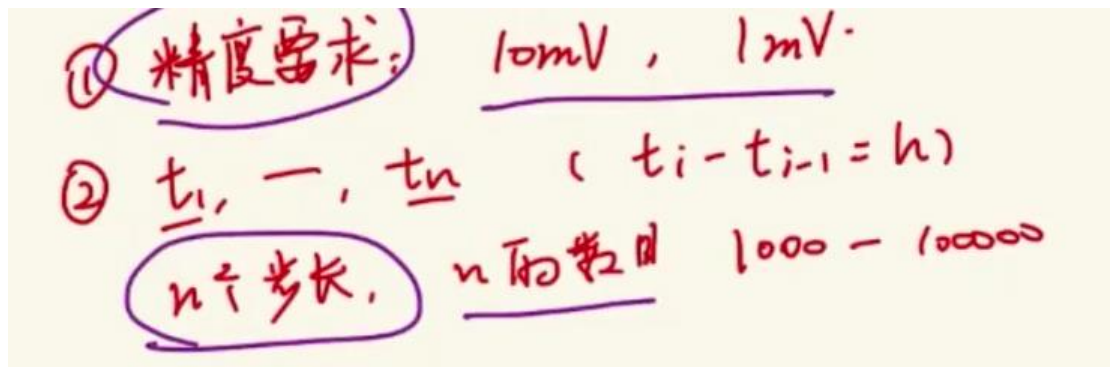
C、G、B：稀疏矩阵存储，csc 列压缩格式：

也就是说按列 z 形方向，存储非零元素的行列坐标和值。Csc 格式的话列坐标是存储的递增的数目。



要求：

1. 精度要求：如果与标准解最大绝对误差小于 10mV 且平均绝对误差小于 1mV



2. 步长要求：步长范围很大

求解：

1. 直接法求解：稀疏矩阵求解更复杂

2. 求解: ① 直接法: Gauss | 高斯-赛德尔.



稀疏矩阵求解: 1. 排序,

2. 迭代法

② 迭代法: CG 法: SPD
GMRES 法, 正定.

1). 如何快速 mvm ?

2). 预条件子:

1). 如何快速 mvm ?

2). 预条件子: $\text{cond}(G) = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}$

\downarrow $P \xrightarrow{P_2=r} \text{cond}(P^T G) = \frac{\lambda_{\max}(P^T G)}{\lambda_{\min}(P^T G)}$

$P = G \rightarrow G_2 = r$

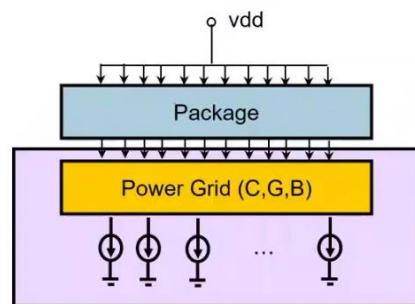
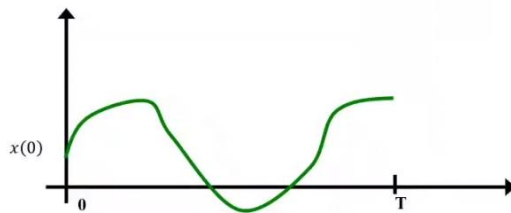
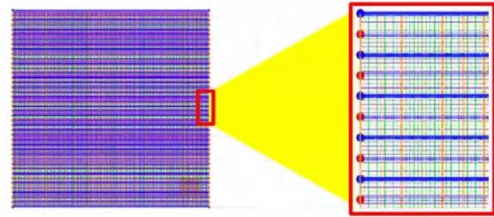
\downarrow ① 不完全分解
 $P \approx G \rightarrow$ ② $G + \frac{c}{u} \rightarrow G$ 预条件
 \rightarrow ③ AMG, DD

概述：

电源地线网 (power grid) 分析

- Time Domain

$$Gv + C \frac{dv}{dt} = Bu(t)$$



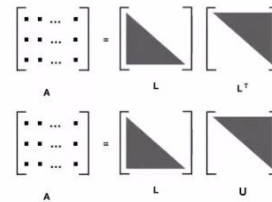
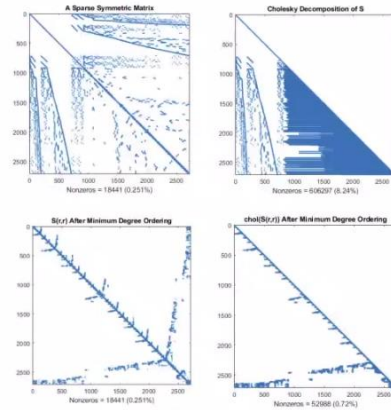
赛题

- 题目：大规模电源地网络瞬态仿真的分布式并行加速
- 关键词：大规模，瞬态仿真，并行加速

$$Gx(t) + C \frac{dx(t)}{dt} = Bu(t)$$

求解线性方程

- 大规模
 - >100万
 - 稀疏
- 稀疏矩阵存储与求解
 - 什么格式?
 - 怎么进行访问和数据操作?
- 直接法
 - LU/Cholesky?
 - 矩阵分解和回代
 - 矩阵重排序: AMD, ND
 - 求解: KLU, NISLU, ...
- 迭代法
 - GMRES/CG
 - Preconditioner: ILU
 - Multi Grid

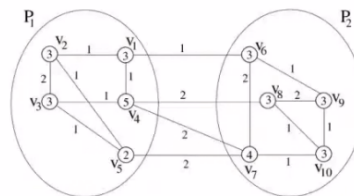
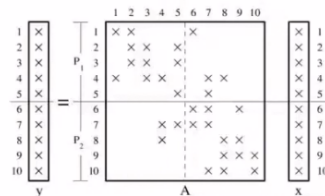


直接法和迭代法分别适用什么情况?

L1-13

并行计算

- 多线程, 多进程, 分布式并行
- 任务怎么切分? 怎么分发? 怎么收集结果?
 - 线性方程求解怎么并行?
 - 矩阵分块, 图分割
 - 瞬态仿真能并行么?
- 并行计算的关键: 减小数据传输!



问题求解：

Eigen 做稀疏矩阵运算+MPI 做并行计算