信号处理原理-02

刘华平

清华大学

五教5103（23） 二教403（52）

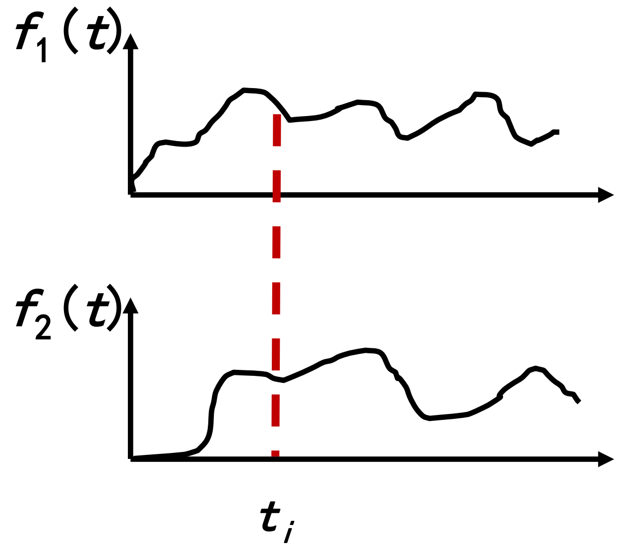
常规运算

线性运算

$f_1(t)+f_2(t)$

乘除运算

因变量



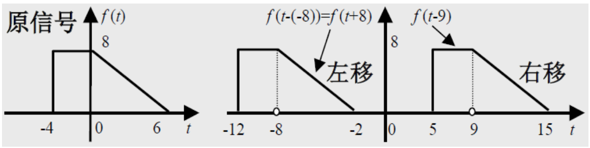
波形变换

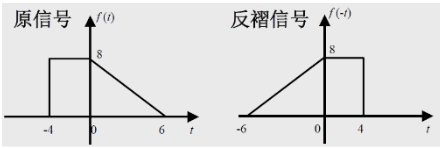
时移运算 $f(t-t_0)$

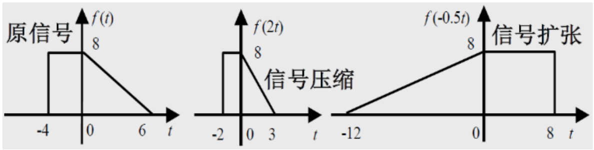
反褶运算 $f(-t)$

压扩运算 $f(at)$

自变量







信号的基本运算

常规运算
- 线性运算
- 乘除运算

数学运算
- 微分运算
- 积分运算

波形变换
- 时移运算
- 反褶运算
- 压扩运算

相互运算
- 卷积运算
- 相关运算

信号的基本运算

➢ 微分与积分

$f(t)$

微分运算 → $\dfrac{d}{dt}[f(t)]$

描述变化现象

图像边缘提取

积分运算 → $\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$

描述累积现象

充电过程

连续进行

连续n次微分

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n$$

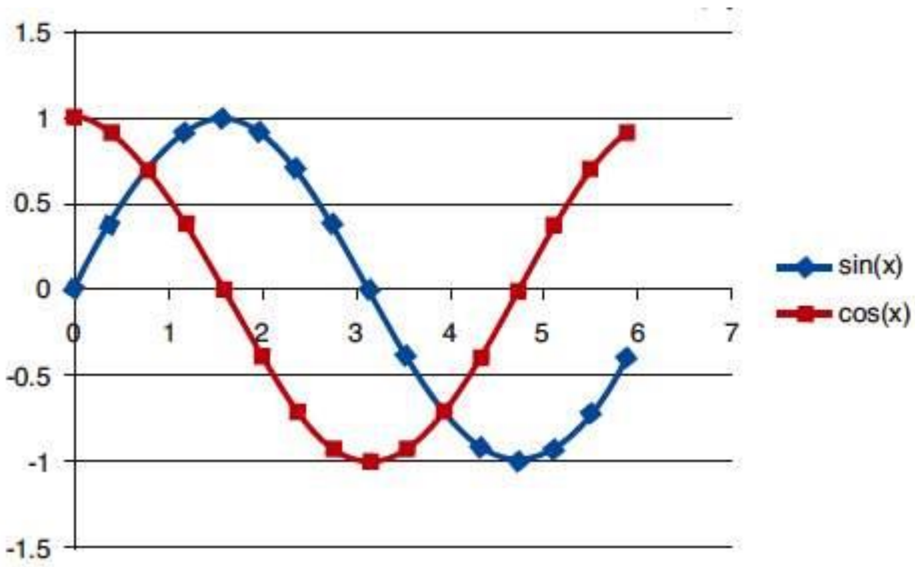
连续n次积分

$$\left(\int_{-\infty}^{t} dt\right)^n$$

信号的基本运算

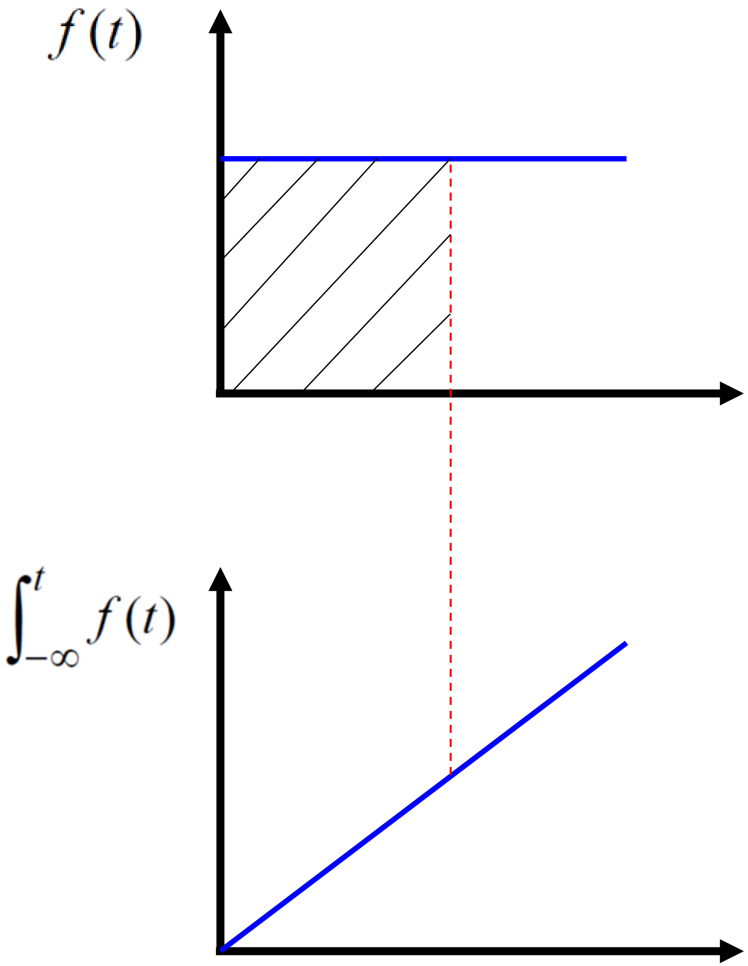
➢ 信号的微分

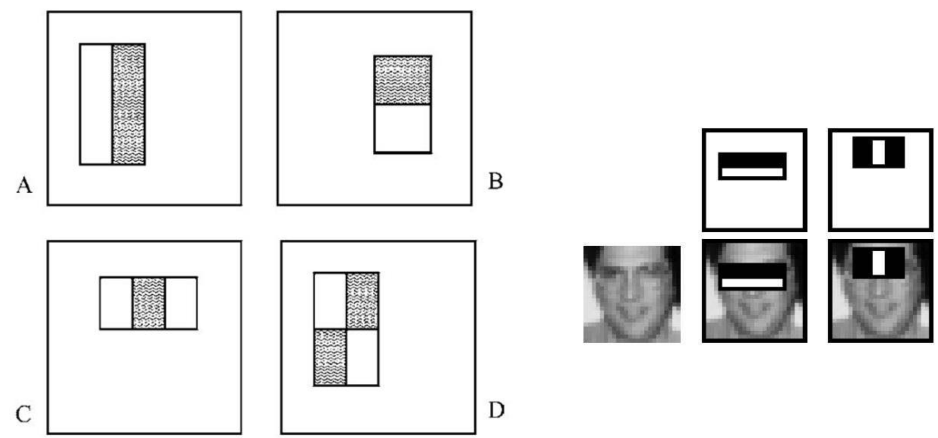
$$\frac{d}{dt}[f(t)]$$



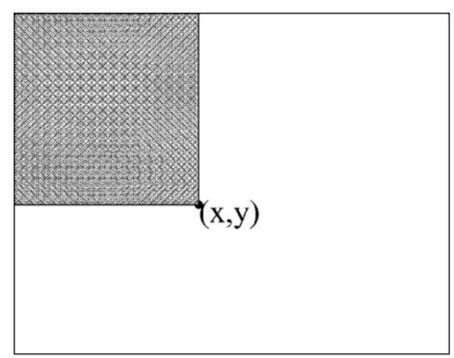
信号的基本运算

- 信号的积分

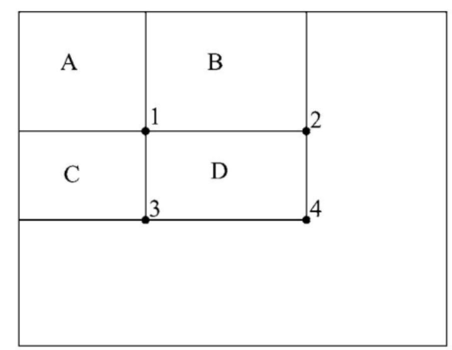




Harr小波



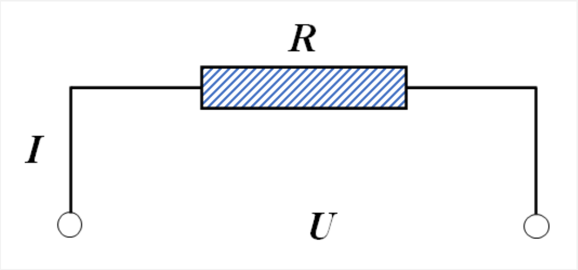
积分图



4-2-3+1

信号的基本运算

➢ 能量信号与功率信号



瞬时功率

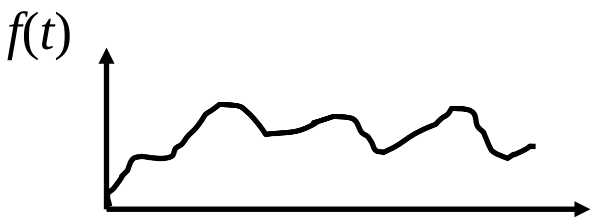
$$P(t)=U(t)I(t)=I(t)^2R=U(t)^2/R$$

能量

$$\int_{t_1}^{t_2}P(t)dt=\frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2}U^2(t)dt$$

平均功率

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}P(t)dt=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}U^2(t)dt$$



$$|f(t)|^2$$

$$E[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt \qquad E[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2$$

能量就是信号的瞬时功率在$(-\infty,+\infty)$上的积分

$$P[f(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}|f(t)|^2dt \quad P[x(n)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2$$

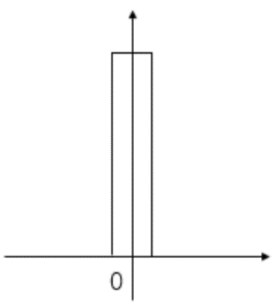
这里所用的“功率” “能量”与 $f(t)$ 是否与真正的物理量相联系是无关的

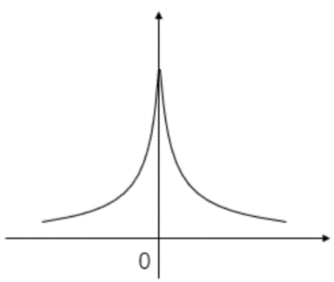
信号的基本运算

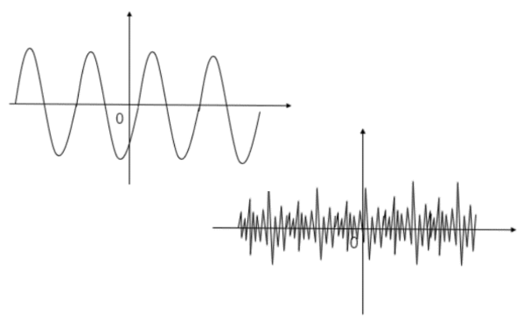
➢ 能量信号与功率信号

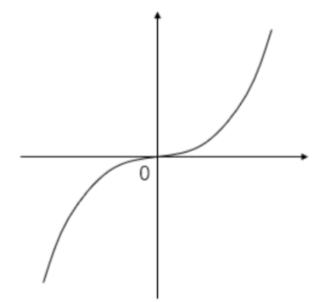
$$E[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt$$

$$P[f(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}|f(t)|^2\,dt$$









无穷能量+有限功率

无穷能量+无穷功率

能量信号

功率信号

非能非功信号

一个信号不可能既是能量信号，又是功率信号。

常规运算

- 线性运算 $f_1(t)+f_2(t)$
- 乘除运算

数学运算

- 微分运算 $\dfrac{df(t)}{dt}$
- 积分运算 $\int_0^t f(\tau)d\tau$

波形变换

- 时移运算 $f(t-t_0)$
- 反褶运算 $f(-t)$
- 压扩运算 $f(at)$

相互运算

- 卷积运算
- 相关运算

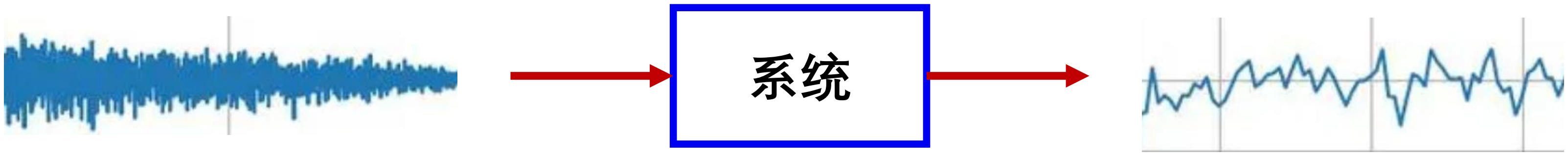
信号的卷积运算

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$f(n)*g(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

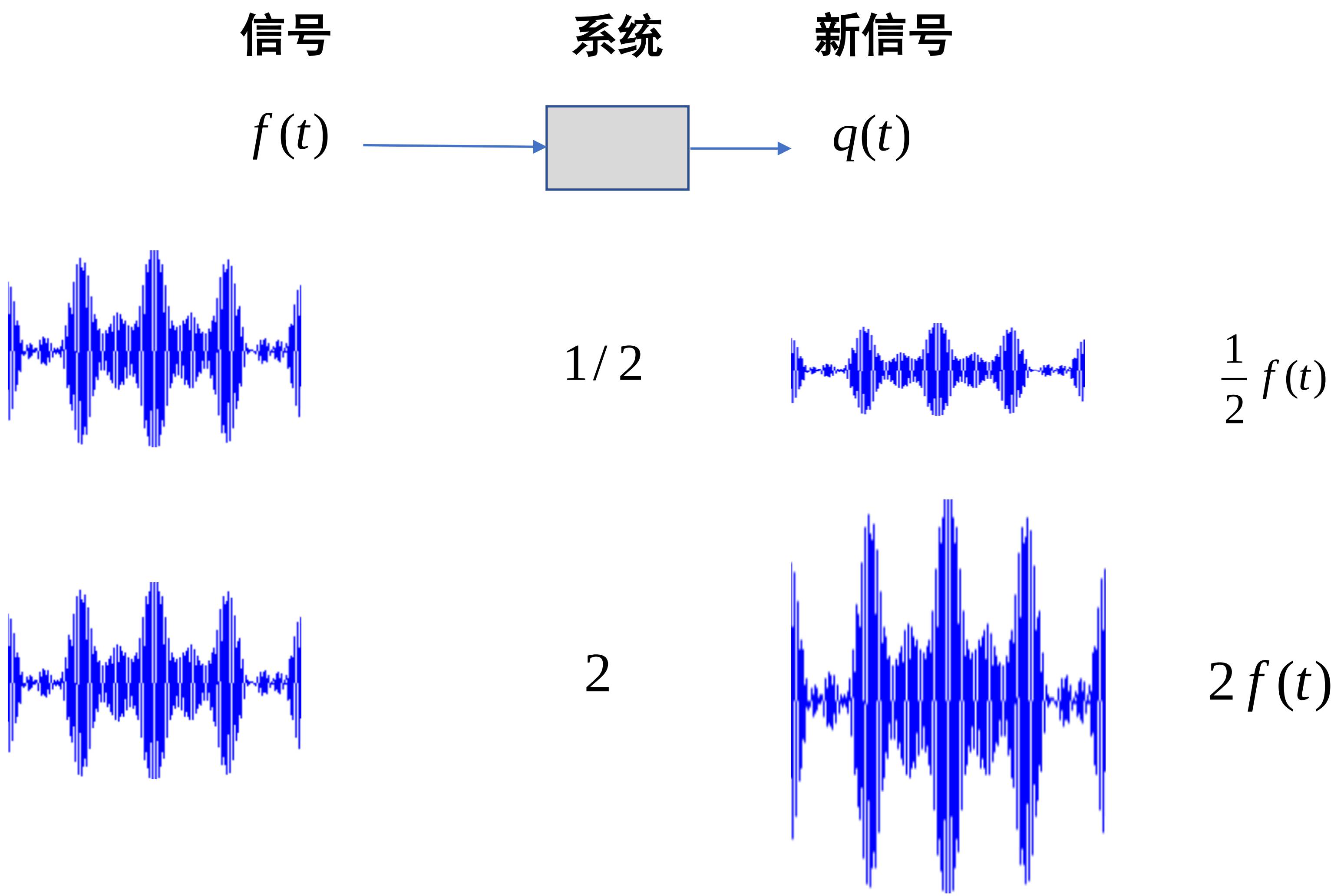


去噪，滤波

美颜

信号的卷积运算——定义

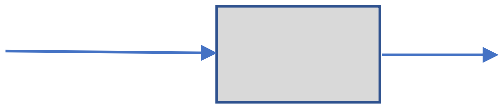
➢ 卷积定义的引出

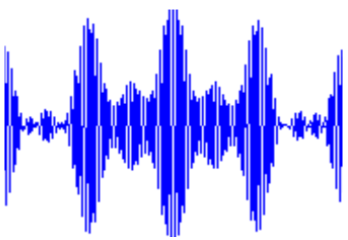


信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

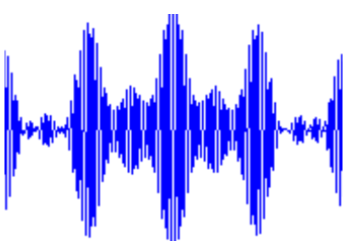
信号 **系统** **新信号**

$f(t)$  $q(t)$



$1/2$

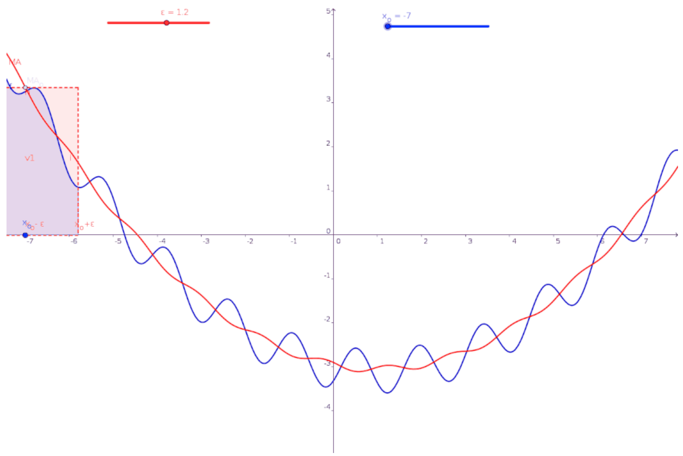
$\frac{1}{2}f(t)$

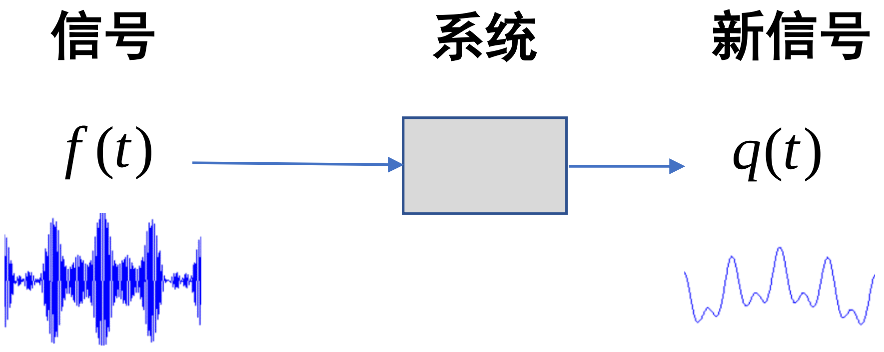


$$q(t)=\frac{1}{3}(f(t-1)+f(t)+f(t+1))$$

信号的卷积运算——定义

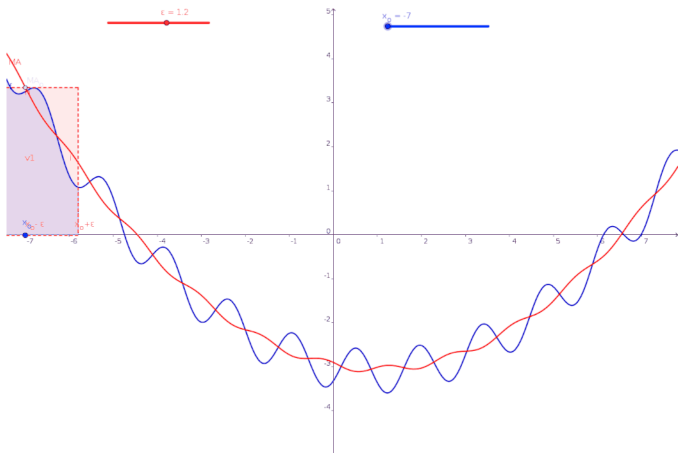
- 卷积定义的引出

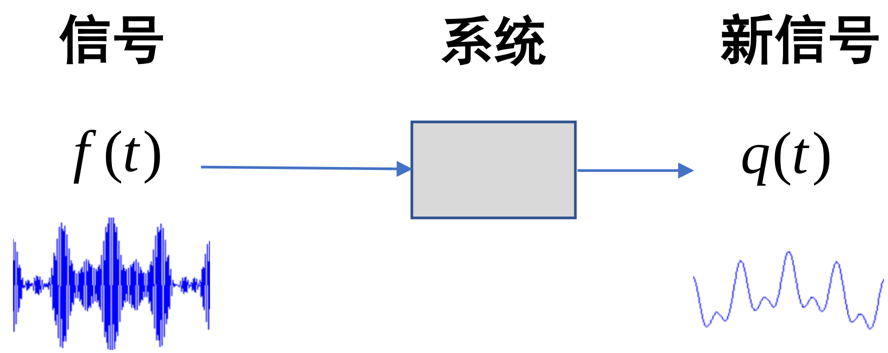


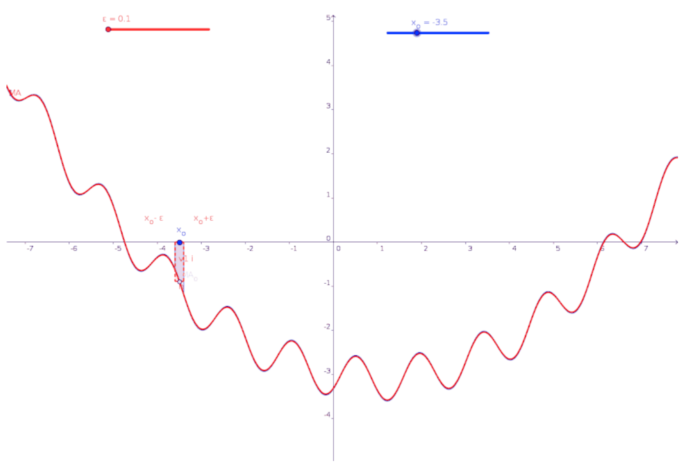


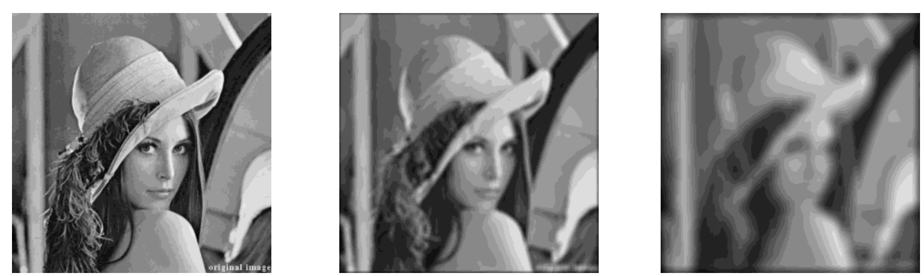
信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出



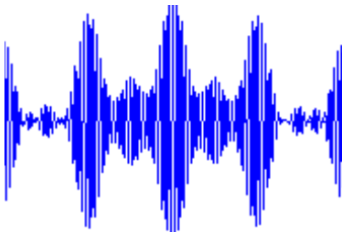
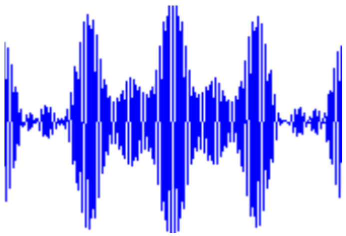
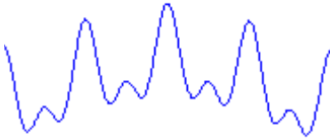
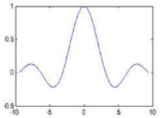






信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

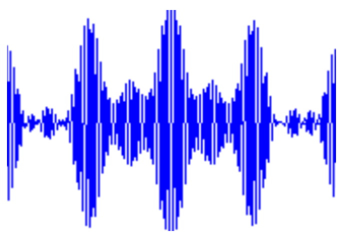
信号	系统	新信号	
$f(t)$	→	$q(t)$	
	$1/2$		$\frac{1}{2}f(t)$
	$g(t)$		$f(t)*g(t)$
			$q(t)=\frac{1}{3}(f(t-1)+f(t)+f(t+1))$

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

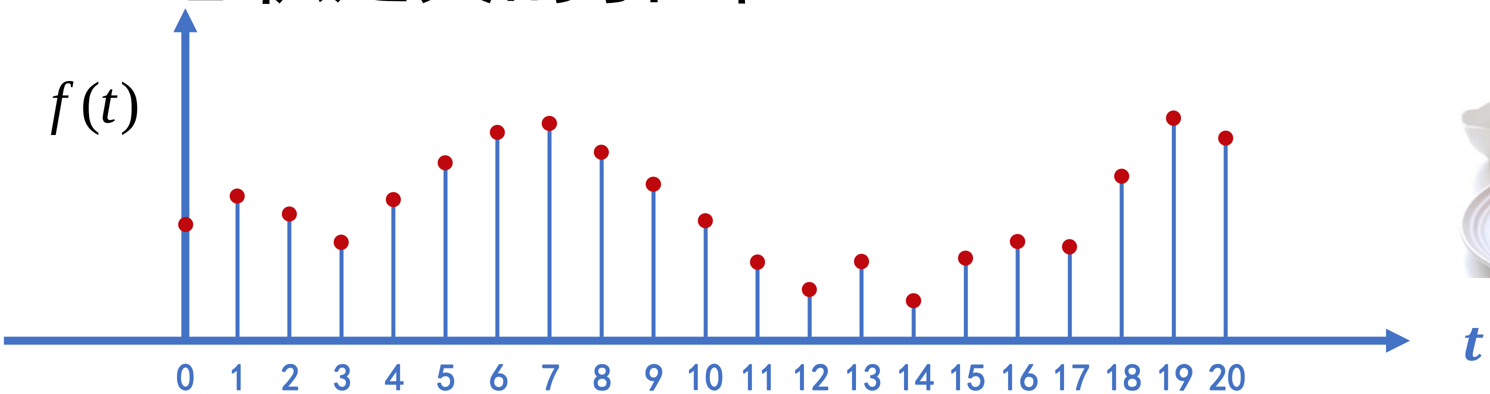
信号　　　　系统　　　　新信号

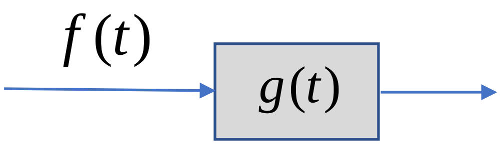
$f(t) \rightarrow \boxed{g(t)} \rightarrow q(t)$



信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

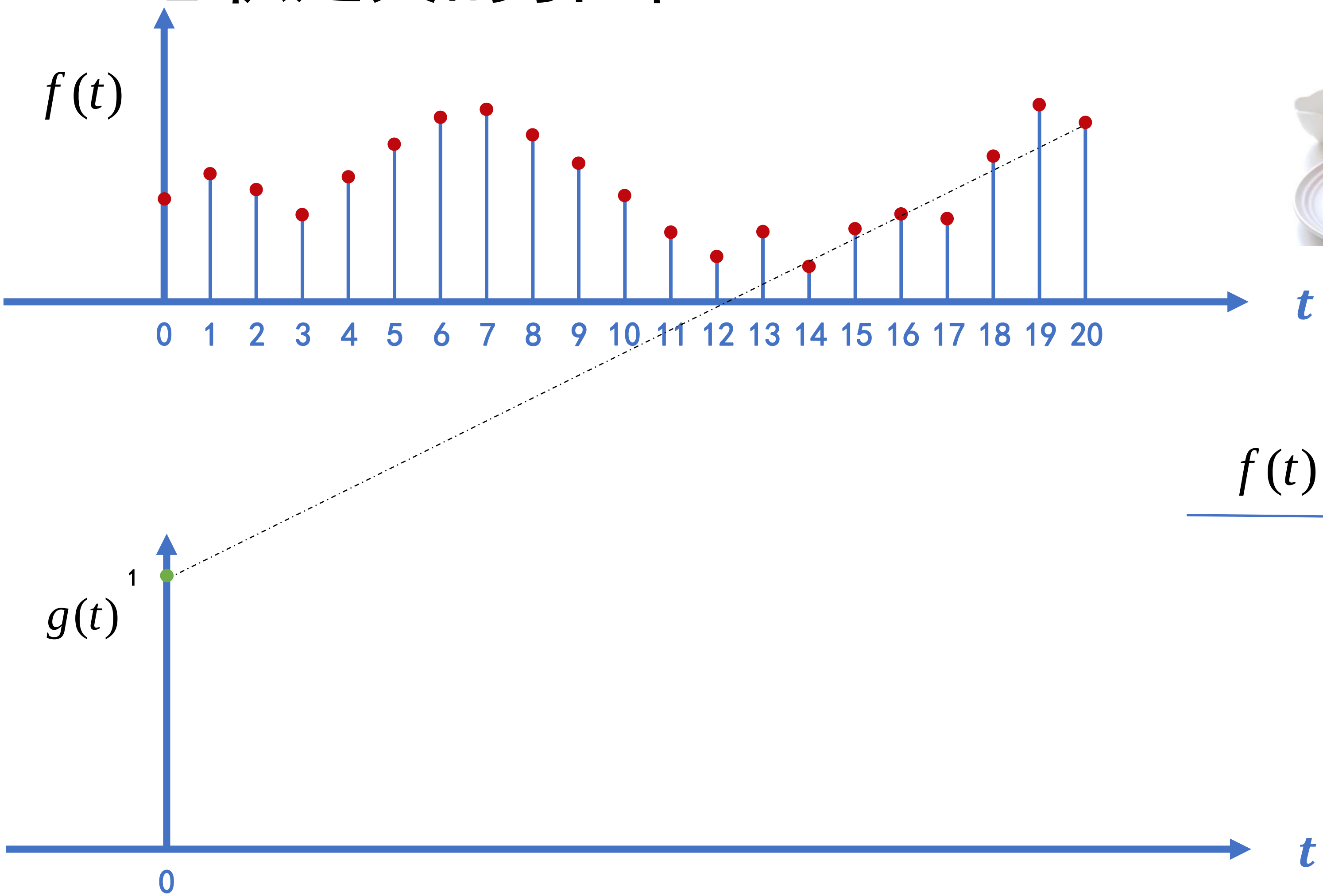


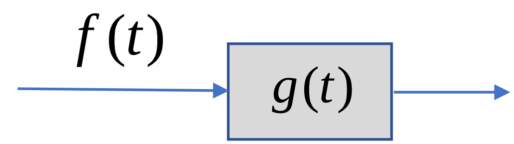


保质期
1天

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

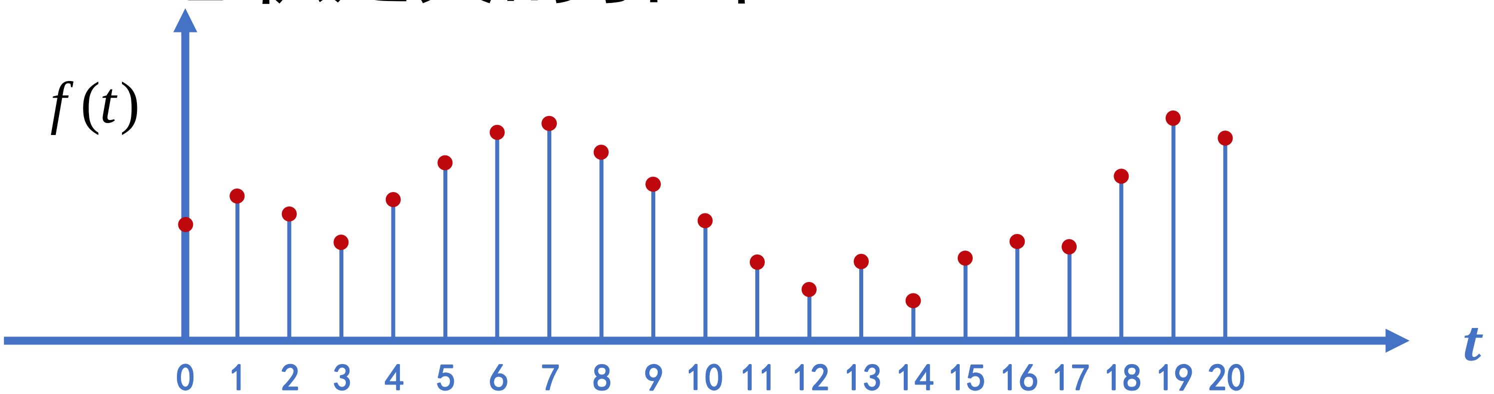




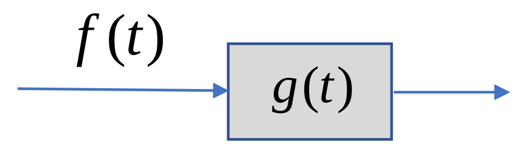
保质期
1天

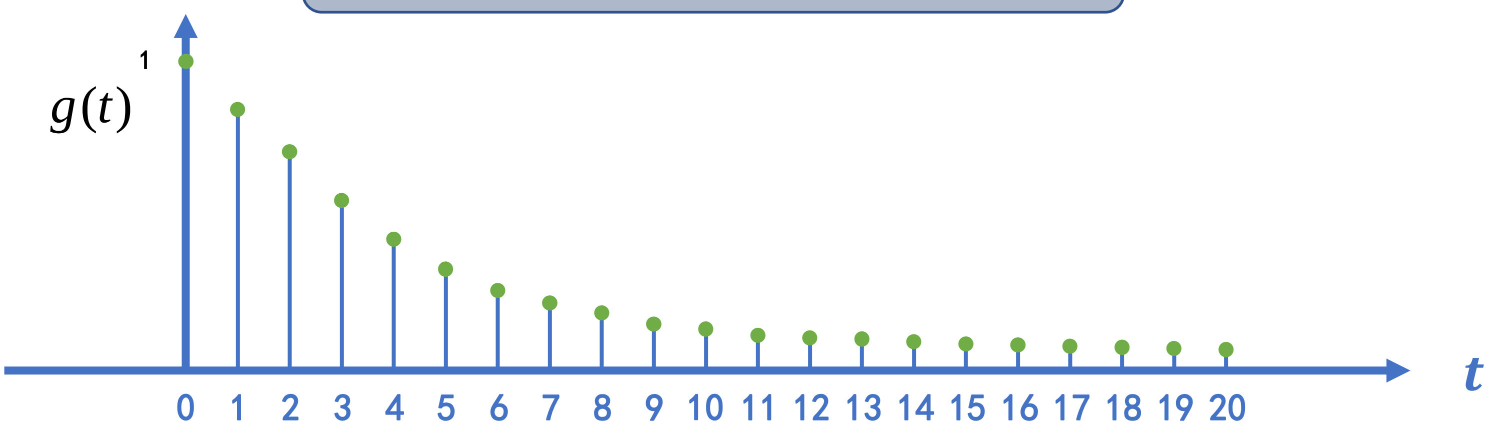
信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出



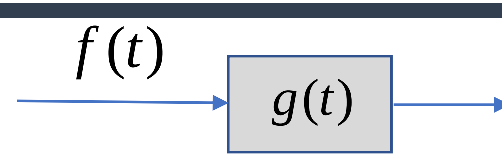
第10天有多少可用的蛋糕?

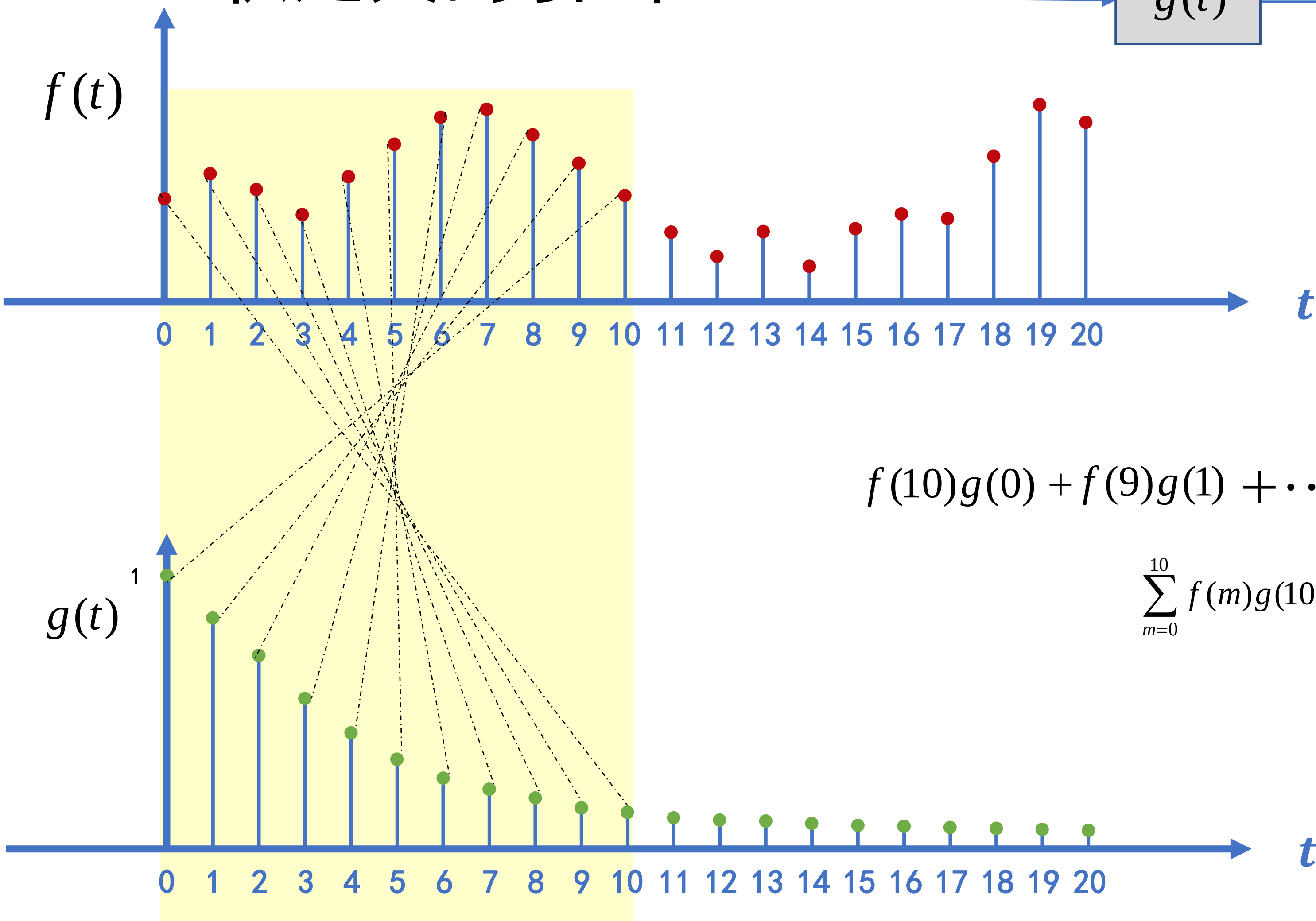




信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出



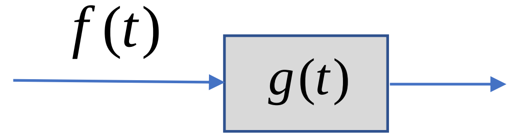


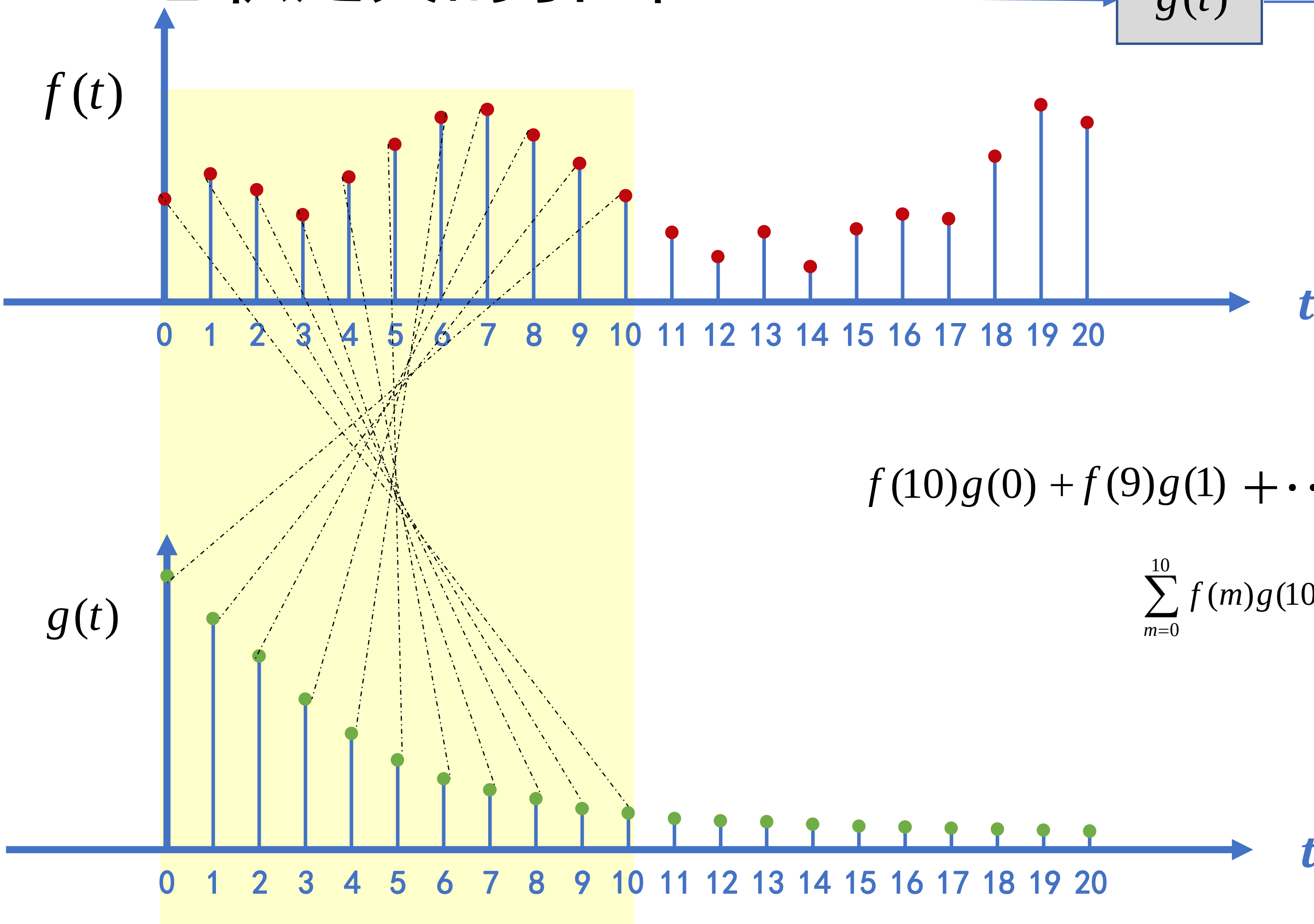
$$f(10)g(0)+f(9)g(1)+\cdots\cdots+f(0)g(10)$$

$$\sum_{m=0}^{10} f(m)g(10-m)$$

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出



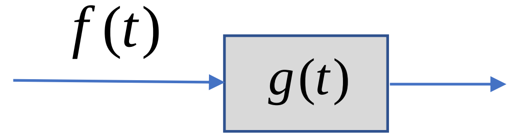


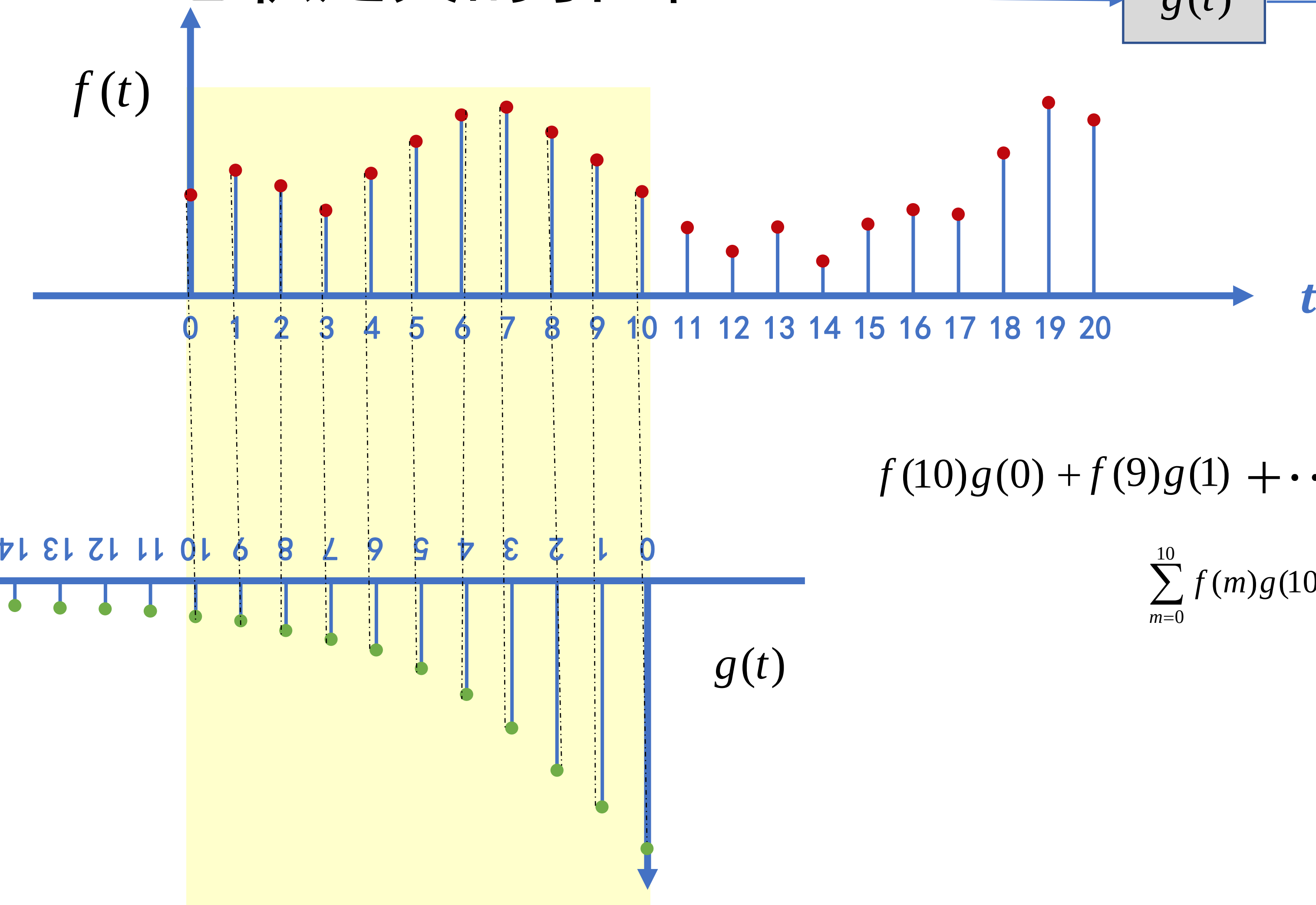
$$f(10)g(0)+f(9)g(1)+\cdots\cdots\ +f(0)g(10)$$

$$\sum_{m=0}^{10} f(m)g(10-m)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出



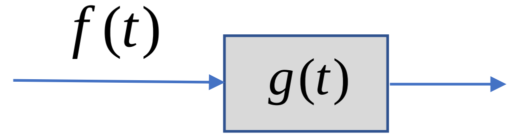


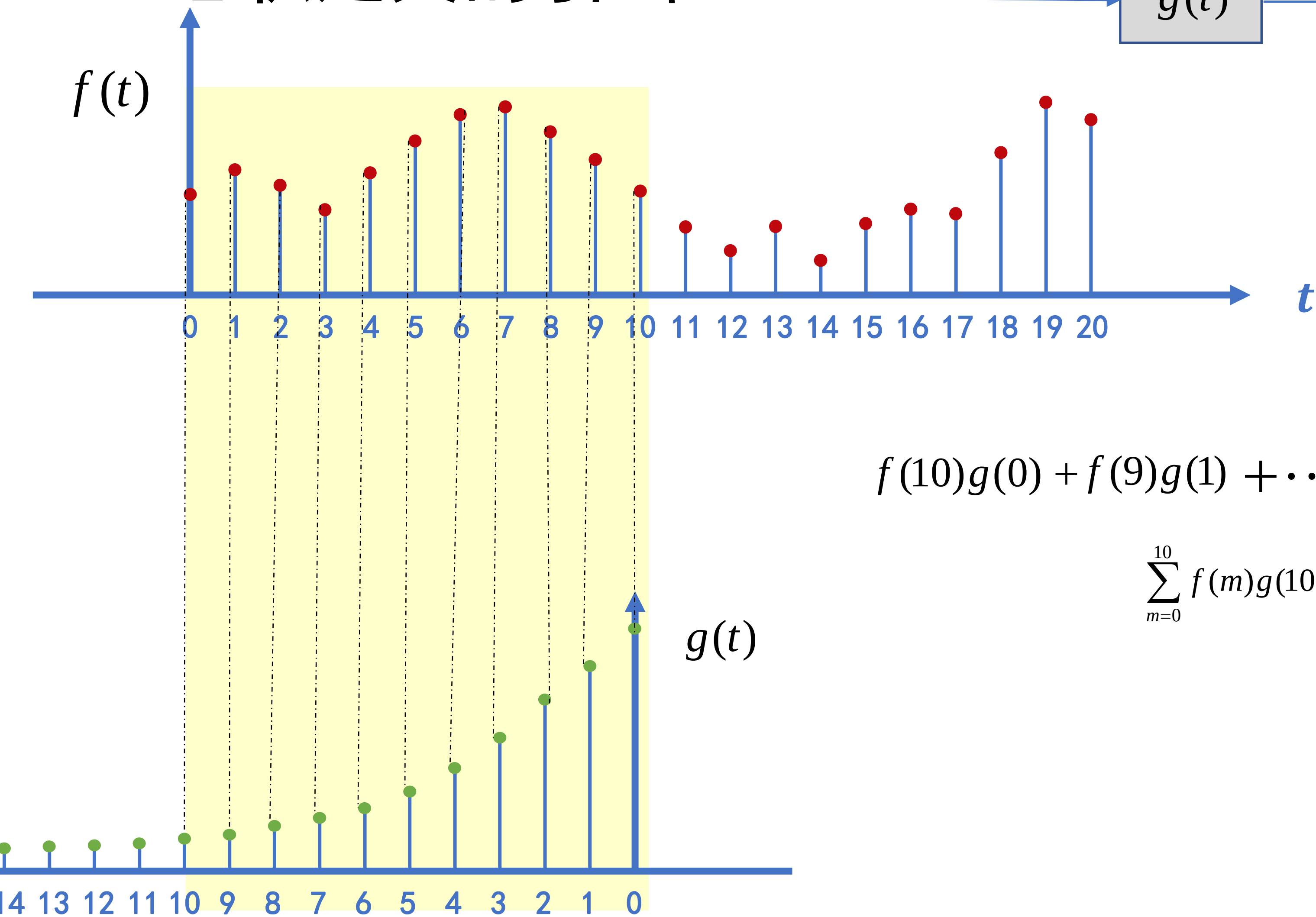
$$f(10)g(0)+f(9)g(1)+\cdots\cdots+f(0)g(10)$$

$$\sum_{m=0}^{10} f(m)g(10-m)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出



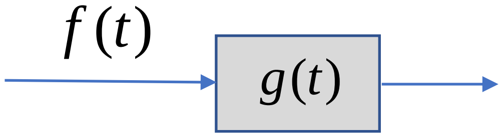


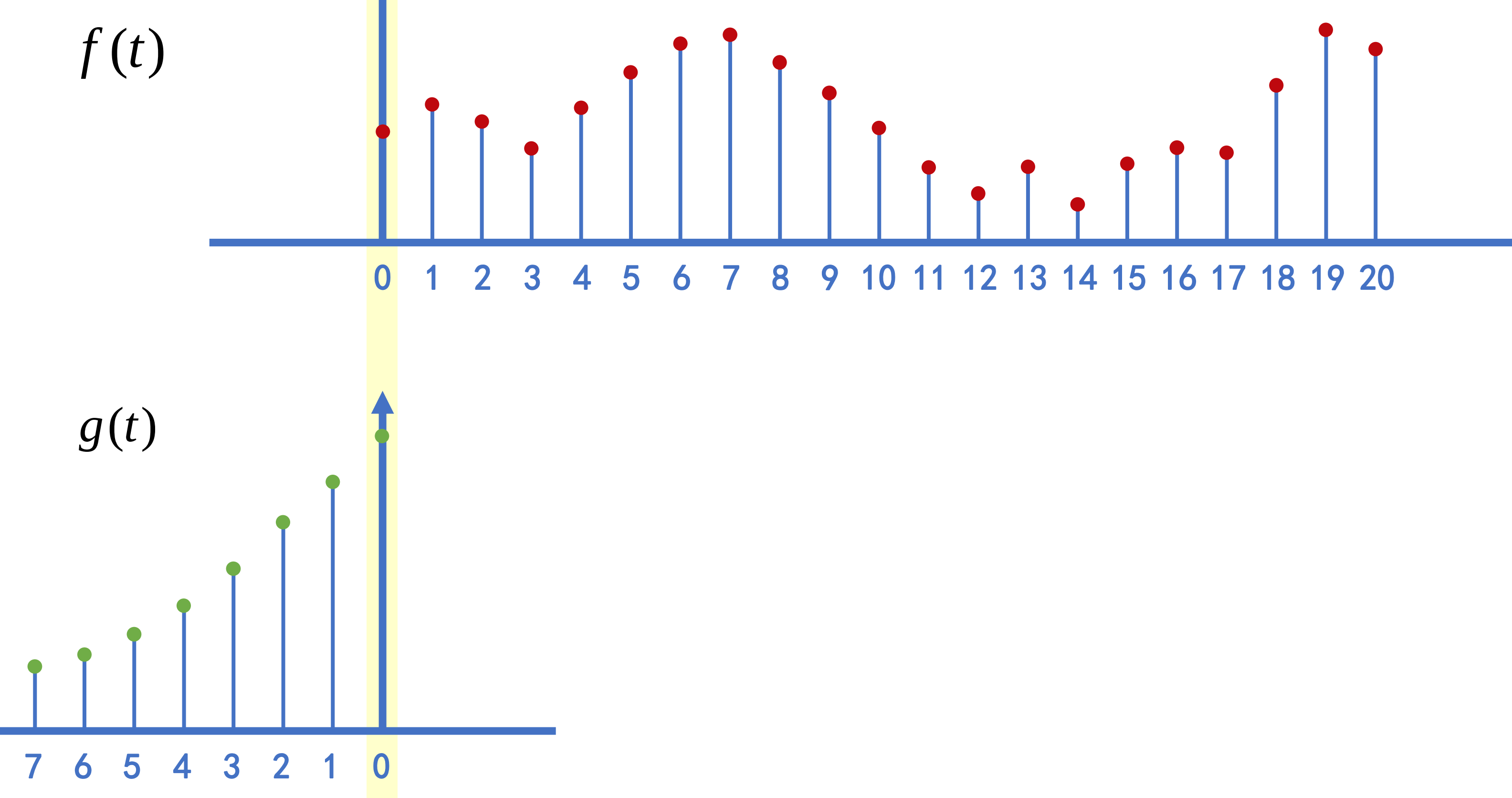
$$f(10)g(0)+f(9)g(1)+\cdots\cdots+f(0)g(10)$$

$$\sum_{m=0}^{10} f(m)g(10-m)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出

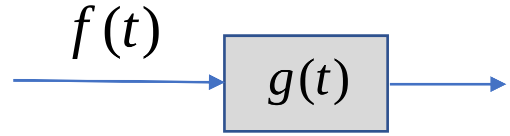


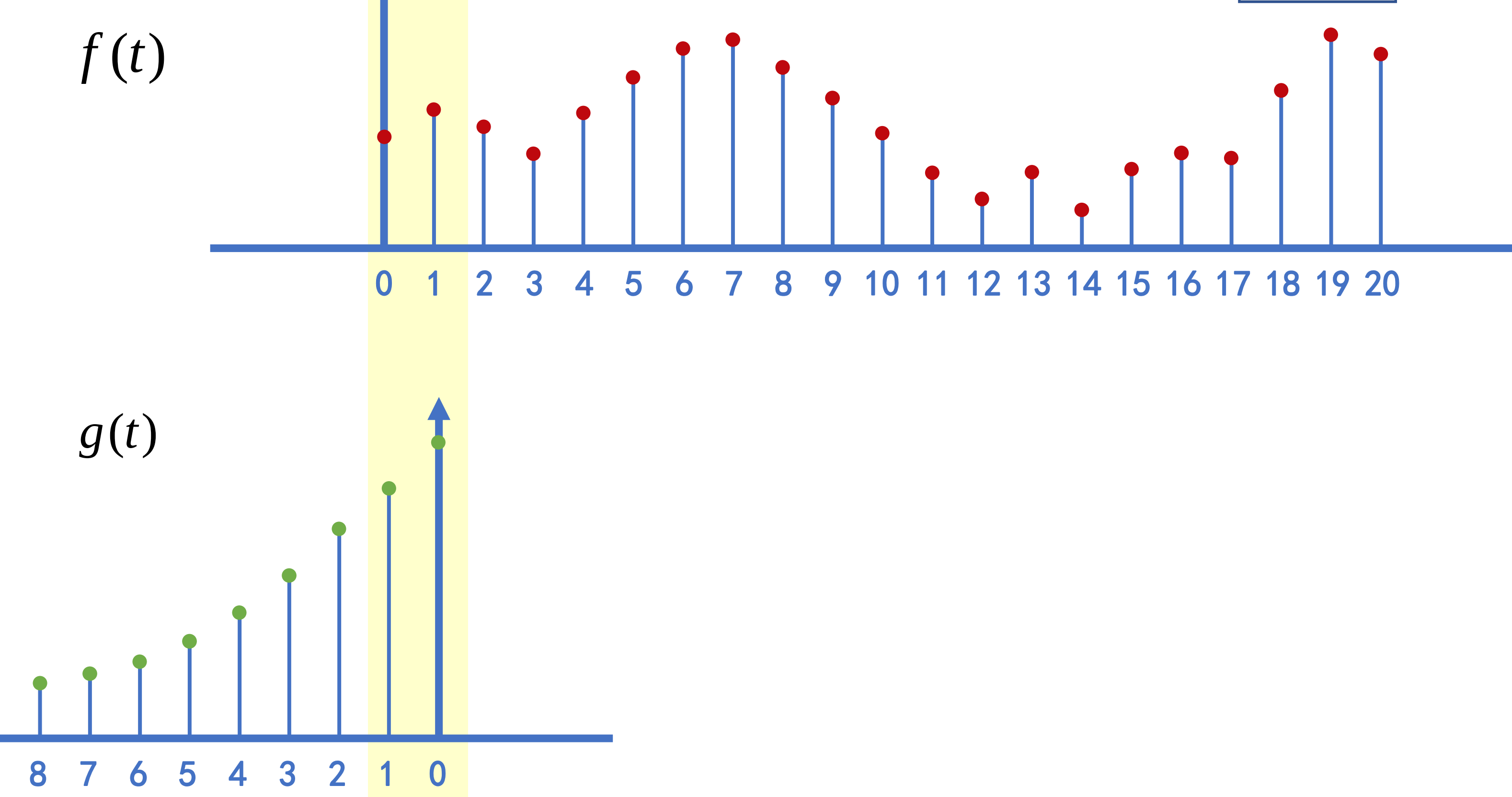


$$(f * g)(0) = f(0)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

➤ 卷积定义的引出

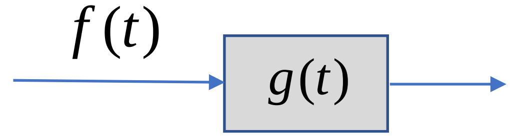


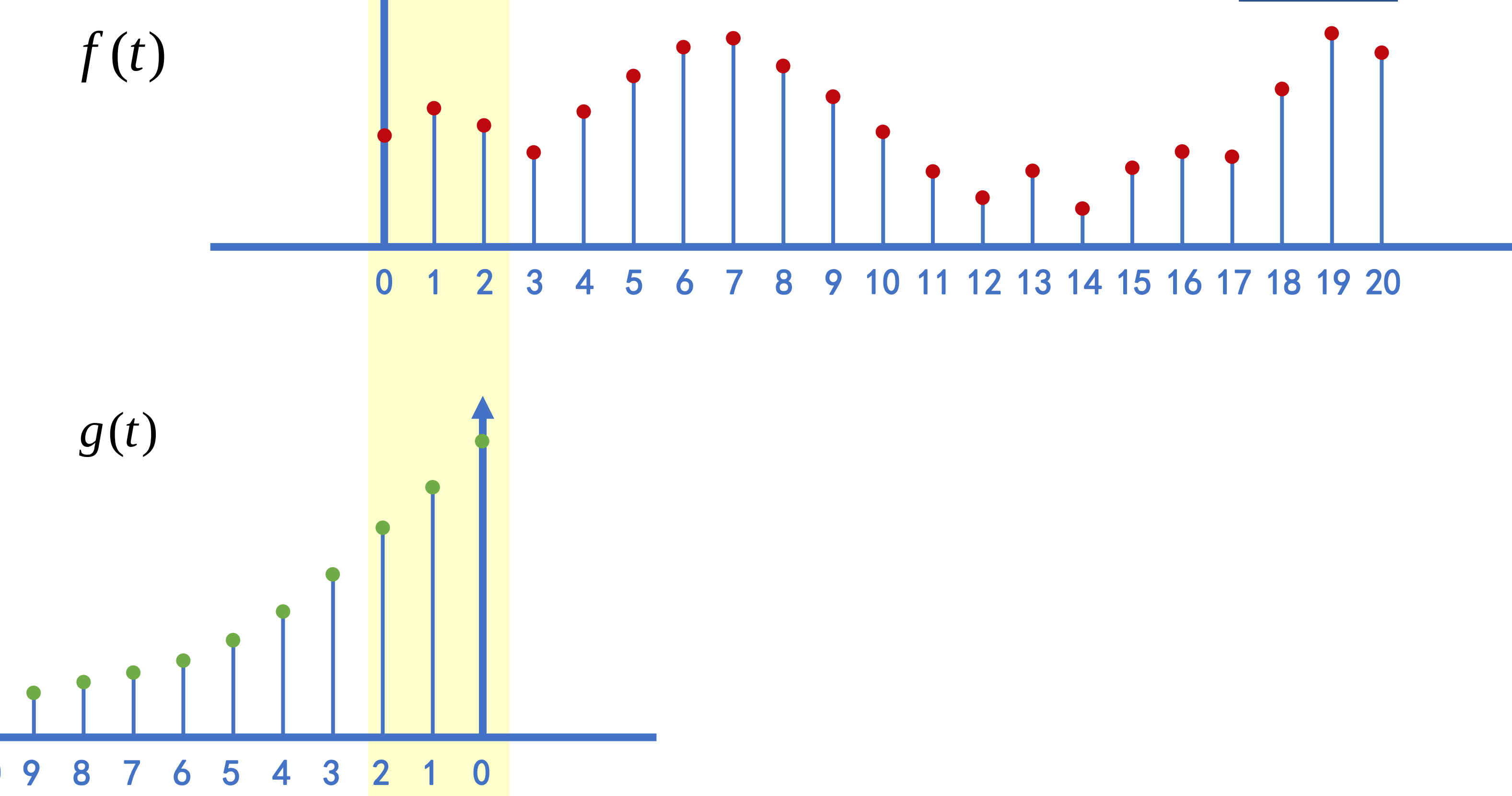


$$(f * g)(1) = f(0)g(1) + f(1)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出

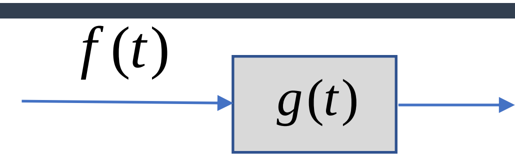


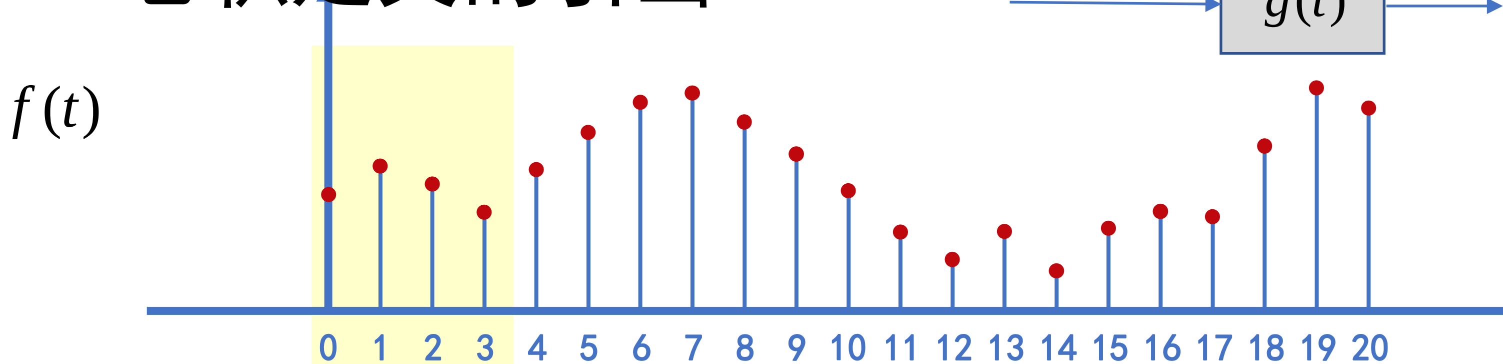


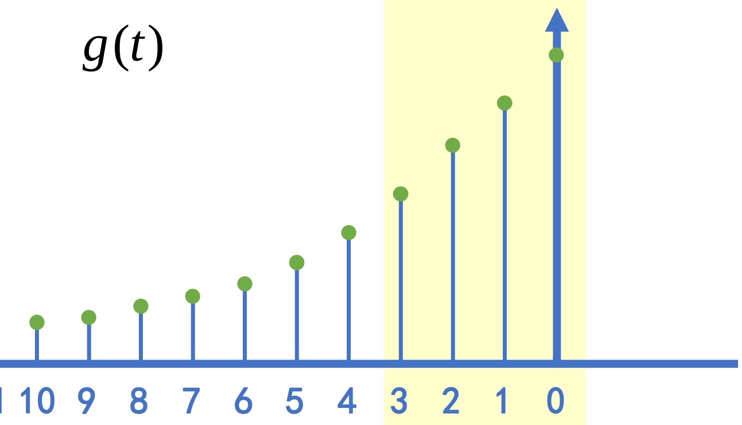
$$(f*g)(2)=f(0)g(2)+f(1)g(1)++f(2)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

➢ 卷积定义的引出



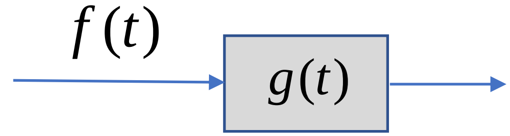


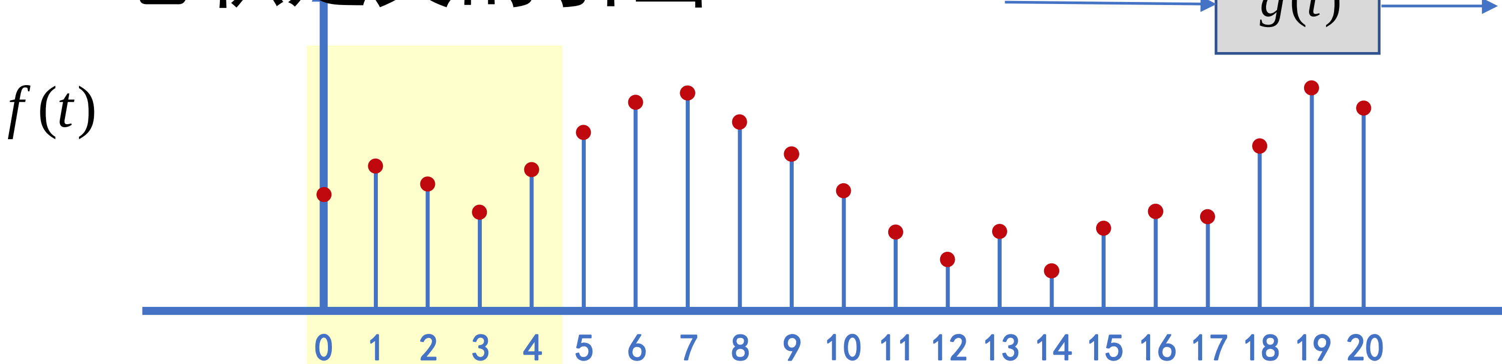


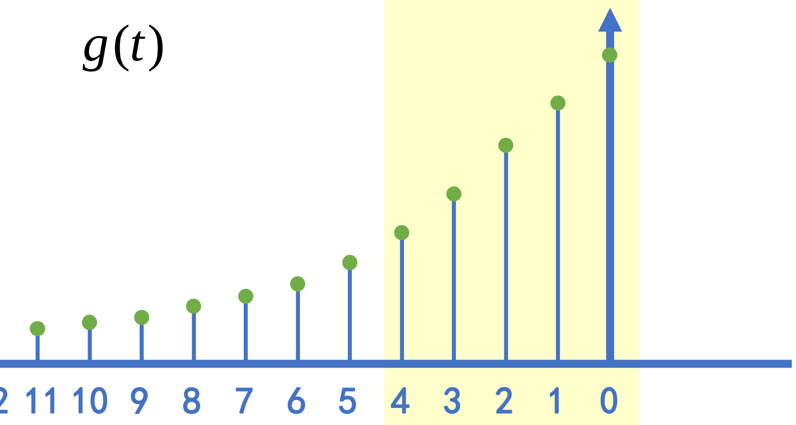
$$(f * g)(3) = f(0)g(3) + f(1)g(2) + f(2)g(1) + f(3)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出



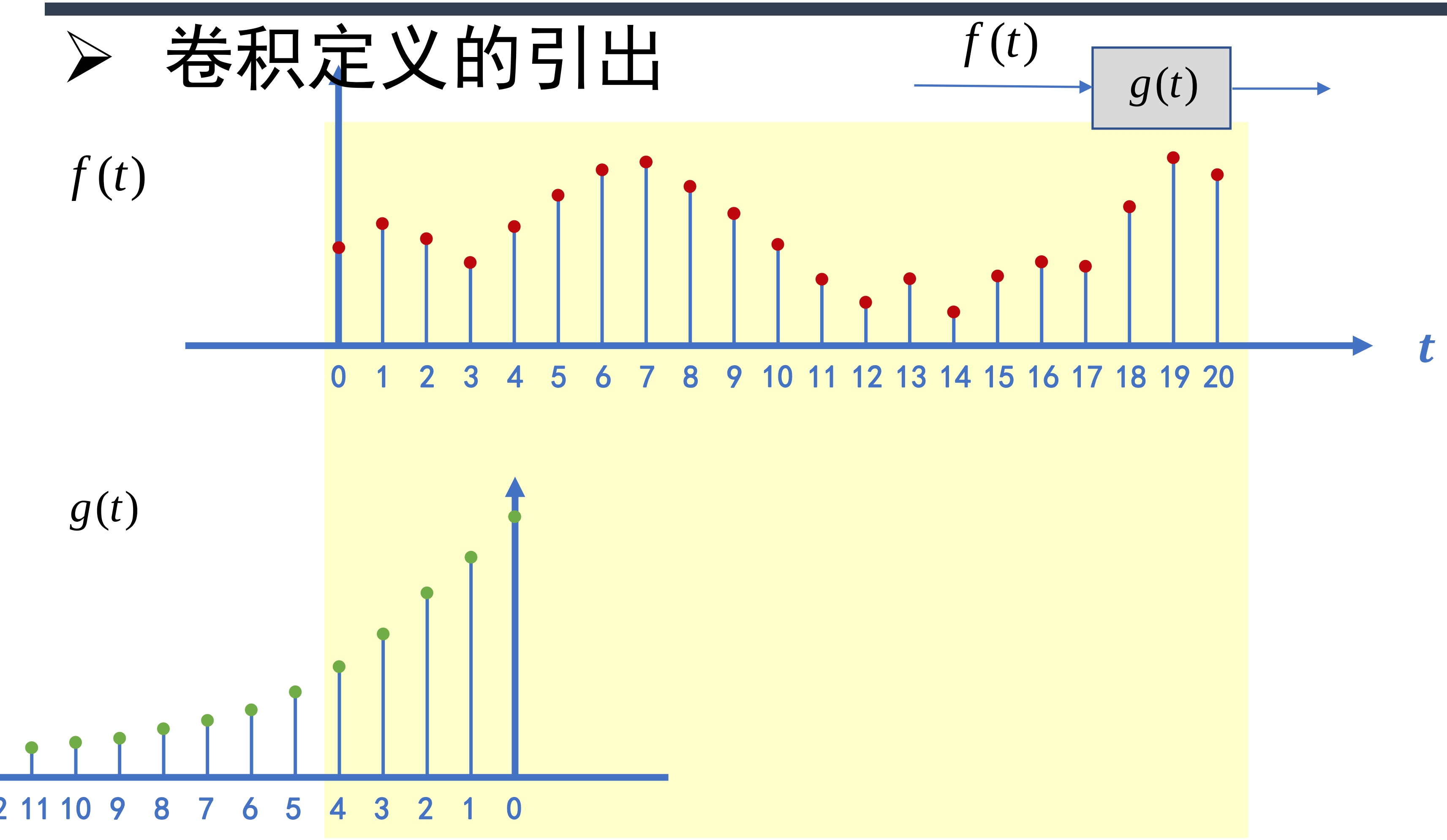




$$(f*g)(4) = f(0)g(4) + f(1)g(3) + f(2)g(2) + f(3)g(1) + f(4)g(0)$$

信号的卷积运算——定义

- 卷积定义的引出

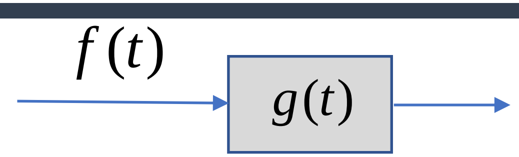


$$(f*g)(n)=\sum_{m=0}^{n} f(m)g(n-m) \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

信号的卷积运算——定义

➢ 连续信号的卷积



f, g为两个连续时间信号函数，其卷积定义为：

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

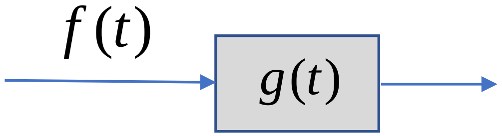
$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

两个信号的卷积是否存在是有条件的：

- f，g**是可积函数**
- f，g**卷积运算得到的结果是有界的**

信号的卷积运算——定义

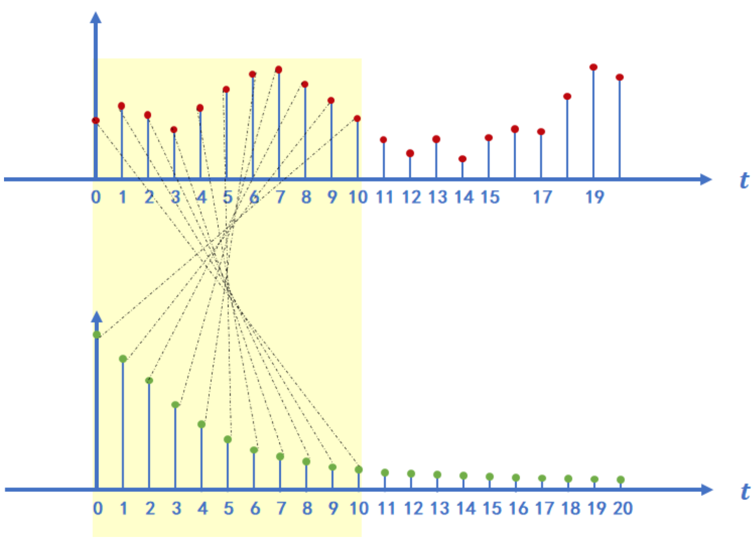
➢ 连续信号的卷积



卷积就是一个函数的加权积分

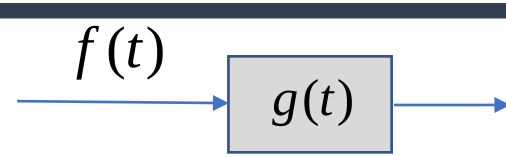
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau$$

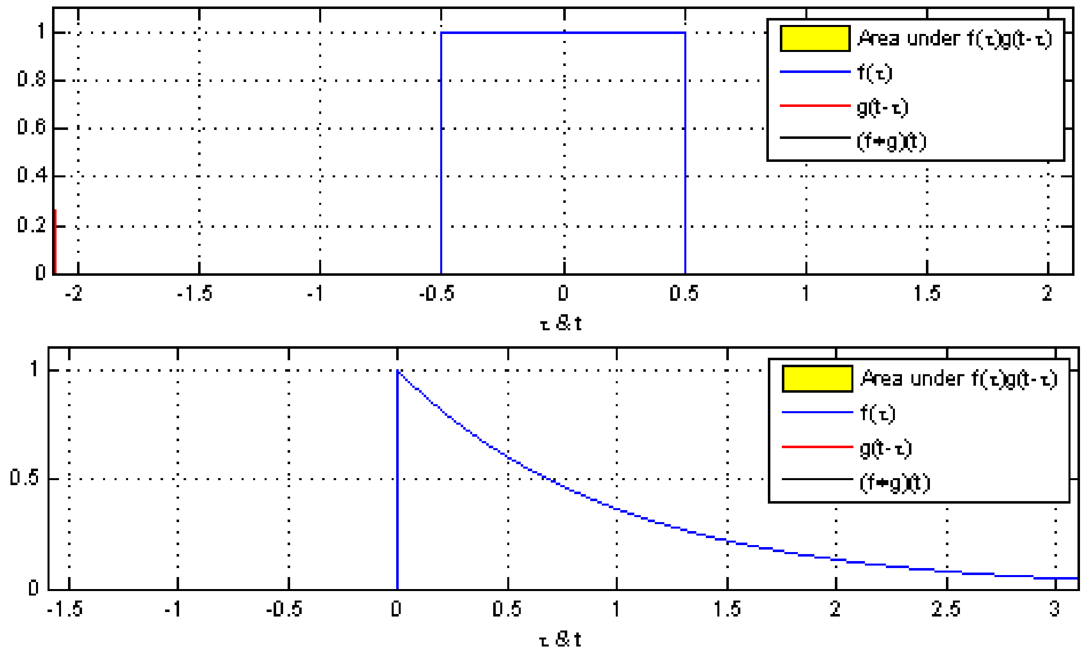
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$



信号的卷积运算——定义

➢ 连续信号的卷积



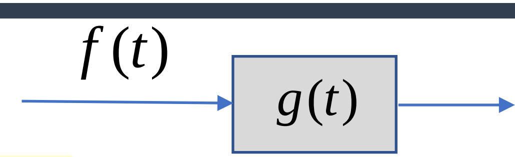


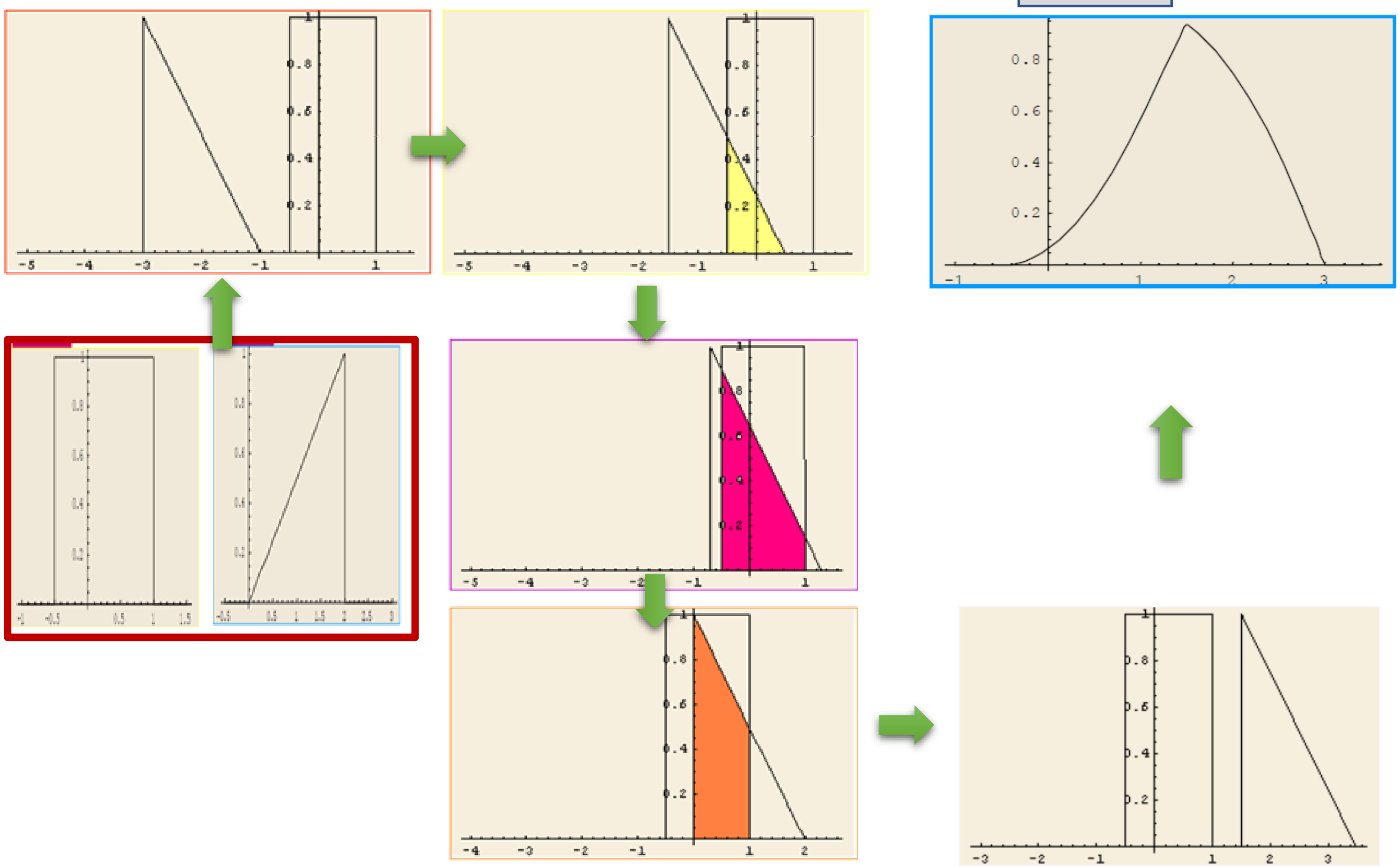
➢ 一个信号的反褶信号的在 t 轴滑动过程中，它与另外一个信号重合部分相乘得到的新信号的面积随 t 的变化曲线就是所求的两个信号的卷积的波形。

➢ 不是求图形相交部分的面积，而是求相乘结果函数的面积

信号的卷积运算——定义

- 连续信号的卷积





对卷积这个名词的理解：所谓两个函数的卷积，本质上就是先将一个函数翻转，然后进行滑动叠加。

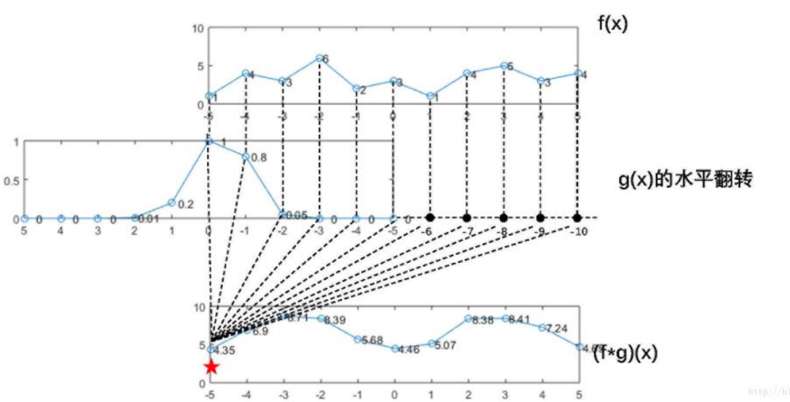
信号的卷积运算——定义

➢ 离散信号的卷积

f, g为两个离散时间信号，其卷积定义为：

$$(f*g)(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$

$$f(n)*g(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$



$$\left(x^2+2x+3\right)\left(2y^2+3y+1\right)$$

```
1.a=[1,2,3];
2.b=[2,3,1];
3.y=conv(b,a);
```

信号的卷积运算——定义

➢ 离散信号的卷积

有两枚骰子，把它们都抛出去，两枚骰子点数加起来为4的概率是多少？

f	1	2	3	4	5	6

f表示第一枚骰子
f 1 表示投出1的概率
f 2 , f 3 ,⋯ 以此类推

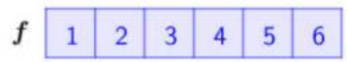
$$f(1)g(3)+f(2)g(2)+f(3)g(1)$$

g	1	2	3	4	5	6

g表示第二枚骰子

信号的卷积运算——定义

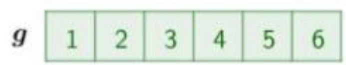
➢ 离散信号的卷积



f表示第一枚骰子

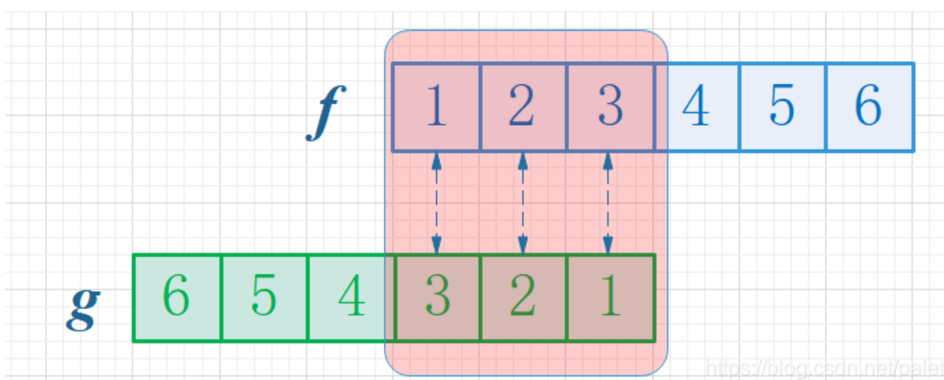
f 1 表示投出1的概率

f 2 , f 3 ,⋯ 以此类推



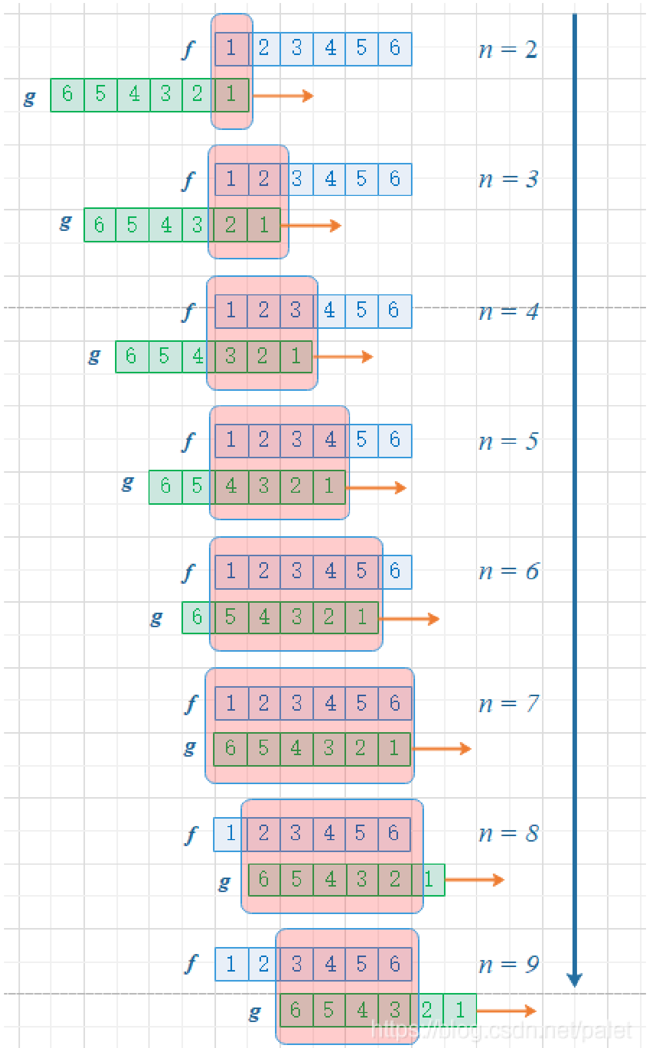
g表示第二枚骰子

$$f(1)g(3)+f(2)g(2)+f(3)g(1)$$



信号的卷积运算——定义

➢ 离散信号的卷积



$$f(1)g(n-1)+f(2)g(n-2)+\cdots+f(n)g(0)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m) \qquad (f*g)(n)$$

信号的卷积运算——定义

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$t=\tau+(t-\tau)$$

$$n=m+(n-m)$$

$$f(n)*g(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m)g(n-m)$$

信号的卷积运算——性质

I 交换律

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

II 分配律

$$f_1 * \left(f_2 + f_3 \right) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$

III 结合律

$$\left(f_1 * f_2 \right) * f_3 = f_1 * \left(f_2 * f_3 \right)$$

信号的卷积运算——性质

I 交换律

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

（通过变换积分变量来证明）

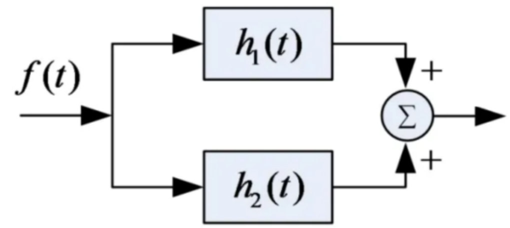
$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$\overset{b=t-\tau}{=\!=\!=} \int_{+\infty}^{-\infty} f_1(t-b) f_2(b) d(-b)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-b) f_2(b) db \;= (f_2 * f_1)(t)$$

信号的卷积运算——性质

II 分配律



$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$

（利用积分运算的线性性来证明）

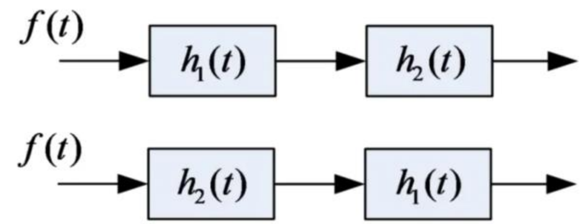
$$(f_1 * (f_2 + f_3))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)(f_2(t-\tau) + f_3(t-\tau))d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_3(t-\tau)d\tau$$

$$= (f_1 * f_2)(t) + (f_1 * f_3)(t)$$

信号的卷积运算——性质

III 结合律



$$f_1 * f_2 \;\; * f_3 = f_1 * \;\; f_2 * f_3$$

$$\left(\left(f_1 * f_2\right) * f_3\right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(b-\tau)\, d\tau\right] f_3(t-b)\, db$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(b-\tau)\, f_3(t-b)\, d\tau\, db$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(b-\tau) f_3(t-b)\, db\right] d\tau$$

$$\overset{b=\tau+c}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(c) f_3(t-\tau-c)\, dc\right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\left[\left(f_2 * f_3\right)(t-\tau)\right] d\tau$$

$$= \left(f_1 * \left(f_2 * f_3\right)\right)(t)$$

信号的卷积运算——性质

➢ 卷积的微分

（f_1，f_2为R上的连续可导函数）

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=f_1(t)*\left[\frac{d}{dt}f_2(t)\right]=\left[\frac{df_1(t)}{dt}\right]*f_2(t)$$

➢ 卷积的积分

$$\int_{-\infty}^{t}(f_1*f_2)(\lambda)d\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda=\left(\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda\right)*f_2(t)$$

信号的卷积运算——性质

➢ 卷积的微分

（f_1，f_2为R上的连续可导函数）

$$\left(f_1 * f_2\right)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t)$$

上式中的m、n及n-m取正整数时为导数的阶次，而取负整数时为重积分的次数。

常规运算

- 线性运算 $f_1(t)+f_2(t)$
- 乘除运算

数学运算

- 微分运算 $\frac{df(t)}{dt}$
- 积分运算 $\int_0^t f(\tau)d\tau$

波形变换

- 时移运算 $f(t-t_0)$
- 反褶运算 $f(-t)$
- 压扩运算 $f(at)$

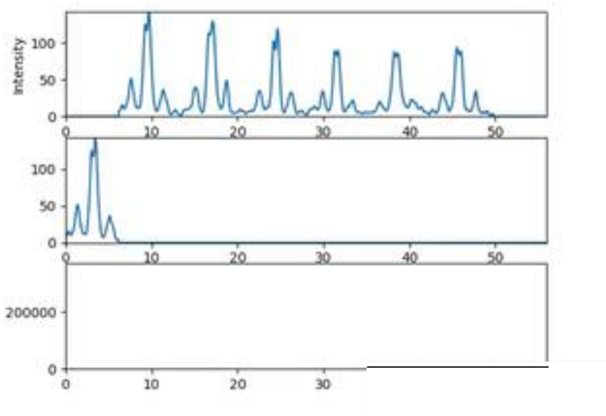
相互运算

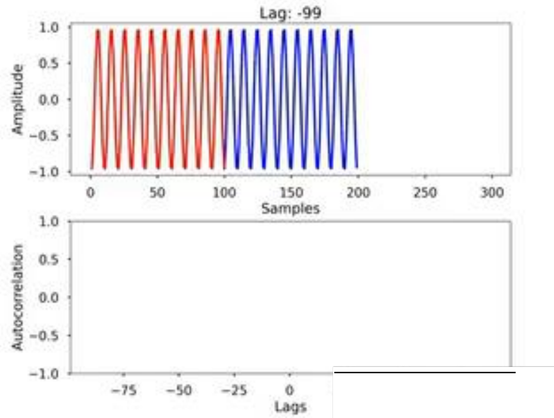
- 卷积运算
- 相关运算

信号的相关运算

➢ 相关分析

- **为了表示其中一个信号在时间轴上平移后两个信号的相似性**





互相关函数

$$R_{f_1f_2}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(\tau+t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau-t)f_2(\tau)d\tau$$

$$R_{f_2f_1}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)f_1(\tau+t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau-t)f_1(\tau)d\tau$$

$$R_{f_2f_1}(t)=R_{f_1f_2}(-t)$$

自相关函数

$$R_{f_1f_1}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_1(\tau+t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau-t)f_1(\tau)d\tau$$

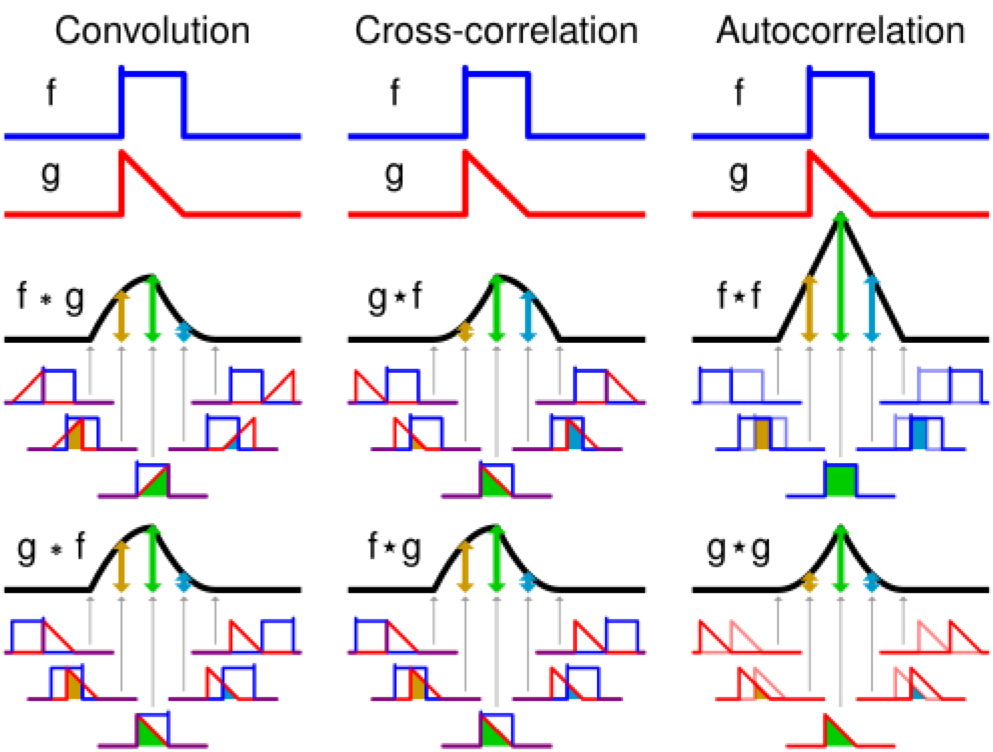
$$R_{f_1f_1}(t)=R_{f_1f_1}(-t)$$

信号的相关运算

➢ 相关与卷积

$$R_{f_1 f_2}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\underline{f_2(\tau+t)}d\tau \qquad f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\underline{f_2(t-\tau)}d\tau$$

两种运算非常相似，都有一个位移、相乘、求和(积分)的过程，差别仅仅在于卷积运算先要进行翻转

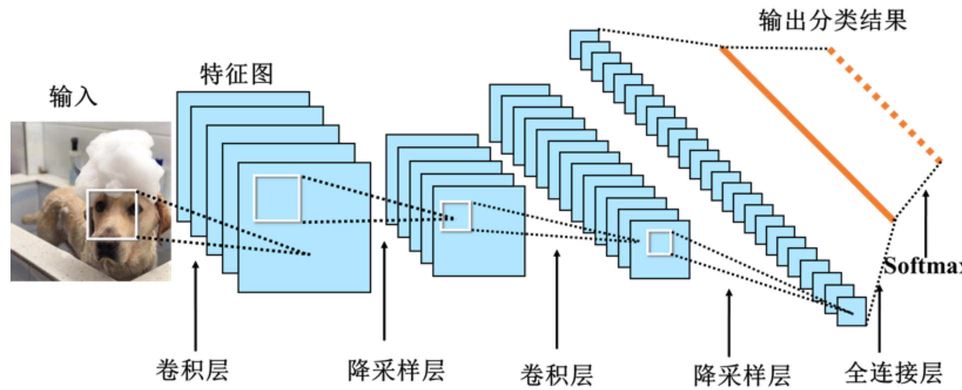


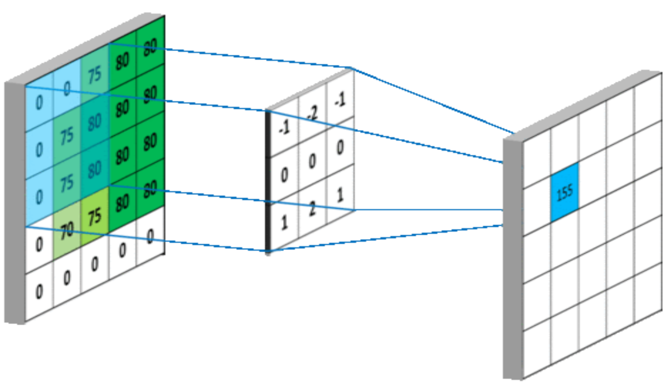
$$R_{f_1 f_2}(-t)= f_1(t)* f_2(-t)$$

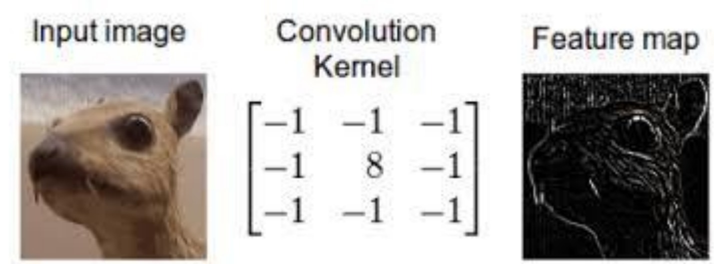
$$R_{f_1 f_2}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(-(t-\tau))d\tau$$

卷积、相关的拓展应用

- 图像卷积运算
- 卷积神经网络
- 深度学习







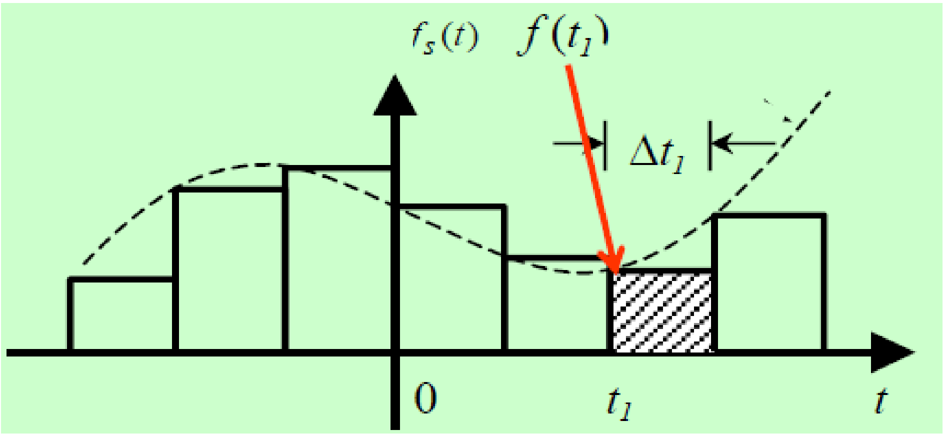
深度学习中我们通常使用的是互相关而不是严格数学定义的卷积

因为卷积核（“系统”）是学习得到的，翻不翻转都能学到合适的参数

奇异信号

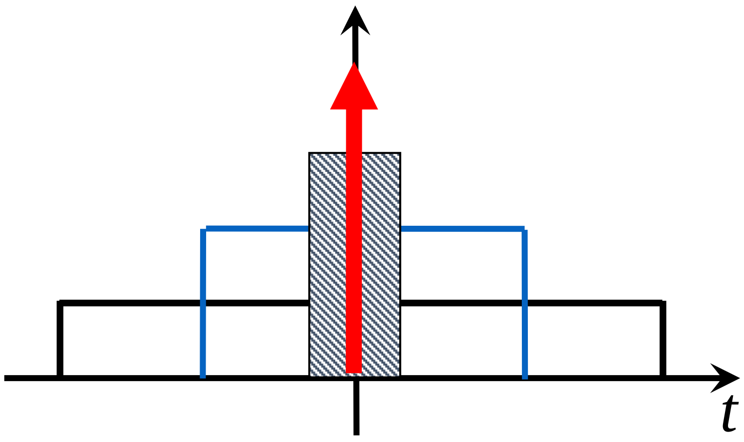
奇异信号

➢ 奇异信号的引出



$$g_{t_1}(t)=\begin{cases}1 & t_1\le t<t_1+\Delta t\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$f_{t_1}(t)=f(t_1)g_{t_1}(t)$$

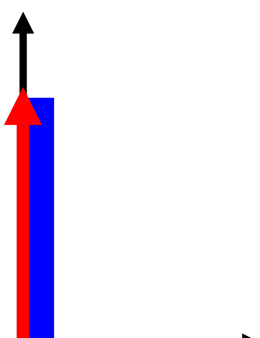


$$f(t)\approx\sum_{t_1=-\infty}^{\infty}f_{t_1}(t)=\sum_{t_1=-\infty}^{\infty}f(t_1)g_{t_1}(t)$$

奇异信号

➢ 单位冲激信号

用于描述自然界中那些发生后持续时间很短的现象。



“嘭嘭”：熟瓜

“当当”：未熟

“噗噗”：过熟

奇异信号

➢ 单位冲激信号

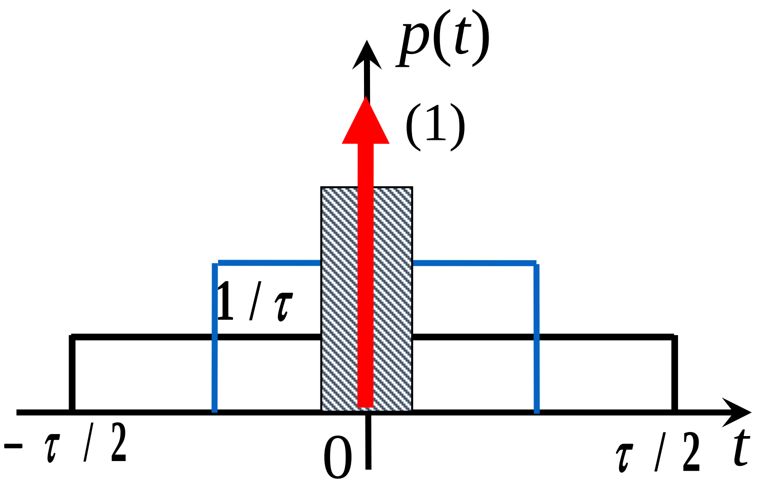
工程模型

矩形脉冲信号：

宽度为 τ ，高度为$1/\tau$，

面积为1

$\tau \to 0, \quad 1/\tau \to \infty$



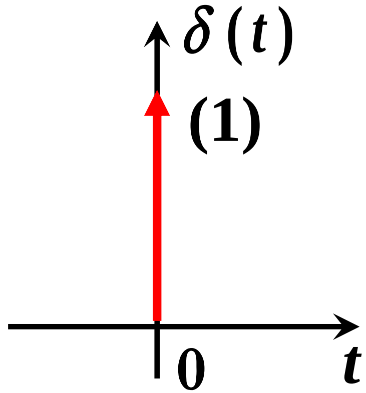
矩形脉冲信号→冲激信号

物理含义：

- 冲激信号是对作用时间极短，而相应物理量极大的物理过程的理想描述；
- 冲激信号是时域信号分析的基础。

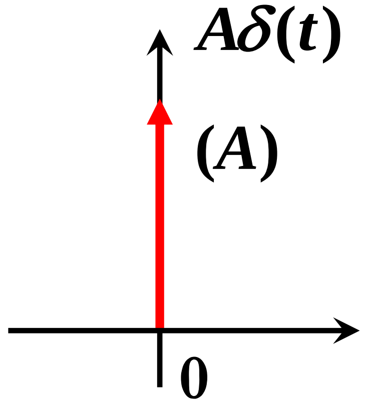
➢ 单位冲激信号——定义

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$



冲激信号定义：

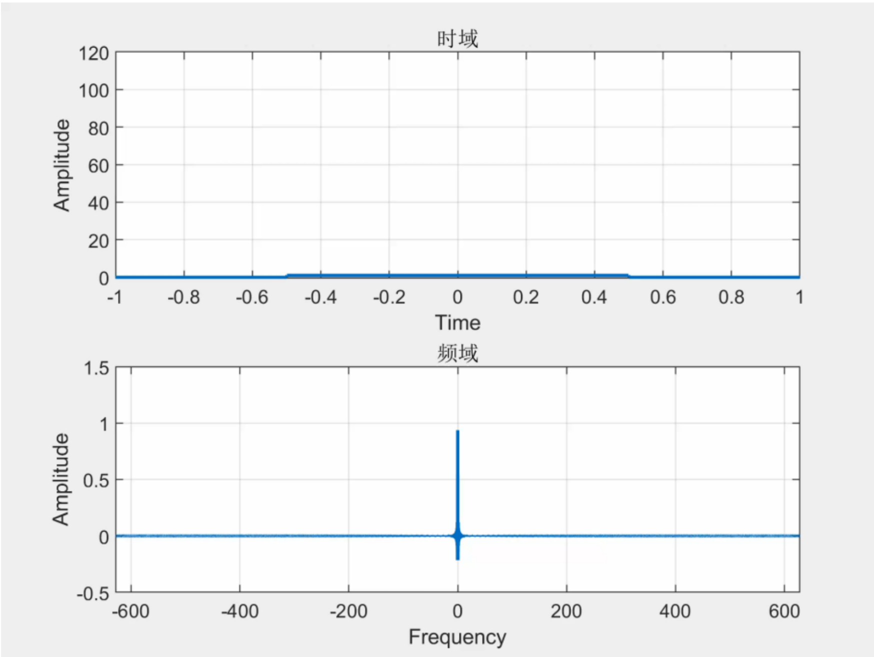
$$\begin{cases} A\delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ A\delta(t) = \infty & t = 0, \quad A\text{为常量} \\ \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t) dt = A \end{cases}$$



在冲激点处画一条带箭头的线，线的方向和长度与冲激强度的符号和大小一致。

奇异信号

➢ 单位冲激信号



保罗·狄拉克
（1902-1984）

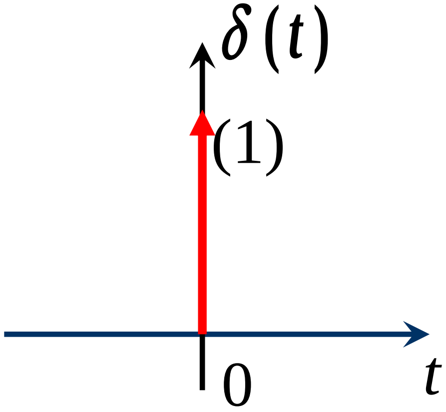
δ 函数包含了所有频率的分量

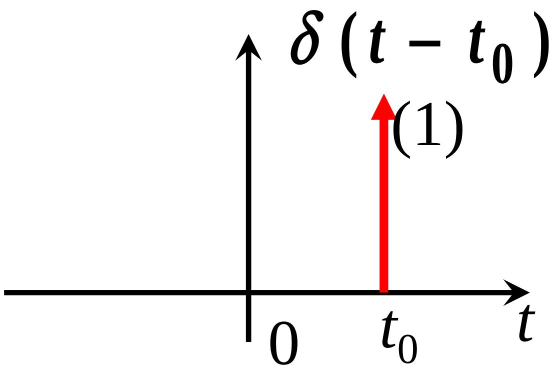
➢ 单位冲激信号

性质

（1）时移性质

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & t \neq t_0 \\ \delta(t-t_0)=\infty & t=t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1 \end{cases}$$





$$\int_a^b \delta(t-t_0)dt = ? \quad \begin{cases} t_0 \in [a,b] \\ t_0 \notin [a,b] \end{cases}$$

奇异信号

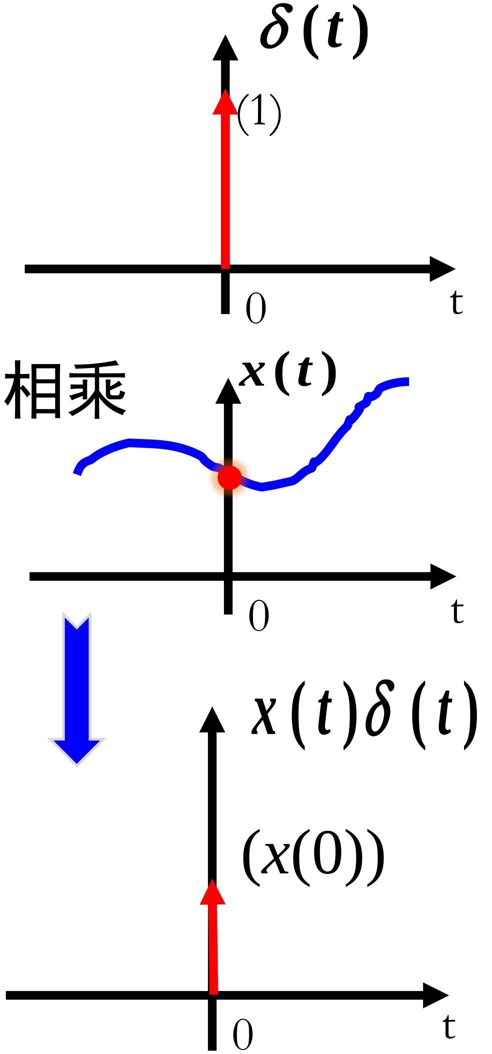
➢ 单位冲激信号

性质

（2）筛选特性

——$\delta(t)$乘以普通函数$x(t)$

沾上$\delta(t)$就脱不了身



$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

➢ 单位冲激信号

性质

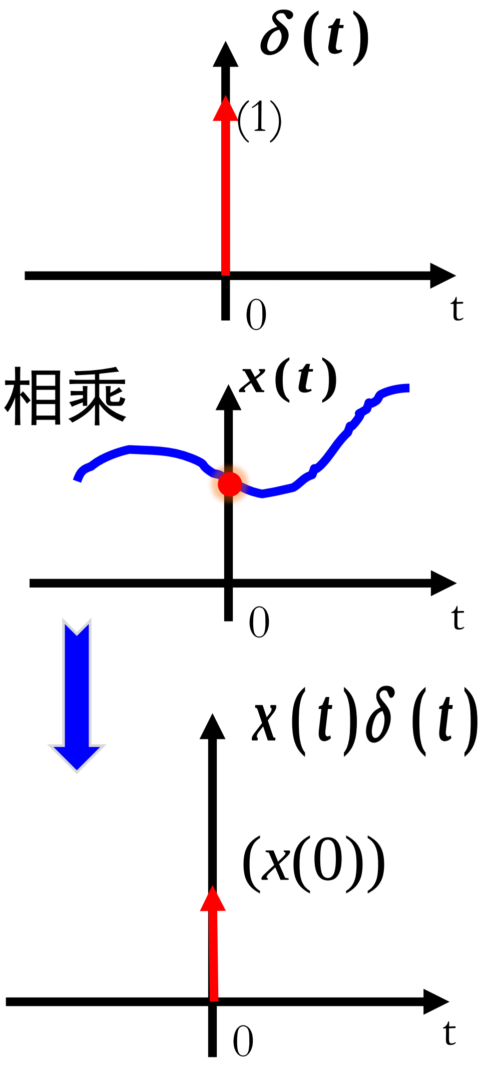
（3）抽样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

一个函数 $x(t)$ 与冲激函数 $\delta(t)$ 乘积下的面积等于 $x(t)$ 在冲激所在时刻的值

只有积分能消除掉 $\delta(t)$



奇异信号

➢ 单位冲激信号——平移抽样特性

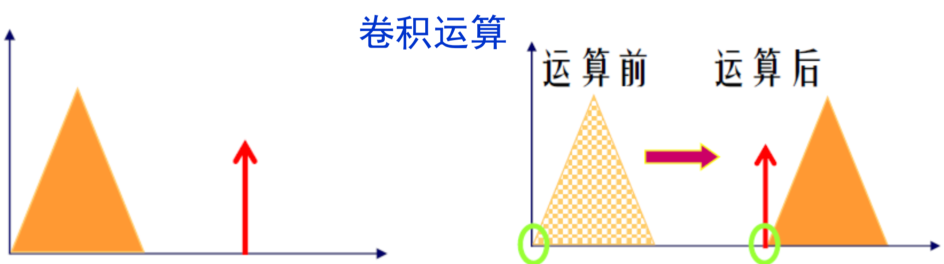
函数与单位冲激函数的卷积

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

一个函数与单位冲激函数的卷积，等价于把该函数**平移**到单位冲激函数的冲激点位置。

$$f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)\delta(t-t_0-\tau)da=f(t-t_0)$$



抽样特性☆：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)}$$

注意参考点位置的变化

奇异信号

➢ 单位冲激信号

性质

（3）抽样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

$$\int_{-1}^{1}\cos(2t)\delta(t)dt = \cos 0 = 1$$

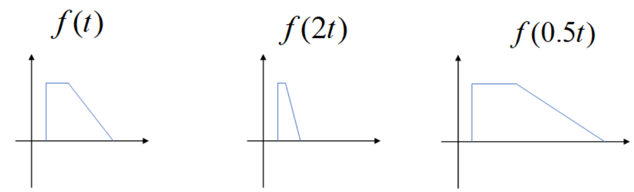
$$\int_{0}^{5}\cos(t)\delta(t+\pi)dt = \cos(-\pi) = -1$$ ✕

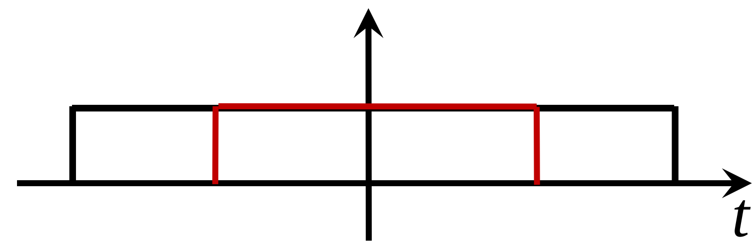
➢ 单位冲激信号

性质

（4）时扩特性 $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

展缩特性





$$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

1. 当 $a>0$ 时，写出积分形式，并作变量替换 $m=at+b$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at+b)f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(m)f\left(\frac{m-b}{a}\right)\frac{dm}{a}=\frac{1}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

上式的结果与冲激信号 $\frac{1}{a}\delta(t+\frac{b}{a})$ 相同，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)f(t)dt=\frac{1}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

按照广义函数相等的准则，认为这两种信号的形式是等价的，即

$$\delta(at+b)=\frac{1}{a}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right),a>0$$

推论：当a=-1,b=0时，有

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

即：冲激信号是偶函数。

奇异信号

➢ 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

(2) $[e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$

(3) $(\dfrac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

(6) $\int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin t\delta(t+1)dt$

解：(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

$$= x(t_0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

奇异信号

- 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

(2) $[e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$

(3) $(\dfrac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

$$(2)\ [e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)=\frac{1}{2}\delta(t)$$

奇异信号

- 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

(2) $[e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$

(3) $(\dfrac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

解：(3) $(\dfrac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

$$=k(\frac{\sin k\omega}{k\omega})\delta(\omega)=k\delta(\omega)$$

奇异信号

➢ 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

(2) $[e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$

(3) $(\dfrac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

解：

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau=x(t)$

奇异信号

➢ 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$ (2) $[e^{-t}\cos(3t-60^0)]\delta(t)$

(3) $(\dfrac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$ (4) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)d\tau$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

解:

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt=0$

奇异信号

➢ 单位冲激信号

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

(3) $(\dfrac{\sin k\omega}{\omega})\delta(\omega)$

(5) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

(6) $\int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin t\delta(t+1)dt$

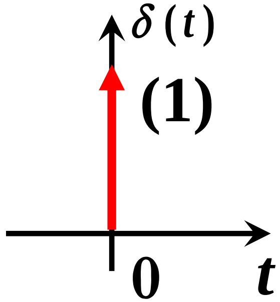
解:

(6) $\int_{0}^{\infty}e^{-t}\sin t\delta(t+1)dt \quad =0$

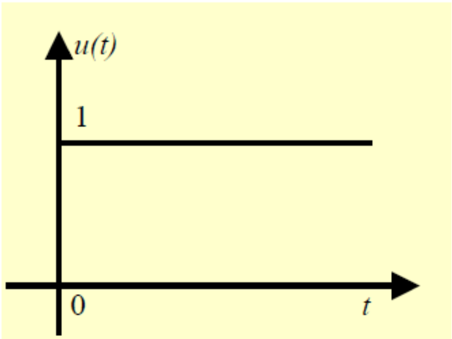
奇异信号——拓展

➢ 单位阶跃信号

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t)$$



$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$



特点:

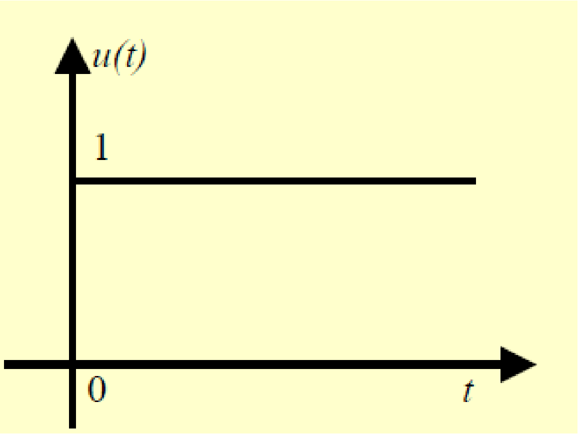
(1) 与单位冲激信号是积分/微分关系

(2) 用于描述分段信号

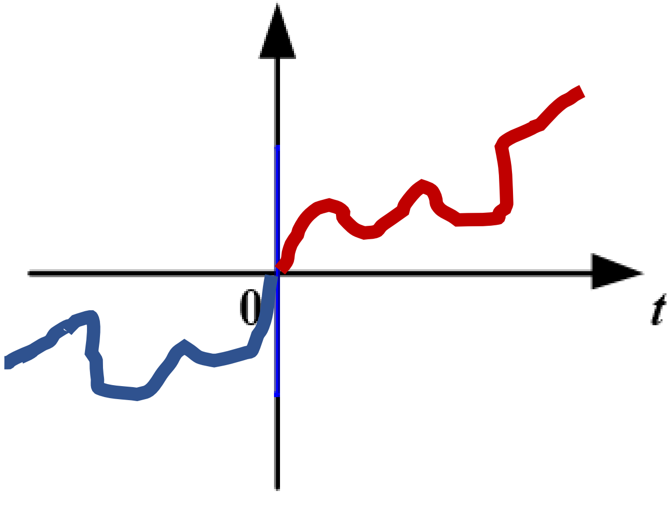
奇异信号——拓展

➢ 单位阶跃信号——单边特性

$$x(t)u(t)=\begin{cases} x(t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$



可以表示 $t=0$ 时刻合上开关接入电源或电池。

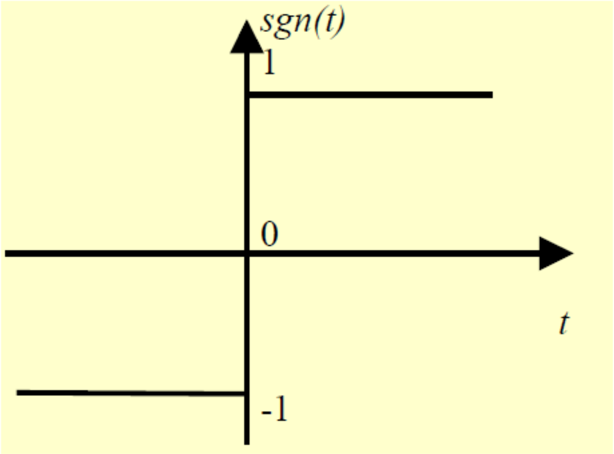


奇异信号——拓展

- 单位阶跃信号应用——符号函数信号

用于表示自变量的符号特性

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

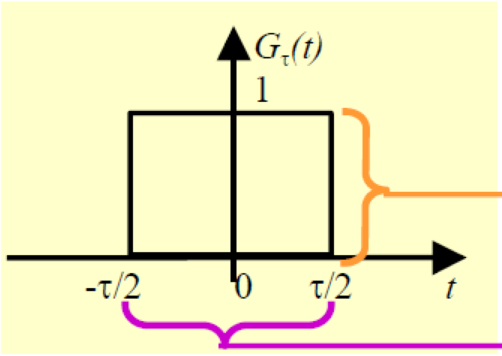


$$\boxed{\operatorname{sgn}(t)+1=2u(t)}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(t)=2u(t)-1}$$

奇异信号——拓展

➢ 单位阶跃信号应用——矩形脉冲信号

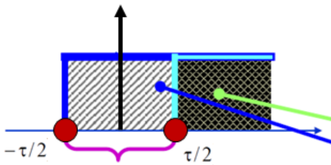


$$G_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\le \tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$$

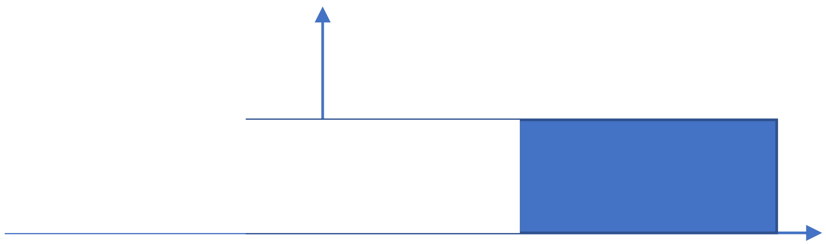
脉高： 矩形脉冲的高度

脉宽： 矩形脉冲的宽度

与单位阶跃信号之间的关系



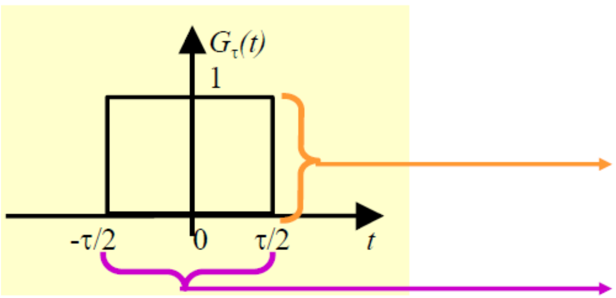
$$G_\tau(t)=u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2)$$

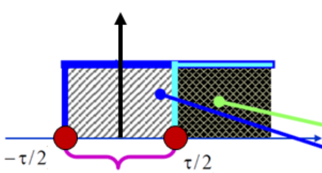


通过单位阶跃信号的运算结果，可以不必再用分段的形式表示信号了！

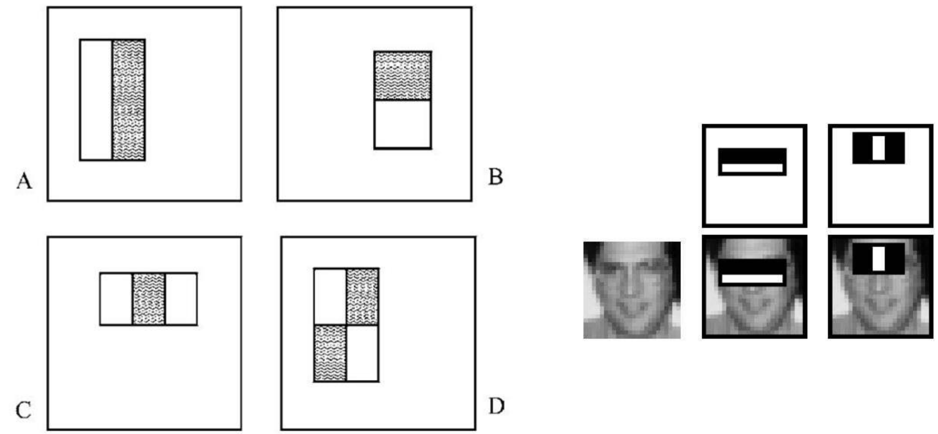
奇异信号——拓展

➢ 单位阶跃信号应用——矩形脉冲信号

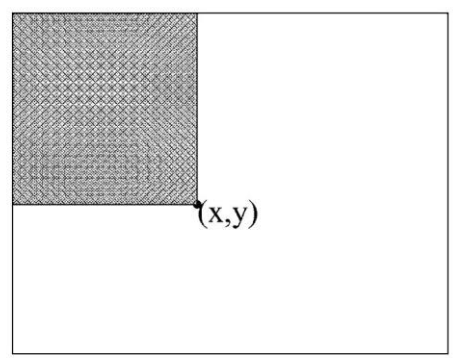




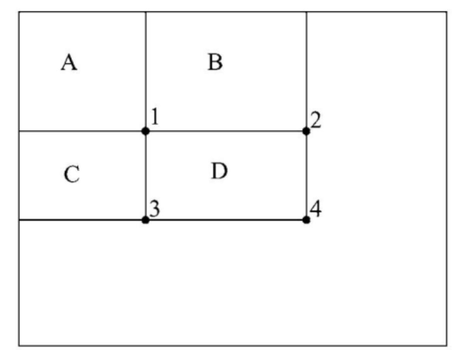
$$G_\tau(t) = u(t+\tau/2) - u(t-\tau/2)$$



Harr小波



积分图



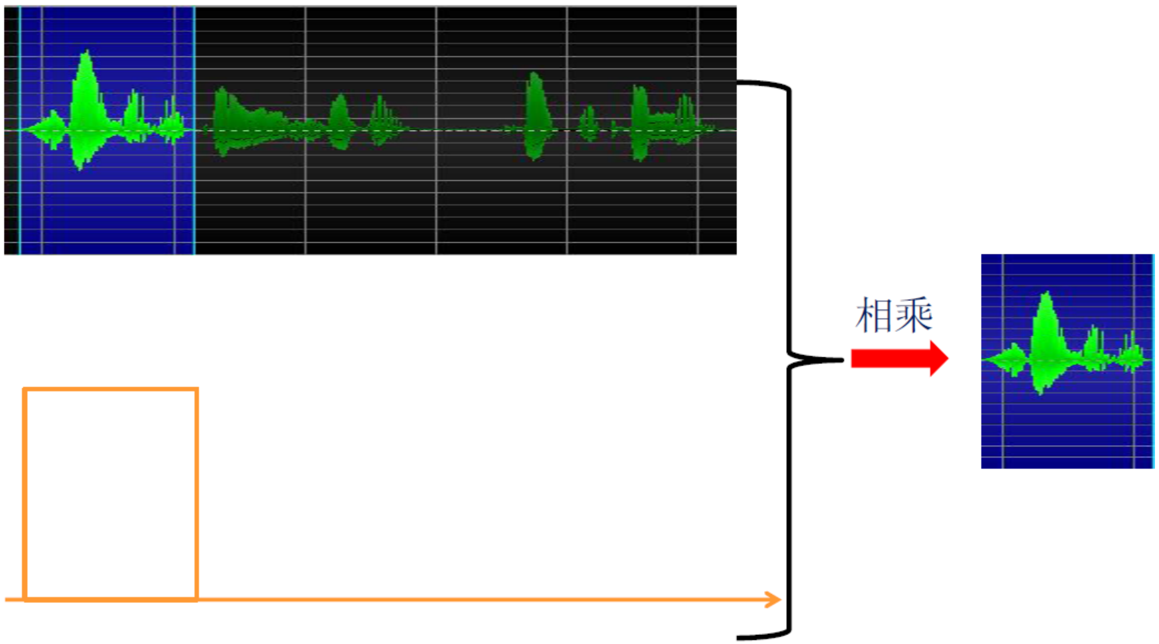
4-2-3+1

奇异信号——拓展

➢ 单位阶跃信号应用——矩形脉冲信号

与单位阶跃信号之间的关系：

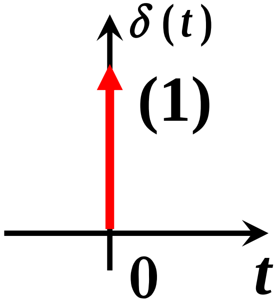
- 其他信号与矩形信号相乘时，只有在矩形信号对应的区间内，其他信号的信息才被保留下来，
- 用矩形信号和乘法运算，可以截取信号的特定区间片段！
- 窗函数

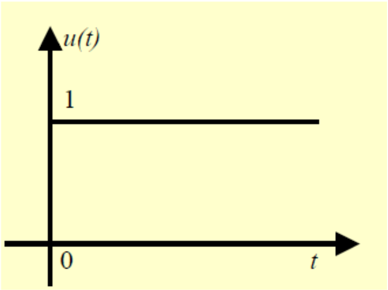


奇异信号——拓展

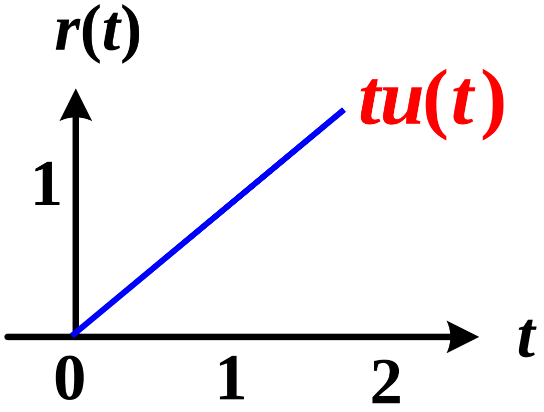
➢ 单位斜变信号

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t)$$



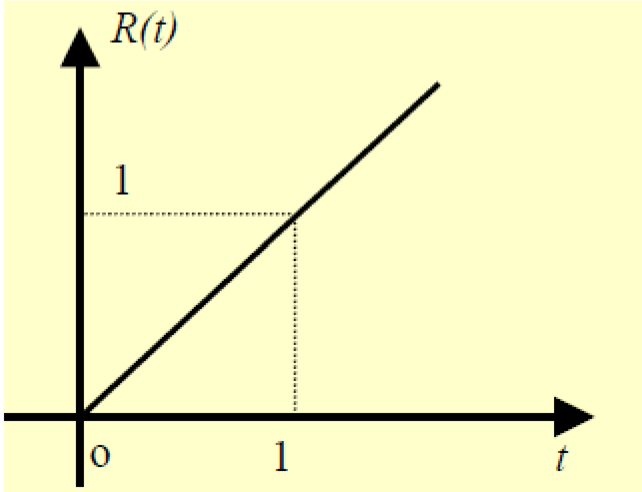


$$\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau = tu(t)$$



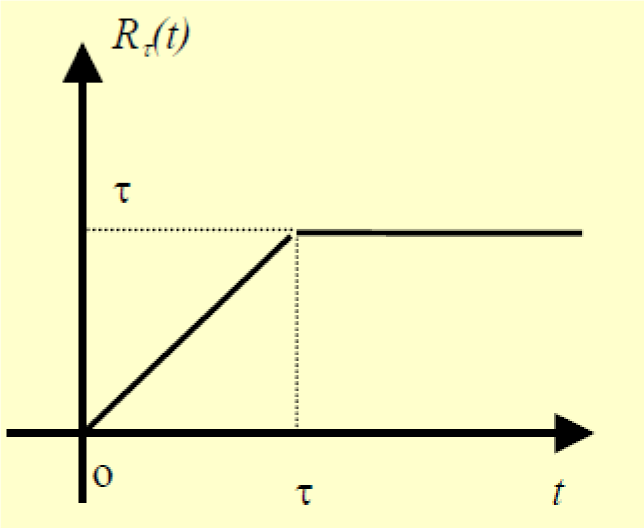
奇异信号——拓展

- 单位斜变信号



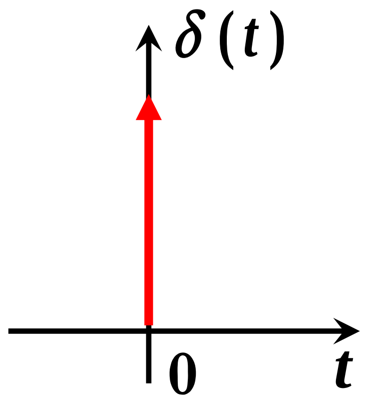
$$R(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geq 0\end{cases}$$

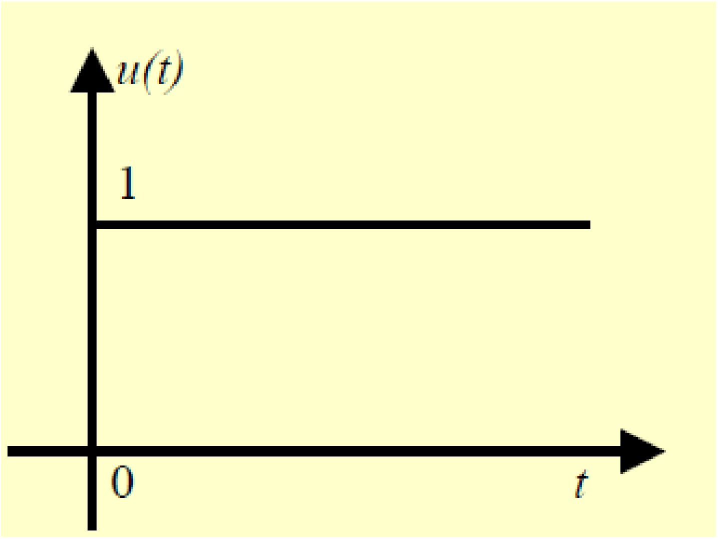
截顶的单位斜变信号：

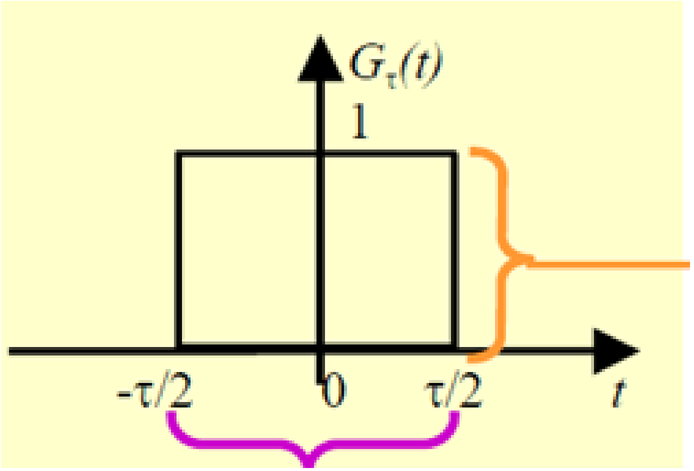


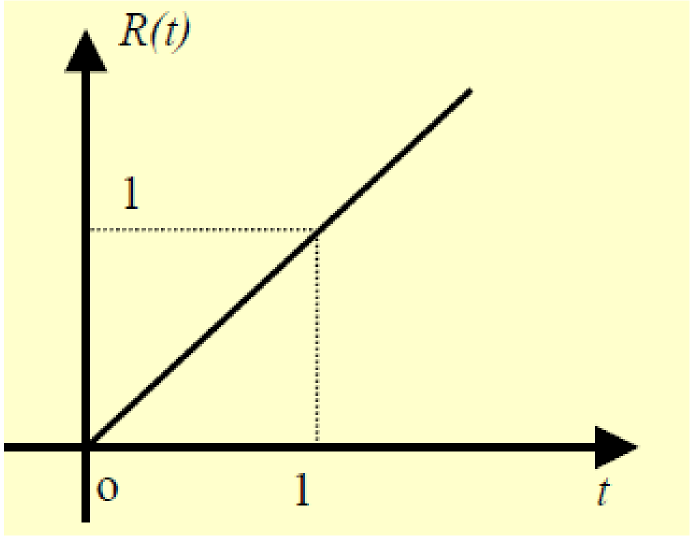
$$=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & \tau>t>0\\ \tau, & t\geq\tau\end{cases}$$

奇异信号——总结





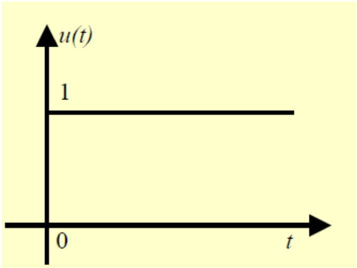


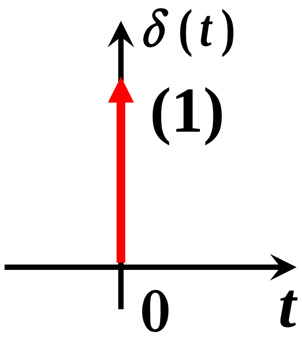


奇异信号——总结

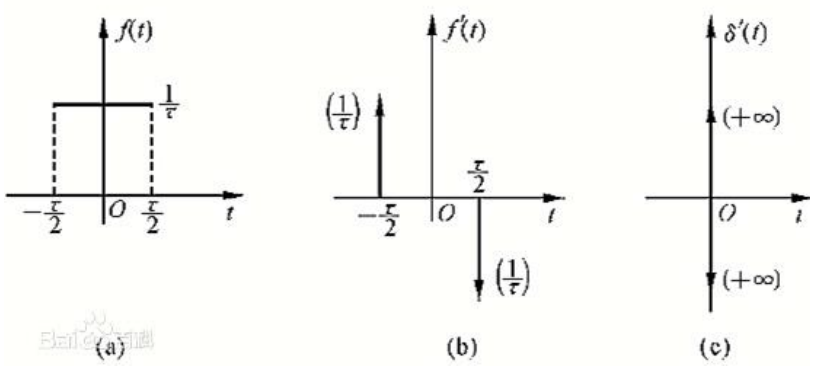
➢ 冲激信号微积分会派生出何种信号？

$$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$$





$$\frac{d}{dt}\delta(t)=\delta'(t)$$ ——冲激偶信号



奇异信号——总结

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = tu(t) = r(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \delta'(t)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t) = \delta^{(n)}(t)$$

所有从单位冲激信号导出的这些信号（连续求导和积分）统称为**奇异信号**。

奇异信号——练习

$$x(-2t+1)=2\delta(t-1) \qquad x(t)=?$$

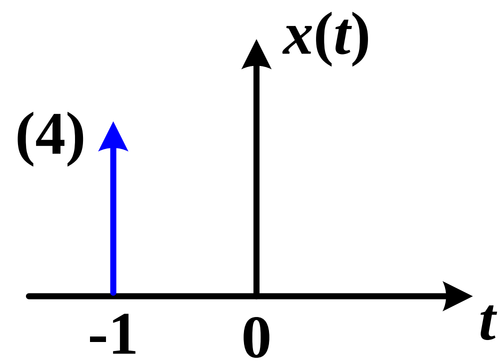
$$1-2t=t' \quad \rightarrow \quad t=\frac{1-t'}{2}$$

$$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$$

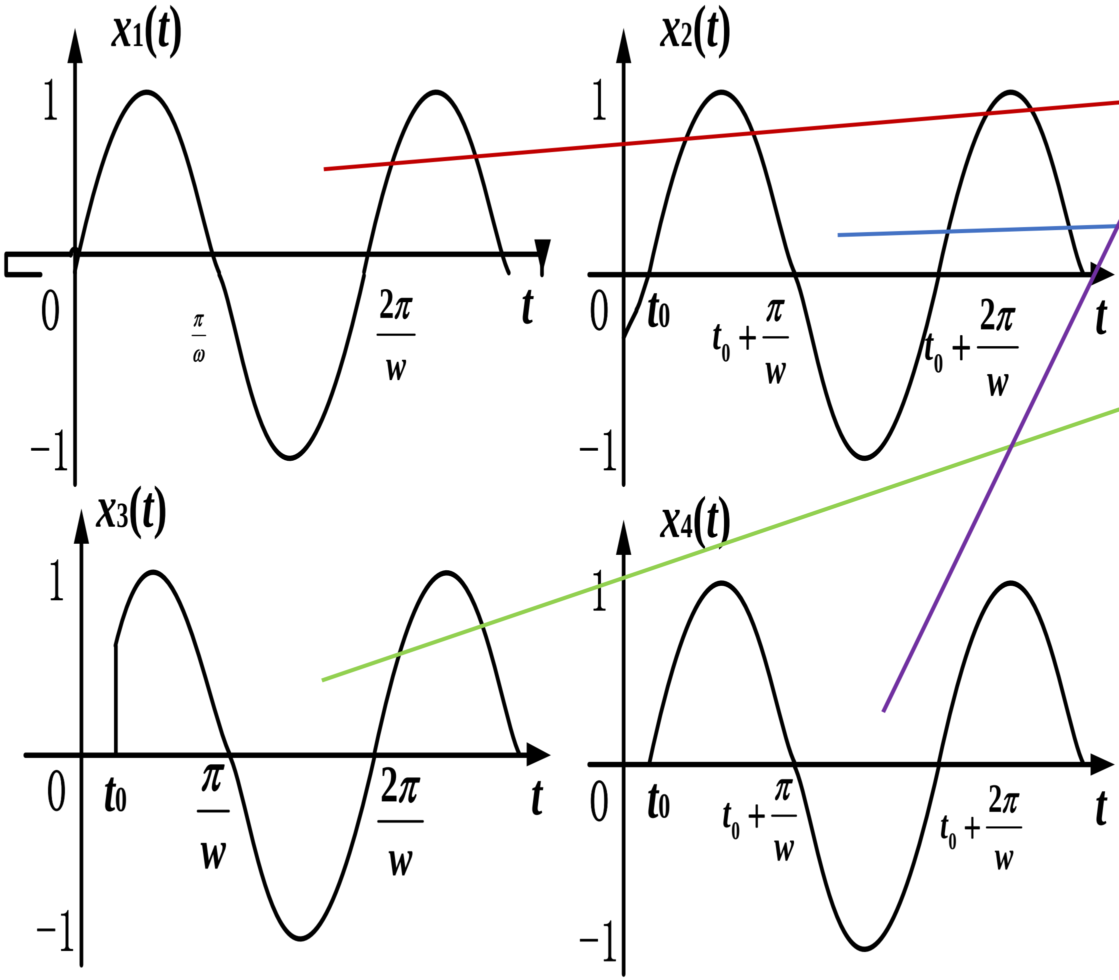
$$x(t')=2\delta(\frac{1-t'}{2}-1)=2\delta(-\frac{t'}{2}-\frac{1}{2})$$

$$x(t)=2\delta(-\frac{t}{2}-\frac{1}{2})$$

$$=2\frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|}\delta(t+1)=4\delta(t+1)$$



奇异信号——练习



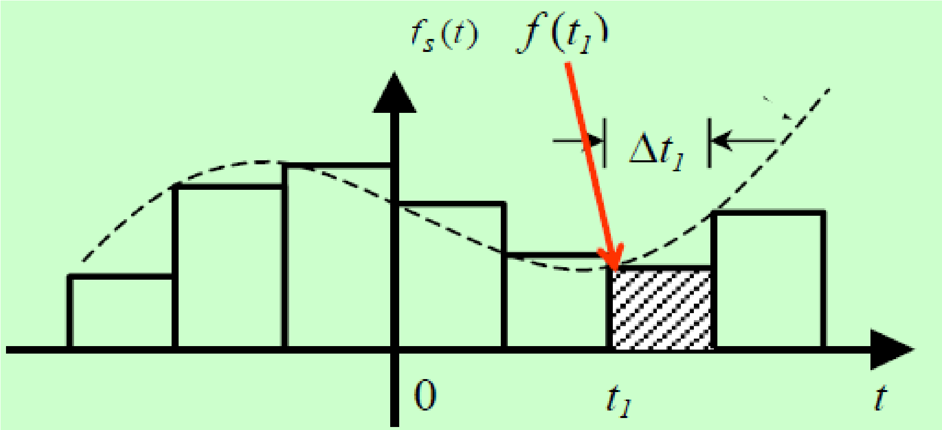
$\sin[\omega(t-t_0)]\cdot u(t-t_0)$

$\sin(\omega t)\cdot u(t)$

$\sin[\omega(t-t_0)]\cdot u(t)$

$\sin(\omega t)\cdot u(t-t_0)$

信号的基本分解



作业

作业1：

已知某信号 $f_0(t)$**是一个关于纵轴对称的三角波，设它的底边长为2，高为1，试绘出信号** $f(t)$ **的波形：**

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t)*\delta(t-2n)$$

并回答 $f(t)$ **是否是周期信号？如是，其周期为多少？**

作业

作业2：推导卷积的微分公式

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=f_1(t)*\left[\frac{d}{dt}f_2(t)\right]=\left[\frac{df_1(t)}{dt}\right]*f_2(t)$$

作业3：推导卷积的积分公式

$$\int_{-\infty}^{t}(f_1*f_2)(\lambda)d\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda=\left(\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda\right)*f_2(t)$$

作业4：推导一个函数与单位阶跃函数的卷积等于该函数的积分，即

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)dt$$