

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή ΗΜ&ΜΥ
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
7^ο εξάμηνο, Ροή Α
Ακαδημαϊκή περίοδος: 2010-2011



1^η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Γερακάρης Βασίλης
Α.Μ.: 03108092

5 Δεκεμβρίου 2011

1 Ασυμπτωτικός συμβολισμός, Αναδρομικές Σχέσεις

i) Ταξινόμηση

- (1) $\log n^3$
- (2) $\sqrt{n} * \log^{50} n$
- (3) $\frac{n}{\log \log n}$
- (4) $\log n!$
- (5) $n * \log^{10} n$
- (6) $n^{1.01}$
- (7) $5^{\log_2 n}$
- (8) $\sum_{k=1}^n k^5 = k^6$
- (9) $\log^{\log n} n = n^{\log \log n}$
- (10) $2^{\log_2^4 n}$
- (11) $\log^{\sqrt{n}} n$
- (12) $e^{\frac{n}{\ln n}}$
- (13) $n * 3^n$
- (14) 2^{2*n}
- (15) $\sqrt{n!}$

ii) Τάξη Μεγέθους

- (1) $T(n) = 5T(n/7) + n \log(n)$, $(a = 5, b = 7)$
 $\Rightarrow n^{\log_7 5} = n^{0.827} \Rightarrow n^{0.827} < n < n \log n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$
- (2) $T(n) = 4T(n/5) + n / \log^2 n$, $(a = 5, b = 5)$
 $\Rightarrow n^{\log_5 4} = n^{0.861} \Rightarrow n^{0.861} < n / \log^2 n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n / \log^2 n)$
- (3) $T(n) = T(n/3) + 3T(n/7) + n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$
- (4) $T(n) = 6T(n/6) + n$
 $\Rightarrow n^{\log_6 6} = n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$
- (5) $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$
- (6) $T(n) = 16T(n/4) + n^3 * \log^2 n$
 $\Rightarrow n^{\log_4 16} = n^2 \Rightarrow n^2 < n^3 \log^2 n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^3 \log^2 n)$
- (7) $T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(\log \log n)$ $(\text{Θέτω } k = \log n, f(k) = T(n))$
 $\Rightarrow T(\sqrt{n}) = f(\sqrt{k}) = f(\log \sqrt{n}) = f(\frac{1}{2} * \log n) = f(\frac{k}{2})$
 $\Rightarrow f(k) = f(\frac{k}{2}) + \Theta(\log k)$
 $\Rightarrow \Theta(n)$
- (8) $T(n) = T(n-3) + \log n$
 $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n * \log n)$

2 Ταξινόμηση σε Πίνακα με Πολλά Ίδια Στοιχεία

3 Δυαδική Αναζήτηση

- i) Ξεκινάμε (για $i = 1$) συγκρίνοντας το $A[i]$ με το x . Όσο το x είναι μεγαλύτερος από αυτό, κρατάμε την τιμή του $(i + 1)$ σε μια άλλη μεταβλητή k και διπλασιάζουμε το i . Μόλις φτάσουμε σε μεγαλύτερο αριθμό από τον x , εφαρμόζω ένα έλεγχο. Αν το στοιχείο $A[i]$ είναι διάφορο του ∞ , τότε εφαρμόζω δυαδική αναζήτηση για το στοιχείο x στο τμήμα $[k..i]$ του πίνακα και έχω το αποτέλεσμα για πιθανή ύπαρξη & θέση του στοιχείου. Αν το στοιχείο $A[i]$ είναι ίσο με ∞ , τότε ελέγχω το $A[k]$. Αν είναι διάφορο του ∞ , εφαρμόζω αναδρομικά τον αλγόριθμο με αρχική θέση k . Αν και το $A[k]$ είναι ∞ , σημαίνει ότι το x είναι μεγαλύτερο από το τελευταίο (και μέγιστο) στοιχείο του A , επομένως δεν υπάρχει.

Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων είναι $O(\log n)$.

- ii) Παίρνω τα k πρώτα στοιχεία από κάθε πίνακα. Τα χωρίζω στη μέση και συγκρίνω τα $A[k/2]$ με $B[k/2 + 1]$ και $A[k/2 + 1]$ με $B[k/2]$. Αν $A[k/2] < B[k/2 + 1]$ και $B[k/2] < A[k/2 + 1]$ τότε το k -οστό στοιχείο είναι το $\max\{A[k/2], B[k/2]\}$. Αν $A[k/2] < B[k/2 + 1]$ και $B[k/2] > A[k/2 + 1]$ τότε επαναλαμβάνω χρησιμοποιώντας τα στοιχεία $[A[k/2 + 1]..A[k]]$ και $[B[1]..B[k/2]]$.

4 Συλλογή Comics

Ζητάμε πρώτα το MSB για όλα τα τεύχη. Έτσι τα χωρίζουμε σε $\frac{n}{2}$ και $\frac{n}{2} - 1$. Προφανώς αυτό που λείπει είναι στα λιγότερα. Εφαρμόζουμε πάλι κάνοντας $\frac{n}{2}$ ερωτήσεις και κρατάμε πάλι το υποσύνολο με το μικρότερο πλήθος. Αναδρομικά θα καταλήξουμε στο τεύχος που λείπει από τη συλλογή έχοντας ρωτήσει $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + 1 = 2 * n * (1 - \frac{1}{2^n}) < 2 * n$ φορές.

5 Πολυκατοικίες χωρίς Θέα

Ξεκινάμε με τον από τον $A[1]$ θέτοντας το $B[1] = 0$ εφόσον δεν υπάρχει κάποιος δυτικότερα από αυτόν. Προχωράμε στον επόμενο $A[2]$ και συγκρίνουμε το ύψος του με τον $A[1]$. Αν $A[2] < A[1]$ τότε θέτουμε $B[2] = 1$ αλλιώς συγκρίνουμε το ύψος $A[2]$ με το ύψος του στόχου του $A[1]$. Αν πάλι δεν βρούμε ψηλότερο τρέχουμε πάλι για το στόχο του στόχου αναδρομικά μέχρι να φτάσουμε σε 0 ή σε κάποιον ψηλότερο του $A[2]$ και τον θέτουμε ως στόχο στο πεδίο $B[2]$. Επαναλαμβάνουμε μέχρι n . Μέγιστος αριθμός συγκρίσεων είναι $2n$.