

Lab 08: Dynamic Programming

17 ตุลาคม 2568

ซิกแซก (Z)

เราจะให้ลำดับของ y_1, y_2, \dots, y_n เป็นลำดับซิกแซก ถ้าสมาชิกสามตัวที่อยู่ติดกัน (y_i, y_{i+1}, y_{i+2}) มีสมบัติอย่างใดอย่างหนึ่งในสองข้อนี้:

- $y_i < y_{i+1}$ และ $y_{i+1} > y_{i+2}$
- $y_i > y_{i+1}$ และ $y_{i+1} < y_{i+2}$

เมื่อให้ลำดับ x_1, x_2, \dots, x_n มา เป้าหมายของเราคือการทำ Dynamic Programming เพื่อหาความยาวที่ยาวที่สุดของลำดับย่อย (Subsequence) ที่ซิกแซก โดยให้นิยามว่า $DP(i, b)$ คือความยาวของลำดับย่อยซิกแซกที่ยาวที่สุดที่จบด้วย x_i และมีเงื่อนไขสำหรับตัว b ต่อไปนี้

- หากว่า b มีค่าเป็น TRUE หมายความว่าต้องจบด้วยตัว x_i ที่คู่สุดท้ายเป็นแบบ Ascending Pair (ตัวก่อนสุดท้ายมีค่าน้อยกว่า x_i)
- หากว่า b มีค่าเป็น FALSE หมายความว่าต้องจบด้วยตัว x_i ที่คู่สุดท้ายเป็นแบบ Descending Pair (ตัวก่อนสุดท้ายมีค่ามากกว่า x_i)

และหากมีความยาวเพียง 1 จะถือว่าเป็นลำดับซิกแซกแบบทั้งจบด้วย Ascending และ Descending Pair

ยกตัวอย่างสมมติเรามีลำดับต่อไปนี้

$$x_1 = 13, \quad x_2 = 93, \quad x_3 = 86, \quad x_4 = 50, \quad x_5 = 63, \quad x_6 = 4$$

เราจะได้ว่า $DP(5, \text{TRUE})$ จะมีค่าเท่ากับ 4 เพราะว่าลำดับย่อยซิกแซกที่ยาวที่สุดที่จบที่ x_5 และคู่สุดท้ายเป็นแบบ Ascending Pair คือ x_1, x_2, x_4, x_5 หรือ x_1, x_3, x_4, x_5 ในขณะที่ $DP(5, \text{FALSE}) = 3$ โดยเป็นลำดับย่อย x_1, x_3, x_5 (เราจะได้ข้อสังเกตว่าลำดับย่อย (Subsequence) สมาชิกไม่จำเป็นต้องเป็นตัวติดกันก็ได้)

งานของนักศึกษา

เมื่อให้ลำดับมาเป็น $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ จงหา $DP(i, b)$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ และ $b = \text{True}, \text{False}$ (ลองดูตัวอย่างประกอบ)

ข้อมูลนำเข้า (Input)

บรรทัดที่ 1	จำนวนเต็ม n บอก จำนวน ของ สมาชิก ใน ลำดับ ดัง กล่าว โดยที่ $1 \leq n \leq 1,000,000$
บรรทัดที่ 2	จำนวนเต็ม x_1, x_2, \dots, x_n แทนสมาชิกในลำดับ แต่ละตัวคั่นด้วยช่องว่างหนึ่งช่อง

ข้อมูลส่งออก (Output)

บรรทัดที่ 1	ผลการคำนวณของ DP(1, True), DP(2, True), ..., DP(n, True) แต่ละตัวคั่นด้วยช่องว่างหนึ่งช่อง
บรรทัดที่ 2	ผล การ คำนวณ ของ DP(1, False), DP(2, False), ..., DP(n, False) แต่ละตัวคั่นด้วยช่องว่างหนึ่งช่อง

ตัวอย่างข้อมูลนำเข้า ส่งออก (Examples of Input & Output)

Input	Output
6 13 93 86 50 63 4	1 2 2 2 4 1 1 1 3 3 3 5
10 1 45 2 44 3 43 4 42 5 41	1 2 2 4 4 6 6 8 8 10 1 1 3 3 5 5 7 7 9 9
11 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

เจ้าที่ (Jaothi)

เจ้าที่ ตามติดจนขายได้ เป็นมือขายสินค้าระหว่างภพอันดับ 1 ด้วยวิธีการเชิญแบรนด์มานำเสนอสินค้าผ่าน คำนวณรูปแบบไม่เหมือนใคร โดยในแต่ละวัน เจ้าที่มีเวลาจำกัดในการใช้คำนวณขายสินค้า อีกทั้งแต่ละแบรนด์ที่เชิญมาขายใช้เวลาแนะนำเสนอแตกต่างกัน และสร้างรายได้แตกต่างกัน

เจ้าที่ต้องการเลือกสินค้าจากหลายแบรนด์มาขายให้ได้ **รายได้รวมสูงสุด** โดยมีเงื่อนไขว่าเวลาที่ใช้ทั้งหมด ต้องไม่เกินเวลาที่ระบุจะดับ

สมมติว่าเจ้าที่มีรูปที่จุดได้เป็นเวลา 180 นาที และมีสินค้า 5 แบนด์ดังนี้:

รายชื่อแบรนด์	เวลาที่ใช้ (นาที)	รายได้ (ล้านบาท)
แบรนด์ สหัชชัยควายธนู	30	100
แบรนด์ กุมารทองของขลัง	60	300
แบรนด์ สายสิญจน์เงินแดง	90	400
แบรนด์ วายป่วงพวงมาลัย	120	600
แบรนด์ ป้าข้าฝ้าดิบ	50	200

ในกรณีนี้จึงเห็นว่า หากเลือกแบรนด์ กุมารทองของขลัง และแบรนด์ วายป่วงพวงมาลัย จะใช้เวลา 180 นาทีพอดี และได้รายได้รวม 900 ล้านบาท ซึ่งเป็นค่าที่มากที่สุด

งานของนักศึกษา

เมื่อเจ้าที่ มีแบรนด์ที่จะเชิญเข้ามาจำนวน n แบนด์ และเจ้าที่มีเวลาไม่เกิน T นาที ให้นักศึกษาหาว่าเจ้าที่จะเลือกเชิญแบรนด์อย่างไรให้ทำให้รายได้รวมมากที่สุด ภายใต้เวลาเวลาที่จำกัด

ข้อมูลนำเข้า (Input)

บรรทัดที่ 1	จำนวนเต็มบวก n แสดงจำนวนแบรนด์ทั้งหมด และจำนวนเต็มบวก T แสดงเวลารวมที่ใช้ได้ (หน่วย: นาที)
บรรทัดที่ 2 ถึง $n + 1$	สำหรับแต่ละบรรทัด แสดงเวลา t_i และรายได้ของแต่ละแบรนด์ v_i แยกด้วยช่องว่าง

ข้อมูลส่งออก (Output)

บรรทัดที่ 1	แสดงค่ารายได้สูงสุดที่สามารถทำได้ โดยไม่เกินเวลารวมที่กำหนด (หน่วย: ล้านบาท)
-------------	------------------------------------------------------------------------------

ตัวอย่างข้อมูลนำเข้า ส่งออก (Examples of Input & Output)

Input	Output
5 180 30 100 60 300 90 400 120 600 50 200	900
5 65 4 20 5 9 9 21 10 18 7 26	94

EOD Return (Explosive Ordnance Disposal)

จากสถานการณ์ก่อนหน้านี้ที่ได้มีการพิพาทตามแนวชายแดน และทหารก็ได้รับบาดเจ็บจากกับระเบิดเป็นจำนวนมาก ผู้บังคับบัญชากองทัพจึงได้มาขอความช่วยเหลือจากนักศึกษาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีอันดับ 1 ของประเทศไทย เพื่อช่วยออกแบบวิธีการเก็บกู้ระเบิดให้กับกองทัพ

เป็นอีกครั้งที่น้อง ๆ ได้เป็นสมาชิกพิเศษในหน่วยเก็บกู้ระเบิด (EOD) และได้รับมอบหมายให้เคลียร์เส้นทางลับเส้นใหม่ที่เต็มไปด้วยระเบิดจำนวนมาก ซึ่งวางเรียงตัวตามแนวทางเดินยาว ๆ และน้องต้องค่อย ๆ เลือกรื้อเก็บกู้จากต้นทางจนถึงสิ้นสุดทางที่รับผิดชอบ

ทว่าในรอบนี้กองทัพได้รับงบประมาณที่มากขึ้น ทำให้น้อง ๆ สามารถใช้ชุดกอบกู้ระเบิดได้แบบไม่จำกัดจำนวน ชุดกอบกู้ระเบิดเหล่านี้เมื่อติดตั้งที่ระเบิดลูกใด ก็จะทำให้ระเบิดลูกนั้นระเบิดออกพร้อมทำลายระเบิดลูกอื่น ๆ ที่อยู่ถัดไปภายในระยะทำลายล้างของระเบิดลูกที่ถูกติดตั้งอุปกรณ์ไปด้วย ด้วยประสิทธิภาพของชุดอุปกรณ์จะมั่นใจได้ว่าจะไม่มีการทำลายล้างย้อนกลับมาด้านหลังจนโดนน้อง ๆ ที่เป็นหน่วยเก็บกู้ และระเบิดลูกอื่น ๆ ภายในระยะที่โดนทำลายล้างจะทำลายแค่ตัวเอง ไม่ทำให้ระเบิดใกล้เคียงระเบิดต่อ

2	2	X	X	1
---	---	---	---	---

Figure 1: เมื่อเก็บกู้ระเบิดในช่องที่สองที่มีอำนาจ 2 ช่วง หลังจากเก็บกู้ ระเบิดในช่องที่สามและช่องที่สี่จะถูกทำลายไปด้วย แต่ระเบิดในช่องแรกจะไม่ได้รับผลกระทบ

สมมติว่าน้อง ๆ รับผิดชอบเส้นทางเป็นลำดับจำนวน 10 ช่วง (ช่วงละ 1 ตารางเมตร) แต่ละช่วงมีระเบิดอำนาจตามนี้ (อำนาจคือระยะที่ระเบิดลูกนั้น ๆ สามารถทำลายล้างเพิ่มจากตำแหน่งที่ระเบิดลูกนั้นถูกติดตั้ง)

- ช่วงที่หนึ่ง มีระเบิดอำนาจ 2 ช่วง
- ช่วงที่สอง มีระเบิดอำนาจ 1 ช่วง
- ช่วงที่สาม มีระเบิดอำนาจ 3 ช่วง
- ช่วงที่สี่ มีระเบิดอำนาจ 2 ช่วง
- ช่วงที่ห้า มีระเบิดอำนาจ 1 ช่วง
- ช่วงที่หก มีระเบิดอำนาจ 4 ช่วง
- ช่วงที่เจ็ด มีระเบิดอำนาจ 1 ช่วง
- ช่วงที่แปด มีระเบิดอำนาจ 4 ช่วง
- ช่วงที่เก้า มีระเบิดอำนาจ 2 ช่วง
- ช่วงที่สิบ มีระเบิดอำนาจ 1 ช่วง

สังเกตได้ว่า ถ้าจะเก็บทุกระเบิดให้ได้พื้นที่ที่ถูกเก็บมากที่สุด นับรวมระยะที่ยื่นนอกเหนือความรับผิดชอบด้วยหากระเบิดลูกที่ทำลายมีอาณาภาพไกลออกไป ต้องเก็บระเบิดตำแหน่งที่ 1 (ระยะทำลาย 3: พื้นที่ที่ระเบิดถูกติดตั้ง + ระยะอาณาภาพ), ตำแหน่งที่ 4 (ระยะทำลาย 3) และตำแหน่งที่ 8 (ระยะทำลาย 5) (ไม่จำเป็นต้องใช้ชุดเก็บทุกระเบิดทั้ง 4 ชุด และสามารถที่จะเลือกข้ามการเก็บระเบิดบางลูกได้) จะได้ผลรวมพื้นที่ที่เก็บได้เท่ากับ 11 ตารางเมตร

2	1	3	2	1	4	1	4	2	1	1	
x	x	x	x	x	x	1	x	x	x	x	x

Figure 2: การเก็บทุกระเบิดให้ได้พื้นที่ที่ถูกเก็บรวมมากที่สุด

งานของนักศึกษา

จงหาว่าถ้าเส้นทางที่น้องต้องเก็บทุกระเบิดมีระยะทาง n ช่วง แต่ละช่วงมีระเบิดอาณาภาพ B_1, B_2, \dots, B_n ช่วง **พื้นที่ที่มากที่สุดที่สามารถเก็บทุกระเบิดได้** จะมีพื้นที่เท่าใด โดยผู้บังคับบัญชากองทัพบกประกันว่าเส้นทางที่น้องได้รับมอบหมายจะสามารถใช้ชุดเก็บทุกระเบิดเท่าไรก็ได้

ข้อมูลนำเข้า (Input)

บรรทัด 1	จำนวนเต็ม n แสดงจำนวนช่วงที่ต้องเก็บทุกระเบิด
บรรทัด 2	จำนวนเต็ม n จำนวน B_1, B_2, \dots, B_n (แต่ละตัวคั่นด้วยช่องว่างหนึ่งตัว) แสดงอาณาภาพของระเบิดในแต่ละช่วง ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ≥ 0

ข้อมูลส่งออก (Output)

บรรทัด 1	พื้นที่ที่มากที่สุดที่สามารถเก็บทุกระเบิดได้
----------	----------------------------------------------

ตัวอย่างข้อมูลนำเข้า ส่งออก (Examples of Input & Output)

Input	Output
10 2 1 3 2 1 4 1 4 2 1	11
8 1 1 1 1 1 1 1 1	8
13 4 5 3 6 2 7 3 5 4 6 2 4 1	14
15 2 3 2 4 2 2 2 5 2 6 2 3 2 4 2	17