Week1习题课讲义

Penghao Kuang

线性方程组解的意义（空间视角）

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 10, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= -24, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 &= 8. \end{aligned}$$

$3x_1+x_2+x_3=10$：空间中的平面
有解：存在点同时落在以上三个平面中
即：只要是三个平面共同相交的部分，所有交点即为解

高斯消元的设计动机（代数视角）

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7, \\ -3x_2 - 5x_3 &= 12, \\ 4x_3 &= 8. \end{aligned}$$

上面是期望看到的形式。（能够分离$x_1x_2x_3$）（高斯消元第二阶段）
如何转化成阶梯型？（高斯消元第一阶段）（逐个击破）

涉及的都是初等变换。

Q：为何这些初等变换合理？
1.$x_1+x_2+x_3=1$
2.$2x_1+3x_2+4x_3=5$

更改方程2:
x_2+2x_3=$(2x_1+3x_2+4x_3=5)+(-2)(x_1+x_2+x_3=1)=3$

判断依据：交线是否改变。

代数验证：

- 交线上的点如果能使得原方程组成立，则一定能使新的方程组成立
- 交线上的点如果不能使原方程组成立，则一定不能使新的方程组成立⇒交线上的点如果能使新方程组成立，则一定能使原方程组成立（证逆否命题）（证明if P $\Rightarrow$ Q等于证明if not Q $\Rightarrow$ not P ）

可证交线不改变⇒空间上理解为：更改后的方程在空间上仅仅绕着交线做了旋转，对于交线的求解没有任何影响

扩展：研究对象可能为更高维空间

初等变换收尾（空间视角）

1、2型初等变换（交换位置&倍数相加）

- 交换位置不影响两相交向量空间的相交情况
- 倍数相加不影响两相交空间的交空间

有解性与解空间理解（代数与几何视角）

- 下面三个阶梯形方程组分别有唯一解，无数解，没有解。

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7, \\ -3x_2 - 5x_3 &= 12, \\ 4x_3 &= 8. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7, \\ -3x_2 - 5x_3 &= 12. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7, \\ -3x_2 - 5x_3 &= 12, \\ 0x_3 &= 8. \end{aligned} \tag{3}$$

代数理解：自由元素数量

（1）：未约束时：$x_1x_2x_3$均自由取值

约束后：均可转化成固定值

（2）：约束后：

$x_1 + ax_3 = a'$

$x_2 + bx_3 = b'$

即：一旦x_3确定，则x_1, x_2均能被确定。但x_3无法确定，则x_1x_2均随x_3取值出现无穷多可能。

解为一个参数方程：

$x_1 = a' - at$

$x_2 = b' - bt$

$x_3 = t$

一维空间。

（3）：约束后：无解

（主未知元、自由变量）

$$
\begin{array}{llllll}
g_{11}x_1+ & \dots & & +g_{1n}x_n & = h_1, \\
 & g_{2k}x_k+\dots & & +g_{2n}x_n & = h_2, \\
 & & g_{3l}x_l & +\dots+g_{3n}x_n & = h_3, \\
 & & & \dots\dots & \\
 & & & g_{rs}x_s+\dots+g_{rn}x_n & = h_r, \\
 & & & 0 & = h_{r+1}, \\
 & & & \dots\dots & \\
 & & & 0 & = h_m,
\end{array}
$$

命题

(1) 方程组有解当且仅当 $h_{r+1} = \cdots = h_m = 0$. (注意如果 $r = m$, 这一条件是自动满足的.)
(2) 该方程组有唯一解当且仅当 $r = n$, 且 $h_{r+1} = \cdots = h_m = 0$.
(3) 该方程组有很多 (其实是无数多) 解当且仅当 $r < n$ 且 $h_{r+1} = \cdots = h_m = 0$.

空间理解1：为何出现0=非零h_m

方程组：

$x_1 + x_2 = 1$

$2x_1 + 3x_2 = 4$

$3x_1 + 4x_2 = 6$

12初等变换：$x_2 = 2$（旋转至有一元不再起作用）

13初等变换：$x_2 = 3$

23初等变换：$0 = 1$

即：两个空间不再存在交空间，已经不符合“沿交空间旋转”的前提

空间理解2：自由变量的减少&解空间的降维

- 下面三个阶梯形方程组分别有唯一解，无数解，没有解。

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7, \\
-3x_2 - 5x_3 &= 12, \\
4x_3 &= 8.
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7, \\
-3x_2 - 5x_3 &= 12.
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7, \\
-3x_2 - 5x_3 &= 12, \\
0x_3 &= 8.
\end{aligned} \tag{3}
$$

（1）方程组：每一个方程都带来了解空间的有效约束，每一次有效约束都导致解空间维度下降1，直至下降到0维，即唯一解

（2）方程组：每一个方程都带来了解空间的有效约束，每一次有效约束都导致解空间维度下降1，直至下降到一维。所以有一个自由变量，所有解在空间上形成一维子空间。

方程组：

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7$

$-3x_2 - 5x_3 = 12$

$3x_1 + x_2 - 3x_3 = 19$（前两个方程线性组合）

即：第三个方程无法对已形成的交线再形成有效约束，而是囊括了交线的内容（阶梯型中0=0的由来）

推论：有解时：每个方程可能降1或0维。

齐次方程组

定理

1. 如果 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 和 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 是齐次方程组的两个解, 那么对于任意的数 a, b, 数组 $a\xi_1 + b\eta_1, \ldots, a\xi_n + b\eta_n$ 也是齐次方程组的解.
2. 如果 $s_1, \ldots, s_n$ 和 $t_1, \ldots, t_n$ 是一个线性方程组的两个解, 那么 $s_1 - t_1, \ldots, s_n - t_n$ 是对应齐次方程组的解.
3. 假设 $s_1, \ldots, s_n$ 是一个线性方程组的一个解, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 是对应齐次方程组的一个解, 那么 $s_1 + \xi_1, \ldots, s_n + \xi_n$ 是该线性方程组的一个解.
4. 如果齐次方程组中方程的数量少于未知元的数量, 即 $m < n$, 那么齐次方程组有非零解.

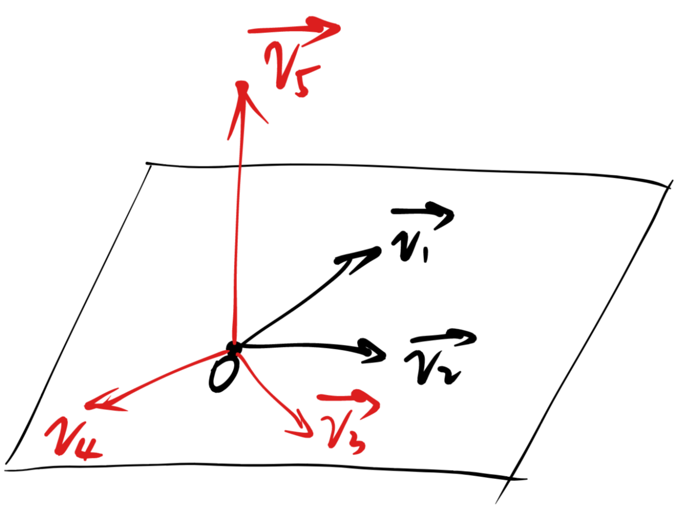
定理0：一定有解（不存在0=非零h_m，各约束空间至少交于原点）
定理4：解不为0维：包含非零解
定理123：自己复习

增广矩阵求解高斯消元&二三阶行列式与方程的解

自己复习

向量空间

PS：什么是向量？⇒任何事物的定量表征方式（例如n维空间中点的坐标，用n维向量表征）⇒空间视角的描述工具是向量，代数视角的描述工具是方程



Ex1:向量空间中的任何向量都由已有向量通过线性组合张成（v3 v4向量，直至该二维空间中所有向量）。
Ex2:向量空间中任何向量可以有特定几个向量承担全部的张成任务（仅通过v1 v2，就可以生成该二维空间中所有向量）
Ex3:线性子空间小于等于R^n向量空间。想象该平面为三维空间中平面（v均为三维表征），则子空间为2维，无法表征v_5

线性相关与无关

Ex1:只有v1向量：只能张成一个一维空间
Ex2:只有v2向量：能长成一个二维空间；v1 v2之间不可通过线性运算互相表示（v1 v2向量集合线性无关）
Ex3:依次加上v3 v4向量：v3能被v1 v2线性组合，v4能被v1v2/v1v2v3线性组合表示。仍是只能张成二维空间。(向量集合线性相关)
⇒公式推导：推导为线性相关的定义式：a1x1+a2x2+a3x3+a4x4=0，(a1,a2,a3,a4)的解不全为0
Ex4:在v1 v2基础上再加v5：都不存在其中一个向量能被另外两个向量相互表示；能长成三维空间。

通俗理解：线性相关：集合中存在向量能被其他向量表示⇒对于表示空间张成没有作用；线性无关：没有任何一个向量能被其他向量线性表示⇒能够张成一个新的维度

Ex_Final：转向代数视角（方程）（解空间）
$x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$
$x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$
$x_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33})$
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \Rightarrow$
$x_{11}a_1 + x_{21}a_2 + x_{31}a_3 = 0$
$x_{12}a_1 + x_{22}a_2 + x_{32}a_3 = 0$
$x_{13}a_1 + x_{23}a_2 + x_{33}a_3 = 0$

若x_3不能被x_1x_2线性表示：齐次方程仅有0解
若线性相关？$x_3 = c_1x_1 + c_2x_2 \ldots\ldots$