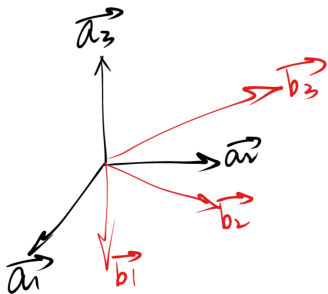


# Week7 习题课讲义

Topic: 换基/换坐标问题与变换可逆性、行列式性质的串讲

## A=BS问题

Problem: 三维空间中向量  $\vec{v} = x_{a1}\vec{a}_1 + x_{a2}\vec{a}_2 + x_{a3}\vec{a}_3$ 。如何将其表示成  $\vec{v} = x_{b1}\vec{b}_1 + x_{b2}\vec{b}_2 + x_{b3}\vec{b}_3$  的形式? (如何求出  $\text{vec}\{b_i\}$  的各系数?)



向量组  $\vec{b}$  也是相同向量空间中的一组基向量

⇒ 任何一个  $\vec{a}_i$  向量, 都可以用  $\vec{b}_i$  表示 (此处和可逆性关联)

⇒  $\vec{v} = x_{a1}(s_{11}\vec{b}_1 + s_{12}\vec{b}_2 + s_{13}\vec{b}_3) + x_{a2}(s_{21}\vec{b}_1 + s_{22}\vec{b}_2 + s_{23}\vec{b}_3) + x_{a3}(s_{31}\vec{b}_1 + s_{32}\vec{b}_2 + s_{33}\vec{b}_3)$

写成矩阵形式:

$$\vec{v} = [\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3] [\vec{s}_1 \vec{s}_2 \vec{s}_3] \vec{x}_a$$

其中:  $\vec{s}_i = [s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in}]$ , 代表单个  $\vec{a}_i$  向  $\vec{b}$  向量组的分拆方法

⇒  $\vec{v} = A\vec{x}_a$  (原先的基向量组和基向量坐标)

=  $BS\vec{x}_a$  (变化后的基向量组、描述  $\vec{a}$  拆解成  $\vec{b}$  的矩阵、原先的基向量坐标)

### 如何理解 $A = BS$ ?

回顾矩阵乘法的本质: 左矩阵的各列向量做线性组合 ⇒  $B$  矩阵的每一列  $\vec{b}_i$  向量做  $n$  种线性组合。第  $i$  种线性组合的系数即为  $S$  矩阵的第  $i$  列。即为  $\vec{a}_i$  拆解成各个  $\vec{b}$  的系数。

### 如何理解 $A\vec{x}_a = BS\vec{x}_a$ ?

重新表示:  $A\vec{x}_a = BS\vec{x}_a = B\vec{x}_b$

$\vec{x}_b$  即为  $B$  坐标系下的坐标向量!

### $\vec{x}_a$ 和 $\vec{x}_b$ 的关系?

$$\vec{x}_b = S\vec{x}_a$$

符合直觉的事实: 只要一个向量在原坐标系  $A$  中拥有唯一坐标, 该向量在新坐标系  $B$  中仍然拥有唯一坐标

⇒  $S$  即为坐标向量之间的一一映射!

⇒ 另一个符合直觉的事实：只要一个向量在新坐标系B中拥有唯一坐标，则在原坐标系A中也一定拥有唯一坐标

⇒ 假如我们知道 $\vec{x}_b$ ，我们是不是也可以推导出 $\vec{x}_a$ ？（Problem \*）

## B=AT问题及可逆推导

我们试图从两种方向解决Problem \*

**方向1：**

$$\vec{x}_b = S\vec{x}_a$$

S是否可逆？

⇒ 如果S不可逆，即S中存在列向量是线性相关的：

$\vec{s}_i = \lambda \vec{s}_j$ ： $\vec{a}_i$ 向 $\vec{b}$ 向量组的分拆方法，与 $\vec{a}_j$ 向 $\vec{b}$ 向量组的分拆方法线性相关，即： $\vec{a}_i$ 与 $\vec{a}_j$ 线性相关（原基向量组存在两个共线的基向量），显然是错误的

⇒ S可逆！

所以这种变换法则S存在逆变换 $S^{-1}$

变换法则S代表从A向量组坐标向B向量组坐标的变换.....

$S^{-1}$ 是什么变换？

⇒ B向量组坐标向A向量组坐标的变换！

$$\text{即：}\vec{x}_a = S^{-1}\vec{x}_b$$

**方向2：** 课本上对于 $B = AT$ 的推导。

这种推导的思路与 $A = BS$ 的推导完全一致：一个 $\vec{b}_i$ ，能怎么分拆成A向量组的线性组合。

根据之前的推导，我们也很容易用同样的方法推出： $\vec{x}_a = T\vec{x}_b$

**方向1、2的综合考虑：**

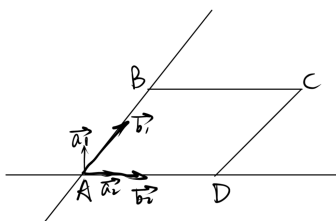
$$\vec{x}_a = S^{-1}\vec{x}_b$$

$$\vec{x}_a = T\vec{x}_b$$

即：推导出的T其实就是S的逆变换！

## 可逆性与行列式性质的关系

在没有平行四边形面积公式，只知道ABCD四点在直角坐标系下坐标 $\vec{x}_a$ 的情况下，如何求出平行四边形ABCD的面积？



法一：在直角坐标系a下使用微积分（二重积分）计算

法二：平行四边形在坐标系b下的坐标为 $(x_{b1}, x_{b2})$ ，可通过换坐标系操作由a坐标系坐标 $\vec{x}_a$ 求出。

我们只需知道b坐标系下(1,1)围成的图形面积，再缩放 $x_{b1} * x_{b2}$ 倍即可。

“b坐标系下(1,1)围成的图形面积”？

$\vec{x}_a = T\vec{x}_b$ ，即可求出 $\vec{x}_a = T(1, 1)$ （此时T为二维矩阵）

⇒ b坐标系下(1,1)围成的图形面积即为a坐标系下T(1,1)围成的图形面积

⇒ 即为T的行列式的绝对值

Summary:

- T矩阵本身表征了坐标系的变换规则
- ⇒ 确定了新坐标系下的坐标情况，即可推断原坐标系下的坐标情况
- T矩阵的行列式表征了坐标系变换对于尺度的伸缩情况
- ⇒ 确定了新坐标系下的相对尺度大小，即可推断原坐标系下的相对尺度大小。即：只要知道其中某个坐标系下1单位“相对尺度大小”的绝对数值，即可推出绝对数值情况（这在大一下学习的二、三重积分计算、大二学习的概率论随机变量替换问题中都会继续应用）

## 方阵可逆相关的触发性质总结

前提：变换法则T是可逆的.....

如果不可逆？

- 向量组A能张成2维空间，向量组B的两基向量共线⇒仅能张成1维空间
- 对于方阵T， $\text{rank}(T)=1$
- 方阵T代表的变换无法维护变换前后空间维数的恒定
- 方阵T无法表征一个一一映射（一整维的向量全部压缩到一点，无法反向映射，这直接对应了“不可逆”的直观意义）
- 行列式为0（压缩到了一起）

