Week4习题课讲义

Outline

- 线性映射的直观理解
- 矩阵的本质、矩阵乘法运算及与线性映射、秩的关联（重点、难点）
- 矩阵加法的理解
- 分块矩阵运算推导与矩阵本质的关联

线性映射

$\phi(\vec{a}+\vec{b})=\phi(\vec{a})+\phi(\vec{b})$
$\phi(\lambda\vec{a})=\lambda\phi(\vec{a})$

考虑两种1维映射：$y=kx, y=kx^3$
令$\Delta=x_2-x_1$
$y_\Delta=k\Delta$
$y_\Delta=k\Delta*(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$
线性变换：Δ相同时，映射值的相差量不会受具体坐标位置产生扭曲（如二次函数正负发生颠倒）或缩放（如三次函数）

$\vec{y}=A\vec{x}$(线性变换)
令$\vec{\Delta}=\vec{x_2}-\vec{x_1}$
$\vec{y_\Delta}=A\vec{x_2}-A\vec{x_1}$
由线性变换的定义：
$=A(\vec{x_2})+A(-\vec{x_1})$
$=A(\vec{x_2}-\vec{x_1})$
$=A\vec{\Delta}$，映射值的相差量同样不会受具体坐标位置产生扭曲或缩放

空间上的演示

1.降维操作
矩阵为$[2,1]$，向量为$[0,0][1,1][2,2]$

2.升维操作
矩阵为

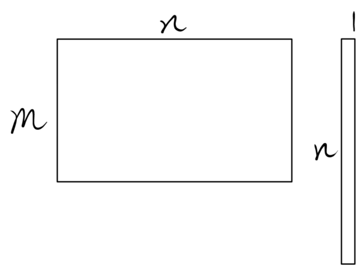
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(矩阵的rank是多少？对应了张成子空间的维数是多少？是什么形状？)
向量为$[0,0][1,1][2,2]$

矩阵乘法

- 线性变换的空间上意义（几何意义）
- 描述线性变换的代数工具是矩阵$\Longleftarrow\Longrightarrow$描述向量空间的代数工具是方程组

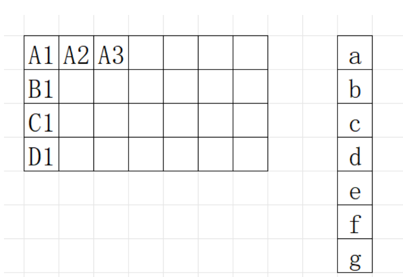
考虑$A\vec{x}$：



- 理解方式1：向量数量积的匹配运算（从A矩阵各行的角度出发）

此时A矩阵的每一行都作为独立的向量存在，为向量数量积的一部分$\Rightarrow$矩阵此时的本质是各行向量的机械拼接

- 理解方式2：各列向量的线性组合（从$\vec{x}$各元素的角度出发）



运算结果第一行：aA1+bA2+cA3+……
运算结果第二行：aB1+bB2+cB3+……
运算结果第三行：aC1+bC2+cC3+……
运算结果第四行：aD1+bD2+cD3+……

重组运算结果：
$a\vec{a}_1+b\vec{a}_2+\ldots\ldots+g\vec{a}_7$

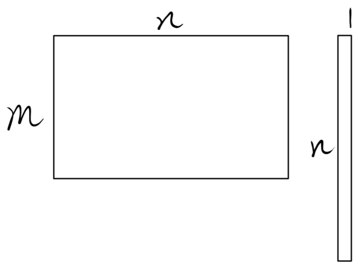
即：矩阵乘法实际上是A矩阵各列向量的线性组合。列向量的系数取决于$\vec{x}$的各元素

此时A矩阵的每一列都作为独立的向量存在，为向量组线性组合运算的其中一个向量⇒矩阵此时的本质是各列向量的机械拼接

矩阵的本质：行层面或列层面上若干向量的机械拼接。各向量之间独立，不产生任何相互关系⇒若为行向量的拼接，则增删其中的若干行向量，造成的影响仅仅为机械增删运算对象带来的影响，而其他运算对象不受任何牵连。

思考：矩阵乘法的本质为线性组合⇒线性组合张成一个向量空间⇒

- 张成的向量空间有几维？
- 如何用矩阵乘法描述这个空间？
- 如果$\vec{x}$确定，则运算结果的几何意义是什么？

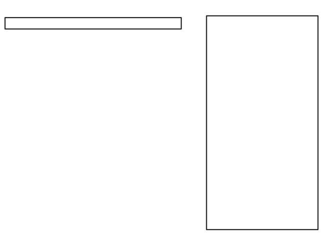


rankA即为：A的列向量能够张成向量空间的维数（穷尽所有$\vec{x}$取值所能张成的极限）

$\vec{x}$取若干值，与A相乘得到若干向量。⇒将这些若干$\vec{x}$取值拼接？

⇒右矩阵B仍是一系列向量的机械拼接！

运算结果为一个矩阵（若干列向量的机械拼接），rank的上限为rankA（取得较好：正好能张成rankA；取得不好：如全部线性相关）。但与B矩阵rank的关系？



考虑A矩阵的最简情况（A向量）：此时运算结果即为A向量中每个元素对B的行向量做线性组合。

即：B矩阵各行向量张成空间的维度？若A向量也取若干个特殊值拼接成一个矩阵？

双上限：rankA rankB。

总结：

- 矩阵*矩阵的本质是矩阵*向量结果的机械拼接

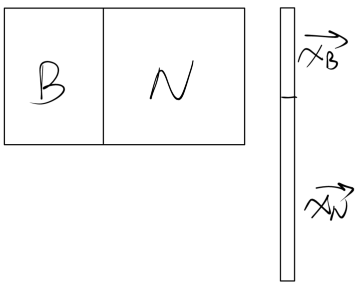
- 矩阵*向量的本质是向量组的线性组合，这里的矩阵也是此处“向量组”的机械拼接

矩阵加法

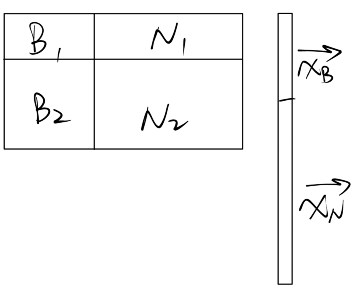
符合直觉。但为何合理?

$(A+B)\vec{x}$：写成线性组合形式?
$A\vec{x}+B\vec{x}$：写成线性组合形式?
期望二者相等，才能符合线性变换的分配率。

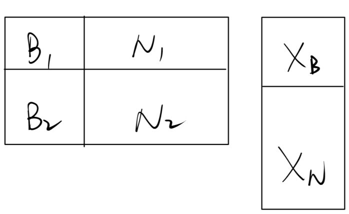
分块矩阵



令列向量线性组合运算为L。则运算结果为：
$L(B)+L(N)=B\vec{x_B}+N\vec{x_N}$



仅有的区别：$L(B)$中的B，每个向量表示为上下两部分的拼接形式。N同理。
则结果为：
$\begin{bmatrix} B_1\vec{x_B} \\ B_2\vec{x_B} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} N_1\vec{x_N} \\ N_2\vec{x_N} \end{bmatrix}$
（仍是单个列向量）
等效于$B\vec{x_B}+N\vec{x_N}$



若有多个$\vec{x}$?

机械拼接。运算结果的各列向量为：

（$\begin{bmatrix} B_1\vec{x_{1B}} \\ B_2\vec{x_{1B}} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} N_1\vec{x_{1N}} \\ N_2\vec{x_{1N}} \end{bmatrix}$），（$\begin{bmatrix} B_1\vec{x_{2B}} \\ B_2\vec{x_{2B}} \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} N_1\vec{x_{2N}} \\ N_2\vec{x_{2N}} \end{bmatrix}$），……

写为：

$\begin{bmatrix} B_1X_B \\ B_2X_B \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} N_1X_N \\ N_2X_N \end{bmatrix}$