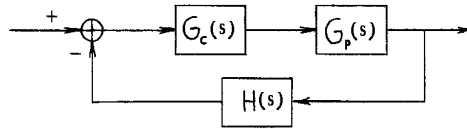


1	Introducció	2
1.1	Sistemes de control digital	2
2	El model matemàtic	3
2.1	Representació matemàtica del senyal $f(t)$ a l'interior del computador	3
2.2	Diverses expressions de $f^*(t)$ i de $F^*(s)$	4
2.3	Algunes propietats de $F^*(s)$	5
2.4	La transformada de Fourier	7
2.5	Teorema del mostreig	8
2.6	Reconstrucció de senyals mostrejats	10
2.7	Transformada $z$	12
2.8	Correspondència entre els plans $s$ i $z$	14
2.9	Propietats de la transformada $z$	15
2.10	Obtenció de transformades $z$	18
2.11	Transformada $z$ inversa	19
2.12	Transmitància discreta	21
2.13	Retard pur	24
2.14	Impuls discret i resposta impulsional discreta	24
2.15	Transmitància discreta i algorismes	25
2.16	Realitzabilitat física	25
2.17	Convertidors A/D i D/A	26
2.18	Manipulació de blocs de sistemes de temps discret	30
3	Anàlisi	35
3.1	Estudi del comportament d'un model discret en termes del d'un de continu	35
3.2	Estabilitat	44
3.3	Error permanent	46
3.4	Lloc geomètric de les arrels (l.g.a.)	51
3.5	Resposta freqüencial	59
3.6	Guany en contínua	60
3.7	Diagrama de Bode. Transformació bilineal	60
3.8	Criteri de Nyquist	62
4	Disseny	65
4.1	Controladors digitals i algorismes de control	65
4.2	Disseny de sistemes digitals de control	65
4.3	Controladors PID digitals	66
4.4	Disseny de compensadors per avançament o per retard de fase mitjançant la transformació bilineal	68
4.5	Disseny de compensadors per avançament o per retard de fase pel l.g.a.	70
4.6	Disseny de PI i PD pel l.g.a.	78
5	Implementació	87
5.1	Estructura dels controladors	87
5.2	Efectes de l'aritmètica finita sobre els pols	87
6	Apendixs	94
6.1	Pols $z$ reals i negatius	94
6.2	Gràfics	94
6.3	L'alfabet grec.	96

# 1 Introducció

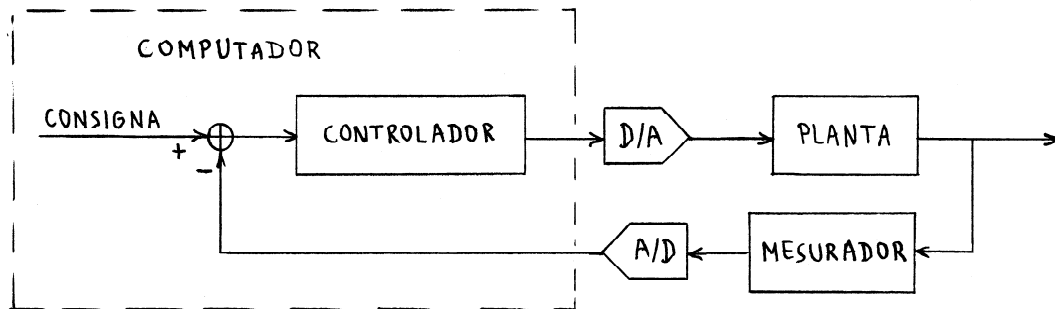
## 1.1 Sistemes de control digital

Recordem un sistema de control



El controlador  $G_c(s)$  reb el senyal d'error, diferència entre la consigna (el valor desitjat de la sortida) i el valor de la sortida real (mesurat per  $H(s)$ ), i genera el senyal de control que s'aplica a la planta controlada,  $G_p(s)$ .

En un sistema de control amb computador, les funcions del controlador les fa el computador. L'estructura usual és aquesta:



Per a fer les seves funcions de controlador el computador haurà de rebre informació de la sortida de la planta controlada per a comparar-la amb la consigna (generada internament en el cas de la figura). Això vol dir que cal convertir el senyal generat per l'aparell de mesura (usualment una tensió elèctrica) en una seqüència de nombres. Això ho fa un convertidor analògic-digital (A/D). Les manipulacions del senyal d'error que en el controlador de temps continu feia  $G_c(s)$ , ara les farà el computador: en el computador correrà un algorisme que a partir dels nombres que vagi rebent del A/D i de la consigna, generarà uns altres nombres que seqüenciats representaran el senyal de sortida del controlador. Per a poder aplicar aquest senyal a la planta, caldrà un convertidor digital-analògic (D/A) que converteixi la seqüència de nombres generada per l'algorisme en alguna magnitud física aplicable a la planta (generalment serà una tensió elèctrica).

Veiem, doncs, que:

- El senyals de tipus  $f(t)$  que circulen per l'exterior del computador s'han de convertir en nombres i viceversa.

- La funció de control la fa un algorisme.

Això vol dir que

- Dissenyar un controlador voldrà dir dissenyar un algorisme.

- Caldrà veure de quina manera els nombres poden representar els senyals exteriors a l'interior del computador.

- Caldrà generar un model matemàtic que pugui representar tant els senyals exteriors al computador, com els nombres interiors i les corresponents interaccions.

- Caldrà proveir-se d'eines de treball per aquest nou entorn.

## 2 El model matemàtic

### 2.1 Representació matemàtica del senyal $f(t)$ a l'interior del computador

El convertidor A/D transforma el senyal aplicat a la seva entrada,  $f(t)$ , en una seqüència de nombres

$$\{f(0), f(T), f(2T), \dots\} = \{f(kT)\}$$

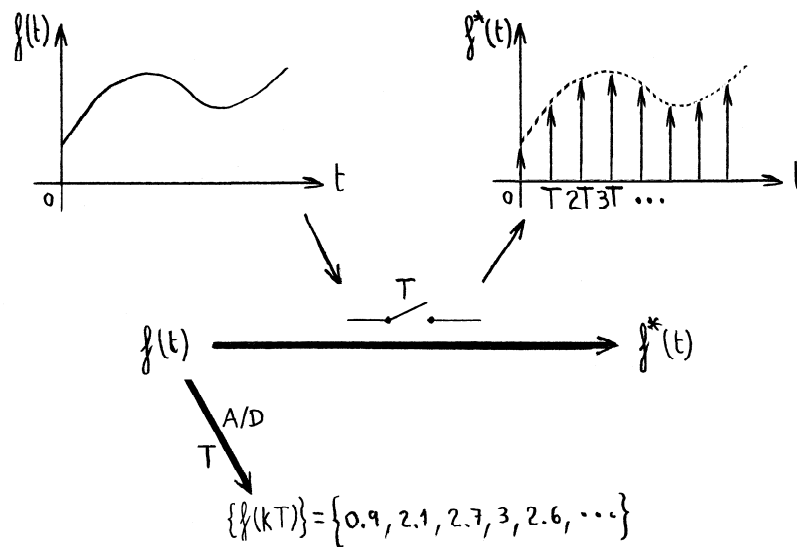
corresponents al valor que té el senyal cada  $T$  unitats de temps. Aquests nombres un cop generats no tenen indicació de l'instant de temps en que van ser generats (per exemple, si  $f(5T) = 3$ , el 3, per si sol, no indica a quin instant ha estat generat). Això pot ser que no sigui un problema per a altres tasques computacionals, però en el nostre cas, per a poder controlar el sistema i per a dissenyar l'algorisme de control, volem que els nombres representin un senyal en el temps. Cal, doncs, que aquesta informació hi sigui en el model matemàtic que farem servir durant aquest disseny.

Prescindirem de com els nombres estiguin físicament representats en el computador (una sèrie de tensions altes o baixes representant els bits), i farem el següent artificio: matemàticament representarem el convertidor A/D amb el que s'en diu un *mostrejador ideal*,



Aquesta eina, d'existència solament matemàtica, per definició converteix el senyal  $f(t)$  aplicat a la seva entrada en el senyal  $f^*(t)$

$$f^*(t) = f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t - T) + f(2T)\delta(t - 2T) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$$

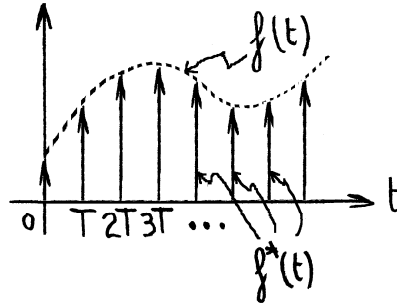


Notem que  $f^*(t)$  és una funció del temps, i que associa cada nombre  $f(kT)$  amb l'instant  $t = kT$  en que es va obtenir com a mostra de  $f(t)$ .

Més endavant veurem que cal per a que  $f^*(t)$  sigui una representació correcta de  $f(t)$ .

## 2.2 Diverses expressions de $f^*(t)$ i de $F^*(s)$

Hem vist que la successió de nombres que entren al computador la representem amb un tren d'impulsos,  $f^*(t)$ . Anem a trobar tres expressions per a  $f^*(t)$  i dues per a la seva transformada de Laplace,  $F^*(s)$ , que anirem fent servir al llarg de l'assignatura.



Tenim que

$$\begin{aligned} f^*(t) &= f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t-T) + f(2T)\delta(t-2T) + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t-kT) \end{aligned}$$

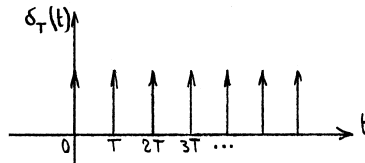
De

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

obtenim directament

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

Si definim el tren d'impulsos



com

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$$

resulta que el mostrejador ideal es pot interpretar com un modulador de la portadora  $\delta_T(t)$  pel senyal  $f(t)$ . És a dir

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

Això ens permetrà obtenir un altre parell d'expressions.

El desenvolupament en sèrie de Fourier de  $\delta_T(t)$  és

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t}$$

amb

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

i

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

és a dir

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}$$

i, en conseqüència

$$f^*(s) = f(t) \cdot \delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) e^{jn\omega_s t}$$

d'on, per Laplace

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s)$$

Recopilem:

$$f^*(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \\ \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \delta(t - kT) \\ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) e^{jn\omega_s t} \end{cases} \quad F^*(s) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} \\ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \end{cases}$$

### 2.3 Algunes propietats de $F^*(s)$

$F^*(s)$  a part de les propietats generals de les transformades de Laplace, pel fet de ser la transformada d'una funció mostrejada té algunes propietats addicionals. Vegem-ne dues.

1 -  $F^*(s)$  és periòdica en el pla complex, de període  $j\omega_s$ .

Efectivament

$$F^*(s + jm\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kT(s + jm\omega_s)}$$

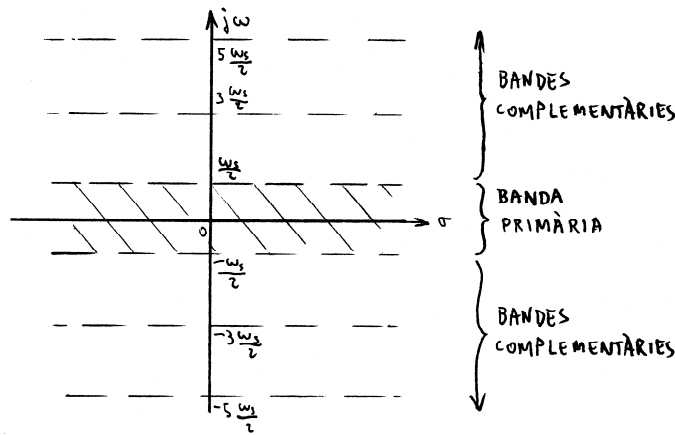
però com que

$$e^{-jkTm\omega_s} = e^{-jkTm\frac{2\pi}{T}} = e^{-jkm2\pi} = 1$$

queda

$$F^*(s + jm\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} = F^*(s)$$

La zona d'un període centrada a l'origen s'anomena banda primària. Les altres, bandes complementàries. Notem que la situació d'aquestes bandes no depèn de  $F(s)$ , sols depèn de  $\omega_s$ .



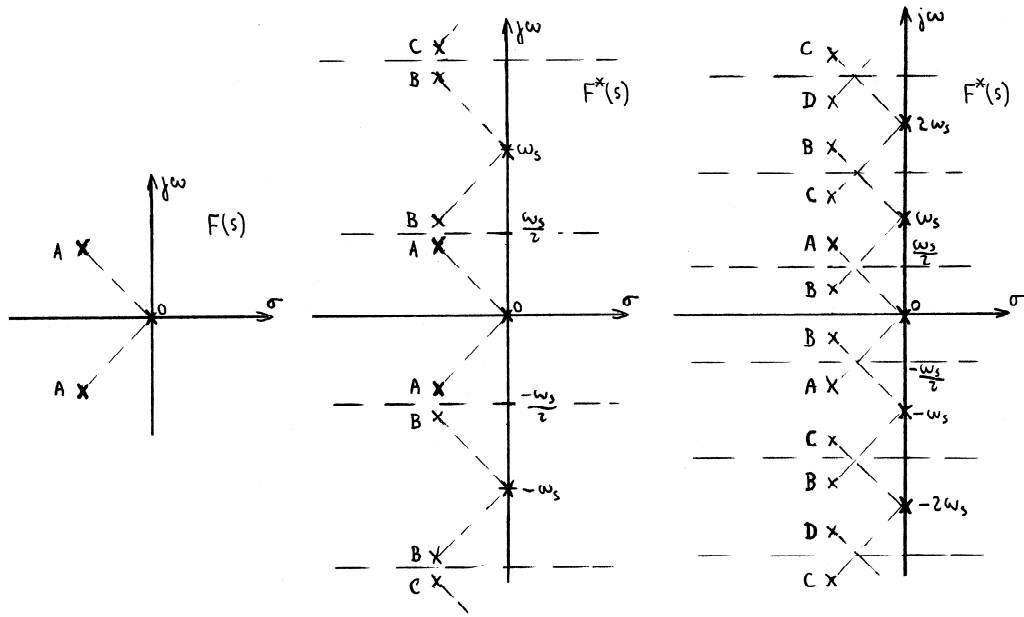
2 - Si  $F(s)$  té un pol a  $s = s_1$ ,  $F^*(s)$  té pols a  $s_1 \pm jm\omega_s$  per a tot  $m$  enter. Vegem-ho. Com que

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s)$$

si  $F(s)$  té un pol a  $s = s_1$ , el sumand corresponent a  $n = 0$  es fa infinit, i la suma  $F^*(s)$  també, i els altres sumands no canviaran pas aquest fet. És a dir que  $F^*(s)$  té un pol a  $s = s_1$ . I com que  $F^*(s)$  és periòdica de període  $j\omega_s$ , també tindrà pols a  $s_1 \pm jm\omega_s$ .

Notem que no passa el mateix amb els zeros. Que  $F(s_1) = 0$ , no vol pas dir que els altres sumands de  $F^*(s)$  s'anul·lin.

Suposem que  $F(s)$  (figura de l'esquerra) té un parell de pols complexos conjugats  $\sigma_A \pm j\omega_A$  i un pol a l'origen. En mostrejar-la a una freqüència correcte, que com veurem més endavant (teorema del mostreig, pàgina 8) implica que  $\omega_s \geq 2\omega_A$ , la  $F^*(s)$  resultant tindrà l'aspecte de la figura del centre, a on s'han unit els tres pols amb línies discontinues per a facilitar-ne la comprensió de la repetició que es produeix.



Si la freqüència de mostreig  $\omega_s$  és incorrecta ( $\omega_s < 2\omega_A$ ), l'aspecte de la  $F^*(s)$  resultant és el de la figura de la dreta. Notem que la repetició  $B$  dels pols s'introdueix a la banda primària, a on el senyal original no en té, de pols complexos.

## 2.4 La transformada de Fourier

Hem vit que per comptes de treballar amb el senyal continu  $f(t)$ , treballarem amb les seves mostres, representades amb  $f^*(t)$ . La pregunta immediata és si aquesta substitució és vàlida, i en quines circumstàncies. Considerarem que és vàlida si a partir de  $f^*(t)$  podem reconstruir  $f(t)$  de manera unívoca. Abans de veure quan serà això cert hem de fer unes consideracions prèvies.

Donat un senyal  $f(t)$ , la transformada de Fourier de  $f(t)$  es defineix com

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

i ens dona el contingut en freqüències del senyal  $f(t)$ .

Podem modificar el contingut de freqüències d'un senyal  $F(j\omega)$  multiplicant-lo per una funció  $H(j\omega)$ , usualment anomenada filtre:

$$Y(j\omega) = F(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

El senyal  $Y(j\omega)$  tindrà les freqüències de  $F(j\omega)$  segons les hagi modificat el filtre  $H(j\omega)$ ; les freqüències  $\omega$  de  $F(j\omega)$  per a les que  $|H(j\omega)| > 1$  seran amplificades, aquelles per a les que  $|H(j\omega)| < 1$  seran atenuades. En particular, aquelles per a les que  $|H(j\omega)| = 0$  no passaran.

Com podem construir un filtre  $H(j\omega)$ ? Vegem que equival a una transmitància  $H(s)$ .

Si recordem la transformada de Laplace de  $f(t)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

veiem que per a senyals  $f(t)$  que valguin zero per a  $t < 0$ , la transformada de Fourier

sembla que es pugui obtenir de la de Laplace fent el canvi

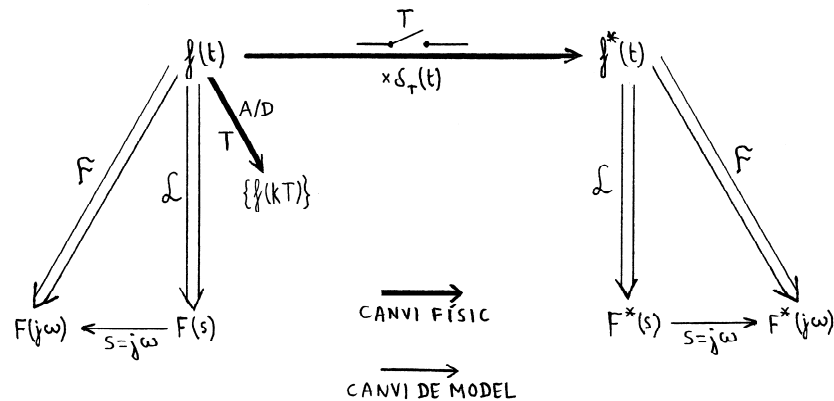
$$s = j\omega$$

Això és veritat en general, però no rigorós. Hi ha casos en que degut a les condicions d'existència de la transformada de Fourier, no serà cert. Però en la majoria de situacions que trobarem, si que es pot fer. Donem-ho com a bo, però amb cura: quan surtin resultats paradoxals, caldrà revisar la situació. Recordem que  $s = j\omega$  és precisament el canvi que fem a  $G(s)$  per a obtenir el seu gràfic de Bode. I recordem també que el gràfic de Bode de  $G(s)$  ens indica les freqüències que deixa passar  $G(s)$ . De fet el gràfic de Bode és una manera de representar la transformada de Fourier. Podem, doncs, considerar la transmitància  $G(s)$  com un filtre  $G(j\omega)$ .

## 2.5 Teorema del mostreig

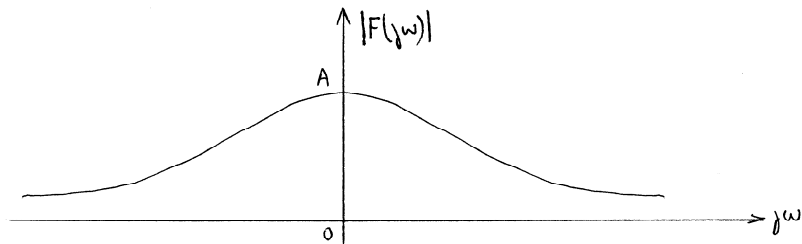
Ara ja estem en condicions de veure si a partir de  $f^*(t)$ , podem reconstruir  $f(t)$  de manera unívoca.

Per analitzar aquesta qüestió, com que hi ha una correspondència biunívoca entre un senyal  $f(t)$  i la seva transformada de Fourier  $F(j\omega)$ , per comptes de treballar amb  $f(t)$  i  $f^*(t)$  treballarem amb les seves transformades de Fourier,  $F(j\omega)$  i  $F^*(j\omega)$ . El fet de si es pot reconstruir  $f(t)$  de manera unívoca a partir de  $f^*(t)$ , es traslladarà a si podem reconstruir unívocament  $F(j\omega)$  a partir de  $F^*(j\omega)$ .



Per a més senzillesa, ens limitarem a estudiar el mòdul de  $F^*(j\omega)$ ; l'argument,  $\angle F^*(j\omega)$  rebria un tractament paral·lel.

Vegem l'aspecte de  $|F^*(j\omega)|$ . Suposem que  $|F(j\omega)|$  sigui el de la figura



Recordant que

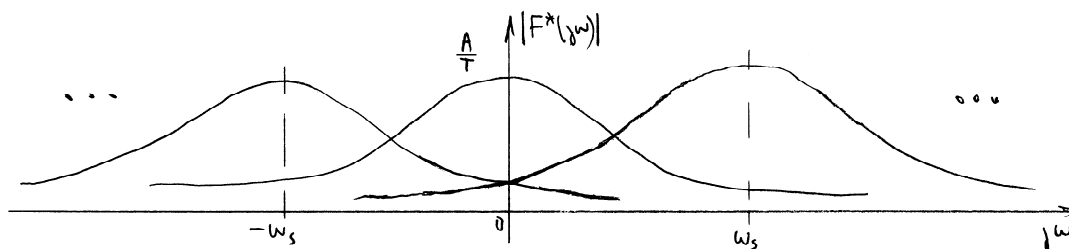
$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s)$$



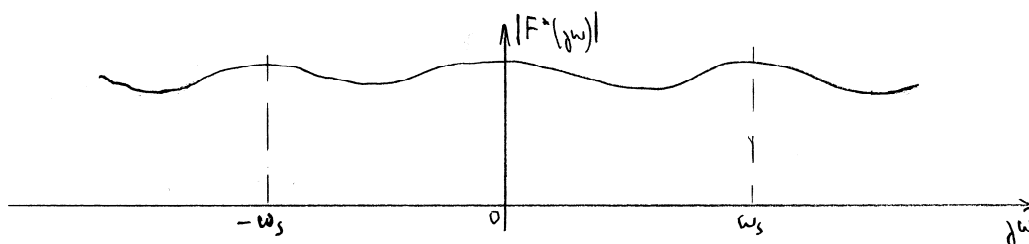
a on  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  rad/s és la freqüència de mostreig, serà

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s)$$

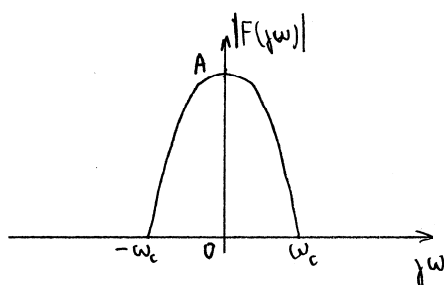
Els mòduls dels infinits sumands de  $F^*(j\omega)$  seran com el  $|F(j\omega)|$  però dividits per  $T$  i decalats com s'indica a la figura



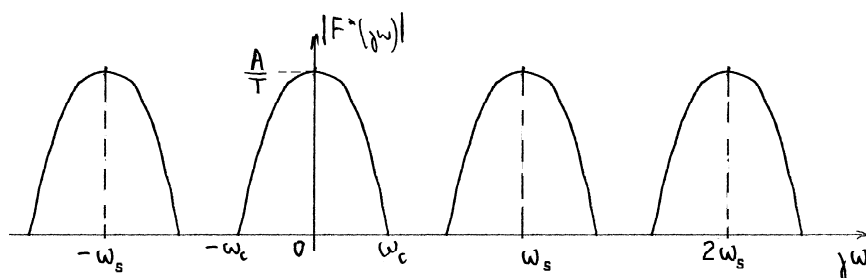
$|F^*(j\omega)|$  s'obtéindrà de la suma vectorial dels  $|F(j\omega)|$ , (cal tenir en compte la fase), i el resultat serà quelcom així



De la figura és clar que no es pot retrobar  $|F(j\omega)|$  a partir de  $|F^*(j\omega)|$ : una suma no determina els seus sumands. Hi haurà algun cas en que sí que es pugui retrobar  $|F(j\omega)|$ ? Afortunadament, si. Vegem aquest altre cas. Si  $f(t)$  és un senyal de banda limitada, és a dir si el seu espectre de freqüències està fitat



i triem  $\omega_s$  prou gran perquè els espectres decalats no es superposin, quedarà



que, sigui quina sigui la fase, com que a cada  $\omega$  sols un dels mòduls no és zero,

ja representa el mòdul de la suma, és a dir  $|F^*(j\omega)|$ . Com que els sumands no es superposen, com veurem tot seguit podrem aïllar-ne el central que, escalat, ens dona l'original.

De la inspecció de la figura es veu que la condició per a que els sumands (els espectres) no es superposin és que  $\frac{\omega_s}{2} \geq \omega_c$ .

**Teorema del mostreig** (de Shannon)

Si un senyal  $f(t)$  no conté freqüències superiors a  $\omega_c$  rad/s, quedarà completament determinat pels seus valors mesurats en instants de temps separats per  $T \leq \frac{1}{2\omega_c}$ , és a dir si  $\omega_s \geq 2\omega_c$ .

S'ha de senyalar que no existeixen senyals de banda limitada; però si a partir d'una freqüència l'amplitud del seu espectre és prou petita, la distorsió de l'espectre serà acceptable.

**Generalització del teorema del mostreig** (de Fogel)

Anomenem

$$f^{(n)}(kT) = \left. \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right|_{t=kT}$$

Si un senyal  $f(t)$  no conté freqüències superiors a  $\omega_c$  rad/s, quedarà completament determinat pels valors de

$$f(kT), f^{(1)}(kT), f^{(2)}(kT), \dots, f^{(n)}(kT) \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

mesurats en instants de temps separats per  $T \leq \frac{1}{2\omega_c} (n+1)$ , (és a dir  $\omega_s \geq \frac{2\omega_c}{n+1}$ ).

Notem que el nombre total de mostres és el mateix que en el mode convencional.

## 2.6 Reconstrucció de senyals mostrejats

Si en mostrejar es compleix el teorema del mostreig, la separació del sumand central, es pot fer mitjançant un filtre ideal  $H(s)$ , que sols deixi passar el lòbul central (que correspon al que a la secció 2.3 anomenàrem banda primària)

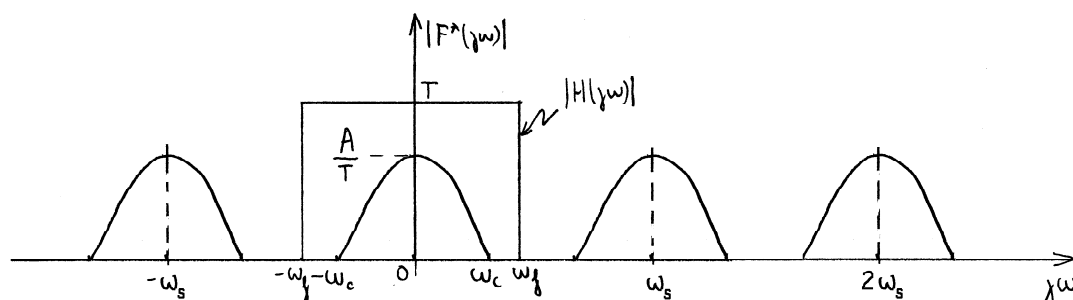


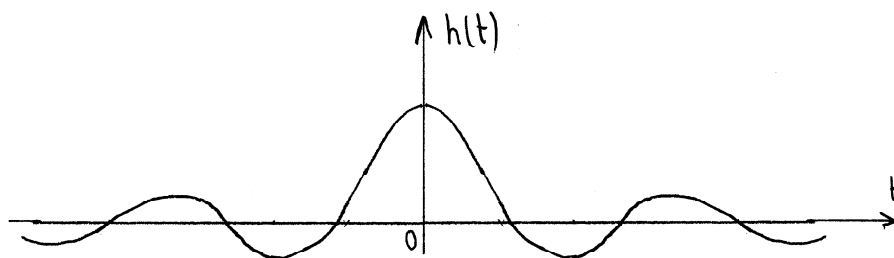
Figura 1

El filtre  $H(s)$  ha de tenir amplitud  $T$  entre  $-\omega_f$  i  $\omega_f$  amb  $\omega_c < \omega_f < \omega_s - \omega_c$  i zero a la resta de freqüències i amb desfasament sempre zero.

La resposta impulsional d'aquest filtre és

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

que té l'aspecte



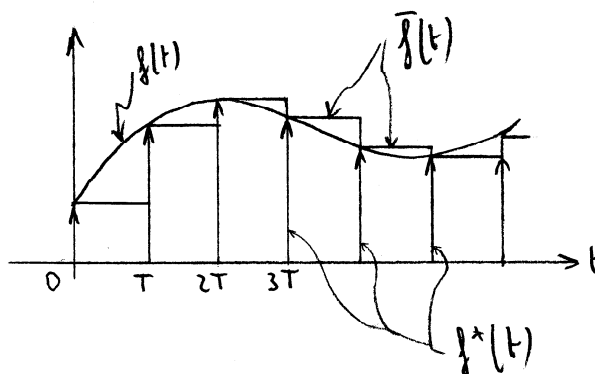
que com es veu implica que sigui anticipatiu, no causal, i en conseqüència no realitzable.

Vegem com es resol, en enginyeria, aquest problema.

### **Mantenidor d'ordre zero**

A la pràctica el que volem és omplir l'espai entre mostres. Tenint en compte que a l'instant  $kT$  no disposem de la mostra  $(k+1)T$ , el que es fa és conservar (mantenir) el darrer valor  $f(kT)$  fins l'instant  $(k+1)T$ .

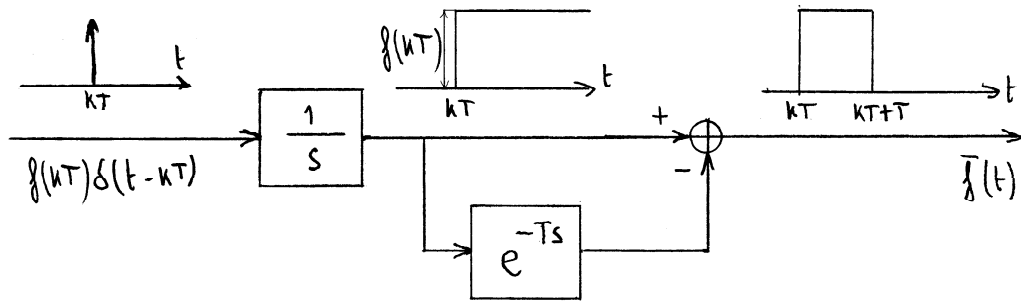
El resultat és  $\bar{f}(t)$ , que aproxima a  $f(t)$ .



Quin sistema continu s'en pot encarregar de mantenir els valors? Vegem-ho. Recordem que la seqüència de nombres processada pel computador l'estem modelant amb un tren d'impulsos

$$f^*(t) = f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t-T) + f(2T)\delta(t-2T) + \dots$$

Caldrà, doncs, tenir un sistema que, en entrar-hi aquest tren d'impulsos, a cada impuls  $f(kT)\delta(t-kT)$  generi un rectangle d'altura  $f(kT)$  i duració  $T$ . La suma d'aquests rectangles és la sortida que volem. Si recordem que un integrador  $\frac{1}{s}$  converteix un impuls en un graó, el muntatge de la figura és fàcil de veure que fa el que volem.



Aquest dispositiu s'anomena *mantenidor d'ordre zero* ("zero order hold"), o senzillament, *mantenidor*. De la figura, la seva transmitància serà,

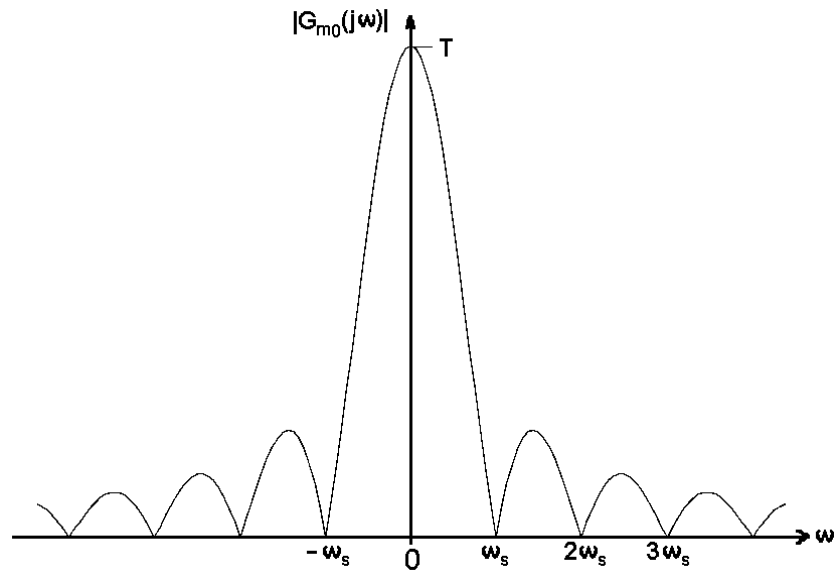
$$G_{m_0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

i la seva resposta impulsional serà

$$g_{m_0}(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_{m_0}(s)] = u(t) - u(t - T)$$

que, per construcció, és causal.

La resposta freqüencial del mantenidor d'ordre zero es pot comprovar que és



que, tot i no ser el filtre ideal que volíem, funciona molt bé. Cal, però pagar un preu. Comparant aquesta figura amb la figura 1 (pàg. 10), es nota que cal que  $\omega_s$  sigui bastant més gran que  $2\omega_c$  per a que el lòbul central sigui poc atenuat i en canvi sí que ho siguin els altres.

## 2.7 Transformada $z$

Donada una seqüència de nombres

$$d(k) = \{d(0), d(1), d(2), \dots\}$$

s'anomena transformada  $z$  de  $d(k)$ , a la funció<sup>1</sup> de  $z$

$$D(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} d(k) \cdot z^{-k}$$

cosa que indicarem així

$$\mathcal{Z}[d(k)] = D(z)$$

Vegem com ens pot ajudar.

La transformada de Laplace de  $f^*(t)$  hem vist (pàg. 4) que és

$$F^*(s) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT) \cdot e^{-ksT}$$

que té força inconvenients (no és una funció racional, té infinits pols, és periòdica, etc.). Si fem el canvi de variable

$$z = e^{sT} \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

queda

$$F^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

Com que  $f(kT)$  és una seqüència de nombres (no és una funció del temps), veiem que l'expressió anterior és la transformada  $z$  de  $f(kT)$ :

$$F^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT) \cdot z^{-k} = \mathcal{Z}[f(kT)] = F(z)$$

— Com veurem,  $F(z)$  sí que és racional, no és periòdica i té un nombre finit de pols.

— Convé fer notar que  $T$  és un paràmetre, no té res a veure amb la definició de transformada  $z$ .

— Encara que  $F(z)$  és la transformada de  $f(kT)$ , direm laxament que  $F(z)$  és la transformada de  $f(t)$ . Cal, però, recordar que això no és correcte, és sols una llicència verbal.

En resum tenim, doncs, que

$$\mathcal{Z}[f(kT)] = F(z) = F^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

Serà freqüent voler passar directament d'una  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  a la  $F(z) = \mathcal{Z}[f(kT)]$ . Això ho representarem amb

$$\mathfrak{z}[F(s)] = \mathcal{Z}[f(kT)] = F(z)$$

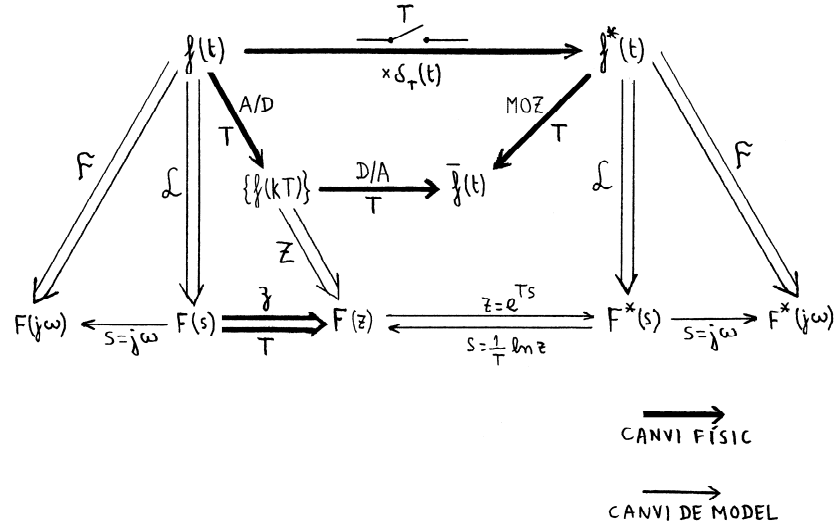
També representarem parelles de transformades amb la doble fletxa

$$f(kT) \longleftrightarrow F(z)$$

---

<sup>1</sup> Cal anar amb compte en consultar bibliografia. Hi ha qui la defineix amb exponents positius,  $D(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} d(k) \cdot z^k$ , i qui la defineix bilateral,  $D(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} d(k) \cdot z^k$

$$F(s) \iff F(z)$$



### Exemple 1

Volem la transformada  $z$  de  $f(kT) = u(kT)$ , el graó unitari.

Tenim que

$$U(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} u(kT) \cdot z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

Si  $|z^{-1}| < 1$  la suma convergeix, i

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

### Exemple 2

Volem la transformada  $z$  de  $f(kT) = \{0, 0, 2, -3, 0, 7, 0, 0, 0, \dots\}$ .

Fem

$$F(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT) \cdot z^{-k} = 2z^{-2} - 3z^{-3} + 7z^{-5}$$

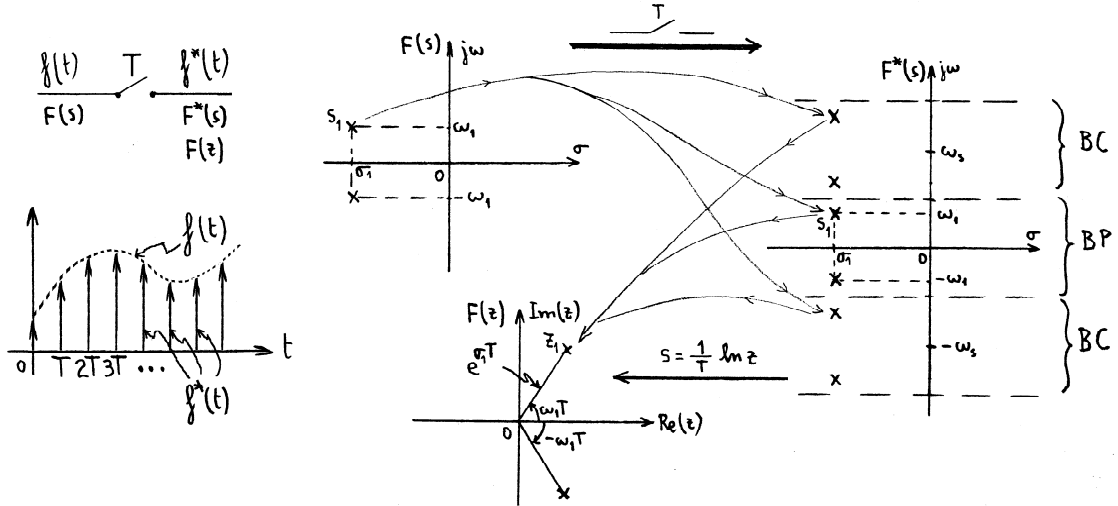
## 2.8 Correspondència entre els plans $s$ i $z$

Hem obtingut  $F(z)$  fent el canvi  $z = e^{Ts}$  a  $F^*(s)$ . En ser tan  $s$  com  $z$  variables complexes, aquest canvi ens porta els punts del pla  $s$  als del pla  $z$ . Recordem que  $F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} F(s + jn\omega_s)$  és periòdica, de període  $j\omega_s$ , cosa que ens definia la banda primària ( $n = 0$ ) i les complementàries ( $n \neq 0$ ). Un punt de  $F^*(s)$  (que pot ser, per exemple, un pol; vegeu la figura) que sigui a  $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$  va a parar a  $z_1 = e^{s_1 T} = e^{\sigma_1 T} \cdot e^{j\omega_1 T}$ , és a dir al punt de radi  $\rho = e^{\sigma_1 T}$  i angle  $\theta = \omega_1 T$ . Però el mateix els passa a tots els punts de coordenades  $s_1 + jn\omega_s = \sigma_1 + j(\omega_1 + n\omega_s)$  ja que

$$e^{(s_1 + jn\omega_s)T} = e^{s_1 T} \cdot e^{jn\omega_s T} = e^{s_1 T} \cdot e^{jn2\pi} = e^{s_1 T} = z_1$$

Veiem, doncs, que totes les bandes complementàries van a parar (en el pla  $z$ ) al mateix

lloc a on vagi a parar la banda primària. En particular, la replicació dels pols de  $F(s)$  a totes les bandes de  $F^*(s)$ , ara es desfà: tots van a parar (en el pla  $z$ ) a on vagin a parar els de la banda primària.



Més endavant (pàg. 37) veurem amb detall aquest mapeig.

## 2.9 Propietats de la transformada $z$

Les propietats que ara descriurem ens facilitaran la utilització de la transformada  $z$  i també l'obtenció de noves transformades a partir de les conegudes.

En tot el que segueix suposarem que  $F(z)$  és la transformada  $z$  de  $f(kT)$ .

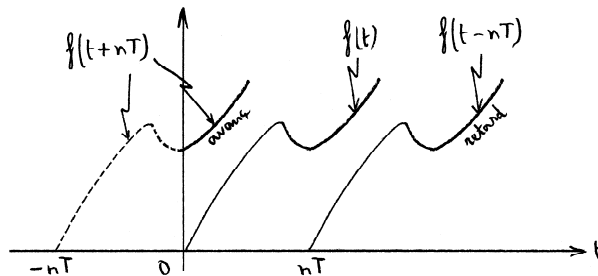
### a) **Linealitat**

$$\mathcal{Z} [\alpha f_1(kT) + \beta f_2(kT)] = \alpha \cdot F_1(z) + \beta \cdot F_2(z)$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} [\alpha f_1(kT) + \beta f_2(kT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha f_1(kT) + \beta f_2(kT)] \cdot z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha f_1(kT) \cdot z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta f_2(kT) \cdot z^{-k} = \alpha \cdot F_1(z) + \beta \cdot F_2(z) \end{aligned}$$

### b) **Retard i avanç** (translació temporal)



$$\mathcal{Z} [f(kT - nT)] = z^{-n} \cdot F(z)$$

$$\mathcal{Z}[f(kT + nT)] = z^n \cdot F(z) - \sum_{l=-n}^{-1} f(lT + nT) \cdot z^{-l} \stackrel{(k=l+n)}{=} z^n \cdot F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) \cdot z^{n-k}$$

### Exemple 1

$$\mathcal{Z}[u(kT - 3T)] = z^{-3} \cdot \mathcal{Z}[u(kT)] = z^{-3} \frac{z}{z-1} = \frac{z^{-2}}{z-1}$$

### Exemple 2

$$\mathcal{Z}[u(kT + 3T)] = z^3 \frac{z}{z-1} - z^3 - z^2 - z = \frac{z}{z-1} = \mathcal{Z}[u(kT)]$$

¿Que ha passat? Com que la transformada  $z$  no veu els valors de la funció per a  $t < 0$ , i els considera nuls, per a ella un graó que comenci a l'origen i un que comenci abans són idèntics.

### c) Translació complexa

$$\mathcal{Z}[f(kT)e^{-akT}] = F(ze^{aT})$$

### Exemple

Més endavant (pàg. 19) trobarem que

$$\mathcal{Z}[\sin \omega kT] = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

Sabent això, volem trobar  $\mathcal{Z}[e^{-akT} \sin \omega kT]$

Serà

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[e^{-akT} \sin \omega kT] &= \frac{ze^{aT} \sin \omega T}{(ze^{aT})^2 - 2ze^{aT} \cos \omega T + 1} = \\ &= \frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + 2e^{-2aT}} \end{aligned}$$

### d) Teorema del valor inicial

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

sempre que els límits existeixin.

### e) Teorema del valor final

Si  $\frac{z-1}{z}F(z)$  no té pols de  $|z| \geq 1$ , aleshores es verifica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} F(z) \right)$$

### Exemple 1

Trobeu el valor final de  $f(kT)$  si

$$F(z) = \frac{0.305z^2}{(z-1)(z^2 - z + 0.61)}$$

Tenim que

$$\frac{z-1}{z}F(z) = \frac{0.305z}{z^2 - z + 0.61}$$



té els pols  $z_{1,2} = 0.5 \pm 0.6j$  de mòdul  $|z_{1,2}| = 0.78 < 1$  i podem, doncs, aplicar el teorema:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{0.305z}{z^2 - z + 0.61} \right) = 0.5$$

Alerta, però, en ometre la comprovació. Vegem que pot passar.

**Exemple 2**

Trobeu el valor final de  $f(kT)$  si

$$F(z) = \frac{9z^2}{(z-1)(z+0.5)(z+2)}$$

Ara

$$\frac{z-1}{z} F(z) = \frac{9z}{(z+0.5)(z+2)}$$

té el pol  $z = -2$  de mòdul  $|z| = 2 > 1$  i no es pot aplicar el teorema. Si tot i això l'apliquem queda

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{9z}{(z+0.5)(z+2)} \right) = 2$$

quan en realitat  $f(kT)$  tendeix a infinit.

f) **Derivació parcial**

Si

$$\mathcal{Z}[f(kT, a)] = F(z, a)$$

aleshores es verifica que

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{\partial}{\partial a} f(kT, a) \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a)$$

**Exemple**

Sabent que

$$\mathcal{Z}[e^{-at}] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

trobeu  $\mathcal{Z}[te^{-at}]$

Notant que

$$te^{-at} = -\frac{\partial}{\partial a} e^{-at}$$

fem

$$\mathcal{Z}[te^{-at}] = \mathcal{Z} \left[ -\frac{\partial}{\partial a} e^{-at} \right] = -\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{Z}[e^{-at}] = -\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right) = \frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$$

g) **Convolució**

Es verifica que

$$\mathcal{Z} \left[ \sum_{n=0}^{n=k} f_1(nT) \cdot f_2(kT - nT) \right] = \mathcal{Z} \left[ \sum_{n=0}^{n=k} f_1(kT - nT) \cdot f_2(nT) \right] = F_1(z) \cdot F_2(z)$$

amb  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  per a  $t < 0$ .

## 2.10 Obtenció de transformades $z$

Veurem dos mètodes.

a) **Per sumació de series.**

És l'aplicació directa de la definició

$$\mathcal{Z}[f(kT)] = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

Ja n'hem vist un exemple a la pàgina 14. Vegem-ne un altre.

**Exemple**

Volem la transformada  $z$  de  $f(kT) = e^{-akT}u(kT)$ .

Serà

$$F(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-akT} \cdot z^{-k} = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \dots$$

que, si  $|e^{-aT}z^{-1}| < 1$  convergeix, i aleshores

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

b) **Per descomposició en fraccions simples** (des de Laplace).

Es basa en que comparant la parella de transformades

$$f(t) = Ae^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{A}{s+a}$$

$$f(kT) = Ae^{-akT}u(kT) \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) = \frac{Az}{z - e^{-aT}}$$

podem escriure

$$F(s) = \frac{A}{s+a} \xrightarrow{\mathfrak{z}} F(z) = \frac{Az}{z - e^{-aT}}$$

El que farem, doncs, per una  $F(s)$  arbitrària però racional, és descompondre-la en fraccions senzilles, i com que tant la transformada de Laplace com la transformada  $z$  són lineals, aplicar a cada fracció la correspondència  $\frac{A}{s+a} \rightarrow \frac{Az}{z - e^{-aT}}$

**Exemple 1**

Volem la transformada  $z$  de

$$f(t) = (1 - e^{-at})u(t)$$

que ja es suposa que mostrejarem.

Primer obtenim la seva transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

i aleshores, aplicant la correspondència, queda

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

que operant queda

$$F(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

### Exemple 2

Volem la transformada  $z$  del resultat de mostrejar

$$f(t) = \sin(\omega t)u(t)$$

Fem

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{-\frac{1}{2j}}{s + j\omega} + \frac{\frac{1}{2j}}{s - j\omega}$$

i d'aquí queda

$$F(z) = \frac{-\frac{1}{2j}z}{z - e^{-j\omega T}} + \frac{\frac{1}{2j}z}{z - e^{j\omega T}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

## 2.11 Transformada $z$ inversa

Veurem dos mètodes per a trobar la transformada  $z$  inversa.

a) **Expansió en fraccions senzilles.**

Per a utilitzar el fet de que

$$\mathcal{Z}[Ae^{-akT}] = \frac{Az}{z - e^{-aT}}$$

mirarem de descompondre la  $F(z)$  de la que volem l'inversa en fraccions del tipus  $\frac{Az}{z - e^{-aT}}$ . La descomposició en fraccions senzilles ens donarà, però, fraccions del tipus  $\frac{A}{z - e^{-aT}}$ , no del tipus  $\frac{Az}{z - e^{-aT}}$ . Per a solucionar-ho, per comptes de descompondre  $F(z)$ , descompondrem  $\frac{F(z)}{z}$  i en acabar multiplicarem per  $z$ .

**Exemple.** Volem la transformada  $z$  inversa de

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

Fem

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z - e^{-aT}} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-aT}}$$

d'on

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

i ens queda

$$f(kT) = (1 - e^{-akT})u(kT)$$

Nota: Recordant que  $f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$ , si desitgèssim  $f^*(t)$ , tindríem que

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-akT})\delta(t - kT)$$

— En el cas que  $F(z)$  no tingui zeros a  $z = 0$ , (cosa que succeirà, per exemple, quan la sèrie temporal corresponent té un retard pur múltiple de  $T$ , ja que aleshores  $F(z)$  tindrà un terme  $z^{-m}$ ), és a dir si té l'aspecte

$$F(z) = \frac{N(z)}{z^m D(z)}$$

obtidríem la transformada inversa de

$$F_1(z) = z^{m+1} \cdot F(z) = \frac{N(z) \cdot z}{D(z)}$$

que ens permetrà aplicar el procediment que acabem de veure, i obtindrem

$$f_1(kT) = \mathcal{Z}^{-1} [F_1(z)]$$

i ara, pel teorema del retard, fem

$$f(kT) = \mathcal{Z}^{-1} [F(z)] = \mathcal{Z}^{-1} [z^{-(m+1)} F_1(z)] = f_1 [(k - (m + 1)) T]$$

**Exemple.** Volem la transformada  $z$  inversa de

$$F(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{z^3 (z - 1) (z - e^{-aT})}$$

Fem

$$F_1(z) = z^4 \cdot F(z) = \frac{(1 - e^{-aT}) z}{(z - 1) (z - e^{-aT})} \stackrel{\text{exemple anterior}}{=} \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

i

$$f_1(kT) = \mathcal{Z}^{-1} [F_1(z)] = (1 - e^{-akT}) u(kT)$$

Aleshores com que

$$F(z) = z^{-4} \cdot F_1(z)$$

serà

$$f(kT) = f_1 [(k - 4) T] = (1 - e^{-a(k-4)T}) u [(k - 4) T]$$

El terme  $u [(k - 4) T]$  ens diu que la seqüència val zero per  $k < 4$ .

b) **Suma de potències (divisió de polinomis).**

Considerem

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

que si correspon a un sistema físic complirà  $m \leq n$ .

Si dividim el polinomi numerador pel denominador obtindrem una expressió del tipus

$$F(z) = c_0 z^{m-n} + c_1 z^{m-n-1} + \dots$$

amb els exponents negatius (excepte si  $m = n$  que fa que el primer sigui nul ).

Recordant que

$$F(z) = f(0) \cdot z^0 + f(T) \cdot z^{-1} + f(2T) \cdot z^{-2} + \dots$$

queda que la seqüència  $f(kT)$  està formada pels coeficients de  $z^{-k}$  del resultat de dividir. Notem que no obtenim (al menys directament) una expressió tancada per a

$f(kT)$ . Aquest procediment anirà molt bé per a obtenir un nombre petit dels primers termes de  $f(kT)$ .

**Exemple.**

Volem els primers termes de la transformada  $z$  inversa de

$$F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$$

Fem

$$\begin{array}{r} z^2 \quad +z \\ z^2 \quad -2z \quad +1 \\ \hline 3z \quad -1 \\ 3z \quad -6 \quad +3z^{-1} \\ \hline 5 \quad -3z^{-1} \\ 5 \quad -10z^{-1} \quad +5z^{-2} \\ \hline 7z^{-1} \quad -5z^{-2} \end{array} \qquad \left| \begin{array}{r} z^2 \quad -2z \quad +1 \\ 1 \quad +3z^{-1} \quad +5z^{-2} \quad +7z^{-3} \quad +\dots \end{array} \right.$$

i podem seguir fins on calgui. Del quocient tenim

$$f(kT) = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

que, en aquest cas, ja es veu que és

$$f(kT) = 2k + 1$$

## 2.12 Transmissió discreta

Sabem que l'operació de transformar  $f(t)$  en un tren d'impulsos la representem amb el mostrejador ideal

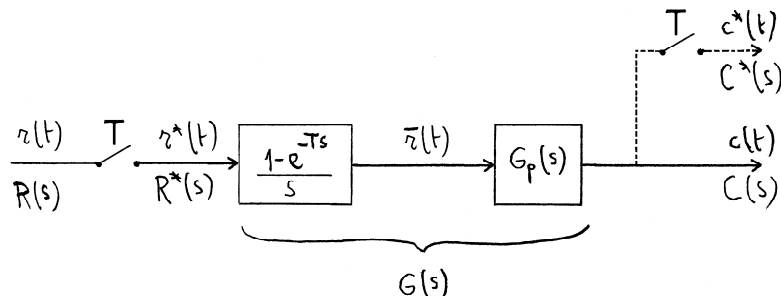
$$\underbrace{f(t) \xrightarrow{T} f^*(t)}$$

i que l'operació de transformar un tren d'impulsos en  $\bar{f}(t)$  la representem amb el mantenidor d'ordre zero

$$\underbrace{f^*(t) \rightarrow \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \right] \rightarrow \bar{f}(t)}$$

malgrat que  $f^*(t)$  no existeix físicament.

Mirem ara una estructura que ens trobarem freqüentment:



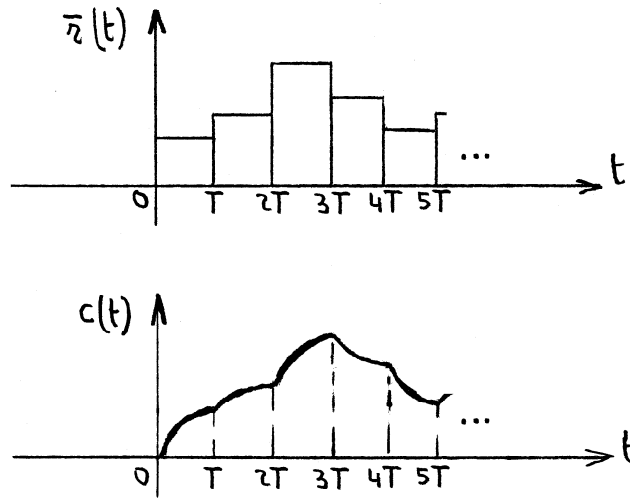
on  $r(t)$  és l'entrada i  $c(t)$  la sortida. Passat el mostrejador ideal, tenim el senyal

mostrejat,  $r^*(t)$ , que el mantenidor ens restitueix com a  $\bar{r}(t)$  que, en ser continu, ja es pot aplicar a la planta  $G_p(s)$ . La corresponent sortida de la planta és  $c(t)$ . Podem representar aquests senyals per les seves transformades de Laplace, com s'indica a la figura. Mirem de trobar  $C(s)$ .

Surt, directament,

$$C(s) = R^*(s) \cdot G(s)$$

Però  $R^*(s)$  no és racional i, en conseqüència,  $C(s)$  tampoc ho serà. Si pensem en que la sortida del mantenidor,  $\bar{r}(t)$ , és una successió de graons (com la de la figura), si la planta  $G_p(s)$  fos, per exemple, de primer ordre, la seva sortida tindria un aspecte similar a la  $c(t)$  de la figura



i ja es comprèn que la seva expressió serà complicada (de fet serà una suma d'exponencials successivament decalades). Treballar amb aquesta expressió seria excessivament laboriós.

Anem a veure que, si ens conformem amb una mica menys de detall, les coses es simplifiquen agradablement. El que farem és limitar-nos a estudiar la sortida sols en els instants de mostreig del mostrejador. És a dir per comptes de  $c(t)$ , estudiarem  $c^*(t)$ , cosa que simbolitzem a la figura amb un mostrejador a traços. Quedi clar que aquest mostrejador no hi és al sistema, el senyal que surt de la planta és el senyal continu  $c(t)$ , però sols n'estudiarem (i coneixerem) els seus valors als instants de mostreig. Conformar-se amb  $c^*(t)$ , vol dir conformar-se amb  $C^*(s)$ . Trobem-lo.

$$C^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^*(s + jn\omega_s) \cdot G(s + jn\omega_s)$$

Si recordem (pàgina 5) la propietat de  $F^*(s)$ , de que era periòdica de període  $j\omega_s$ , podem treure  $R^*(s)$  factor comú i queda

$$C^*(s) = R^*(s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)$$

$G(s)$  no és un senyal, és una transmitància. Però no per això deixa de ser una funció de  $s$ . Certament no té sentit parlar de mostrejar una transmitància, però sí que podem

definir

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)$$

i aleshores podem escriure

$$C^*(s) = R^*(s) \cdot G^*(s)$$

Com que l'expressió  $G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)$  és de la mateixa forma matemàtica que les que hem fet servir fins ara, si ara fem el canvi  $s = \frac{1}{T} \ln z$  ens queda

$$C^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = R^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z} \cdot G^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z}$$

és a dir

$$C(z) = R(z) \cdot G(z)$$

a on, tal com l'hem construït, és

$$G(z) = \mathfrak{Z}[G(s)] = \mathcal{Z}[g(kT)]$$

on  $g(t)$  és la resposta impulsional de  $G(s)$ .

$G(z)$  s'anomena transmitància en  $z$  i, com veiem, ens dóna la sortida com a producte de l'entrada per la transmitància.

### **Corol·lari**

Hem vist que partint de

$$C(s) = R^*(s) \cdot G(s)$$

arribàvem a

$$C^*(s) = R^*(s) \cdot G^*(s)$$

Això és general, el resultat de mostrejar

$$A(s) = B(s) \cdot C^*(s)$$

és

$$A^*(s) = B^*(s) \cdot C^*(s)$$

Aquesta propietat la usarem força en obtenir les transmitàncies de sistemes amb mostrejadors.

Cal vigilar d'aplicar-la correctament. Cal separar la part mostrejada de la part no mostrejada. Per exemple, el resultat de mostrejar

$$A(s) = B(s) \cdot C^*(s) \cdot D(s) \cdot E^*(s)$$

serà

$$A^*(s) = [B(s)D(s)]^* \cdot C^*(s) \cdot E^*(s)$$

(si hi ha dubtes, anomenem  $B(s) \cdot D(s) = F(s)$  i  $C^*(s) \cdot E^*(s) = G^*(s)$ )

El de mostrejar

$$A(s) = B^*(s)$$

serà

$$A^*(s) = B^*(s)$$

(és a dir,  $A(s)$  ja era una funció mostrejada).

Quan totes les funcions de l'expressió són mostrejades, ja es pot fer en totes elles el canvi  $s = \frac{1}{T} \ln z$ , i queden les corresponents transformades  $z$ . Per exemple, de

$$A^*(s) = [B(s)D(s)]^* \cdot C^*(s) \cdot E^*(s)$$

tenim (aquest pas normalment no l'explicitarem)

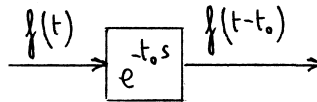
$$A^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = [B(s)D(s)]^*|_{s=\frac{1}{T} \ln z} \cdot C^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z} \cdot E^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z}$$

d'on

$$A(z) = \mathfrak{Z} [B(s)D(s)] \cdot C(z) \cdot E(z) = \overline{BD}(z) \cdot C(z) \cdot E(z)$$

### 2.13 Retard pur

En temps continu un retard pur era representat amb  $e^{-t_0 s}$ .



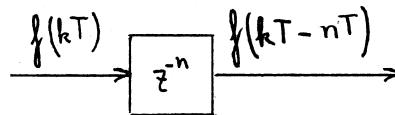
Aquest mateix retard, quina transmitància  $z$  té?

Recordem la propietat del retard de la transformada  $z$ :

Si  $F(z)$  és la transformada  $z$  de  $f(kT)$ , tenim

$$\mathcal{Z} [f(kT - nT)] = z^{-n} \cdot F(z)$$

És a dir, que un bloc  $z^{-n}$  ens retarda el senyal en  $n$  períodes de mostreig.



Per tant, sempre que  $t_0$  sigui un múltiple enter del període de mostreig

$$t_0 = nT$$

el podem representar amb un bloc  $z^{-n}$ .

Si  $t_0$  no és un múltiple enter del període de mostreig, no és representable amb la transformada  $z$  (hi ha una tècnica, la de la transformada  $z$  modificada, que permet representar-lo, però no l'estudiarem).

### 2.14 Impuls discret i resposta impulsional discreta

Un impuls discret es defineix com la seqüència  $\delta_D(k) = \{1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$ . Recordant la definició de transformada  $z$ ,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(k) \cdot z^{-k}$$

tenim que

$$\mathcal{Z} [\delta_D(k)] = 1$$

Donada una transmitància  $G(z)$  es defineix com a resposta impulsional la seva sortida quan a la seva entrada s'hi aplica un impuls discret. Aquesta resposta impulsional



serà

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z) \cdot 1] = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$$

Cal notar que tant l'impuls discret com la resposta impulsional discreta tenen perfecte existència física, a diferència de l'impuls de Dirac i la resposta impulsional dels sistemes continus que sols tenen existència teòrica.

## 2.15 Transmissió discreta i algorismes

Acabem de veure com un sistema mostrejat el podem representar amb una transmissió en  $z$ ,  $G(z)$ . Això ens soluciona un dels problemes que teníem, el de representar el sistema físic.

Però queda un altre problema, el de representar els càlculs que farà el computador, és a dir l'acció de control. Farem la restricció ja usual de linealitat: restringirem aquests càlculs a que siguin lineals. Es limitaran als expressables amb equacions de diferències lineals i de coeficients constants (invariants en el temps, com sempre). És a dir que la relació entre les mostres que entren al computador,  $x(k)$ , i les que en surten,  $y(k)$ , serà del tipus

$$y(n) + a_{n-1}y(n-1) + \dots + a_0y(0) = b_mx(m) + b_{m-1}x(m-1) + \dots + b_0x(0)$$

a on ja hem reduït el coeficient de  $y(n)$  a la unitat. La mostra que ha de sortir a l'instant  $n$  es calcula senzillament aïllant  $y(n)$ :

$$y(n) = -a_{n-1}y(n-1) - \dots - a_0y(0) + b_mx(m) + b_{m-1}x(m-1) + \dots + b_0x(0)$$

Aquesta expressió ens dona la sortida  $y$  a l'instant  $n$  en funció de les sortides  $y$  als instants anteriors i de les entrades  $x$  a l'instant  $m$  i anteriors.

Ja es veu que per a que el sistema sigui causal (no anticipatiu) cal que  $m \leq n$ . A l'apartat següent insistirem sobre aquest punt.

Obtinguem ara la transformada  $z$  de la primera de les dues expressions anteriors. Suposant condicions inicials nul·les, és a dir  $x(k) = y(k) = 0$  per a  $k < 0$ , i anomenant  $Y(z) = \mathcal{Z}[y(n)]$  i  $X(z) = \mathcal{Z}[x(n)]$  podem escriure

$$Y(z)(1 + a_{n-1}z^{-1} + a_{n-2}z^{-2} + \dots + a_0z^{-n}) = X(z)(b_mz^{m-n} + b_{m-1}z^{m-n-1} + \dots + b_0z^{-n})$$

d'on

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_mz^{m-n} + b_{m-1}z^{m-n-1} + \dots + b_0z^{-n}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + a_{n-2}z^{-2} + \dots + a_0z^{-n}}$$

i, si volem, podem multiplicar numerador i denominador per  $z^n$  i queda l'expressió equivalent

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_mz^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0}$$

Notem que té forma de transmissió i actua com a tal, relacionant la sortida amb l'entrada, aquesta vegada d'un algorisme.

Una transmissió en  $z$ , pot descriure, doncs, o bé un sistema físic o bé un algorisme. Físicament són diferents, però matemàticament són indistingibles. Caldrà anar amb cura en interpretar-les.

## 2.16 Realitzabilitat física

Un sistema, per a ser físicament realitzable, ha de ser causal (no anticipatiu), és a

dir que la seva resposta no s'ha d'anticipar a l'entrada. Això és vàlid tant per a un sistema físic, com per a un algorisme.

Vegem que ha de complir  $G(z)$  per a ser realitzable. La resposta impulsional de  $G(z)$  és  $g(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$ . Per a que no sigui anticipativa, caldrà que la seqüència resposta impulsional  $g(k)$  sigui zero per a  $k < 0$ .

Per a fer la transformada inversa dividim el numerador pel denominador, i queda

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = b_m z^{m-n} + c_1 z^{m-n-1} + c_2 z^{m-n-2} + \dots$$

amb  $c_i$  les que surtin de dividir. I recordant que

$$F(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT) \cdot z^{-k} = f(0) \cdot z^0 + f(T) \cdot z^{-1} + f(2T) \cdot z^{-2} + \dots$$

queda que la resposta impulsional de  $G(z)$  és

$$g(k) = \{b_m, c_1, c_2, \dots\}$$

Per a que  $g(k)$  no tingui valors no nuls a l'esquerra de l'origen, cal que no hi hagi termes corresponents a potències positives de  $z$ , és a dir que el primer exponent,  $m-n$ , sigui zero o negatiu:

$$m \leq n$$

Un exemple numèric ho farà molt més clar. Sigui

$$G(z) = \frac{3z^2 + 2z + 4}{5z^2 + 3z} = \frac{3}{5}z^0 + \dots$$

La seqüència de la resposta impulsional comença per  $k = 0$  i no hi ha problema,  $G(z)$  és causal.

Sigui ara

$$G(z) = \frac{3z^2 + 2z + 4}{5z + 3} = \frac{3}{5}z^1 + \dots$$

La seqüència de la resposta impulsional comença per  $k = -1$  i  $G(z)$  no és causal, és anticipativa.

**Las transformades representen tan el senyal com el sistema.**

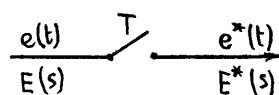
Notem un aspecte tant de la transformada de Laplace com de la transformada  $z$ .

En temps continu,  $F(s)$  pot representar tant un senyal com un sistema. Per exemple,  $\frac{1}{s}$  pot representar tant un graó  $u(t)$ , com un bloc integrador.

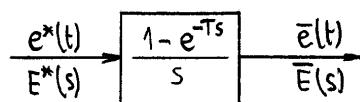
En temps discret,  $F(z)$  pot representar tant un senyal com un sistema. Per exemple,  $\frac{z}{z-1}$  pot representar tant un graó  $u(kT)$ , com un bloc integrador. En temps discret, a més a més, quan  $F(z)$  representa un sistema (un bloc), pot representar tant un sistema físic com un algorisme.

## 2.17 Convertidors A/D i D/A

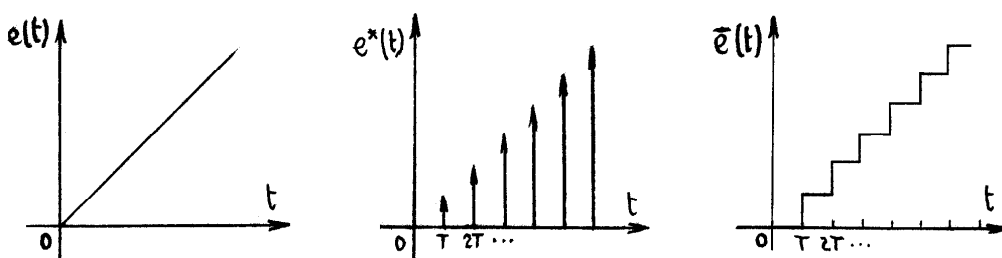
Hem vist dos elements molt importants: el mostrejador ideal i el mantenidor. El mostrejador transforma senyals continus en trens d'impulsos



El mantenidor fa una operació en sentit contrari (però no l'operació inversa), converteix un tren d'impulsos en un senyal continu



Notem, però, que  $\bar{E}(s) \neq E(s)$  malgrat que, si el mostreig ha estat correcte, n'és una bona aproximació. Vegem exemples dels tres tipus de senyals:

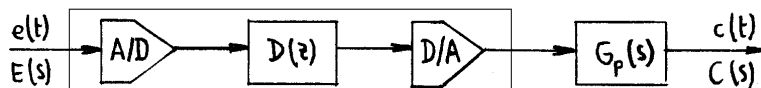


Hi ha un quart tipus, el  $e(kT)$ , que correspon a  $E(z)$ :

$$e(kT) = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, \dots\}$$

Fixem-nos que  $e(kT)$  no és una funció del temps; és una seqüència de nombres que en particular pot representar una sèrie de mostres d'una funció temporal, però “viu” fora del temps.

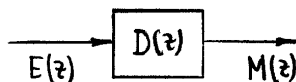
En sistemes de control digital s'interconnecten sistemes continus amb sistemes discrets. El cas de la figura n'és l'exemple típic.



Notem que en aquesta figura barregem transformades de Laplace i transformades en  $z$ . Això simbòlicament ho podem fer per a mostrar l'estructura global d'un sistema, ja que ens és còmode indicar cada component amb el descriptor més adient al seu tipus. Però matemàticament no podem fer aquestes barreges.

a) Vegem com modelar l'anterior conjunt en el camp  $s$ .

Comencem pel filtre digital  $D(z)$ . Sabem que



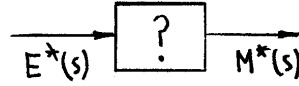
el que fa és

$$M(z) = D(z) \cdot E(z)$$

que, fent  $F(z)|_{z=e^{sT}} = F^*(s)$ , queda

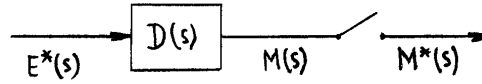
$$M^*(s) = D^*(s) \cdot E^*(s)$$

que ho podem modelar per



on no és massa clar què cal posar dintre del bloc, ja que  $D^*(s)$  en no ser, en general, un quocient de polinomis en  $s$ , no seria una transmitància usual.

Vegem que l'anterior és equivalent a



amb  $D(s) = \mathfrak{z}^{-1} [D(z)]$ .

En efecte: de la darrera figura tenim

$$M(s) = D(s) \cdot E^*(s)$$

d'on

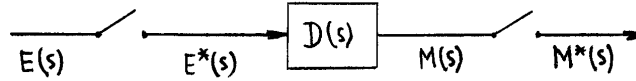
$$M^*(s) = D^*(s) \cdot E^*(s)$$

i

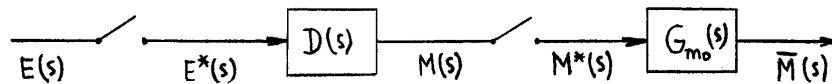
$$M(z) = D(z) \cdot E(z)$$

que és el que fa el filtre.

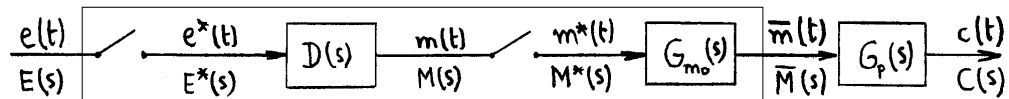
A la figura anterior veiem que cal entrar amb  $E^*(s)$ , i nosaltres el que tenim és  $E(s)$ . Caldrà posar-hi un mostrejador ideal



De la mateixa manera  $M^*(s)$  cal convertir-lo en un senyal real, diguem-li  $\overline{M}(s)$ . Això ho aconseguim un mantenidor d'ordre zero,  $G_{m_0}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$



Ara ja es pot connectar a la transmitància  $G_p(s)$ . Queda, doncs, en conjunt



Cal no perdre de vista que tant el mostrejador com el mantenidor són entitats matemàtiques sense contrapartida física directe. Com a conseqüència, convé fer un parell de comentaris:

— Si bé el conjunt del requadre modela perfectament el conjunt  $A/D + D(z) + D/A$ , els punts interiors del model no existeixen en el sistema físic. Així els punts  $e^*(t) \iff E^*(s)$ ,  $m(t) \iff M(s)$  i  $m^*(t) \iff M^*(s)$  hi són només al model matemàtic. Cal veure la part requadrada (entre l'entrada del  $A/D$  i la sortida del  $D/A$ ) com a model d'entrada-sortida: ens especifica correctament les sortides per a cada entrada, però no hi ha correspondència entre les interioritats del model i les del sistema físic.

— Per la mateixa raó, els senyals mostrejats (els que representem amb una  $F^*(s)$  en estrella) no es poden aplicar directament a una transmitància  $G(s)$  que representi un

sistema físic, ja que físicament no existeixen. Cal materialitzar-los amb un mantenidor. Al model anterior,  $E^*(s)$  aplicat a  $D(s)$  sembla violar aquest criteri, però cal notar que  $D(s)$  no representa una transmitància física, sinó que forma part del model d'un algorisme. Això és general al camp  $s$ : Si  $G(s)$  representa una transmitància física se li han d'aplicar senyals continus, no trens d'impulsos. I si  $G(s)$  representa la versió al camp  $s$  d'un algorisme  $G(z)$ , no l'hi podem aplicar senyals continus, cal aplicar-li trens d'impulsos.

Ara ja podem calcular la sortida en funció de l'entrada.

$$\begin{aligned} C(s) &= M^*(s) \cdot G_{m0}(s) \cdot G_p(s) \\ M(s) &= E^*(s) \cdot D(s) \end{aligned}$$

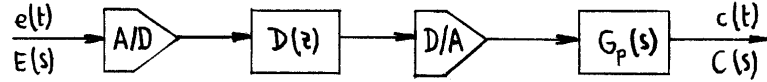
d'on

$$M^*(s) = E^*(s) \cdot D^*(s)$$

i

$$C(s) = E^*(s) \cdot D^*(s) \cdot G_{m0}(s) \cdot G_p(s)$$

b) Vegem ara com modelar el mateix conjunt



en el camp  $z$ .

Cal fer una consideració d'entrada: el camp  $z$  sols pot tractar seqüències de nombres, que en particular poden representar mostres de senyals de temps continu; no pot representar valors entre mostres. Així, doncs, el model d'entrada  $E(z)$  i sortida  $C(z)$  que obtinguem, com tots els del camp  $z$ , serà parcial, sols valdrà en els instants de mostreig. En conseqüència, l'entrada  $E(z)$  caldrà ja suposar que són les mostres  $e(kT)$  de  $e(t)$ ; el convertidor A/D no té sentit modelar-lo. Així mateix, la sortida  $C(z)$  que obtinguem representarà mostres  $c(kT)$  de la sortida, no la pròpia sortida.

Partint del model en  $s$  de l'apartat anterior

$$C(s) = E^*(s) \cdot D^*(s) \cdot G_{m0}(s) \cdot G_p(s)$$

tenim que

$$C^*(s) = E^*(s) \cdot D^*(s) \cdot \overline{G_{h_{m0}} G_p^*}(s)$$

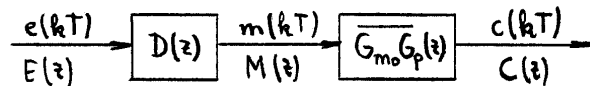
d'on queda

$$C(z) = E(z) \cdot D(z) \cdot \overline{G_{m0} G_p}(z)$$

i també, si es vol,

$$M(z) = E(z) \cdot D(z)$$

és a dir

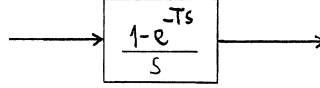


Si els valors de  $e(kT)$  són mostres de  $e(t)$ , els de  $c(kT)$  coincidiran amb mostres de  $c(t)$ .

## 2.18 Manipulació de blocs de sistemes de temps discret

Començarem amb uns exemples per a fixar les idees, i després exposarem el procediment general.

### Mantenidor d'ordre zero

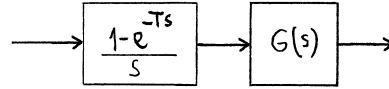


Tenim

$$\mathfrak{z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right] = \mathcal{Z} [u(kT) - u(kT - T)] = \frac{z}{z - 1} - z^{-1} \frac{z}{z - 1} = 1$$

Notem que quadra amb  $\mathcal{Z} [\delta_D(k)] = 1$ . Per què?

Com hem vist a l'apartat anterior una estructura molt freqüent de la que caldrà obtenir la transformada  $z$ , serà

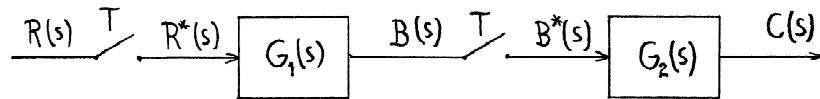


Val la pena de tenir simplifiades les operacions que implica. Fem-ho.

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G(s) \right] &= \mathfrak{z} \left[ (1 - e^{-Ts}) \frac{G(s)}{s} \right] = \mathfrak{z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] - z^{-1} \cdot \mathfrak{z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] = \\ &= (1 - z^{-1}) \mathfrak{z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] = \frac{z - 1}{z} \cdot \mathfrak{z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \end{aligned}$$

### Blocs en cascada amb i sense mostrejador intermedi

a) Sigui el sistema



Tenim

$$\begin{cases} C(s) = G_2(s) \cdot B^*(s) \\ B(s) = G_1(s) \cdot R^*(s) \end{cases}$$

d'on recordant la propietat vista al corol·lari en la pàgina 23

$$A(s) = B(s) \cdot C^*(s) \rightarrow A^*(s) = B^*(s) \cdot C^*(s)$$

queda

$$\begin{cases} C^*(s) = G_2^*(s) \cdot B^*(s) \\ B^*(s) = G_1^*(s) \cdot R^*(s) \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} C(z) = G_2(z) \cdot B(z) \\ B(z) = G_1(z) \cdot R(z) \end{cases}$$

o sigui

$$C(z) = G_1(z)G_2(z)R(z)$$

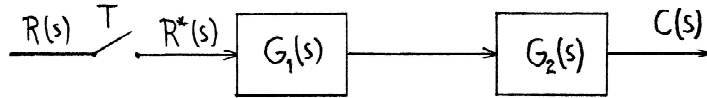
és a dir que la transmitància equivalent del conjunt és

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) = \mathfrak{z} [G_1(s)] \cdot \mathfrak{z} [G_2(s)]$$

— Fem un exemple. Notem que  $G_2(s)$  ha de ser una planta (té directament una sortida contínua) i per tant haurà de tenir el mantenidor, i  $G_1(s)$  pot ser un algorisme. Sigui per exemple  $G_1(s) = \frac{1}{s}$  i  $G_2(s) = \frac{1-e^{Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s+a}$ . Tenim

$$G(z) = \mathfrak{z} \left[ \frac{1}{s} \right] \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathfrak{z} \left[ \frac{1}{s(s+a)} \right] = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{z(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$$

b) Sigui ara el sistema



Tenim

$$C(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot R^*(s)$$

d'on

$$C^*(s) = \overline{G_1 G_2}^*(s) \cdot R^*(s)$$

i aplicant

$$F^*(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = F(z)$$

podem escriure

$$C(z) = \overline{G_1 G_2}(z) \cdot R(z)$$

i la transmitància equivalent del conjunt és ara

$$G(z) = \overline{G_1 G_2}(z) = \mathfrak{z} [G_1(s) \cdot G_2(s)] \neq \mathfrak{z} [G_1(s)] \cdot \mathfrak{z} [G_2(s)]$$

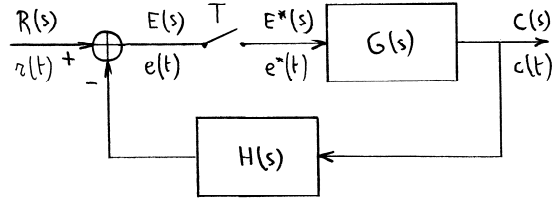
— Vegem un exemple el més similar possible al cas **a)** anterior. Per a que pugui tenir significat físic, com que  $G_2(s)$  segueix sent una planta,  $G_1(s)$  que està directament unida a ella també ho ha de ser. Caldrà posar el mantenidor davant de  $G_1(s)$ , però en conjunt hi haurà els mateixos blocs que en el cas anterior. Sigui, doncs,  $G_1(s) = \frac{1-e^{Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s}$  i  $G_2(s) = \frac{1}{s+a}$ , i ens queda

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathfrak{z} [G_1(s) \cdot G_2(s)] = \mathfrak{z} \left[ \frac{1-e^{Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+a} \right] = \frac{z-1}{z} \cdot \mathfrak{z} \left[ \frac{1}{s^2(s+a)} \right] = \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z[(aT-1+e^{-aT})z + (1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a^2(z-1)^2(z-e^{-aT})} = \\ &\quad \frac{(aT-1+e^{-aT})z + (1-e^{-aT}-aTe^{-aT})}{a^2(z-1)(z-e^{-aT})} \end{aligned}$$

clarament diferent del de l'apartat **a)**.

**Sistema en llaç tancat**

Sigue el sistema de la figura, del que volem trobar l'expressió de la sortida  $C(z)$  en funció de l'entrada  $R(z)$ . Suposarem que  $G(s)$  ja conté el mantenidor.



Tenim que

$$\begin{cases} C(s) = G(s)E^*(s) \\ E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s) \end{cases}$$

(Notem que si haguéssim fet  $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$  en el següent pas ens donaria  $E^*(s) = R^*(s) - \overline{HC}^*(s)$  i no podríem aïllar  $C^*(s)$ ).

De les expressions anteriors podem escriure

$$\begin{cases} C^*(s) = G^*(s)E^*(s) \\ E^*(s) = R^*(s) - \overline{GH}^*(s)E^*(s) \end{cases}$$

i com que tot està ja amb asterisc, ja ho podem escriure tot amb  $z$

$$\begin{cases} C(z) = G(z)E(z) \\ E(z) = R(z) - \overline{GH}(z)E(z) \end{cases}$$

aïllem  $E(z)$

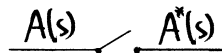
$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + \overline{GH}(z)}$$

i finalment

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + \overline{GH}(z)} R(z)$$

### Sistematitzem ara el procediment:

— posar noms als terminals de tots els mostrejadors, de manera que la sortida del mostrejador tingui el nom de l'entrada però amb asterisc



— considerar els mostrejadors com a punts de sortida i entrada virtuals de senyal al sistema (en el sentit del flux de senyal) i expressar les sortides real  $C(s)$  i virtuals  $A(s)$ ,  $\dots$ , del sistema, en funció de les entrades real  $R(s)$  i virtuals  $A^*(s)$ ,  $\dots$ , del sistema.

— aplicar la propietat

$$A(s) = B(s) \cdot C^*(s) \rightarrow A^*(s) = B^*(s) \cdot C^*(s)$$

per a aconseguir que totes les variables siguin amb asterisc.

L'ordre en que fem els següents dos passos és indistint.

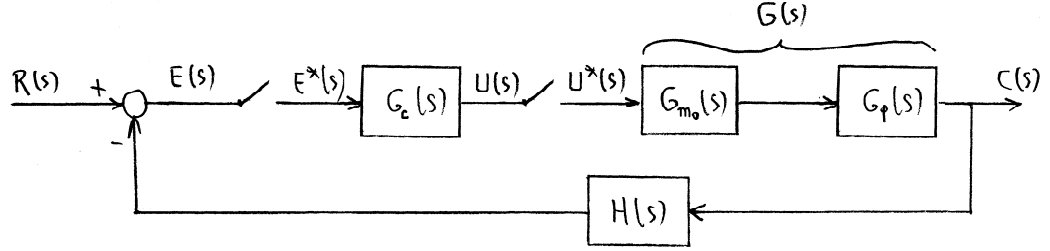


— quan totes les variables ja són amb asterisc podem passar-les totes a  $z$ , tenint cura de mantenir les agrupacions.

— aïllar la sortida desitjada en funció de l'entrada eliminant totes les variables que no siguin blocs.

### Exemple

Trobeu la transmitància discreta equivalent del sistema



Plantegem

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - G(s)H(s)U^*(s) \\ U(s) = G_c(s)E^*(s) \\ C(s) = G(s)U^*(s) \end{cases}$$

d'on

$$(1) \quad \begin{cases} E^*(s) = R^*(s) - \overline{GH}^*(s)U^*(s) \\ U^*(s) = G_c^*(s)E^*(s) \\ C^*(s) = G^*(s)U^*(s) \end{cases}$$

Ara tan s'hi val eliminar  $E^*(s)$  i  $U^*(s)$  i passar a  $z$ , que passar a  $z$  i eliminar  $E(z)$  i  $U(z)$ . Això és general, un cop estan totes les variables amb asterisc es pot seguir manipulant-les o passar a  $z$  i manipular les funcions de  $z$ . Podem, doncs, en les manipulacions intermèdies representar  $A^*(s)$  o  $A(z)$  per  $A$ , i al final restituir la nomenclatura correcta. Així doncs,

$$\begin{cases} U = G_c R - G_c \overline{GH} U \rightarrow U (1 + G_c \overline{GH}) = G_c R \\ C = GU = \frac{G_c GR}{1 + G_c \overline{GH}} \end{cases}$$

i finalment

$$W(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)\overline{GH}(z)}$$

— Si volem la transmitància de l'error, de les dues primeres equacions de (1), tenim

$$E = R - \overline{GH} \cdot G_c E$$

d'on

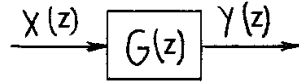
$$W_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G_c \overline{GH}}$$



### 3 Anàlisi

#### 3.1 Estudi del comportament d'un model discret en termes del d'un de continu

Vegem quina és la resposta d'un sistema arbitrari  $G(z)$  a una entrada també arbitrària,  $X(z)$ .



Si  $G(z)$  té els pols  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , i  $X(z)$  té els pols  $q_1, q_2, \dots, q_l$ , serà

$$Y(z) = G(z)X(z) = \underbrace{\frac{A_1 z}{z - p_1} + \dots + \frac{A_n z}{z - p_n}}_{\text{termes deguts als pols de } G(z)} + \underbrace{\frac{B_1 z}{z - q_1} + \dots + \frac{B_l z}{z - q_l}}_{\text{termes deguts als pols de } X(z)}$$

Si volem estudiar la resposta deguda únicament al sistema  $G(z)$  caldrà fer  $X(z) = 1$ , i això equivaldrà a estudiar la resposta impulsional (pàgina 24) de  $G(z)$ . Per a analitzar la resposta temporal caldrà fer la transformada  $z$  inversa.

Mirem un qualsevol dels sumands, p.e.  $\frac{A_1 z}{z - p_1}$ . Volem que siguin del tipus  $\frac{Az}{z - e^{aT}}$ . Posarem el seu pol  $p_1$  en forma exponencial i en funció del període de mostreig  $T$ :

$$\frac{A_1 z}{z - p_1} = \frac{A_1 z}{z - e^{\ln p_1}} = \frac{A_1 z}{z - e^{a_1 T}}$$

a on hem fet

$$a_1 T = \ln p_1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{T} \ln p_1$$

i ara tenim

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{A_1 z}{z - p_1} \right] = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{A_1 z}{z - e^{a_1 T}} \right] = A_1 e^{a_1 kT}$$

i el terme de la dreta coincideix amb mostres cada  $T$  unitats de temps de  $A_1 e^{a_1 t}$ , que és la resposta impulsional del sistema continu  $\frac{A_1}{s - a_1}$  que té el pol  $a_1$ .

És a dir, la resposta impulsional pròpia del sistema  $G(z)$  amb pols  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , és

$$y(kT) = A_1 e^{a_1 kT} + \dots + A_n e^{a_n kT}$$

que coincideix amb mostres de període  $T$  del senyal

$$y(t) = A_1 e^{a_1 t} + \dots + A_n e^{a_n t}$$

que és la resposta impulsional pròpia del sistema continu que té els pols  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , amb  $a_i = \frac{1}{T} \ln p_i$

Així, doncs, mapejant els pols  $p_i$  discrets als  $a_i$  continus, amb  $p_i = e^{a_i T}$ , podem usar els coneixements que ja tenim del comportament dels sistemes continus per a deduir el comportament propi del discret. La resposta impulsional del sistema discret amb pols  $p_i$  seran mostres de la resposta impulsional del sistema continu amb pols  $a_i = \frac{1}{T} \ln p_i$ . És a dir la resposta impulsional del sistema discret  $G(z)$  seran mostres de la resposta impulsional del sistema continu  $G(s) = \mathfrak{z}^{-1} [G(z)]$ .

**Exemple**

Sigui

$$G(z) = \frac{z(z+0.4)(z+0.5)}{(z-0.01)(z-0.02)(z-0.04+0.6j)(z-0.04-0.6j)}$$

amb  $T = 0.1$  s.

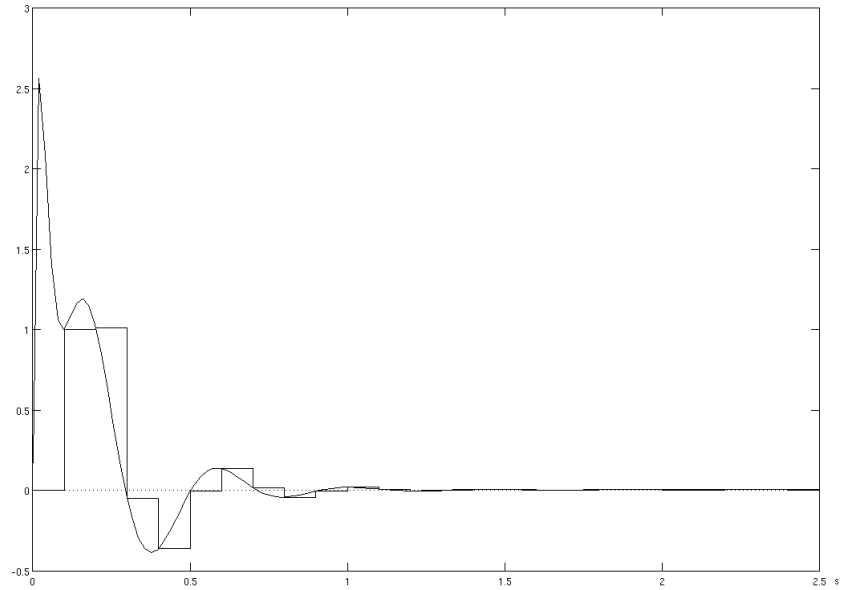
Descomposant-la en fraccions senzilles queda

$$G(z) = \frac{-57.94z}{z-0.01} + \frac{60.6z}{z-0.02} + \frac{(-1.33+0.3948j)z}{z-0.04-0.6j} + \frac{(-1.33-0.3948j)z}{z-0.04+0.6j}$$

Ara fem  $G(s) = \mathfrak{z}^{-1}[G(z)]$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{-57.94}{s - \frac{1}{T} \ln(0.01)} + \frac{60.6}{s - \frac{1}{T} \ln(0.02)} + \frac{-1.33 + 0.3948j}{s - \frac{1}{T} \ln(0.04 - 0.6j)} + \frac{-1.33 - 0.3948j}{s - \frac{1}{T} \ln(0.04 + 0.6j)} = \\ &= \frac{322.956(s^2 + 3.311s + 400)}{(s + 46.05)(s + 39.12)(s^2 + 10.17s + 252.1)} \end{aligned}$$

Si cerquem la resposta impulsional discreta de  $G(z)$  i la resposta impulsional de  $G(s)$  obtenim



i podem comprovar la plena coincidència de les mostres amb el senyal continu. Notem que el primer pic, en no coincidir amb cap mostra, el model discret no ens el delatarà, i el mateix passa amb el segon. Pot semblar que agafant més mostres, és a dir disminuint  $T$ , podríem detectar aquests pics. No és així. En variar  $T$ , també canviarà la pròpia  $G(s) = \mathfrak{z}^{-1}[G(z)]$ , i la seva resposta impulsional s'escalarà en el temps en la mateixa proporció que ho hagi fet  $T$ . El resultat net és que la figura anterior quedarà igual excepte que variarà l'escala de l'eix de temps.

— Cal insistir que aquesta coincidència de les mostres amb la resposta del sistema continu és certa per a les respostes impulsional, que no introdueixin pols. Per a altres

senyals aquesta coincidència no hi és.<sup>1</sup>

— Si  $Y(z) = G(z)X(z)$  no es pot descompondre en fraccions del tipus  $\frac{Az}{z-p}$ , sí que es podrà descompondre, per a un  $n$  adient,  $Y_1(z) = z^n Y(z)$ . I com que  $Y(z) = z^{-n} Y_1(z)$ ,  $Y(z)$  serà la mateixa  $Y_1(z)$  retardada de  $n$  mostres, cosa que no en canvia la seva naturalesa.

Podem, doncs, aprofitar els coneixements del comportament dels sistemes continus per a estudiar el comportament d'un sistema discret. Hi ha varies possibilitats:

— Obtenir el sistema continu

$$G(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n}$$

amb  $s_i = \frac{1}{T} \ln z_i$ , (a on, recuperant la nomenclatura habitual,  $z_i$  són els pols del sistema discret) i estudiar-lo. Notem que és  $G(s) = \mathfrak{z}^{-1} [G(z)]$ .

— Si sols ens interessa els efectes més pronunciats dels pols dominants  $z_d$ , considerar els corresponents  $s_d = \frac{1}{T} \ln z_d$  i els seus efectes.

— Prèviament i d'una manera general traslladar de continu a discret els coneixements dels efectes dels pols sobre el comportament del sistema. Així podrem estudiar directament al pla  $z$  els efectes dels pols discrets per a qualsevol sistema.

Això darrer és el que desenvolupem a continuació.

a) Comencem per veure com el **semiplà  $s$  esquerre** es mapeja sobre el pla  $z$ . Tenim

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = \rho e^{j\theta}$$

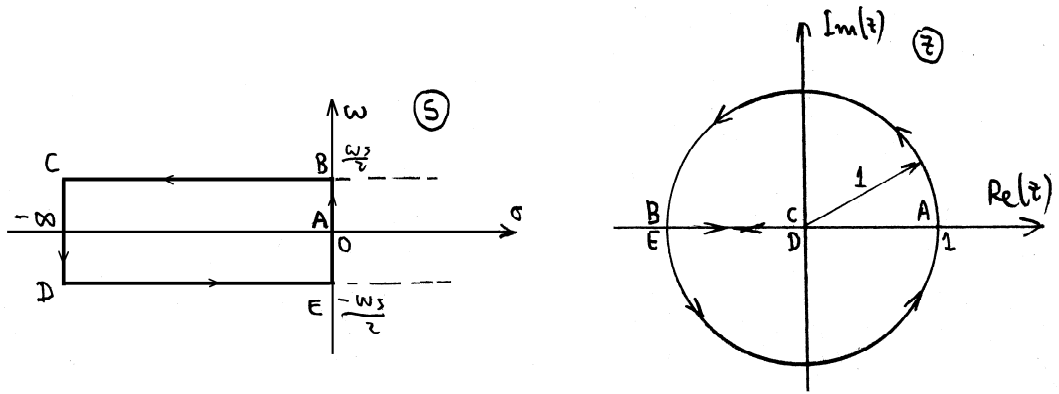
és a dir

$$\begin{cases} \rho = |z| = e^{\sigma T} \\ \theta = \angle z = \omega T = \frac{\omega}{\omega_s} \cdot 2\pi \end{cases}$$

Del semiplà esquerre, en mapejarem el corresponent a la banda principal, ja sabem (pàg. 15) que les bandes complementàries van a parar al mateix lloc. Anem per trams:

---

<sup>1</sup> Per a qualsevol altre senyal  $x(kT)$ , les mostres de la sortida de  $G(z)$  coincidrien amb la resposta impulsional de  $\mathfrak{z}^{-1} [X(z)G(z)]$ . Notem que això implica un sistema continu diferent per a cada senyal discret que volguéssim estudiar.

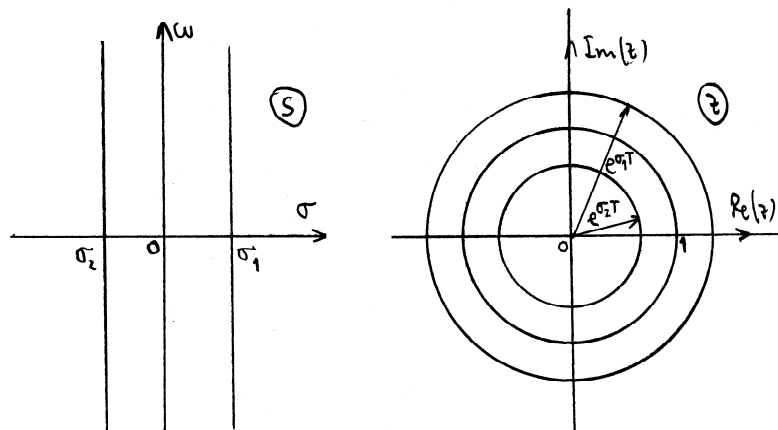


$$\begin{aligned}
 A \rightarrow B & \quad \begin{cases} \sigma = 0 \\ \omega = 0 \rightarrow \frac{\omega_s}{2} \end{cases} & \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = 0 \rightarrow \pi \end{cases} \\
 B \rightarrow C & \quad \begin{cases} \sigma = 0 \rightarrow -\infty \\ \omega = \frac{\omega_s}{2} \end{cases} & \quad \begin{cases} \rho = 1 \rightarrow 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \\
 C \rightarrow D & \quad \begin{cases} \sigma = -\infty \\ \omega = \frac{\omega_s}{2} \rightarrow -\frac{\omega_s}{2} \end{cases} & \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ \theta = \pi \rightarrow -\pi \end{cases} \\
 D \rightarrow E & \quad \begin{cases} \sigma = -\infty \rightarrow 0 \\ \omega = -\frac{\omega_s}{2} \end{cases} & \quad \begin{cases} \rho = 0 \rightarrow 1 \\ \theta = -\pi \end{cases} \\
 E \rightarrow A & \quad \begin{cases} \sigma = 0 \\ \omega = -\frac{\omega_s}{2} \rightarrow 0 \end{cases} & \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -\pi \rightarrow 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

És a dir, que el semiplà esquerre es transforma en l'interior del cercle unitat.

— Val la pena remarcar què passa amb els pols reals. El cas del pol  $s = 0$ , és a dir el cas d'un integrador  $\frac{1}{s}$ , correspon al pla  $z$  a un pol a  $z = e^{sT} = e^0 = 1$  és a dir que l'integrador al pla  $z$  el veurem com  $\frac{1}{z-1}$ . D'altra banda si portem el pol  $z$  cap l'origen,  $z = 0$ , correspon a  $s = -\infty$ , valor al que en temps continu no podem pas arribar-hi. I els pols  $z$  reals i negatius impliquen un comportament nou que veurem una mica més avall (pàg. 42). Els pols dominants, que en el pla  $s$  són els de més a la dreta, en el pla  $z$  seran els de mòdul més gran, els més allunyats de l'origen.

b) Lloc dels pols que provoquen a la resposta **esmortiment**  $\sigma$  **constant**.



Com veiem, les rectes de  $\sigma$  constant a  $s$ , passen a ser al pla  $z$  cercles amb centre a l'origen i radi  $e^{\sigma T}$ . Si  $\sigma < 0$ , els cercles queden dintre del cercle unitat.

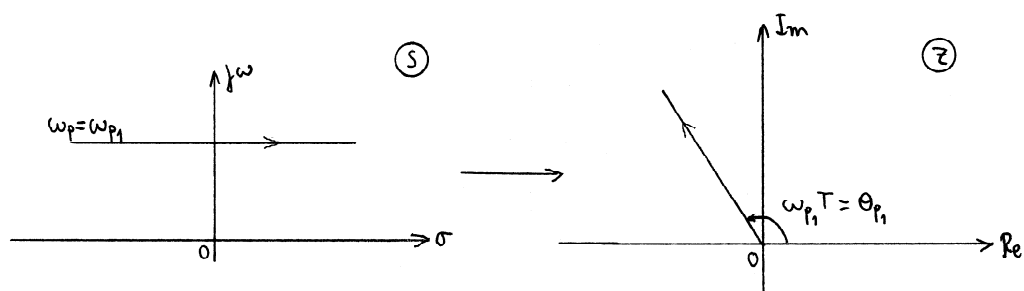
c) Lloc dels pols que provoquen a la resposta una oscil·lació de **frequència**  $\omega_p$  **constant**. Les arrels de l'equació característica d'un sistema de segon ordre

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

són

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_p$$

Si fixem  $\omega_p$ , en variar  $\xi$  o  $\omega_n$  els punts  $s$  descriuen rectes horitzontals (figura de l'esquerra).

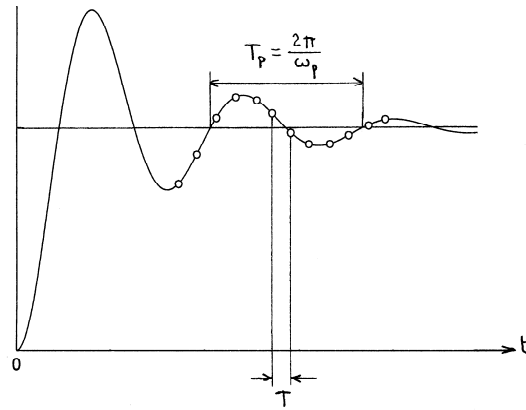


Fent

$$z = e^{sT} = e^{-\xi\omega_n T} \cdot e^{j\omega_p T}$$

veiem que les rectes de  $\omega_p$  constant del pla  $s$ , passen a ser rectes per l'origen i angle  $\theta = \omega_p T$  al pla  $z$  (figura de la dreta).

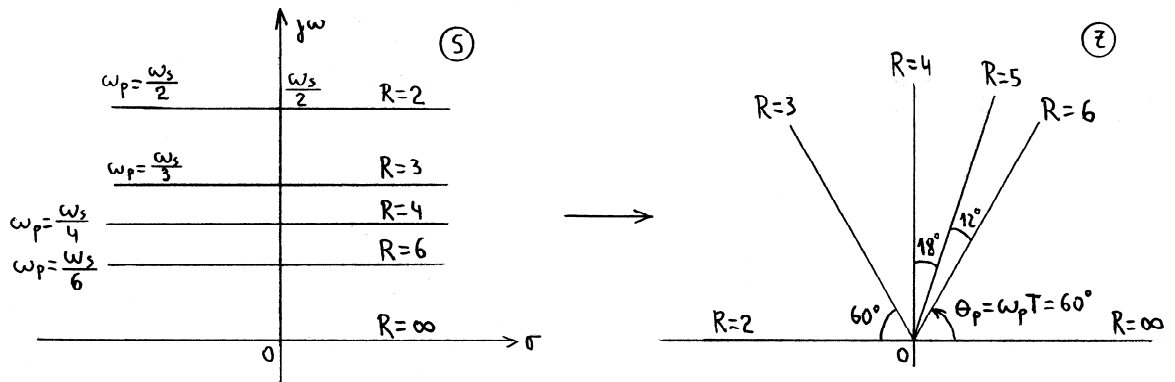
Serà bo relacionar la  $\omega_p$  d'oscil·lació de la resposta amb el nombre de mostres que agafem a cada període,  $T_p$ , d'aquesta oscil·lació. Anomenem  $R$  a aquest nombre,



$$R = \frac{T_p}{T} = \frac{\omega_s}{\omega_p} = \frac{\omega_s T}{\omega_p T} = \frac{2\pi}{\theta_p}$$

Notem que, pel teorema del mostreig, un mostreig correcte implica triar  $R \geq 2$ .

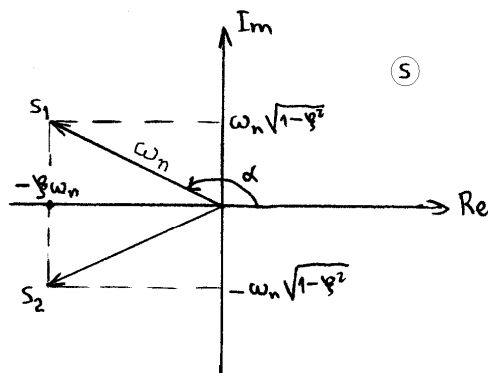
Per a una  $\omega_s$  donada (és a dir per a un  $T$  donat), per a diferents  $\omega_p$  i per tant diferents  $R$ , queda:



d) Coeficient d'esmortiment  $\xi$  constant.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$





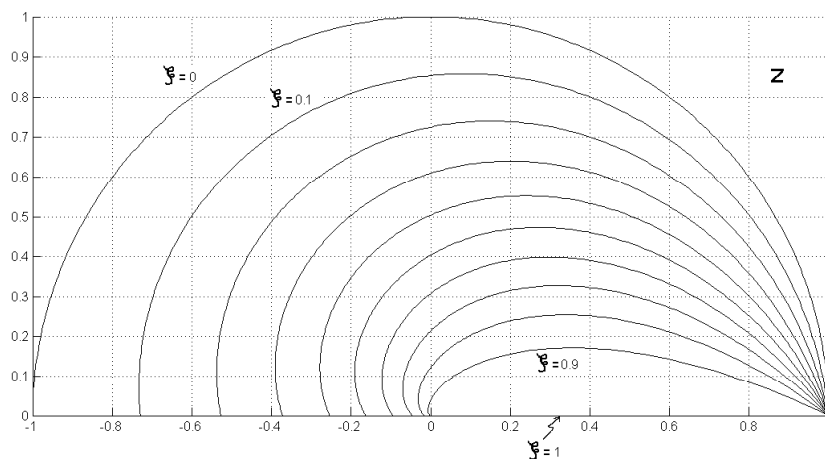
Tenim

$$\begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{1 - \xi^2} \\ \cos \alpha = -\xi \end{cases}$$

d'on si  $\xi$  és constant, també ho serà  $\alpha$ ; el lloc geomètric al pla  $s$  són, doncs, rectes per l'origen. Al pla  $z$  serà

$$\begin{cases} \rho = |z| = e^{-\xi \omega_n T} \\ \theta = \angle z = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} T \end{cases}$$

que en variar  $\omega_n$  són espirals logarítmiques parametritzades per  $\xi$ :



Les espirals continuen indefinidament, però les tallem per que no passin per sota de  $R = 2$ , ja que el mostreig seria incorrecte. Per a  $\xi = 1$  l'espiral degenera en el segment de recta entre 1 i 0. A la pàgina 95 hi ha una reproducció a escala més gran, a on també s'han indicat les corbes de  $\omega_n$  constant.

#### Paràmetres del sistema de temps continu a partir dels pols del discret.

Hem vist que podem analitzar la resposta d'un sistema discret amb pols  $z$  en funció de la d'un de continu amb pols  $s = \frac{1}{T} \ln z$ . A l'estudi de la resposta dels sistemes continus s'utilitzen uns paràmetres  $(\tau, \xi, \omega_n, \omega_p)$ . Vegem com podem obtenir aquests paràmetres continus a partir directament dels pols del sistema discret (òbviament, també els podem obtenir dels pols del sistema continu).

a) Sistemes de **primer ordre**.

Ens cal una expressió per a la constant de temps que serveixi tant per a sistemes de desfasament mínim

$$\frac{k}{\tau s + 1}$$

com per als de desfasament no mínim

$$\frac{k}{\tau s - 1}$$

En el primer cas, el pol és  $s_1 = \frac{-1}{\tau}$  i en el segon és  $s_1 = \frac{1}{\tau}$ . En tots dos casos la constant de temps és, per definició, positiva. Per tant podem dir que

$$\tau = \left| \frac{1}{s_1} \right|$$

a on  $s_1$  és el pol. El sistema de temps discret de primer ordre, també tindrà un sol pol  $z_1$ , que en conseqüència serà real. En fer  $s_1 = \frac{1}{T} \ln z_1$ , amb  $z_1$  el pol discret, queda

$$\tau = \left| \frac{1}{\frac{1}{T} \ln z_1} \right| = \left| \frac{T}{\ln z_1} \right|$$

Aquí apareix un fenomen nou. Si  $z_1 > 0$ , no hi ha problema, i podem escriure

$$\tau = \left| \frac{T}{\ln z_1} \right| = \left| \frac{T}{\ln \rho_1} \right|$$

Però si  $z_1 < 0$ ,  $\ln z_1$  és complex. És fàcil de veure (pàg. 94) que com que  $z_1$  és real i negatiu,  $\ln z_1 = \ln \rho_1 + j\pi$ . És a dir

$$s_1 = \frac{1}{T} \ln z_1 = \frac{1}{T} \ln \rho_1 + j \frac{\pi}{T}$$

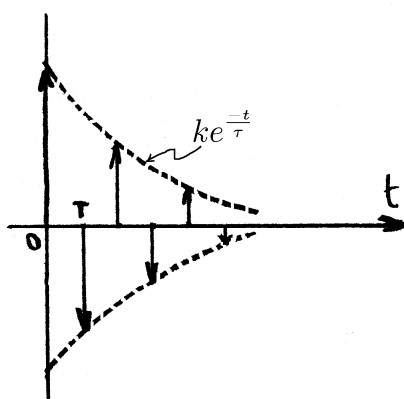
i en ser  $s_1$  complex, la resposta oscil·la. Aleshores ens calen  $\xi$  i  $\omega_n$ . La freqüència d'oscil·lació és la part imaginària de  $s$ ,

$$\omega_p = \frac{\pi}{T}$$

i el període d'oscil·lació és

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = 2T$$

Això vol dir que la resposta impulsional canvia de signe a cada mostra:



Es pot veure que és

$$\xi = \frac{-\ln \rho_1}{\sqrt{\ln^2 \rho_1 + \pi^2}}$$

i

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2 \rho_1 + \pi^2}$$

També podem comprovar que l'esmortiment  $\sigma$ , la part real de  $s_1$ , és  $\sigma = \frac{\ln \rho_1}{T} = -\xi \omega_n$

Exercici: 1- Obtingueu, per divisió, la resposta impulsional de  $G(z) = \frac{z}{z+0.5}$  i comproveu que es comporta com acabem de descriure.

2- Repetiu l'exercici, però ara per la via d'obtenir l'equació de diferències i anar trobant els valors successius.

3- Trobeu l'esmortiment de  $G(z)$  per a  $T = 1$  s i comproveu que  $e^{\sigma k}$  també dona els mateixos valors dels mòduls.

b) Sistemes de **segon ordre**.

Tindran pols  $z$  complexos conjugats.  $s_{1,2} = \frac{1}{T} \ln z_{1,2}$  també serà un parell de valors complexos conjugats. Es pot comprovar que

$$\xi = \frac{-\ln \rho_1}{\sqrt{\ln^2 \rho_1 + \theta_1^2}}$$

$$\omega_n = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2 \rho_1 + \theta_1^2}$$

### Índex de dominància.

En sistemes continus el pol o pols de part real més a la dreta sempre acaba dominant (tant si el sistema és estable com si no).

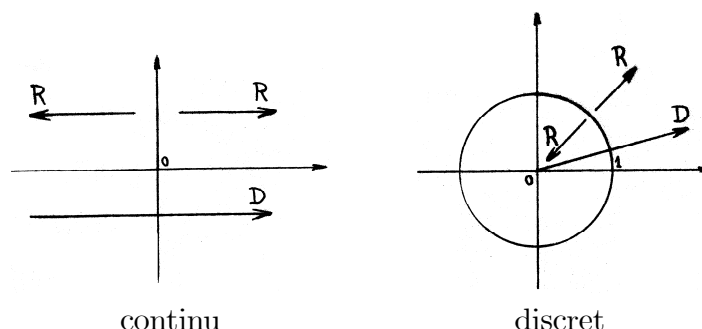
És freqüent, però, exigir una dominància acusada, un índex de dominància superior a 5, per exemple. És a dir, per a sistemes estables, si

$$\frac{\text{Re}(s_2)}{\text{Re}(s_1)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} > 5$$

diem que el sistema 1 domina sobre el 2.

Notem que per a sistemes estables (sempre a l'esquerra) els pols dominants són els

més lents.



En sistemes discrets, el pol o pols de mòdul més gran, sempre acaba dominant. També s'aplica, però, el criteri anterior, que per a sistemes discrets estables (l'estabilitat s'estudia a l'apartat següent), diu que si

$$\frac{\ln \rho_2}{\ln \rho_1} > 5$$

considerem que el pol 1 domina sobre el 2.

Notem que per a sistemes estables (interior del cercle unitat) els pols dominants són els més lents.

Exercici: Per què no serveixen les expressions anteriors per a sistemes no estables?

### 3.2 Estabilitat

Recordem que en sistemes de temps continu, descrits per la seva transmitància  $G(s)$ , l'estabilitat del sistema la determina la naturalesa dels pols de  $G(s)$ , arrels de la seva equació característica.

— Si hi ha algun pol de part real positiva o algun pol múltiple de part real nul·la, el sistema és inestable.

— Si no és dóna el cas anterior, però hi ha pols senzills de part real nul·la, el sistema és marginalment estable.

— Si tots els pols són de part real negativa, el sistema és estable.

En sistemes de temps discret, descrits per la seva transmitància  $G(z)$ , les anteriors condicions referides als pols de  $G(z)$ , degut al mapeig  $z = e^{sT}$  queden:

— Si hi ha algun pol de  $|z| > 1$  o algun pol múltiple de  $|z| = 0$ , el sistema és inestable.

— Si no és dóna el cas anterior, però hi ha pols senzills de  $|z| = 0$ , el sistema és marginalment estable.

— Si tots els pols són de  $|z| < 1$ , el sistema és estable.

Els pols de  $G(z)$  són les arrels de la seva equació característica, diguem-li  $D(z) = 0$ . Per a saber si totes les arrels de  $D(z) = 0$  són de  $|z| < 1$  s'utilitza el

#### **Criteri de Jury**

Sigui

$$D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

amb  $a_n > 0$ , l'equació de grau  $n$  de la que volem saber si totes les seves  $n$  arrels són de  $|z| < 1$ .

Construïm la taula

$n$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\cdots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$n-1$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$		$\cdots$	$b_1$	$b_0$	
$n-2$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$\cdots$	$c_{n-2}$		
	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$\cdots$	$c_0$		
$\vdots$	$\vdots$						
2	$p_0$	$p_1$	$p_2$				

de la següent manera.

La primera columna ens serveix d'índex, i sempre va de  $n$  a 2.

Vegem ara les fileres a la seva dreta. La primera consisteix en els coeficients del polinomi en ordre de potències creixents de  $z$ . La segona filera, el mateix, però en ordre decreixent.

Els elements de la filera següent (índex  $n-1$ ) s'obtenen dels determinants

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix} \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-2} \\ a_n & a_2 \end{vmatrix} \quad \cdots \quad b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

i després es repeteixen a sota en ordre invers.

Els de la següent (índex  $n-2$ ), s'obtenen a partir de

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix} \quad c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix} \quad c_2 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-3} \\ b_{n-1} & b_2 \end{vmatrix} \quad \cdots \quad c_{n-2} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{vmatrix}$$

i també es repeteixen a sota en ordre invers. I així successivament, cada dues fileres a partir de les dues anteriors, fins a la filera d'índex 2, que sortirà de tres elements.

La condició necessària i suficient per a que  $D(z) = 0$  tingui totes les seves arrels estrictament dintre del cercle unitat és que es compleixin les següents  $n+1$  desigualtats:

- 1)  $D(1) > 0$
- 2)  $D(-1) \begin{cases} > 0 & \text{si } n \text{ parell} \\ < 0 & \text{si } n \text{ imparell} \end{cases}$
- 3)  $|a_0| < a_n$
- 4)  $|b_0| > |b_{n-1}|$
- 5)  $|c_0| > |c_{n-2}|$
- $\vdots$
- $n+1) |p_0| > |p_2|$

Per a comprovar les tres primeres condicions no cal la taula; si l'únic que es vol és veure si el sistema és estable, serà bo començar per elles i si resulta inestable no caldrà continuar. Són també les úniques condicions que calen per a un sistema de segon ordre.

— Hi ha casos singulars (que no estudiarem): primer i darrer elements d'una filera zero, i tots els elements d'una filera zero.

**Exemple:** Estudiem l'estabilitat de la transmitància

$$W(z) = \frac{z - 0.9}{z^4 - 2.2z^3 + 1.79z^2 - 0.638z + 0.084}$$

L'equació característica és

$$D(z) \equiv z^4 - 2.2z^3 + 1.79z^2 - 0.638z + 0.084 = 0$$

Caldran 5 condicions. Com que el coeficient de  $z^4$  és positiu podem ja, abans de fer la taula, comprovar les tres primeres condicions:

$$\begin{aligned} D(1) &= 0.036 > 0 \\ D(-1) &= 5.712 > 0 \\ |a_0| < a_n &\rightarrow |0.084| < 1 \end{aligned}$$

que es compleixen totes. Passem, doncs, a la taula:

4	0.084	-0.638	1.79	-2.2	1
	1	-2.2	1.79	-0.638	0.084
3	-0.9929	2.1464	-1.6396	0.4532	
	0.4532	-1.6396	2.1464	-0.9929	
2	0.7805		0.6552		

i ara mirem les dues condicions que manquen:

$$|b_0| > |b_{n-1}| \rightarrow |-0.9929| > |0.4532|$$

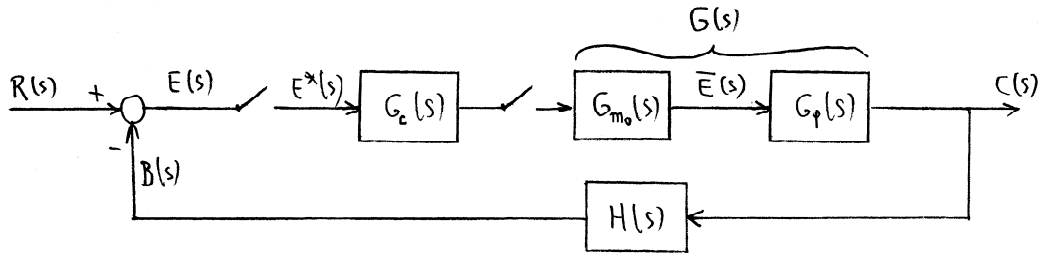
$$|p_0| > |p_2| \rightarrow |0.7805| > |0.6552|$$

que també es compleixen.  $W(z)$  és, doncs, estable.

### 3.3 Error permanent

Igual que en temps continu, les expressions que obtindrem per a l'error permanent són sols vàlides per a sistemes estables.

Particularitzarem l'estudi de l'error permanent dels sistemes de control digital a sistemes amb l'estructura



L'error es defineix com

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

L'error mostrejat permanent, si el límit existeix, és

$$e_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT)$$

Tot i que el valor de  $e_p^*$  així obtingut és un valor constant, no és un tren d'impulsos, mantenim la nomenclatura amb asterisc per a senyalar que aquest valor sols és vàlid als instants de mostreig.

Si  $\frac{z-1}{z}E(z)$  té tots els pols dintre del cercle unitat, pel teorema del valor final es

verifica

$$e_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z)$$

De la transmitància de l'error (pàgina 33)

$$E(z) = \frac{1}{1+L(z)} \cdot R(z)$$

i queda

$$e_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \frac{R(z)}{1+L(z)} \right)$$

Notem que l'error permanent depèn de l'entrada  $R(z)$  i de la transmitància de llaç  $L(z)$ .

— Al sistema de la figura, la transmitància de llaç és

$$L(z) = G_c(z) \overline{GH}(z) = G_c(z) \cdot \mathfrak{z} [G_{m0}(s) G_p(s) H(s)] = G_c(z) \cdot \frac{z-1}{z} \mathfrak{z} \left[ \frac{G_p(s) H(s)}{s} \right]$$

**Error permanent per a entrada graó.**

Suposarem sempre que el sistema en anell tancat és estable.

Tenim

$$r(t) = Au(t) \rightarrow R(z) = \frac{Az}{z-1}$$

i

$$e_p^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{\frac{Az}{z-1}}{1+L(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A}{1+L(z)} = \frac{A}{1+\lim_{z \rightarrow 1} L(z)}$$

i si definim com a *coeficient d'error de posició* a

$$\boxed{K_p = \lim_{z \rightarrow 1} L(z)}$$

queda

$$e_{pg}^* = \frac{A}{1+K_p}$$

L'error serà nul per a  $K_p$  infinit, és a dir, quan  $L(z)$  tingui al menys un pol a  $z = 1$ , és a dir un integrador  $\frac{1}{z-1}$ .

**Error permanent per a entrada rampa.**

Tenim

$$r(t) = Atu(t) \rightarrow R(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2}$$

i

$$e_{pr}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{AT}{(z-1)[1+L(z)]} = \frac{A}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} L(z)}$$

i si definim com a *coeficient d'error de velocitat* a

$$\boxed{K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) L(z)]}$$

queda

$$e_{pr}^* = \frac{A}{K_v}$$

L'error serà nul per a  $K_v$  infinit, és a dir, quan  $(z-1)L(z)$  tingui al menys un pol a  $z=1$  o sigui, quan  $L(z)$  tingui al menys dos pols a  $z=1$ .

**Error permanent per a entrada paràbola.**

Tenim

$$r(t) = \frac{A}{2}t^2 u(t) \rightarrow R(z) = \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

i

$$e_{pp}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{AT^2(z+1)}{2(z-1)^2[1+L(z)]} = \frac{A}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{T^2} L(z)}$$

i si definim com a *coeficient d'error d'acceleració* a

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 L(z)]$$

queda

$$e_{pp}^* = \frac{A}{K_a}$$

L'error serà nul per a  $K_a$  infinit, és a dir, quan  $(z-1)^2 L(z)$  tingui al menys un pol a  $z=1$  o sigui, quan  $L(z)$  tingui al menys tres pols a  $z=1$ .

— Es poden definir de manera anàloga coeficients d'error d'ordre superior.

— Tot i que a l'expressió de  $K_v$  i de  $K_a$  hi apareix el període de mostreig  $T$ , els coeficients d'error no depenen de  $T$ .

**Tipus d'un sistema**

S'anomena *tipus* d'un sistema digital, al nombre de integradors (elements  $\frac{1}{z-1}$ ) que tingui el sistema a la seva transmitància de llaç. És a dir, en el nostre sistema, és la  $r$  de

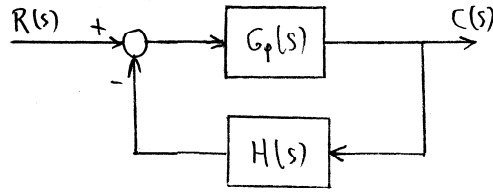
$$L(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^r D(z)}$$

— Es pot comprovar que donat un sistema de temps continu, en intercalar-hi un conjunt mostrejador/mantenidor d'ordre zero, el sistema discret resultant té el mateix tipus que el sistema original (malgrat l'integrador del mantenidor  $G_{m0}(s)$ ).

**Exemple**

Sigui el sistema





amb

$$G_p(s) = \frac{2}{s+3}$$

i

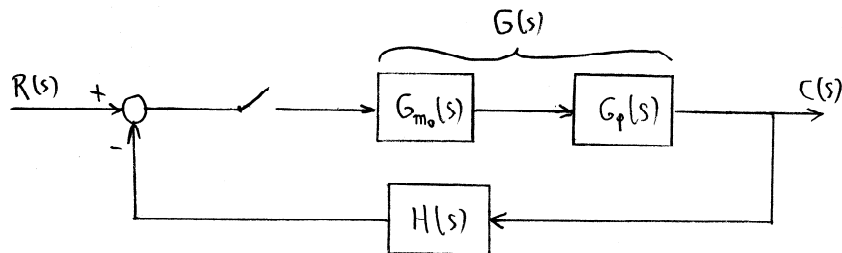
$$H(s) = \frac{1}{s}$$

La transmitància de llaç és

$$G_p H(s) = \frac{2}{s(s+3)}$$

i el sistema és de tipus 1.

Si hi intercalem el conjunt mostrejador/mantenidor queda



amb transmitància de llaç

$$L(z) = \overline{G_{m0} G_p H}(z) = \overline{GH}(z)$$

Calculem-la:

$$\begin{aligned} L(z) &= \overline{GH}(z) = \mathfrak{z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{2}{s(s+3)} \right] = \frac{z-1}{z} \cdot \mathfrak{z} \left[ \frac{2}{s^2(s+3)} \right] = \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{z [(3T-1+e^{-3T})z + (1-e^{-3T}-3Te^{-3T})]}{3(z-1)^2(z-e^{-3T})} = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{(3T-1+e^{-3T})z + (1-e^{-3T}-3Te^{-3T})}{(z-1)(z-e^{-3T})} \end{aligned}$$

i veiem que, efectivament, té un sol integrador. El sistema discret resultant segueix sent de tipus 1.

— Es pot comprovar que quan hi ha una entrada a un altre punt del llaç (per exemple una pertorbació), el tipus del sistema respecte a aquesta entrada és el nombre d'integradors que hi ha des de l'error a l'entrada en qüestió en el sentit del flux de senyal. Alerta, però, que les expressions de l'error degut a aquesta nova entrada no són pas les obtingudes per a l'entrada  $R(s)$ .

**Guany canònic de la transmitància de llaç, tipus i error permanent.**

Recordem que el guany canònic d'una transmitància contínua era el factor  $k$  que quedava en escriure-la en forma canònica. En el nostre cas, si la transmitància de llaç  $G_p(s)H(s)$  té la forma

$$G_p(s)H(s) = \frac{k(c_ms^m + c_{m-1}s^{m-1} + \dots + c_1s + 1)}{s^r(d_qs^q + d_{q-1}s^{q-1} + \dots + d_1s + 1)}$$

es pot demostrar que els valors dels coeficients d'error del sistema discret obtingut del continu en posar-hi un grup mostrejador-mantenidor són

tipus	$K_p$	$K_v$	$K_a$
0	$k$	0	0
1	$\infty$	$k$	0
2	$\infty$	$\infty$	$k$

i l'error queda

entrada→	$Au(t)$	$Atu(t)$	$\frac{1}{2}At^2u(t)$
tipus ( $r$ )	error permanent		
↓	$e_{pg}^*$	$e_{pr}^*$	$e_{pp}^*$
0	$\frac{A}{1+k}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{A}{k}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{A}{k}$

### Exemple

Retornant a l'exemple de l'apartat anterior, el guany canònic de la transmitància de llaç del sistema continu

$$G_pH(s) = \frac{2}{s(s+3)}$$

és  $k = \frac{2}{3}$ .

En ser de tipus 1, aquest valor haurà de coincidir amb el de  $K_v$  del sistema discret. Efectivament,

$$\begin{aligned} K_v &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)L(z)] = \\ &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (z-1) \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{(3T-1+e^{-3T})z + (1-e^{-3T}-3Te^{-3T})}{(z-1)(z-e^{-3T})} \right] = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(incidentalment podem notar que, com ja havíem dit, no depèn de  $T$ ). L'error permanent per a una entrada en rampa  $Atu(t)$  serà, doncs, el mateix pel sistema continu

$$e_{pr} = \frac{A}{k} = \frac{3}{2}A$$

que pel discret

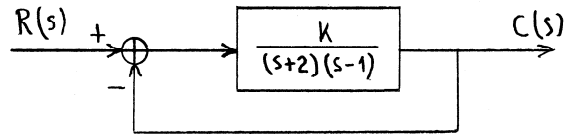
$$e_{pr}^* = \frac{A}{K_v} = \frac{3}{2}A$$

Cal vigilar que el corresponent sistema sigui estable. Pot passar, per exemple, que el sistema continu sigui estable i el corresponent discret no ho sigui. Les expressions obtingudes seguiran donant els mateixos valors de l'error permanent, però el del discret no serà vàlid.

### 3.4 Lloc geomètric de les arrels (l.g.a.)

Comencem amb un exemple.

Sigui el sistema continu



La seva transmitància és

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{(s+2)(s-1)}}{1 + \frac{k}{(s+2)(s-1)}} = \frac{k}{s^2 + s - 2 + k}$$

i estudiem que els passa als pols de  $W(s)$  (arrels de  $D(s, k) \equiv s^2 + s - 2 + k = 0$ ) en variar  $k$  de 0 a  $\infty$ .

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9 - 4k}}{2}$$

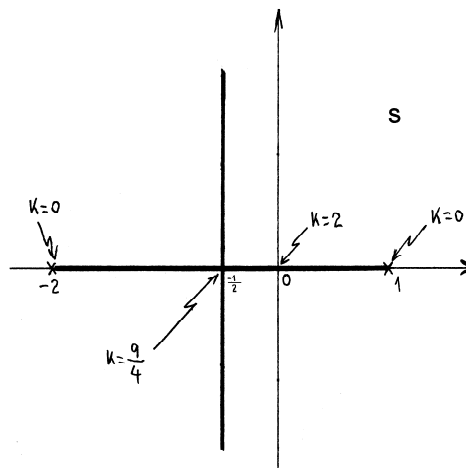
Per a  $k = 0$ , la transmitància de llaç té els pols  $s_1 = 1$  i  $s_2 = -2$ .

Anul·lant el discriminant,  $9 - 4k = 0$ , tenim  $k = \frac{9}{4}$ . És a dir, per a  $0 < k < \frac{9}{4}$ ,  $s_{1,2}$  seran reals i diferents.

Per a  $k = \frac{9}{4}$  tenim  $s_{1,2} = -\frac{1}{2}$  (real doble).

I per a  $\frac{9}{4} < k < \infty$  tenim  $s_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{4k - 9}}{2}$ , complexos conjugats de  $\text{Re}(s_{1,2}) = -\frac{1}{2}$ .

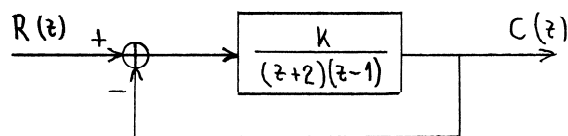
Tot això ho podem representar gràficament així



El camí (en traç més gruixut) descrit per les arrels de  $D(s, k)$  en variar  $k$  és el lloc geomètric de les arrels de  $D(s, k)$ .

Vegem el límit d'estabilitat de  $W(s)$ . L'arrel de l'esquerra queda al semiplà esquerre per a tot  $k$ . Cal trobar la  $k$  per a la que l'arrel real de la dreta es fa nul·la. Serà per a  $-1 + \sqrt{9 - 4k} = 0 \rightarrow k = 2$ , com s'indica a la figura. Per a  $k > 2$ ,  $W(s)$  és estable, per a  $k < 2$ ,  $W(s)$  és inestable i per a  $k = 2$  és marginalment estable (un pol sobre l'eix imaginari).

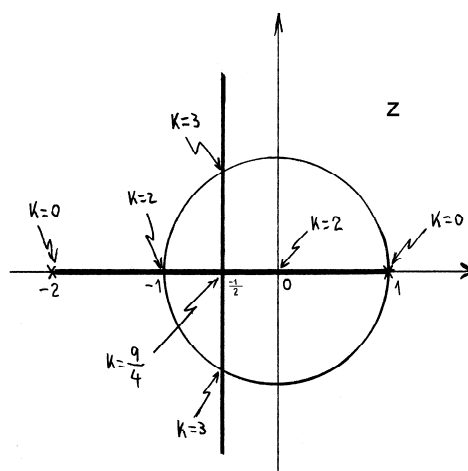
Suposem ara el sistema discret (que no te res a veure amb l'anterior)



La seva transmitància és

$$W(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\frac{k}{(z+2)(z-1)}}{1 + \frac{k}{(z+2)(z-1)}} = \frac{k}{z^2 + z - 2 + k}$$

i l'evolució dels seus pols en variar  $k$ , és clarament idèntica al cas anterior. Per a estudiar-ne l'estabilitat, però, haurem de mirar que els pols siguin dintre del cercle unitat. Fem-ho.



Cal trobar:

a) la  $k$  per a la que l'arrel real de l'esquerra val  $-1$ .

$$\frac{-1 - \sqrt{9 - 4k}}{2} = -1 \rightarrow k = 2$$

b) la  $k$  per a la que el mòdul de les dues arrels complexes conjugades és 1.

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \frac{4k - 9}{4} = 1 \rightarrow k = 3$$

i queda, doncs, que  $W(z)$  és estable per a  $2 < k < 3$ . Per a  $k = 2$ ,  $W(z)$  és marginalment estable (un pol sobre el cercle unitat i l'altre dintre) i per a  $k = 3$ ,  $W(z)$  també és marginalment estable (dos pols diferents sobre el cercle unitat).

El procés analític que hem seguit per a aquests exemples senzills (de segon grau), per a polinomis de tercer i quart grau seria extraordinàriament enrevessat, i per a polinomis de grau superior no hi ha camí analític. Cal, doncs, formalitzar un procés que a partir de propietats calculables ens permeti deduir l'aspecte general del l.g.a.

El mètode que veurem a continuació estudia com queden afectades les arrels d'un polinomi en variar un dels seus coeficients. El procediment és general, serveix per a qualsevol polinomi (de coeficients reals); en particular el polinomi pot ser, com als exemples anteriors, l'equació característica d'un sistema continu o la d'un de discret, tan s'hi val; tot serà qüestió d'interpretar correctament els resultats. Treballarem amb la variable  $s$ , però tot seria idèntic amb qualsevol altra variable, com ara la  $z$ .

Desenvoluparem, doncs, un mètode per a estudiar com evolucionen els pols d'un sistema (és a dir les arrels de la seva equació característica) en variar un paràmetre d'aquesta equació característica. Aquest mètode l'anomenarem del *lloc geomètric de les arrels* (l.g.a.).

Considerem el cas general

$$W(s, k) = \frac{N(s)}{D(s, k)}$$

on hem explicitat el paràmetre  $k$ . Es tracta de veure com varien les arrels de  $D(s, k) = 0$  en variar  $k$ . Ens convindrà fer les següents transformacions, per a deixar  $D(s, k) = 0$  d'una manera que ens serà més útil.

Com que  $D(s, k) = 0$  és un polinomi en  $s$ , en general podrem aïllar  $k$  (si no es pot, el mètode no és aplicable). Aïllant-la, quedarà de la forma  $k = F(s)$ , on  $F(s)$  generalment serà un quocient de polinomis en  $s$ . Aleshores fem

$$\begin{aligned}\frac{k}{F(s)} &= 1 \\ 1 - \frac{k}{F(s)} &= 0 \\ 1 + kP(s) &= 0\end{aligned}$$

amb  $P(s) = \frac{-1}{F(s)}$ . Els valors de  $s$  que fan  $D(s) = 0$ , seran els mateixos que fan  $1 + kP(s) = 0$ . L'estudi de com varien les arrels de  $D(s)$  en variar  $k$ , el farem a partir d'aquest  $P(s)$ .

Vegem un exemple. Suposem que volem estudiar el l.g.a. de

$$D(s) = 3s^3 + ks^2 + 2s + 5 = 0$$

Fem

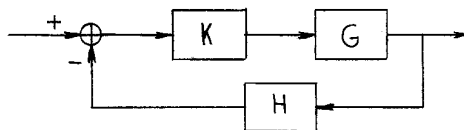
$$k = \frac{-3s^3 - 2s - 5}{s^2} \Rightarrow \frac{s^2 k}{-3s^3 - 2s - 5} = 1 \Rightarrow 1 + k \cdot \overbrace{\frac{s^2}{3s^3 + 2s + 5}}^{P(s)} = 0$$

A la pràctica de vegades ens interessarà transformar aquesta expressió a l'anomenada segona forma canònica (coeficients dels termes de potència més elevada de  $s$  a 1),

$$1 + k_1 \cdot \overbrace{\frac{s^2}{s^3 + \frac{2}{3}s + \frac{5}{3}}}^{P_1(s)} = 0$$

i treballar amb  $k_1 = \frac{k}{3}$  i  $P_1(s) = 3P(s)$ . Si cal, en acabar es traspassen els resultats de  $k_1$  a  $k$ .

Val la pena de veure qui és  $P(s)$  en el cas, tan general, de l'estructura



$$W = \frac{kG}{1 + kGH}$$

Tenim que

$$D(s) = 1 + kGH(s) = 0$$

que ja és en la forma desitjada ( $1 + kP(s) = 0$ ) i, en conseqüència,  $P(s) = GH(s)$ . És a dir, per a aquesta estructura, per a estudiar els pols de  $W(s)$ , usarem la transmitància de llaç,  $GH(s)$ .

Continuant amb el cas general, tenim, doncs, que per comptes de directament  $D(s) = 0$ , estudiarem

$$1 + kP(s) = 0$$

En ser  $P(s)$  complex, vegem a què equival aquesta expressió. Ens limitarem al cas de  $k$  positiva,  $0 \leq k \leq \infty$ .

$$1 + kP(s) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |1 + kP(s)| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |kP(s)| = 1 \xrightarrow{k \geq 0} k = \frac{1}{|P(s)|} \\ \angle kP(s) = 180^\circ \xrightarrow{k \geq 0} \angle P(s) = 180^\circ \end{cases} \\ \angle 1 + kP(s) = \text{indefinit} \end{cases}$$

És a dir, per a que es compleixi  $1 + kP(s) = 0$ , cal que es compleixi  $k = \frac{1}{|P(s)|}$  (*condició del mòdul*) i  $\angle P(s) = 180^\circ$  (*condició de l'angle*); com sempre, quan diem  $\angle P(s) = 180^\circ$ , se sobreentén que volem dir  $\angle P(s) = 180^\circ \bmod 360^\circ$ . Notem que tots els punts del pla  $s$  compleixen la condició del mòdul, per algun valor de  $k$ . Els punts del pla  $s$  que compleixen la condició de l'angle,  $\angle P(s) = 180^\circ$ , estan situats sobre línies. Com que a cada punt de les línies li correspon una  $k$ , podem graduar les línies amb aquests valors de  $k$ . Aquestes línies són el lloc geomètric de les arrels de  $1 + kP(s) = 0$ , o, el que és el mateix, de  $D(s) = 0$ .

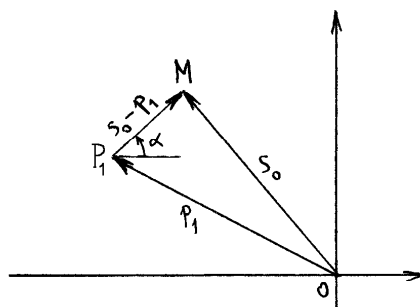
Hem vist que per a que un punt sigui al l.g.a. cal que compleixi la condició de l'angle. Vegem ara una manera de comprovar si la compleix (o d'imposar que la compleixi).

Quan  $D(s) = 0$  ja sigui en la forma  $1 + kP(s) = 0$ , descompondrem  $P(s)$ , en pols i zeros. Si  $k$  ja ha absorbit els coeficients de més pes no unitaris de  $P(s)$ , quedarà

$$1 + k \frac{\Pi(s - z_i)}{\Pi(s - p_i)} = 0$$

on  $z_i$  són els zeros de  $P(s)$ , i  $p_i$  són els pols de  $P(s)$ . Notem que ni els uns ni els altres varien amb  $k$ , i que *no* són els pols de  $W(s)$ . Avancem que aquests pols i zeros de  $P(s)$  apareixeran contínuament en l'estudi del lloc geomètric de les arrels de  $D(s) = 0$ .

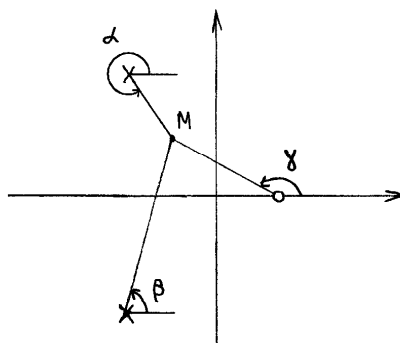
Sigui un punt genèric  $M$  (corresponent al nombre complex  $s_0$ ) que volem veure si és al l.g.a. Haurà de complir  $\angle P(s_0) = 180^\circ$ . Com que  $P(s_0) = \frac{\Pi(s_0 - z_i)}{\Pi(s_0 - p_i)}$ , vegem què són els elements  $s_0 - z_i$ ,  $s_0 - p_i$  i els seus angles.



A la figura hem dibuixat el punt genèric  $M$ , el pol  $p_1$  de  $P(s)$  i l'element  $s_0 - p_1$ . Veiem que l'angle (l'argument) de  $s_0 - p_1$  és  $\alpha$ , l'angle entre l'horitzontal per  $p_1$  i la línia  $p_1M$ . Això ens dóna el procediment: s'uneix el punt  $M$  amb tots els pols i tots els zeros de  $P(s)$ , es mesuren els angles d'aquests segments amb l'horitzontal, i cal que es verifiqui

$$\begin{aligned} \angle P(s_0) &= \text{angle} \left( \frac{\prod (s_0 - z_i)}{\prod (s_0 - p_i)} \right) = \angle \text{num.} - \angle \text{den.} = \\ &= \sum \text{angles als zeros} - \sum \text{angles als pols} = 180^\circ \end{aligned}$$

Per exemple, a la figura



per a que el punt  $M$  sigui al l.g.a. caldrà que

$$\gamma - (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

De la mateixa manera, la condició del mòdul  $k = \frac{1}{|P(s)|}$ , implica

$$k = \frac{1}{|P(s)|} = \left| \frac{\prod (s_0 - p_i)}{\prod (s_0 - z_i)} \right|$$

que podem escriure com

$$k = \frac{\text{producte distàncies de } M \text{ als pols}}{\text{producte distàncies de } M \text{ als zeros}}$$

si anem amb cura d'interpretar-ho correctament, és a dir, que les distàncies són sempre positives i que quan no hi ha zeros, el "producte de distàncies" és 1.

**Regles de traçada del lloc de les arrels de  $D(s, k) = 0$ , en variar  $k$  de 0 a  $\infty$ .**

Tenim, doncs, que per a estudiar les arrels de  $D(s, k) = 0$ , l'escriurem de la manera  $1 + kP(s) = 0$ , (que usualment serà  $1 + kGH(s) = 0$ ). Anomenem  $z_i$  i  $p_i$  els zeros i

pols de  $P(s)$ :

$$P(s) = \frac{\Pi(s - z_i)}{\Pi(s - p_i)}$$

Per a facilitar el dibuix del l.g.a. hi ha unes regles que en faciliten la feina. En cada cas, es farà servir les que calgui. Vegem-les.

**a) Punts inicials i punts finals.** De

$$1 + k \frac{\Pi(s - z_i)}{\Pi(s - p_i)} = 0$$

tenim

$$\Pi(s - p_i) + k\Pi(s - z_i) = 0$$

que per a  $k = 0$ , sols es compleix si

$$\Pi(s - p_i) = 0$$

això és en els pols  $s = p_i$  de  $P(s)$ . És a dir el l.g.a. de  $D(s, z) = 0$ , comença ( $k = 0$ ) als pols de  $P(s)$ .

Fent  $q = \frac{1}{k}$ , queda

$$q\Pi(s - p_i) + \Pi(s - z_i) = 0$$

que per a  $k = \infty$ ,  $q = 0$ , sols es compleix si

$$\Pi(s - z_i) = 0$$

és a dir en els zeros de  $P(s)$ . El l.g.a. de  $D(s, k) = 0$ , acaba ( $k = \infty$ ) als zeros de  $P(s)$ .

**b) Nombre de branques separades,  $N$ .**

Sigui  $n_z$  el nombre de zeros, i  $n_p$  el nombre de pols de  $P(s)$ .

$N$  serà el superior de  $n_p, n_z$ . Normalment serà  $P(s) = GH(s)$ , que en ser un sistema físic voldrà dir que  $N = n_p$ .

**c) Simetria.**

Les arrels complexes d'un polinomi de coeficients reals van sempre per parells de conjugades; en conseqüència el l.g.a. serà simètric respecte a l'eix real.

**d) Asímtotes quan  $s \rightarrow \infty$**

Com hem vist a a) a cada un dels  $n_p$  pols de  $P(s)$  comença una branca, que ha d'acabar en un dels  $n_z$  zeros. Si hi ha menys zeros que pols ( $n_z < n_p$ ), matemàticament s'interpreta com que els zeros que manquen són a l'infinit. Les corresponents branques van a l'infinit segons unes asímtotes. Les asímtotes es poden traçar sabent que

— l'angle que formen amb l'eix real és

$$\phi_A = \frac{180^\circ}{n_p - n_z} \cdot (2q - 1), \quad q = 1, 2, \dots, (n_p - n_z)$$

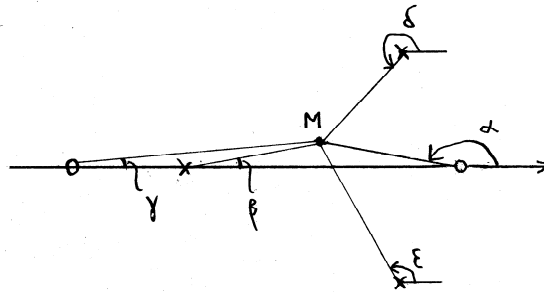
— la intersecció amb l'eix real és a

$$\sigma_A = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n_p - n_z}$$

**e) L.g.a. sobre l'eix real.**

Suposem el punt  $M$  a prop de l'eix real.





Forma els angles indicats amb els altres pols i zeros de  $P(s)$ . Vegem què passa quan  $M$  sigui a l'eix real. Clarament  $\delta + \varepsilon = 360^\circ$  i no influiran en la condició de l'angle aplicada a  $M$ . Igual passaria amb altres parells de punts conjugats.

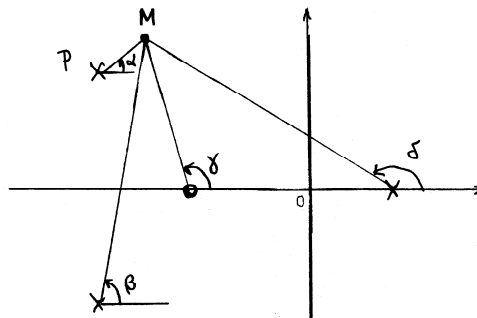
Els pols o zeros a l'esquerra de  $M$ , tenen angles  $\beta = \gamma = 0^\circ$ , i tampoc influiran a la condició de l'angle. El mateix passarà amb tots els pols i zeros a l'esquerra de  $M$ .

Els pols i zeros a la dreta de  $M$ , tindran tots angles com el  $\alpha$ , de  $180^\circ$ . Són els únics que influiran en la condició de l'angle, i ho faran cada un amb  $180^\circ$ , tant si és un pol com si és un zero. Per a que la suma dels angles sigui  $180^\circ \bmod(360^\circ)$ , caldrà que n'hi hagi en conjunt un nombre imparell.

Tenim, doncs, que els punts de l'eix real seran del l.g.a. si i sols si són a l'esquerra d'un nombre total imparell de pols i zeros (sobre l'eix real).

#### f) Angles de sortida dels punts inicials i d'arribada als punts finals.

Considerem un pol  $P$  de  $P(s)$ .



D'ell en sortirà una branca. Volem saber en quina direcció ho farà. Sigui un punt  $M$  del l.g.a. (per ara desconegut) a prop de  $P$ . Si li apliquem la condició de l'angle, tenim que haurà de ser

$$\gamma - (\alpha + \beta + \delta) = 180^\circ$$

I si  $M$  tendeix a  $P$  al llarg del l.g.a.,  $\alpha$  tendirà a l'angle de la tangent al l.g.a. en el pol  $P$ . El procediment serà, doncs, el següent.

Assignem al pol en estudi un angle  $\alpha$  (que és el que volem trobar). Plantegem la condició de l'angle al punt  $P$ , incloent-hi el propi  $\alpha$ , i com que els altres angles són coneguts, podem trobar  $\alpha$ . És a dir, plantegem (explicitem  $\alpha$ , per a més claredat):

$$\sum \text{angles als zeros} - \alpha - \sum \text{angles als pols} = 180^\circ$$

i d'aquí trobem  $\alpha$ .

Si es tracta de la direcció a un punt d'arribada (un zero de  $P(s)$ ), farem

$$\alpha + \sum \text{angles als zeros} - \sum \text{angles als pols} = 180^\circ$$

**g1) Intersecció del l.g.a. amb l'eix imaginari.**

S'aplica el criteri de Routh a  $D(s, k)$  (no a  $P(s)$ !) i es força una filera de zeros.

**g2) Intersecció del l.g.a. amb el cercle unitat.**

S'imposa alguna de les condicions de Jury, per exemple  $D(1, k) > 0$ , i es mira per a quina  $k$  passa d'estable a inestable.

**h) Punts de bifurcació** (sobre l'eix real o en parells de punts complexos conjugats).

Corresponen a punts de multiplicitat de les arrels.

— Les tangents al lloc geomètric en el punt de bifurcació estan equirrepartides sobre  $360^\circ$ .

— Per a trobar els punts de bifurcació aïllem  $k$

$$1 + kP(s) = 0 \rightarrow k = F(s)$$

i plantegem la condició necessària (però no suficient)

$$\frac{dk}{ds} = \frac{d}{ds}F(s) = 0 \rightarrow s = s_b \rightarrow k_b = F(s_b)$$

Caldrà comprovar que el punt trobat ( $s_b$ ) pertany al l.g.a.

**i) Valor de  $k$  al l.g.a.**

Ja hem vist que la condició del mòdul aplicada al punt  $M$  implica

$$k = \frac{\text{producte distàncies de } M \text{ als pols}}{\text{producte distàncies de } M \text{ als zeros}}$$

Això permet trobar el valor de  $k$  per a qualsevol punt del l.g.a.

Ens a servirà

— directament, per a donat un punt del l.g.a. corresponent a una arrel  $s = s_1$ , trobar quina  $k$ , correspon a aquesta  $s_1$ .

— inversament, per a donada  $k$  i una branca del l.g.a., trobar a quin punt  $s_1$  de la branca correspon aquella  $k$ .

Les distàncies es poden trobar per càlcul o mesurant-les al gràfic. Però alerta: si es mesuren, cal anar amb compte amb les unitats. Excepte en el cas de que hi hagi tants pols com zeros, les unitats del numerador i denominador de

$$k = \frac{\text{producte distàncies de } M \text{ als pols}}{\text{producte distàncies de } M \text{ als zeros}}$$

no es cancel·laran. Caldrà utilitzar les de les escales dels eixos (i, en conseqüència, fer els dos eixos amb la mateixa escala), és a dir agafarem com a unitat de mesura el radi del cercle unitat.

**j) Suma de les arrels.**

Si el grau relatiu de  $P(s)$  (normalment  $GH(s)$ ) és més gran que 1, es verifica que la suma de tots els pols en llaç tancat és constant, independent de  $k$ , i per tant igual a la suma dels pols en llaç obert. Això pot ajudar en el traçat del l.g.a.

Si, per exemple, una branca va a l'infinit per la dreta, n'hi ha d'haver al menys una altra que per l'esquerra també hi vagi.

En particular, el cas freqüent de que el semieix real negatiu sigui del l.g.a. a partir del pol o zero més a l'esquerra, implica que per la dreta hi ha d'haver també una branca cap l'infinit; però com que el semieix real positiu no pot ser-ho, i s'ha de complir la regla c) de simetria, hi tindrà d'haver un parell de branques simètriques cap l'infinit per la dreta.

### 3.5 Resposta freqüencial

Recordem que en un sistema continu  $G(s)$ , la seva resposta freqüencial s'obté fent el canvi  $s = j\omega$  a la transmitància, per a obtenir la transmitància isòcrona  $G(j\omega)$ .

Per a un sistema de temps discret caldrà fer el mateix a  $G^*(s)$ , obtenint  $G^*(j\omega)$ .

Passa, però, que en sistemes de temps discret, el mostrejador actua com un generador d'harmònics, i la resposta a una sinusoide de freqüència  $\omega$  conté també freqüències superiors a  $\omega$ . Això complicarà l'estudi freqüencial.

Recordem (pàgina 4) que

$$\begin{cases} F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \\ F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \end{cases}$$

d'on

$$\begin{cases} G^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)e^{-jkT\omega} & (1) \\ G^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(j\omega + jn\omega_s) & (2) \end{cases}$$

Vegem algunes propietats de  $G^*(j\omega)$ .

a) És periòdica, de període  $j\omega_s = j\frac{2\pi}{T}$

b) A (1), si canviem  $\omega$  per  $-\omega$ , el mòdul de cada sumand no s'altera, i l'argument canvia de signe. És a dir que

$$\begin{aligned} \rho &= |G^*(j\omega)| = |G^*(-j\omega)| \\ \theta &= \angle G^*(j\omega) = -\angle G^*(-j\omega) \end{aligned}$$

i, per això

— la seva representació polar,  $\rho = \rho(\theta)$ , de  $\omega = -\infty$  a  $\omega = \infty$  serà parell (simètrica respecte l'eix real; però la simetria no s'apreciarà quan, com és usual, sols la dibuixem de  $\omega = 0$  a  $\omega = \infty$ ).

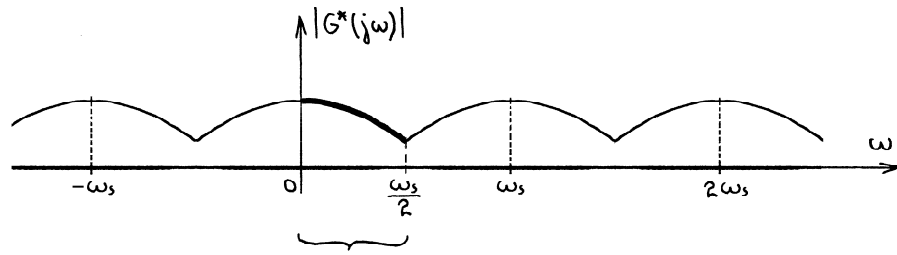
— la representació rectangular del mòdul,  $\rho = \rho(\omega)$ , serà parell (simètrica respecte l'eix d'ordenades) i la de l'argument (fase),  $\theta = \theta(\omega)$ , serà imparell (simètrica respecte l'origen).

c) Observem l'angle dels sumands de (1) per a  $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ :

$$kT \frac{\omega_s}{2} = k \frac{2\pi \omega_s}{\omega_s} \frac{\omega_s}{2} = k\pi = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

és a dir que  $G^*(j\frac{\omega_s}{2})$  serà real.

Degut a a) i b) n'hi haurà prou amb estudiar l'interval entre 0 i  $\frac{\omega_s}{2}$ .



D'altra banda, com que

$$G^*(s) = G(z)|_{z=e^{sT}}$$

tenim

$$G^*(j\omega) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}} = G(e^{j\omega T})$$

Aquesta darrera expressió serà la més còmode per a obtenir valors numèrics de la resposta freqüencial de  $G(z)$ .

És convenient de notar que si bé  $G(z)$  ens relaciona la sortida amb l'entrada del sistema sols en els instants de mostreig, aquesta restricció no té sentit amb  $G(e^{j\omega T})$ . Així, doncs,  $G(e^{j\omega T})$  ens dóna la resposta freqüencial del sistema representat amb  $G(z)$  per a tota freqüència  $\omega$  de la sinusoide d'entrada, mostrejada amb període  $T$ .

### 3.6 Guany en contínua

Quan a una transmitància  $G(z)$  hi entra un graó, és important saber per quant queda multiplicada la seva altura a la sortida. Com que una constant té freqüència zero, la resposta freqüencial per a  $\omega = 0$ , ens donarà aquest factor. És el que s'anomena guany en contínua  $K$  (DC gain)

$$K = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G^*(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \lim_{z \rightarrow 1} |G(z)| = |G(1)|$$

El guany en contínua d'un sistema  $G(s)$  de temps continu era

$$K = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)|$$

i coincidia amb el guany canònic si no hi havia integradors o derivadors. En temps discret es pot definir un guany canònic però no resulta d'utilitat.

Es pot demostrar que els sistemes  $G_p(s)$  i  $G(z) = \mathfrak{z}[G_{m0}(s)G_p(s)]$  tenen el mateix guany en contínua.

En particular el conjunt mostrejador-mantenidor d'ordre zero té guany en contínua unitat.

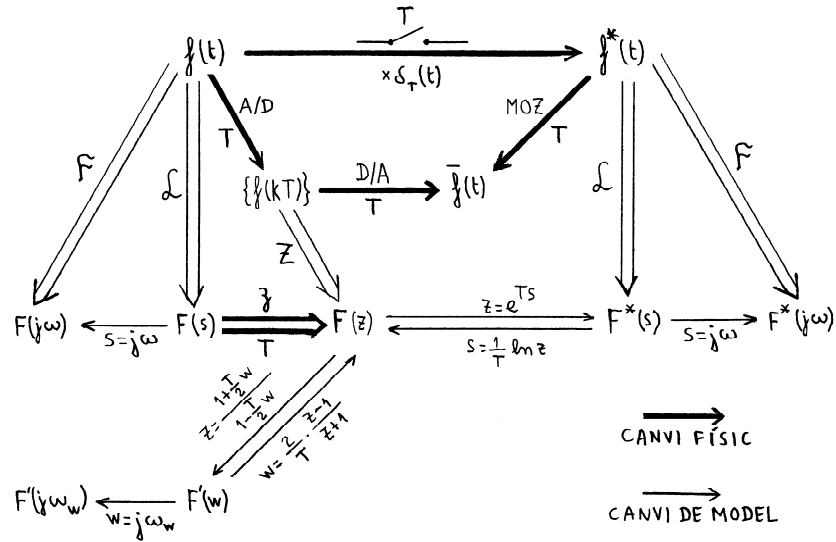
### 3.7 Diagrama de Bode. Transformació bilineal

$G(e^{j\omega T})$  és periòdica, no asimptòtica. Això vol dir que no podem utilitzar directament les tècniques del gràfic de Bode. La cosa s'arregla fent un mapeig (un altre!) del pla complex  $z$  a un nou pla complex  $w$  via la transformació bilineal

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \iff w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

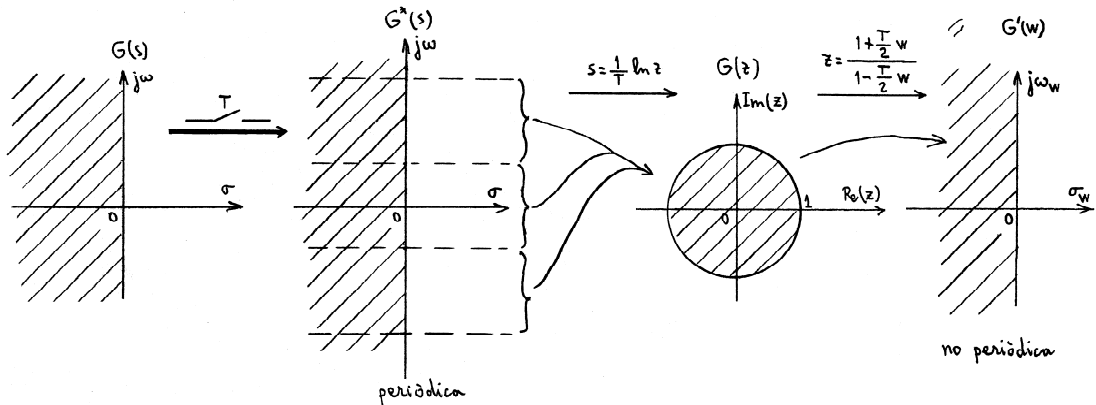
Usarem la nomenclatura

$$G'(w) = G(z) \Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}} = G\left(\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\right)$$



Val la pena de notar que, en tractar-se d'una simple substitució, la transformada del producte és el producte de transformades.

Amb aquesta transformació bilineal, l'interior del cercle unitat del pla  $z$  es transforma en el semiplà esquerre del pla  $w$ , però sense que variï el nombre (finit) de pols de  $G(z)$ .



Vegem la relació entre les parts real i imaginària de  $s = \sigma + j\omega$  i de  $w = \sigma_w + j\omega_w$  quan  $\sigma = 0$ , com serà sempre en aplicar Bode.

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} + 1}$$

Si fem  $s = j\omega$  queda

$$w = \sigma_w + j\omega_w = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2}}{\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2}} = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

d'on

$$\begin{cases} \sigma_w = 0 \\ \omega_w = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} \iff \omega = \frac{2}{T} \arctan \frac{\omega_w T}{2} \end{cases}$$

que ens diu que fer el canvi  $w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$  a  $G(z)$ , ens deforma l'eix  $\omega$  de la resposta freqüencial segons  $\omega_w = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$ .

Quan  $\omega = 0$ ,  $\omega_w = 0$ . Però quan  $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ , queda

$$\omega_w = \frac{2}{T} \tan \frac{\frac{\omega_s}{2} T}{2} = \frac{2}{T} \tan \frac{\pi}{2} = \infty$$

És a dir, que la transformació ens deforma la representació de la resposta freqüencial "estirant" l'eix  $\omega$ , duent el punt  $\frac{\omega_s}{2}$  a l'infinit.

Per a freqüències petites,  $\omega \ll \frac{\omega_s}{2}$ , queda

$$\omega_w = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} \simeq \frac{2}{T} \frac{\omega T}{2} = \omega$$

és a dir que  $\omega_w$  i  $\omega$  són pràcticament iguals. Això no vol pas dir que ens hàgim de restringir a treballar a freqüències petites. La transformació bilineal no altera la relació entre amplitud y fase, bàsica en el disseny a Bode.

Un cop s'ha fet la transformació bilineal ja es pot dissenyar per les tècniques de Bode, utilitzant  $G'(w)$ .

Això vol dir que representarem el guany  $|G'(j\omega_w)|$  i el desfasament  $\angle G'(j\omega_w)$  quan  $\omega_w$  varia de 0 a  $\infty$ , que implica que la freqüència real  $\omega$  varia de 0 a  $\frac{\omega_s}{2}$ . La forma de treball és exactament igual que si es tractés de una  $G(s)$  habitual de temps continu.

El resultat caldrà traslladar-lo al camp  $z$  mitjançant la transformació bilineal inversa,  $w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$ .

— Una altra possible utilitat de la transformada bilineal es basa en que la transformada deforma el pla complex, però manté la frontera d'estabilitat. Si es fa la transformada bilineal de l'equació característica, se li pot aplicar el criteri de Routh per estudiar l'estabilitat. De vegades això s'anomena el criteri de Routh modificat.

### 3.8 Criteri de Nyquist

Sigui el sistema amb transmitància en anell tancat

$$W(z) = \frac{G(z)}{1 + \overline{GH}(z)}$$

Si en volem estudiar l'estabilitat pel criteri de Nyquist, cal obtenir el diagrama de Nyquist. Es pot fer:

— a partir de  $\overline{GH}(z)$ .

— a partir de  $\overline{GH}'(w)$ , la transformada bilineal de  $\overline{GH}(z)$ .

En tots dos casos suposarem que  $\overline{GH}(z)$  no té pols de  $|z| = 1$ , excepte, potser, integradors  $(\frac{1}{z-1})$ . Això es tradueix a la transformada bilineal,  $\overline{GH}'(w)$ , en que  $\overline{GH}'(w)$  no tingui pols sobre l'eix imaginari, excepte, potser, integradors  $(\frac{1}{w})$ .

a) A partir de  $\overline{GH}(z)$ . És el procediment que va millor si es vol fer numèricament. Es dibuixa en polars, per punts,  $\overline{GH}(e^{j\omega T})$ , amb valors de  $\omega$  des de 0 a  $\frac{\omega_s}{2}$ . S'agafarà,

doncs,

$$\begin{cases} \rho = |\overline{GH}(e^{j\omega T})| \\ \theta = \angle \overline{GH}(e^{j\omega T}) \end{cases}$$

Això ens donarà el gràfic polar  $\rho = \rho(\theta)$  graduat, si es vol, amb els valors de  $\omega$ . Notem que el seu punt final (per a  $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ ) és a l'eix real (propietat c, pàgina 59). I que si hi ha integradors,

$$\frac{1}{z-1} \rightarrow \frac{1}{e^{j\omega T} - 1}$$

quan  $\omega = 0$ , serà  $\rho = \infty$ , i aleshores comença a l'infinit.

Per a tenir el diagrama de Nyquist cal completar el gràfic polar, precedint-lo amb tants quarts de volta de radi infinit en sentit horari  $\odot$  i acabant on comença el polar ( $\omega = 0$ ), com integradors  $(\frac{1}{z-1})$  hi hagi a  $\overline{GH}(z)$ .

b) A a partir de  $\overline{GH}'(w)$ . És el procediment lògic si s'ha fet el corresponent diagrama de Bode. Es dibuixa el gràfic polar a partir del de Bode de  $\overline{GH}'(w)$ .

Caldrà, per a obtenir el diagrama de Nyquist, precedir el polar així obtingut amb tants quarts de volta de radi infinit en sentit horari  $\odot$  i acabant a on comença el polar ( $\omega_w = 0$ ) com integradors  $(\frac{1}{w})$  hi hagi a  $\overline{GH}'(w)$ .

Coincideix exactament amb l'obtingut pel procediment anterior, excepte en la graduació de la corba, que ara serà amb les  $\omega_w$ , que variaran de 0 a  $\infty$ .

En cada punt del gràfic, les freqüències de graduació obtingudes per un i altre sistema estan relacionades per

$$\omega_w = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

Un cop obtingut el diagrama de Nyquist, ja es pot aplicar el

### **Criteri de Nyquist**

Segui  $P$  el nombre de pols de  $|z| > 1$  de  $\overline{GH}(z)$ , o el que és el mateix, el nombre de pols de  $\text{Re}(w) > 0$  de  $\overline{GH}'(w)$ .

Segui  $N$  el nombre de semivoltes que descriu la corba del diagrama entorn del punt  $(-1, 0)$ , considerades positives si són en sentit horari  $\odot$ .

El nombre  $Z$  d'arrels de  $|z| > 1$  de  $1 + \overline{GH}(z) = 0$ , o el que és el mateix, d'arrels de  $\text{Re}(w) > 0$  de  $1 + \overline{GH}'(w) = 0$ , és

$$Z = N + P$$

Per a que  $W(z)$  sigui estable cal que  $Z = 0$ .

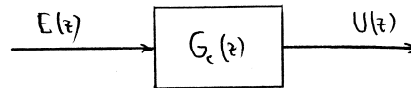




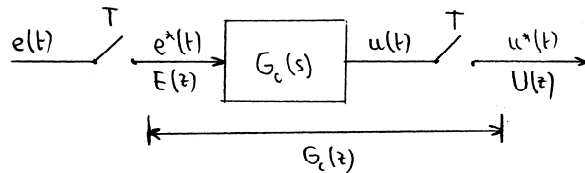
## 4 Disseny

### 4.1 Controladors digitals i algorismes de control

Un controlador digital consistirà en un algorisme  $G_c(z)$  funcionant en un computador, que podem representar en  $z$  amb



o en  $s$  amb



L'entrada del controlador digital serà una seqüència de nombres  $e(kT)$  (mostres de l'error  $e(t)$ ). El controlador digital farà una serie d'operacions amb aquests nombres, i generarà una seqüència de sortida  $u(kT)$ , interpretable com a mostres d'una  $u(t)$ . La transmitància en  $z$  del controlador serà

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

### 4.2 Disseny de sistemes digitals de control

Es basa en mètodes similars als utilitzats en el disseny de sistemes de control de temps continu.

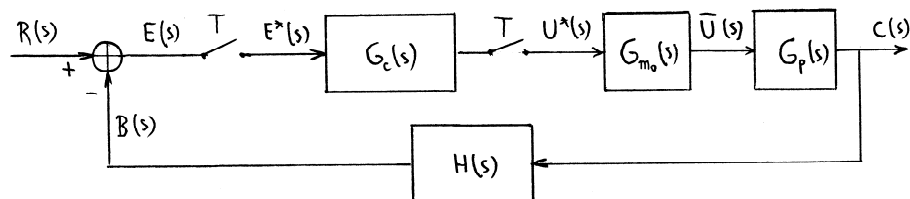
Partirem de:

- unes especificacions de funcionament del sistema controlat i
- una configuració predeterminada del sistema de control.

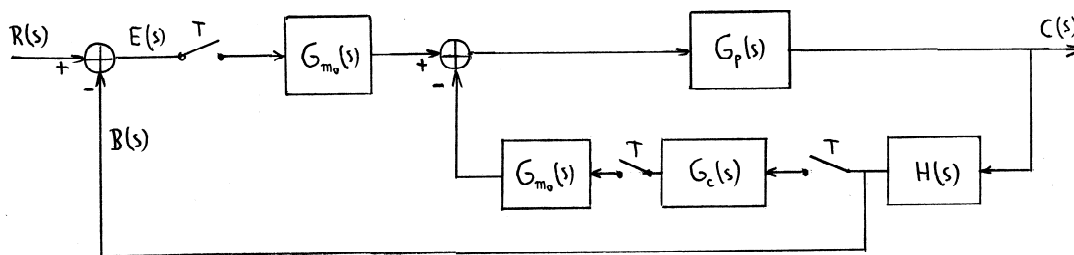
El disseny consistirà en determinar un algorisme de control que faci complir al sistema les especificacions. L'algorisme el representarem per la seva transmitància,  $G_c(z)$ . Es podrà implementar mitjançant un microprocessador o bé en un computador.

Les configuracions més freqüents són el controlador en cascada i el controlador en realimentació secundària.

La configuració del controlador en *cascada* és



i la configuració del controlador en *realimentació secundària* és

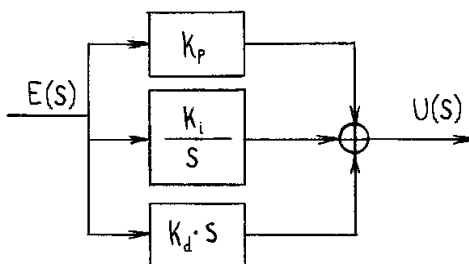


En els dos casos, els mostrejadors dels senyals de consigna i de realimentació s'han traslladat després del comparador. Això pràcticament no afecta el funcionament (en efecte  $R^*(s) - B^*(s) = [R(s) - B(s)]^*$ , però vegeu pàgina 88).

Ens centrarem en mètodes de disseny de controladors en cascada.

### 4.3 Controladors PID digitals

Els controladors PID de temps continu tenien la forma



Vegem com en podem obtenir una aproximació de les tres accions amb algorismes de temps discret.

— **Acció proporcional (P)**

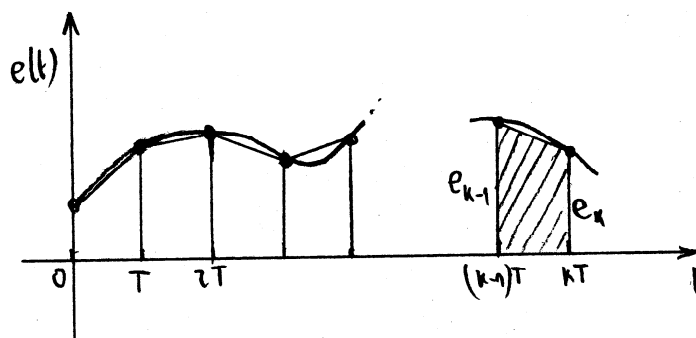
Serà senzillament una constant,  $G_P(z) = K_p$ .

— **Acció integral (I)**

En temps continu és

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

L'aproximarem per una integració trapezoïdal.



De la figura tenim que el valor de la integral en l'instant  $k$  val

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T}{2} (e_{k-1} + e_k)$$

que si volem que sigui multiplicada per  $K_i$  quedarà

$$u_k = u_{k-1} + K_i \frac{T}{2} (e_{k-1} + e_k)$$

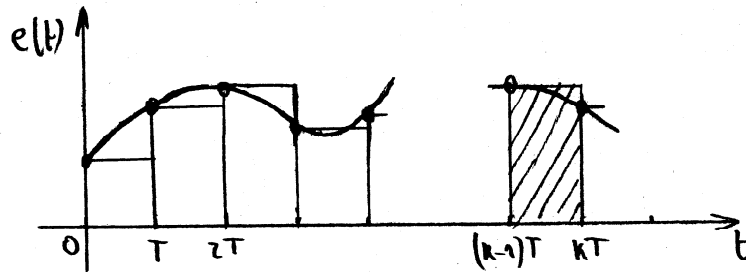
d'on, suposant condicions inicials nul·les

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{K_i T}{2} [z^{-1}E(z) + E(z)]$$

i d'aquí

$$G_I(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_i T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

Com que això és una aproximació de la integral exacta, és obvi que hi haurà altres mètodes que obtinguin més precisió a canvi de més feina (Runge-Kutta, per exemple), o menys precisió amb menys feina. Notem, però, que la precisió de l'integrador no té importància. Físicament la finalitat de l'integrador és aconseguir un senyal que vagi augmentant mentre l'error no s'anul·li (o canviï de signe) per així acabar forçant la sortida de la planta al valor que volem. Aquest integrador ja ho fa això, cap problema, doncs. D'altra banda, matemàticament l'integrador el que fa és permetre'ns alterar l'equació característica del sistema en llaç tancat de mode que el sistema tingui els pols que desitgem. L'expressió algebraica del nostre integrador també ens permet fer això, i tampoc cap problema. Generalment utilitzarem aquest integrador trapezoïdal, tot i que n'hi ha un encara més senzill: el rectangular (Euler's forward method). Vegem-lo.



De la figura tenim (incloent ja la  $K_i$ )

$$u_k = u_{k-1} + K_i T e_{k-1}$$

d'on

$$U(z) = z^{-1}U(z) + K_i T z^{-1}E(z)$$

i

$$G_{IR}(z) = K_i \frac{T}{z-1}$$

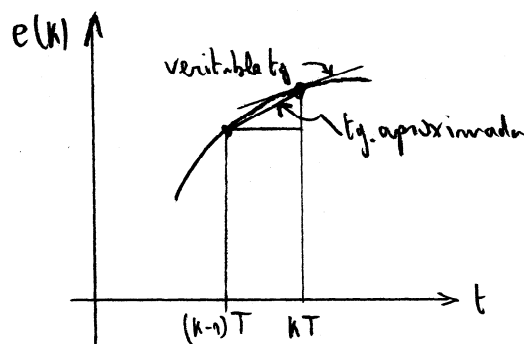
Notem que tots dos mètodes tenen l'integrador  $\frac{1}{z-1}$ , corresponent al de temps continu  $\frac{1}{s}$ .

— **Acció derivativa (D)**

En temps continu és

$$u(t) = K_d \frac{d}{dt} e(t)$$

En temps discret farem



$$u_k = K_d \left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=kT} \simeq K_d \frac{e_k - e_{k-1}}{T}$$

$$U(z) = \frac{K_d}{T} [E(z) - z^{-1}E(z)]$$

d'on

$$G_D(z) = \frac{K_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$$

Notem el terme  $z-1$  equivalent al  $s$  de temps continu.

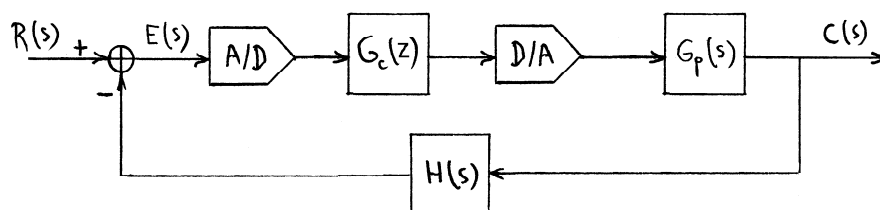
Amb tot això, el PID en general quedarà

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + \frac{K_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$$

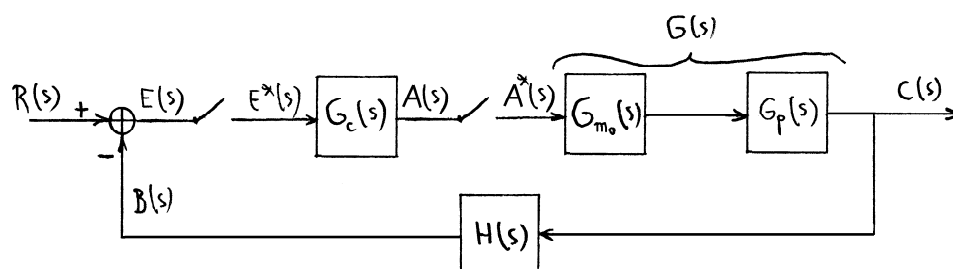
Els mètodes de disseny per assignació algebàrica de pols són els mateixos que per a temps continu, però treballant amb les transmitàncies en  $z$ .

#### 4.4 Disseny de compensadors per avançament o per retard de fase mitjançant la transformació bilineal

Donat el sistema



si volem dissenyar un compensador per avanç o per retard de fase per Bode, podem pensar en el model de temps continu



però en haver-hi mostrejadors, la transmitància serà del tipus  $F^*(s)$ , és a dir, no

racional, i no fruirà de les propietats que les racionals tenien al gràfic de Bode (fàcils de dibuixar, amb asímptotes). Utilitzarem, doncs, la transformada bilineal.

Vegem primer què val la transmitància de llaç. Serà  $\frac{B(z)}{E(z)}$ . Trobem-la.

$$\left. \begin{aligned} B(s) &= G(s)H(s)A^*(s) \\ A(s) &= G_c(s)E^*(s) \end{aligned} \right\}$$

D'aquí

$$\left. \begin{aligned} B^*(s) &= \overline{GH}^*(s)G_c^*(s)E^*(s) \\ B(z) &= \overline{GH}(z)G_c(z)E(z) \end{aligned} \right\}$$

i

$$\frac{B(z)}{E(z)} = G_c(z)\overline{GH}(z)$$

Treballarem, doncs, a partir de  $\overline{GH}(z)$ , aplicant-li la transformada bilineal per a poder usar Bode.

Recordem el canvi de la transformada bilineal

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \iff w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

El procediment serà:

1 - Trobar  $\overline{G_{m_0}G_pH}(z) \equiv \overline{GH}(z)$

2 - Fer el canvi bilineal, obtenint  $\overline{GH'}(w) = \overline{GH}\left(\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\right)$

3 - Dissenyar un compensador per avançament o per retard de fase,  $G'_c(w)$ , pels procediments ja coneguts de temps continu (comprovant que compleixi les especificacions de disseny). Es tracta la variable  $w$  de la mateixa manera que es tractava la variable  $s$ .

4 - Fer el canvi bilineal invers a  $G'_c(w)$  obtenint  $G_c(z) = G'_c\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)$

5 - Elegir l'estructura (això es veurà més endavant)

6 - Escriure el programa

— Vegem ara una inesperada propietat de  $G'_c(w)$ .

Suposem que la  $G'_c(w)$  obtinguda és

$$G'_c(w) = \frac{c_m w^m + c_{m-1} w^{m-1} + \dots + c_0}{d_n w^n + d_{n-1} w^{n-1} + \dots + d_0} = \frac{N_w(w)}{D_w(w)}$$

Cal ara passar-la a  $z$ . Explicitem el canvi invers. Per a senzillesa, suposarem  $T = 2$ , però el resultat és general (sols canviarien els coeficients, no els exponents). Farem, doncs,  $w = \frac{z-1}{z+1}$  i quedarà

$$G'_c\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = G_c(z) = \frac{c_m \frac{(z-1)^m}{(z+1)^m} + c_{m-1} \frac{(z-1)^{m-1}}{(z+1)^{m-1}} + \dots + c_0}{d_n \frac{(z-1)^n}{(z+1)^n} + d_{n-1} \frac{(z-1)^{n-1}}{(z+1)^{n-1}} + \dots + d_0} =$$

$$= \frac{c_m (z-1)^m + c_{m-1} (z-1)^{m-1} (z+1) + \cdots + c_0 (z+1)^m}{d_n (z-1)^n + d_{n-1} (z-1)^{n-1} (z+1) + \cdots + d_0 (z+1)^n} \cdot \frac{(z+1)^n}{(z+1)^m}$$

i observem que

$$\begin{cases} \text{grau del numerador: } m+n \\ \text{grau del denominador: } n+m \end{cases}$$

En conseqüència, si  $G'_c(w)$  té la forma indicada, la corresponent  $G_c(z)$  té igual nombre de pols que de zeros, i sempre és realitzable (pàgina 25).

Cal fer una observació. En la darrera expressió el coeficient de la  $z^n$  del denominador de la fracció de l'esquerra és

$$d_n + d_{n-1} + \cdots + d_0$$

(que coincideix amb  $D_w(1)$ ) i per a que el grau d'aquest denominador no sigui inferior a  $n$  cal que aquest coeficient no sigui zero,  $D_w(1) \neq 0$ . Si haguéssim fet el cas general amb  $T$  genèric, és fàcil de comprovar que el que en realitat cal és que

$$D_w\left(\frac{2}{T}\right) \neq 0$$

— No cal que el controlador sigui estable, qui ho ha de ser és el sistema complet. Però sembla raonable fer-lo estable. Si volem que el controlador sigui estable, tots els pols de  $G'_c(w)$  han de ser de part real negativa i  $m \leq n$ . Això garantirà que tots els pols de  $G_c(z)$  siguin dintre del cercle unitat.

Si  $m > n$ , com que a  $G_c(z)$  hi ha el terme

$$\frac{(z+1)^n}{(z+1)^m} = \frac{1}{(z+1)^{m-n}}$$

$G_c(z)$  tindrà  $m-n$  pols a  $z = -1$  i serà o marginalment estable ( $m-n = 1$ ) o inestable ( $m-n > 1$ ).

#### 4.5 Disseny de compensadors per avançament o per retard de fase pel l.g.a.

Veurem dos mètodes de disseny. Farem servir o l'un o l'altre segons siguin les especificacions del problema:

— mètode a: Quan volem fixar un parell de pols complexos conjugats en el sistema enllaç tancat. No podem fixar l'error ni els altres pols.

— mètode b: Quan volem fixar l'error del sistema enllaç tancat sense alterar-ne els pols.

En tots dos casos els compensadors seran del tipus

$$G_c(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

i fent la transformada bilineal es pot comprovar que si  $p_c < z_c$  el compensador és per avanç de fase i que si  $z_c < p_c$  és per retard de fase.

**Mètode a** — Volem fixar un parell de pols complexos conjugats en el sistema enllaç tancat.

Sigui un sistema de transmissió de llaç  $L(z) = k_1 L_1(z)$ , a on hem explicitat la constant  $k_1$  de manera que els coeficients de les  $z$  de potència més alta de numerador i denominador de  $L_1(z)$  siguin unitaris (segona forma canònica, pàgina 53). El valor

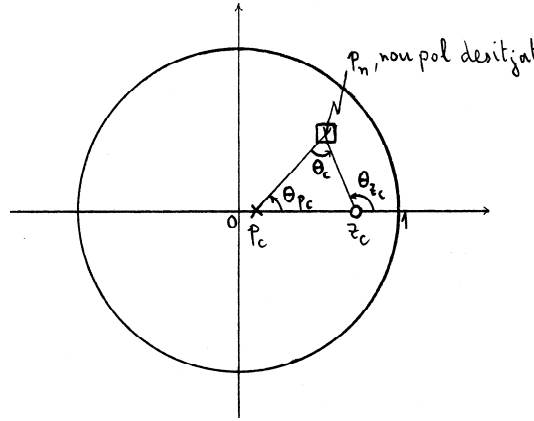
de  $k_1$ , com veurem, quedarà multiplicat per la  $k_c$  del compensador. No podem, doncs, prefixar l'error.

Suposem que ens interessa dissenyar un compensador que afegeixi al sistema enllaç tancat els nous pols conjugats  $p_n$  i  $p_n^*$ .

Mirem d'aconseguir-ho amb un compensador del tipus

$$G_c(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

L'especificació de disseny serà el nou pol  $p_n$  en anell tancat que volem que tingui el sistema compensat. Aquest nou pol (que indicarem als dibuixos amb  $\square$ ) l'aconseguirem posant els  $z_c$  i  $p_c$  (reals) d'anell obert a on calgui. Tot i que forçarem la presència d'un pol,  $p_n$ , com que serà complex, automàticament també sortirà el seu conjugat  $p_n^*$ . Suposem, d'entrada, que és  $p_c < z_c$ , és a dir que el fem per avançament de fase.



Per a que el punt  $\square$  sigui al l.g.a. cal que es compleixi la condició de l'angle,

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

Amb els pols i zeros que ja hi hagués, més el  $z_c$  i el  $p_c$ , aquesta condició queda

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p + \theta_{z_c} - \theta_{p_c} = 180^\circ$$

És fàcil de veure, a la figura, que  $\theta_{z_c} - \theta_{p_c} = \theta_c$ . Ens queda, doncs, la condició

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p + \theta_c = 180^\circ$$

d'on obtindrem  $\theta_c$ . Això vol dir que  $z_c$  i  $p_c$  els podem triar al nostre gust sobre l'eix real, sempre que  $\square$  determini amb ells un angle  $\theta_c$ .

Triarem, doncs, per exemple  $z_c$  i ja podem calcular  $\theta_{z_c}$ . Aleshores fem  $\theta_{p_c} = \theta_{z_c} - \theta_c$ , i ja podem trobar, per trigonometria,  $p_c$ . Òbviament es pot seguir qualsevol altre procediment per a fixar  $z_c$  i  $p_c$ , mentre es compleixi la condició de que formin un angle  $\theta_c$ .

Amb això ja hem aconseguit que el l.g.a. de l'equació característica,  $1 + G_c(z)L(z) = 0$ , del sistema amb compensador *passi* pel pol desitjat,  $p_n$ . Manca ara triar  $k$  per a que una de les arrels *sigui* a  $p_n$ . Ho farem aplicant la condició del mòdul al punt  $\square$ . Serà

$$k = \frac{\prod \text{distàncies als pols}}{\prod \text{distàncies als zeros}}$$

d'on obtenim  $k$  i aleshores  $k_c$  a partir de  $k = k_c k_1$ . Ara ja tenim el compensador dissenyat,

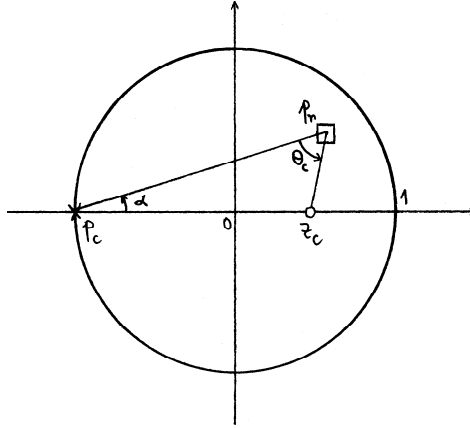
$$G_c(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

La transmitància de llaç del sistema corregit serà

$$G_c(z)L(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c} L(z)$$

— Si surt  $\theta_c > 180^\circ$  es pot considerar negatiu (restant-li  $360^\circ$ ) que voldrà dir col·locar  $z_c$  a l'esquerra de  $p_c$ , és a dir fer  $z_c < p_c$ , i seguint el mateix procés de disseny hi pot haver solució, que serà per retard de fase.

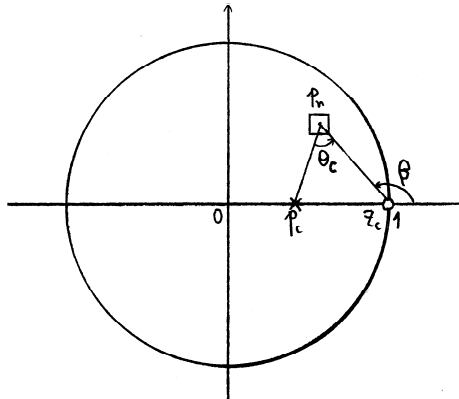
— És raonable imposar que  $z_c$  i  $p_c$  siguin dintre del cercle unitat (que el compensador sigui de desfasament mínim i estable, no és imprescindible, però sí prudent). Mirem el cas d'un compensador per avançament ( $p_c$  a l'esquerra de  $z_c$ ). Una condició extrema serà



de la que es veu que cal que

$$\theta_{p_c} > \alpha$$

i l'altra serà



de la que veiem que cal que

$$\theta_{z_c} < \beta$$

Com que  $\square$  és conegut, tenim  $\alpha$  i  $\beta$ . Reduïm les dues condicions a una mateixa



variable, per exemple  $\theta_{z_c}$ . Fem  $\theta_{p_c} = \theta_{z_c} - \theta_c$  i queda

$$\begin{cases} \theta_{z_c} - \theta_c > \alpha \\ \theta_{z_c} < \beta \end{cases}$$

d'on tenim la condició que haurà de complir  $\theta_{z_c}$ :

$$\alpha + \theta_c < \theta_{z_c} < \beta$$

Si haguéssim reduït a  $\theta_{p_c}$  la condició (equivalent) sortiria

$$\alpha < \theta_{p_c} < \beta - \theta_c$$

Si repetim la deducció però per a un compensador per retard de fase ( $z_c$  a l'esquerra de  $p_c$ , i  $\theta_c$  negatiu), obtenim les condicions

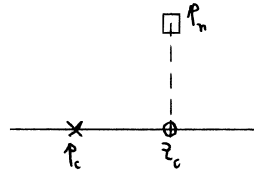
$$\alpha < \theta_{z_c} < \beta + \theta_c$$

o

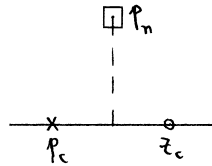
$$\alpha - \theta_c < \theta_{p_c} < \beta$$

Dintre d'aquests límits, podem triar  $\theta_{z_c}$  (o  $\theta_{p_c}$ ) lliurement. Quins valors triarem? Si hi ha alguna condició addicional a les especificacions del compensador, mirarem de satisfer-la. Si no, l'elecció és arbitrària. Diversos autors suggereixen diverses possibilitats:

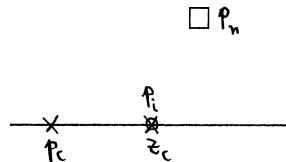
a) Que  $p_n$  i  $z_c$  siguin a la mateixa vertical:



b) Que  $p_n$  estigui a l'abscissa mitjana entre  $z_c$  i  $p_c$ :



c) Que  $z_c$  cancel·li un pol  $p_i$  de  $GH(z)$ :



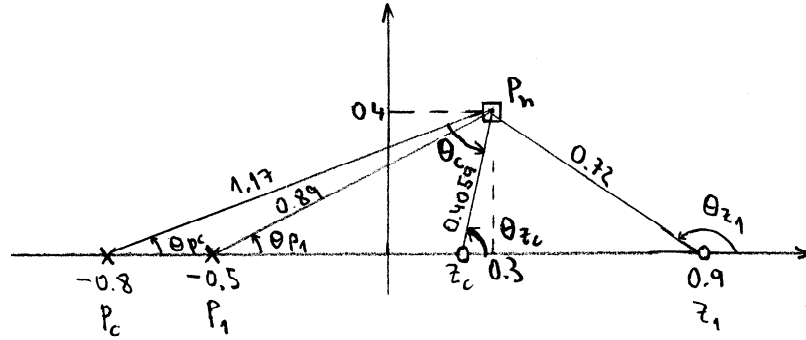
d) Una altra possibilitat és fer un PI o un PD, com veurem a la pàgina 78.

### Exemple 1

Un sistema té la transmitància de llaç  $\frac{z-0.9}{0.5z+0.25}$  i es desitja que el sistema en llaç tancat tingui els pols  $p_n = 0.3 \pm 0.4j$ . Trobeu un compensador per avançament o retard de fase que ho aconsegueixi.

Comencem per passar la transmitància de llaç a la forma canònica 2,

$$\frac{z - 0.9}{0.5z + 0.25} = 2 \cdot \frac{z - 0.9}{z + 0.5}$$



Els angles dels pols i zeros resulten ser  $\theta_{p1} = 26.56^\circ$  i  $\theta_{z1} = 146.31^\circ$ . Imposant la condició de l'angle queda

$$146.31^\circ - 26.56^\circ + \theta_c = 180^\circ$$

d'on

$$\theta_c = 60.25^\circ$$

Com que surt positiu provarem per avançament de fase ( $p_c$  a l'esquerra de  $z_c$ ).

Triem  $p_c = -0.8$  que deixa prou espai a la seva dreta per a que hi càpiga  $z_c$ . Aleshores

$$\theta_{p_c} = 19.98^\circ$$

i

$$\theta_{z_c} = \theta_{p_c} + \theta_c = 19.98^\circ + 60.25^\circ = 80.23^\circ$$

i ja podem calcular  $z_c$ :

$$z_c = 0.3 - \frac{0.4}{\tan 80.23^\circ} = 0.2312$$

Imposant la condició del mòdul

$$k = \frac{0.8944 \cdot 1.1705}{0.7211 \cdot 0.4059} = 3.5769$$

i ara

$$k_c = \frac{k}{k_1} = \frac{3.5769}{2} = 1.7885$$

i, en conseqüència, el compensador queda

$$G_c(z) = 1.7885 \cdot \frac{z - 0.2312}{z + 0.8}$$

és a dir, que la transmitància de llaç amb el compensador serà

$$G_cGH(z) = 3.5769 \cdot \frac{z - 0.2312}{z + 0.8} \cdot \frac{z - 0.9}{z + 0.5}$$

Comprovació:

$$1 + G_c GH(z) = 1 + 3.5769 \cdot \frac{z - 0.2312}{z + 0.8} \cdot \frac{z - 0.9}{z + 0.5} = 0 \implies z^2 - 0.6z + 0.25 = 0$$

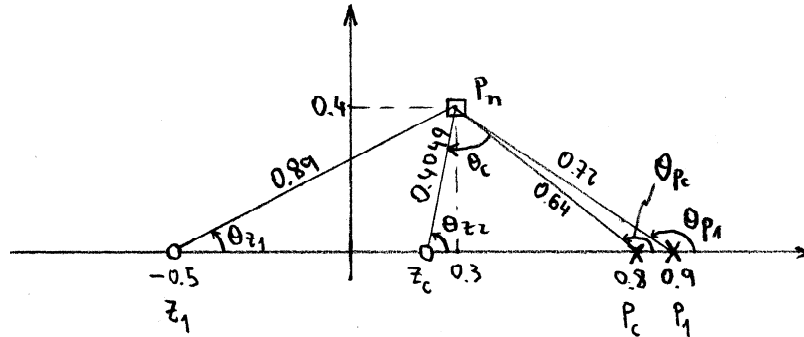
que efectivament té les arrels  $0.3 \pm 0.4j$  desitjades.

### Exemple 2

Un sistema té la transmitància de llaç  $\frac{z+0.5}{0.5z-0.45}$  i es desitja que el sistema en llaç tancat tingui els pols  $p_n = 0.3 \pm 0.4j$ . Trobeu un compensador per avançament o retard de fase que ho aconsegueixi.

Comencem per passar la transmitància de llaç a la forma canònica 2,

$$\frac{z + 0.5}{0.5z - 0.45} = 2 \cdot \frac{z + 0.5}{z - 0.9}$$



Els angles dels pols i zeros resulten ser  $\theta_{p1} = 146.31^\circ$  i  $\theta_{z1} = 26.56^\circ$ . Imposant la condició de l'angle queda

$$26.56^\circ - 146.31^\circ + \theta_c = 180^\circ$$

d'on

$$\theta_c = 299.75^\circ = -60.25^\circ$$

Com que surt negatiu provarem per retard de fase ( $p_c$  a la dreta de  $z_c$ ).

Triem  $p_c = 0.8$  que deixa prou espai a la seva esquerra per a que hi càpiga  $z_c$ . Aleshores

$$\theta_{p_c} = 141.34^\circ$$

i

$$\theta_{z_c} = \theta_{p_c} + \theta_c = 141.34^\circ - 60.25^\circ = 81.09^\circ$$

i ja podem calcular  $z_c$ :

$$z_c = 0.3 - \frac{0.4}{\tan 81.09^\circ} = 0.2373$$

Imposant la condició del mòdul

$$k = \frac{0.7211 \cdot 0.6403}{0.8944 \cdot 0.4049} = 1.2750$$

i ara

$$k_c = \frac{k}{k_1} = \frac{1.2750}{2} = 0.6375$$

i, en conseqüència el compensador queda

$$G_c(z) = 0.6375 \cdot \frac{z - 0.2373}{z - 0.8}$$

és a dir, que la transmitància de llaç amb el compensador serà

$$G_c L(z) = 1.2750 \cdot \frac{z - 0.2373}{z - 0.8} \cdot \frac{z + 0.5}{z - 0.9}$$

Comprovació:

$$1 + G_c L(z) = 1 + 1.2750 \cdot \frac{z - 0.2373}{z - 0.8} \cdot \frac{z + 0.5}{z - 0.9} = 0 \implies z^2 - 0.6z + 0.25 = 0$$

que efectivament té les arrels  $0.3 \pm 0.4j$  desitjades.

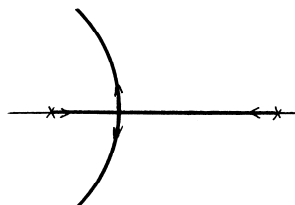
### Notes.

— Amb el procediment que hem explicat el  $\lim_{z \rightarrow 1} G_c(z)$  tindrà un valor arbitrari. En conseqüència, no podrem prefixar l'error permanent en llaç tancat. Com que la solució no és única, si cal es pot provar amb diverses parelles de  $z_c$  i  $p_c$  (sempre mantenint l'angle  $\theta_c$ ), que implicaran diferents valors del  $\lim_{z \rightarrow 1} G_c(z)$  i, en conseqüència, de l'error permanent. Si tot i així no es pot aconseguir l'error desitjat, es pot afegir un segon compensador dissenyat pel mètode b.

— Es pot demostrar que el compensador per avançament desplaça el l.g.a. cap l'esquerra i el de retard cap a la dreta.

— El compensador dissenyat sols assegura que el sistema en anell tancat té els pols  $p_n$  i  $p_n^*$ . En particular, si no hem fet res addicional, no sabem si aquests pols són dominants o si el sistema és estable (pel valor de  $k$  que hem triat, els pols a altres branques del l.g.a. poden estar fora del cercle unitat).

**Mètode b** — Volem fixar l'error del sistema en llaç tancat sense alterar-ne els pols. Donats una transmitància de llaç  $kGH(z)$  i el corresponent l.g.a. de  $1 + kGH(z) = 0$



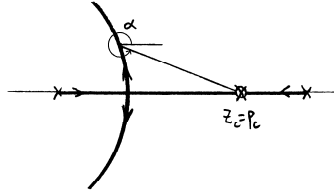
si afegim a  $GH(z)$  un zero i un pol al mateix lloc amb el compensador

$$G_c(z) = \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

amb  $z_c = p_c$ , el l.g.a. no canvia, a part d'aparèixer aquest nou punt. Això és així perquè si a qualsevol punt arbitrari hi apliquem la condició de l'angle

$$\sum \theta_z - \theta_p = 180^\circ$$

com es veu a la figura



com que en afegir el zero i el pol hi sumem  $\alpha$  i hi restem  $\alpha$ , seguirà complint-se. Una cosa similar passa amb la condició del mòdul: multipliquem numerador i denominador per la mateixa distància.

Si per comptes de fer  $z_c = p_c$ , els triem no iguals, però sí força pròxims,  $z_c \simeq p_c$ , la condició de l'angle farà variar una mica tot el l.g.a., però molt poc (excepte a la proximitat de  $z_c$  i  $p_c$ ). De que pot servir això? Vegem-ho.

Recordem les expressions dels coeficients d'error (explicitant la  $k$  del l.g.a.):

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} k \overline{GH}(z) = k \lim_{z \rightarrow 1} \overline{GH}(z) \\ K_v &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) k \overline{GH}(z)] = k \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) \overline{GH}(z)] \\ K_a &= \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 k \overline{GH}(z)] = k \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 \overline{GH}(z)] \end{aligned}$$

Si ens convé variar (normalment augmentar) algun d'aquests coeficients, ho podem fer variant la  $k$ . Però aleshores les arrels es mouran sobre el l.g.a. i probablement això no ens interessa. Com podem variar els coeficients d'error sense moure les arrels d'on són, és a dir sense tocar  $k$ ? El recurs serà fer que variï el límit. Ens cal, doncs, un compensador  $G_c(z)$  que faci variar el límit sense variar el l.g.a. Els coeficients quedaran:

$$\begin{aligned} K_p &= k \lim_{z \rightarrow 1} G_c(z) \overline{GH}(z) \\ K_v &= \frac{1}{T} k \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) G_c(z) \overline{GH}(z)] \\ K_a &= \frac{1}{T^2} k \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 G_c(z) \overline{GH}(z)] \end{aligned}$$

El  $G_c(z)$  que hem vist no varia pràcticament el l.g.a.; però podrà variar el límit? Cal triar uns valors per a  $z_c$  i  $p_c$  que siguin molt similars (per a que no variï el l.g.a.) i que facin variar força el

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

Clarament caldrà triar uns valors molt propers a 1. Per exemple, si  $z_c = 0.98$  i  $p_c = 0.99$ , és

$$G_c(z) = \frac{z - z_c}{z - p_c} = \frac{z - 0.98}{z - 0.99}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - z_c}{z - p_c} = \frac{1 - 0.98}{1 - 0.99} = \frac{0.02}{0.01} = 2$$

i haurem multiplicat el guany per 2, sense pràcticament haver alterat el l.g.a. Si 0.98 i

0.99 no ens semblen prou similars, podem triar, per exemple,  $z_c = 0.998$  i  $p_c = 0.999$  i

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - z_c}{z - p_c} = \frac{1 - 0.998}{1 - 0.999} = \frac{0.002}{0.001} = 2$$

Cal advertir que això és un càlcul numèric mal condicionat (diferències petites de números grans) i caldrà anar amb compte al implementar l'algorisme corresponent. Més endavant (pàg. 87) veurem que no podem pas representar exactament els nombres que vulguem, i com que petites variacions en els coeficients (el 0.998 i 0.999 en aquest darrer exemple) provoquen grans variacions en el guany, caldrà tenir-ho en compte en el disseny.

Vegem el procediment de disseny. Suposem que volem augmentar el guany de la transmitància de llaç (o, naturalment, de la transmitància que sigui), per un factor de  $k_d$ . Caldrà imposar que

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - z_c}{z - p_c} = \frac{1 - z_c}{1 - p_c} = k_d$$

Fixarem arbitràriament, per exemple,  $p_c$  a un valor pròxim a 1 i aleshores serà

$$z_c = 1 - k_d(1 - p_c)$$

Al darrer exemple, si volíem  $k_d = 2$  i triàvem  $p_c = 0.999$  tenim  $z_c = 1 - 2 \cdot (1 - 0.999) = 0.998$ .

— Si, com és usual volem reduir l'error permanent, és a dir volem  $k_d > 1$ , serà  $z_c < p_c$ , que vol dir que el compensador és per retard de fase.

Si es fa  $p_c < z_c$ , el guany  $k_d$  del compensador serà menor que 1, i el compensador serà per avançament de fase.

— Notem que el compensador fa augmentar el grau del sistema en llaç tancat, en conseqüència apareixerà un nou pol que caldrà vigilar.

#### 4.6 Disseny de PI i PD pel l.g.a.

L'especificació de disseny seran els pols que volem que tingui el sistema en llaç tancat.

Recordem (pàgina 68) l'expressió de la transmitància del PID:

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i T}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1} + \frac{K_d}{T} \cdot \frac{z - 1}{z}$$

Caldrà, doncs, trobar  $K_p$ ,  $K_i$  i  $K_d$  a partir de la transmitància de llaç del sistema,  $L(z)$  i dels pols que volem que tingui el sistema en llaç tancat.

**PI** - Els posarem en la forma

$$G_c(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

que correspon a un compensador per avançament o retard de fase que ja sabem dissenyar (mètode a, pàg. 70). Recordant que els integradors retarden la fase  $90^\circ$  el farem per retard, és a dir amb  $z_c < p_c$ . Fem

$$\begin{aligned} G_c(z) &= K_p + \frac{K_i T}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1} = \frac{2K_p(z - 1) + K_i T(z + 1)}{2(z - 1)} = \\ &= \frac{(2K_p + K_i T)z + (K_i T - 2K_p)}{2(z - 1)} = \frac{2K_p + K_i T}{2} \cdot \frac{z - \frac{2K_p - K_i T}{2K_p + K_i T}}{z - 1} \end{aligned}$$

que és de la forma volguda, amb

$$\begin{cases} k_c = \frac{2K_p + K_i T}{2} \\ z_c = \frac{2K_p - K_i T}{2K_p + K_i T} \\ p_c = 1 \end{cases}$$

El que farem serà, doncs, dissenyar un compensador per retard de fase ( $z_c < p_c$ ) que tingui el pol  $z = 1$ , és a dir de la forma

$$G_c(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - 1}$$

i que faci que el sistema en llaç tancat tingui els pols especificats. Aleshores, de les expressions anteriors tenim

$$\begin{cases} K_p = \frac{k_c}{2} (1 + z_c) \\ K_i = \frac{k_c}{T} (1 - z_c) \end{cases}$$

que ens permeten obtenir  $K_p$  i  $K_i$ . Notem que necessitem explícitament el període de mostreig.

La nova transmitància de llaç del sistema compensat serà

$$G_c(z)L(z) = \left( K_p + \frac{K_i T}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1} \right) L(z)$$

**PD** - Els posarem en la forma

$$G_c(z) = k_c \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

amb  $p_c < z_c$ , que correspon a un compensador per avançament (recordem que els derivadors avancen la fase), que ja sabem dissenyar. Fem

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_d}{T} \cdot \frac{z - 1}{z} = \frac{K_p T z + K_d z - K_d}{T z} = \frac{K_p T + K_d}{T} \cdot \frac{z - \frac{K_d}{K_p T + K_d}}{z}$$

que és de la forma volguda, amb

$$\begin{cases} k_c = \frac{K_p T + K_d}{T} \\ z_c = \frac{K_d}{K_p T + K_d} \\ p_c = 0 \end{cases}$$

Dissenyarem, doncs, (pel mètode a, pàg. 70) un compensador per avançament de fase

( $p_c < z_c$ ) que tingui el pol  $z = 0$ , és a dir de la forma

$$G_c(z) = k_c \frac{z - z_c}{z}$$

i que faci que el sistema enllaç tancat tingui els pols especificats.

Aleshores obtindrem  $K_p$  i  $K_d$  partir de les expressions anteriors, és a dir

$$\begin{cases} K_p = k_c (1 - z_c) \\ K_d = k_c T z_c \end{cases}$$

Notem que, com en el PI, necessitem explícitament el període de mostreig.

La nova transmitància de laç del sistema compensat serà

$$G_c(z)L(z) = \left( K_p + \frac{K_d}{T} \cdot \frac{z - 1}{z} \right) L(z)$$

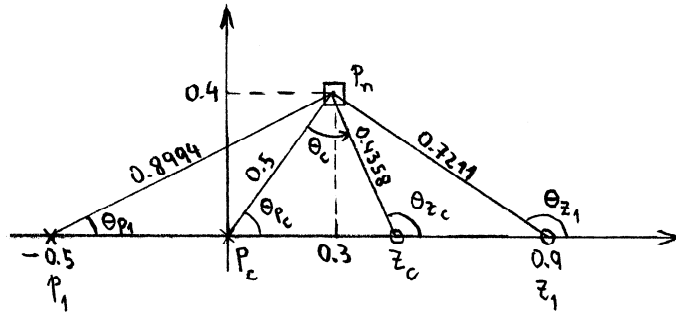
Tornem ara a resoldre els exemples de les pàgines 73 i 75, però via PI o PD.

### Exemple 1b

Un sistema té la transmitància de laç  $\frac{z-0.9}{0.5z+0.25}$  i es desitja que el sistema enllaç tancat tingui els pols  $p_n = 0.3 \pm 0.4j$ . Trobeu un controlador PI o PD que ho aconseguixi. Període de mostreig,  $T = 0.1$  s.

Comencem per passar la transmitància de laç a la forma canònica 2,

$$\frac{z - 0.9}{0.5z + 0.25} = 2 \cdot \frac{z - 0.9}{z + 0.5}$$



Els angles dels pols i zeros resulten ser  $\theta_{p1} = 26.56^\circ$  i  $\theta_{z1} = 146.31^\circ$ . Imposant la condició de l'angle queda

$$146.31^\circ - 26.56^\circ + \theta_c = 180^\circ$$

d'on

$$\theta_c = 60.25^\circ$$

En sortir  $\theta_c$  positiu, cal fer-lo per avançament de fase, és a dir que farem un PD. Per a fer un PD cal fer  $p_c = 0$ . Aleshores

$$\theta_{p_c} = 53.13^\circ$$

i

$$\theta_{z_c} = \theta_{p_c} + \theta_c = 53.13^\circ + 60.25^\circ = 113.38^\circ$$



i ja podem calcular  $z_c$ :

$$z_c = 0.3 - \frac{0.4}{\tan 113.38^\circ} = 0.4729$$

Imposant la condició del mòdul

$$k = \frac{0.8944 \cdot 0.5}{0.7211 \cdot 0.4358} = 1.423$$

i ara

$$k_c = \frac{k}{k_1} = \frac{1.423}{2} = 0.7115$$

i, en conseqüència, el controlador queda

$$G_c(z) = 0.7115 \cdot \frac{z - 0.4729}{z}$$

Ho passem ara a un PD:

$$\begin{cases} K_p = k_c(1 - z_c) = 0.7115(1 - 0.4729) = 0.3750 \\ K_d = k_c T z_c = 0.7115 \cdot 0.1 \cdot 0.4729 = 0.0337 \end{cases}$$

i el controlador PD serà

$$\begin{aligned} G_c(z) &= K_p + \frac{K_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z} = 0.3750 + \frac{0.0337}{0.1} \cdot \frac{z-1}{z} = \\ &= 0.3750 + 0.337 \cdot \frac{z-1}{z} \end{aligned}$$

Comprovació:

$$1 + G_c G H(z) = 1 + \left( 0.3750 + 0.337 \cdot \frac{z-1}{z} \right) \cdot 2 \cdot \frac{z-0.9}{z+0.5} = 0$$

d'on

$$2.4240z^2 - 1.4556z + 0.6066 = 0$$

que efectivament té les solucions  $0.3 \pm 0.4j$ .

### **Exemple 2b**

*Un sistema té la transmitància de llaç  $\frac{z+0.5}{0.5z-0.45}$  i es desitja que el sistema en llaç tancat tingui els pols  $p_n = 0.3 \pm 0.4j$ . Trobeu un controlador PI o PD que ho aconsegueixi. Període de mostreig,  $T = 0.1$  s.*

Comencem per passar la transmitància de llaç a la forma canònica 2,

$$\frac{z+0.5}{0.5z-0.45} = 2 \cdot \frac{z+0.5}{z-0.9}$$



$$= 0.52813 + 0.28438 \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Comprovació:

$$1 + G_c GH(z) = 1 + \left( 0.52813 + 0.28438 \cdot \frac{z+1}{z-1} \right) \cdot 2 \cdot \frac{z+0.5}{z-0.9} = 0$$

que dóna

$$2.62502z^2 - 1.5750z + 0.65625 = 0$$

que efectivament té les solucions  $0.3 \pm 0.4j$ .

Llegint l'enunciat d'aquests dos darrers exemples sen's pot ocórrer que no són usuals. Normalment hauríem volgut fixar els pols i anular l'error (exigint un PI), o fixar els pols i volent que la correcció de l'error fos més ràpida (exigint un PD). No serà usual que tant s'ens faci d'un PI que d'un PD. El que passa és que aparentment no podem triar, el resultat "surt" per avançament o per retard. Si  $\theta_c$  surt negatiu (retard) i per comptes de fer, com hem fet, un PI triem  $p_c = 0$  per a fer un PD, potser que  $z_c$  no ens hi càpiga a la seva esquerra. I si surt  $\theta_c$  positiu (avançament) i triem  $p_c = 1$  per a fer un PI per comptes d'un PD com hem fet, certament  $z_c$  no hi cabrà pas a la seva dreta.

En canvi si resollem els exemples per la via algebàrica no hi ha cap dificultat. Veurem, però, que ens surt alguna de les constants ( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ) negativa. Això ens dóna la pista del que està passant. En desenvolupar el mètode del l.g.a. a la pàgina 54, varem limitar la  $k$  del l.g.a. a valors positius. Si acceptem valors negatius, la condició de l'angle per a  $k < 0$  queda

$$\sum \text{angles als zeros} - \sum \text{angles als pols} = 0^\circ$$

i això ens canvia els valors de  $\theta_c$  dels exemples i permet fer el que no podíem. La condició del mòdul queda

$$k = - \frac{\Pi \text{ distàncies als pols}}{\Pi \text{ distàncies als zeros}}$$

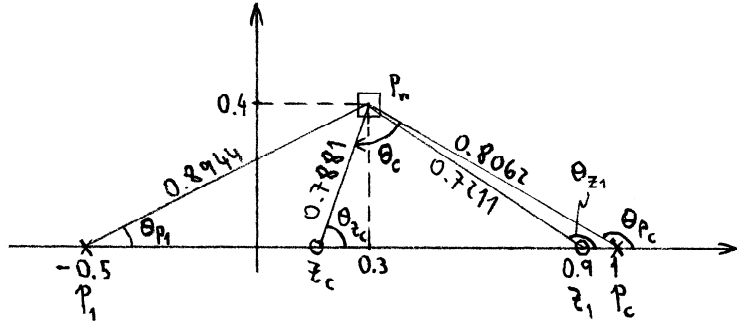
Vegem una altra vegada el primer exemple, però ara triant  $k < 0$ , que ens permetrà resoldre'l amb un PI.

### Exemple 1c

*Un sistema té la transmitància de llaç  $\frac{z-0.9}{0.5z+0.25}$  i es desitja que el sistema en llaç tancat tingui els pols  $p_n = 0.3 \pm 0.4j$ . Trobeu un controlador PI que ho aconseguixi. Període de mostreig,  $T = 0.1$  s.*

Comencem per passar la transmitància de llaç a la forma canònica 2,

$$\frac{z-0.9}{0.5z+0.25} = 2 \cdot \frac{z-0.9}{z+0.5}$$



Els angles dels pols i zeros resulten ser  $\theta_{p1} = 26.56^\circ$  i  $\theta_{z1} = 146.31^\circ$ . Imposant la nova condició de l'angle queda

$$146.31^\circ - 26.56^\circ + \theta_c = 0^\circ$$

d'on

$$\theta_c = -119.75^\circ$$

que en ser negatiu indica controlador per retard, i podem fer el PI. Triem, doncs,  $p_c = 1$ , que dóna  $\theta_{p_c} = 150.25^\circ$  i d'aquí

$$\theta_{z_c} = \theta_{p_c} + \theta_c = 150.25^\circ - 119.75^\circ = 30.5^\circ$$

que ens dóna  $z_c = -0.3791$ .

Ara (aquí hem d'introduir el signe negatiu de la  $k$ )

$$k = -\frac{0.8062 \cdot 0.8944}{0.7881 \cdot 0.7211} = -1.269$$

$$k_c = \frac{k}{k_1} = \frac{-1.269}{2} = -0.6344$$

i el controlador serà

$$G_c(z) = -0.6344 \cdot \frac{z + 0.3791}{z - 1}$$

Passem l'expressió de  $G_c(z)$  a la forma PI:

$$\begin{cases} K_p = \frac{k_c}{2} (1 + z_c) = \frac{-0.6344}{2} (1 - 0.3791) = -0.197 \\ K_i = \frac{k_c}{T} (1 - z_c) = \frac{-0.6344}{0.1} (1 + 0.3791) = -8.749 \end{cases}$$

és a dir

$$\begin{aligned} G_c(z) &= K_p + \frac{K_i T}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1} = -0.197 - \frac{8.749 \cdot 0.1}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1} = \\ &= -0.197 - 0.43745 \cdot \frac{z + 1}{z - 1} \end{aligned}$$

Comprovació:

$$1 + G_c G H = 1 - \left( 0.197 + 0.43745 \cdot \frac{z + 1}{z - 1} \right) \cdot 2 \cdot \frac{z - 0.9}{z + 0.5} = 0$$

que dóna

$$-0.26890z^2 + 0.16111z - 0.06719 = 0$$

que efectivament té les solucions  $0.3 \pm 0.4j$ .



## 5 Implementació

### 5.1 Estructura dels controladors

Vegeu el full de transparències

### 5.2 Efectes de l'aritmètica finita sobre els pols

Recordem que en base 2 podem representar els nombres reals amb

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots)_2 \quad \text{amb} \quad a_i \in \{0, 1\}$$

(noteu el punt entre  $a_0$  i  $a_{-1}$ ) que representa el nombre decimal

$$a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + a_{-2} 2^{-2} + \cdots$$

Amb un nombre finit de bits  $a_i$  no podem representar no ja els infinits reals, si no que ni tan sols els infinits reals que hi ha en un interval finit.

Per exemple, amb 4 bits, podem representar  $2^4 = 16$  valors diferents, que en binari natural equivaldran als nombres decimals del 0 al 15. Per a simplificar, concentrem-nos en nombres entre 0 i 1 representables amb 4 bits, per exemple .0101. D'aquesta manera, un increment d'un bit representa, en decimal, un increment de  $\frac{1}{2^4} = 0.0625$ . El bit de més pes representa  $\frac{1}{2} = 0.5$ , el següent  $\frac{1}{4} = 0.25$ , l'altre  $\frac{1}{8} = 0.125$ , i el de menys pes representa  $\frac{1}{16} = 0.0625$ .

.0000	0
.0001	0.0625
.0010	0.125
.0011	0.1875
.0100	0.25
.0101	0.3125
.0110	0.375
.0111	0.4375
.1000	0.5
.1001	0.5625
.1010	0.625
.1011	0.6875
.1100	0.75
.1101	0.8125
.1110	0.875
.1111	0.9375

Si volem representar el nombre decimal 0.6 no podem. Haurem de triar entre 0.625 i 0.5625. En el primer cas tenim un error per excés i en el segon per defecte.

En el que segueix anomenarem valors *representables* als que tenen una equivalència exacta en la representació discreta que estiguem utilitzant (en l'exemple anterior, els de la columna de la dreta de la taula). Veiem que, en el nostre exemple, la distància entre punts representables és  $\Delta = \frac{1}{16} = 0.0625$ .

Evidentment, el fenomen és general; sigui quin sigui el nombre de bits que usem i el rang que els fem representar, no podem representar tota la continuïtat de nombres entre el màxim i el mínim.

— Això afecta evidentment als valors que els senyals digitals poden tenir. Vegem

amb un exemple una de les conseqüències.

Recuperem el cas de la pàgina 66, en que consideràvem iguals els resultats de sumar i mostrejar que els de mostrejar i sumar. Suposem que els senyals continus són de 0.24 V i de 0.48 V i que en digititzar els senyals triem els nombres binaris més pròxims (és a dir, arrodonim al més pròxim). Tindrem

$$\begin{array}{rcl} 0.24 & \rightarrow & 0.25 \\ 0.48 & \rightarrow & 0.5 \\ \hline 0.72 & \rightarrow & 0.75 \end{array}$$

i si primer sumem, obtenim 0.72 que arrodonit dona 0.75 que efectivament coincideix amb la suma dels arrodoniments ( $0.25 + 0.5 = 0.75$ ).

Però suposem ara que els senyals continus valen 0.22 V i 0.47 V. Tenim

$$\begin{array}{rcl} 0.22 & \rightarrow & 0.25 \\ 0.47 & \rightarrow & 0.5 \\ \hline 0.69 & & 0.75 \\ & \searrow & \\ & & 0.6875 \end{array}$$

i l'arrodoniment (0.6875) de la suma (0.69) no coincideix amb la suma dels arrodoniments (0.75).

— Una altra conseqüència de la quantificació dels senyals és que els senyals petits (de poca amplitud) queden exageradament pertorbats. Això pot originar comportaments inestables per a senyals petits, tot i ser el sistema estable (*deadbeat*).

— Un efecte potser menys evident és que els pols del sistema no seran a on ens pensem. I el lloc a on realment siguin dependrà de l'estructura que hàgim triat per l'algorisme de control. Com a exemple vegem a on podem posar els pols d'un controlador de segon ordre amb l'estructura D3 i amb l'estructura X1.

Considerarem en els dos casos el mateix sistema de segon ordre

$$G_c(z) = \frac{N(z)}{z^2 + bz + a}$$

### Estructura D3

Recordem que en una estructura directa s'utilitza en els càlculs directament els coeficients,  $a$  i  $b$  en el nostre exemple. Per a veure com la seva quantificació afecta els pols, ens cal relacionar els coeficients amb els pols. L'anàlisi es fa millor en polars.

Suposem que els pols, arrels de  $z^2 + bz + a = 0$ , són  $p_{1,2} = \rho e^{\pm j\theta}$ . L'equació amb aquestes arrels serà

$$(z - \rho e^{j\theta})(z - \rho e^{-j\theta}) = z^2 - 2\rho z \cos \theta + \rho^2$$

és a dir que

$$\begin{aligned} b &= -2\rho \cos \theta \\ a &= \rho^2 \end{aligned}$$

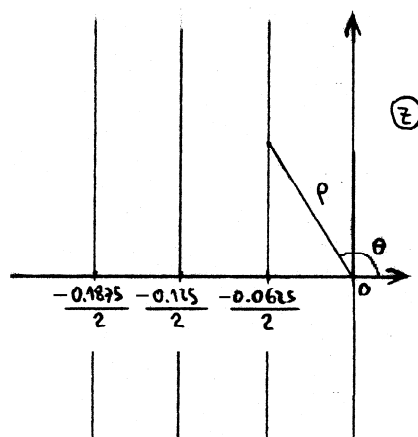
Fixem-nos en la primera expressió,  $b = -2\rho \cos \theta$ . Com que el computador utilitzarà directament  $b$  en els càlculs,  $b$  sols tindrà valors dels representables. Això vol dir que els valors implícits de  $\rho$  i  $\theta$  que realment podrem obtenir seran aquells que substituïts a aquestes últimes expressions donin un  $b$  representable. Considerem un dels valors representables de  $b$ , per exemple 0.0625. Els punts del pla  $z$  tals que  $-2\rho \cos \theta = 0.0625$



és a dir

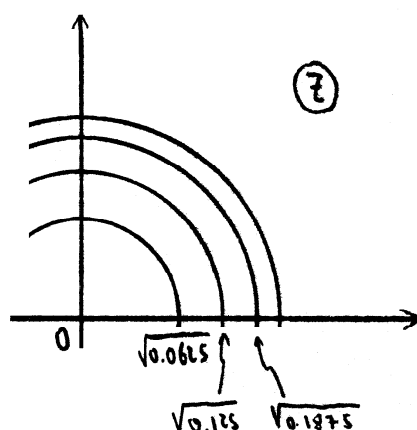
$$\rho \cos \theta = \frac{-0.0625}{2}$$

són els d'una recta vertical pel punt  $\frac{-0.0625}{2}$ .



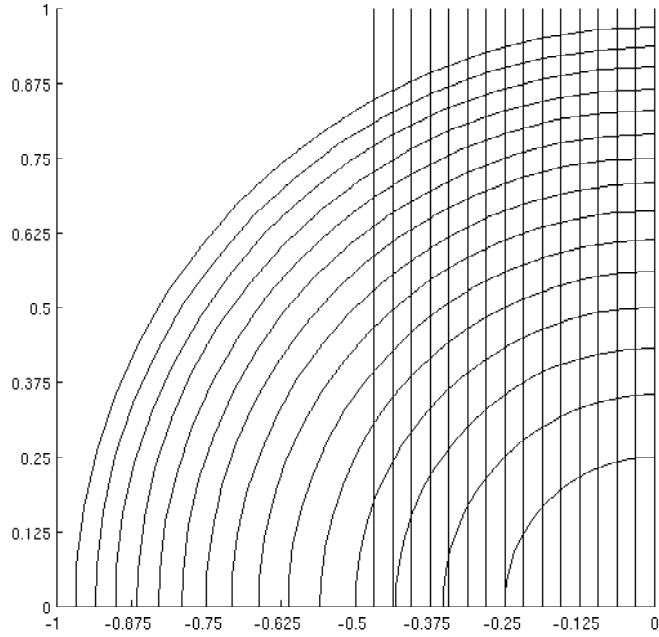
De manera similar passarà amb els altres valors representables de  $b$ . És a dir, pel que fa a  $b$ , els pols sols estaran sobre rectes verticals separades per una distància  $\Delta/2$ .

Mirem ara la segona expressió,  $a = \rho^2$ . Si considerem un valor representable de  $a$ , per exemple 0.0625, els punts del pla que compleixen  $\rho^2 = 0.0625$ , clarament estan sobre una circumferència de radi  $\rho = \sqrt{0.0625}$  i centre a l'origen.



El mateix passarà pels altres valors representables de  $a$ . Pel que fa a  $a$ , doncs, els pols sols estaran sobre circumferències amb centre a l'origen. Els radis de les circumferències successives estaran separats per  $\Delta\rho = \sqrt{a + \Delta} - \sqrt{a}$ . Això fa que les circumferències estiguin tant més pròximes quant més grans siguin els seus radis.

Com que les dues condicions anteriors actuen a l'hora, els punts del pla que podran ser pols són les interseccions de les rectes verticals amb les circumferències, com mostra la figura (s'ha omès la meitat inferior, simètrica de la superior).



Si la taula de la pàgina 87, arribés a 2, hi hauria també línies verticals a la meitat esquerra del gràfic fins a 1, però ara els cercles arribarien fins a 2. Queda clar que en cert mode es desaprofiten possibilitats.

Si el pol desitjat per al controlador dissenyat no és d'aquest conjunt d'interseccions, en agafar valors representables dels coeficients  $a$  i  $b$  el valor efectiu del pol anirà a parar a algun dels vèrtexs que l'envolten.

(Notem que, aparentment, els pols reals sols poden agafar dos valors (0, i  $-0.25$ ). Passa, però, que a l'anàlisi anterior hem suposat que els pols eren complexos conjugats ( $\rho^{\pm j\theta}$ ), això fa que els pols reals que apareixen al gràfic siguin sols els dobles, que són conjugats d'ells mateixos. Les parelles de pols reals realitzables són totes les que surtin de substituir els valors realitzables de  $a$  i  $b$  (amb  $b^2 \geq 4a$ ) a

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$$

En resulten 30 parelles en total, inclosos els dobles.)

### Exemple

Suposem que volem que els pols de

$$G_c(z) = \frac{N(z)}{z^2 + bz + a}$$

siguin  $z = -0.2 \pm 0.3j$  i que usem una estructura D3 i 4 bits.

Tenim

$$z = -0.2 \pm 0.3j = 0.3606e^{\pm j2.1588}$$

d'on

$$b = -2\rho \cos \theta = -2 \cdot 0.3606 \cos(2.1588) = 0.4$$

Com que 0.4 no és a la taula de la pàgina 87, haurem d'agafar un dels valors més propers, és a dir  $b = 0.375$  o bé  $b = 0.4375$ .

D'altra banda

$$a = \rho^2 = 0.3606^2 = 0.13$$

Com que 0.13 no és a la taula, tindrem que agafar un dels valors més pròpers, és a dir  $a = 0.125$  o bé  $a = 0.1875$ .

Suposem que triem  $b = 0.375$  i  $a = 0.125$ . L'equació característica efectiva quedarà

$$z^2 + 0.375z + 0.125 = 0$$

que dona els pols efectius

$$z = -0.1875 \pm 0.2997j = 0.3536e^{\pm j2.1298}$$

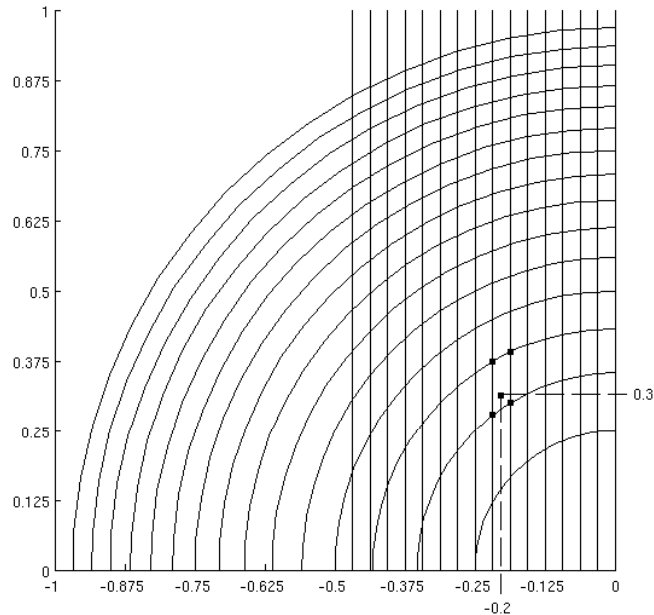
per comptes dels volguts

$$z = -0.2 \pm 0.3j = 0.3606e^{\pm j2.1588}$$

Repetint els càlculs amb les possibles combinacions de  $a$  i  $b$  queda

$a$	$b$	pols	mòdul
0.125	0.375	$-0.1875 \pm 0.2997j$	0.3536
0.125	0.4375	$-0.2188 \pm 0.2778j$	0.3536
0.1875	0.375	$-0.1875 \pm 0.3903j$	0.4330
0.1875	0.4375	$-0.2188 \pm 0.3737j$	0.4330

A la figura següent hem marcat el pol desitjat i els quatre vèrtexs a on realment podem posar-lo:



## Estructura X1

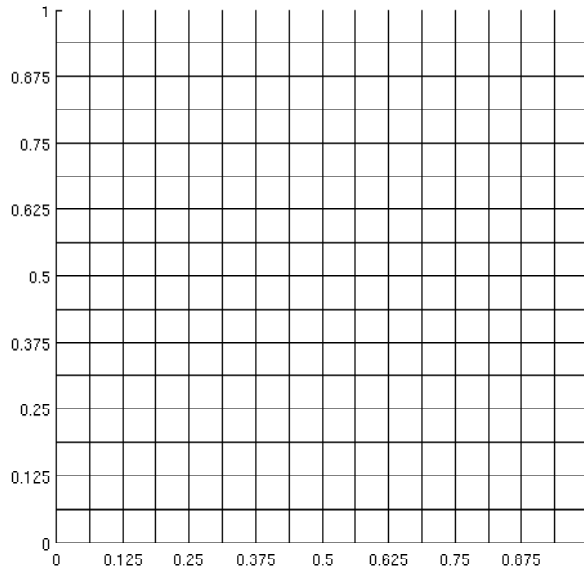
Si el mòdul de segon ordre és

$$c_0 + \frac{A}{z - p} + \frac{A^*}{z - p^*}$$

els coeficients que ara actuen estan relacionats amb els pols per

$$\begin{aligned}g_1 &= \operatorname{Re}(p) = \rho \cos \theta \\g_2 &= \operatorname{Im}(p) = \rho \sin \theta\end{aligned}$$

Si  $g_1$  i  $g_2$  estan quantificats a una distància  $\Delta$ , els pols estaran a l'intersecció de rectes verticals separades per  $\Delta$  i rectes horitzontals separades per  $\Delta$ , com es veu a la figura (on també s'ha omès la meitat simètrica inferior)



Es pot veure, per exemple, que si els pols han de ser pròxims al cercle unitat i a la part de dalt del cercle, l'estructura D3 va millor (hi ha més punts); en canvi si han de ser pròxims al cercle unitat, però a prop de l'eix d'abscisses, va millor l'estructura X1. Veiem que, en general, amb aquesta estructura hi ha la possibilitat d'un ús més uniforme del pla  $z$ .

(Cal notar que en haver fet servir els valors representables de  $a$  i  $b$  de la taula de la pàgina 87 que són tots positius, D3 dona pols de part real negativa i X1 de part real positiva. En general s'usaran valors de  $a$  i  $b$  positius i negatius i els pols sortiran als quatre quadrants).

### Exemple

Suposem que volem que els pols de

$$G_c(z) = \frac{N(z)}{z^2 + bz + a}$$

siguin  $z = 0.2 \pm 0.3j$  i que usem una estructura X1 i 4 bits.

Tenim

$$z = 0.2 \pm 0.3j = 0.3606e^{\pm j0.9828}$$

d'on

$$\begin{aligned}g_1 &= \operatorname{Re}(z) = 0.2 \\g_2 &= \operatorname{Im}(z) = 0.3\end{aligned}$$

Com que 0.2 no és a la taula de la pàgina 87, haurem de triar o bé  $g_1 = 0.1875$  o bé  $g_1 = 0.25$ .

Com que 0.3 no és a la taula haurem de triar o bé  $g_2 = 0.25$  o bé  $g_2 = 0.3125$ .

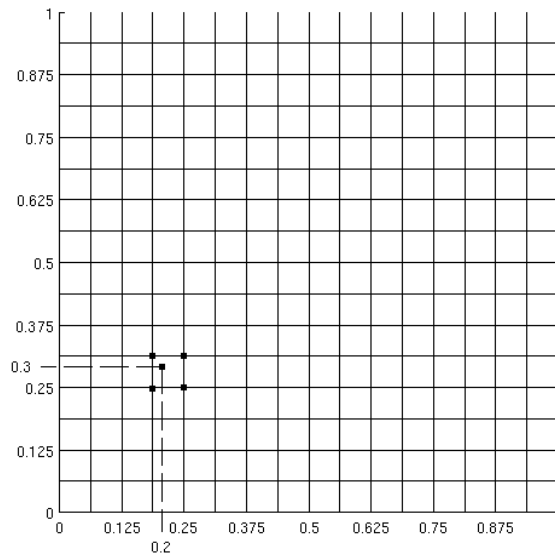
Suposem que triem  $g_1 = 0.1875$  i  $g_2 = 0.25$ . Els pols efectius resultants seran

$$z = 0.1875 \pm 0.25j = 0.3125e^{\pm j0.9273}$$

Repetint els càlculs amb les altres combinacions de  $g_1$  i  $g_2$  queda

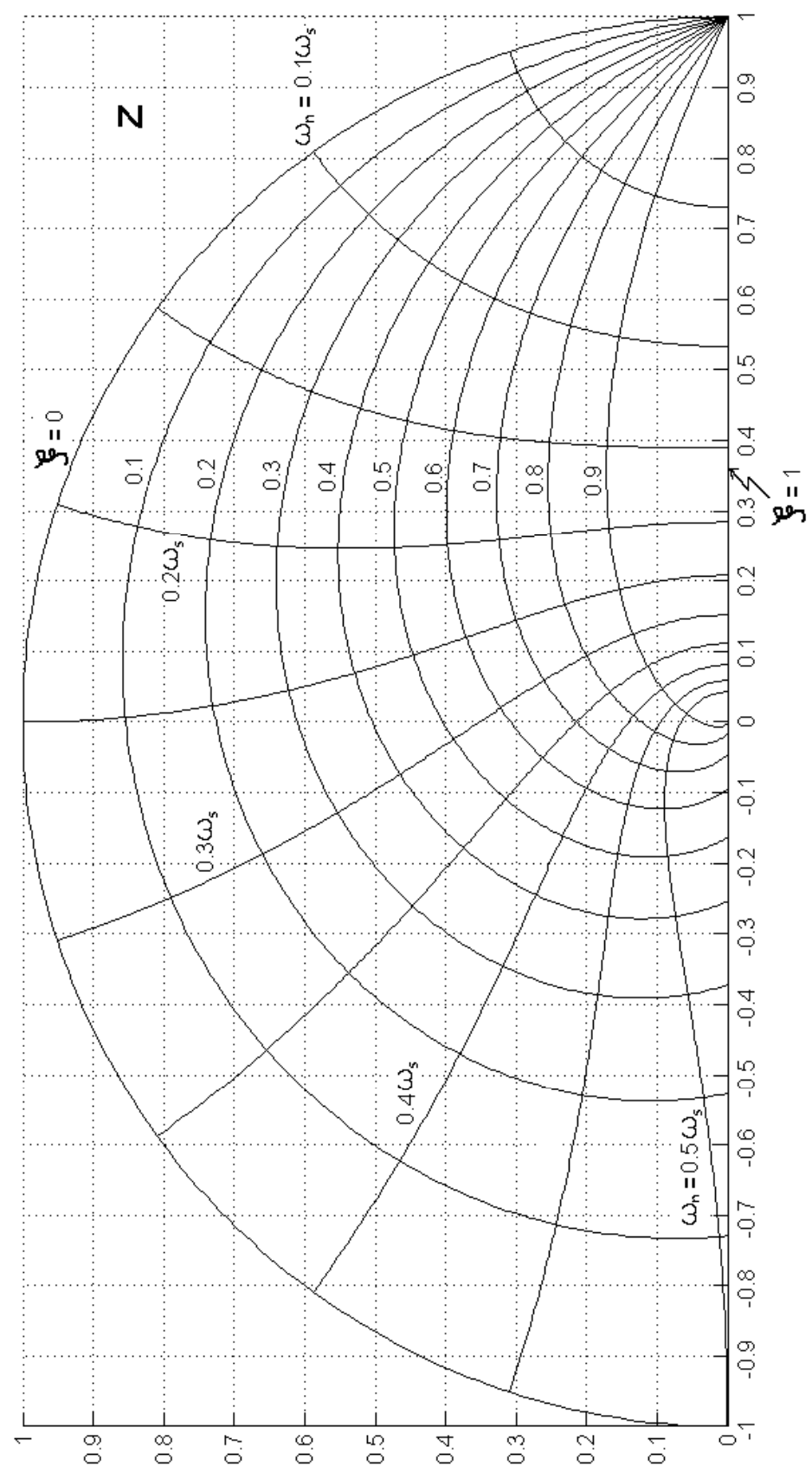
$g_1$	$g_2$	pols	mòdul
0.1875	0.25	$0.1875 \pm 0.25j$	0.3125
0.1875	0.3125	$0.1875 \pm 0.3125j$	0.3644
0.25	0.25	$0.25 \pm 0.25j$	0.3536
0.25	0.3125	$0.25 \pm 0.3125j$	0.4002

A la figura següent hem marcat el pol desitjat i els quatre vèrtexs a on realment podem posar-lo:



En tot l'anterior, per a poder visualitzar bé els fenòmens, hem treballat amb 4 bits i sols nombres positius. A la pràctica s'acostuma a treballar com a mínim amb 8 bits i nombres positius i negatius, però els fenòmens són els mateixos. Convé dissenyar els sistemes i els seus controladors de manera que el seu comportament no sigui extraordinàriament crític respecte a la situació exacta dels pols.





### 6.3 L'alfabet grec.

A	$\alpha$		alfa	
B	$\beta$		beta	
$\Gamma$	$\gamma$		gamma	
$\Delta$	$\delta$		delta	(cal no confondre-la amb el símbol $\partial$ de les derivades parcials)
E	$\varepsilon$	$\epsilon$	èpsilon	
Z	$\zeta$		zeta	
H	$\eta$		eta	
$\Theta$	$\theta$	$\vartheta$	theta	
I	$\iota$		iota	
K	$\kappa$		kappa	
$\Lambda$	$\lambda$		lambda	
M	$\mu$		mi	
N	$\nu$		ni	
$\Xi$	$\xi$		ksi	
O	$\omicron$		òmicron	
$\Pi$	$\pi$	$\varpi$	pi	
P	$\rho$	$\varrho$	rho	
$\Sigma$	$\sigma$	$\varsigma$	sigma	
T	$\tau$		tau	
$\Upsilon$	$\upsilon$		ípsilon	
$\Phi$	$\varphi$	$\phi$	fi	
X	$\chi$		khi	
$\Psi$	$\psi$		psi	
$\Omega$	$\omega$		omega	