Optimal Control for Modern Robotics:
Lecture 1

경희대학교
로봇 제어 및 지능 연구실
석박통합과정 2기 강민형

1 Optimal Control

Optimal Control

Continuous System에 대해 dynamic programming 을 푸는 것은 일반적으로 매우 어려움

: 복잡한 최적화 문제를 작은 하위 문제로 나누어 해결
-> 그 해결 결과를 재사용 -> 전체 문제에 대한 최적해를 도출

Hamilton Jacobi Bellman PDE

- 고차원의 PDE를 수치적으로 풀 수 없음
  -> 계산량 + 실시간성
- 저주 (Curse of Dimensionality)

해를 구할 수 있는 특별한 경우

- 시스템이 Linear 하고 비용함수가 Quadratic form이라면 쉬운 형태의 방정식으로 변환
- 고차원 PDE -> 행렬 방정식

Optimal Control

- Linear Qudratic Regulator (LQR)
- iterative LQR, Differential Dynamic Programming (DDP)
- Model Predictive Control (MPC)

1 Optimal Control

Optimal Control

System은 시간에 따라 $x(t)$ 로 변화

우리가 선택하는 제어 입력 $u(t)$가 시스템의 미래에 영향을 줌

주어진 시간동안 비용함수 J를 최소화하는 최적 입력 시퀀스를 찾는 문제 ➡ 이 때의 비용함수 J^* (*가 붙으면 최적이라는 의미)

$$J = \int_0^\infty \ell(x(t),\, u(t))\, dt$$

최적해 sequence U^*

시간 t에서의 순간의 비용

$\therefore\ J^*(x,t)$ 지금 state가 x, 시각이 t 일 때 앞으로 들게 될 최소 누적 비용

Ex) 앞으로 목적지까지 가장 적은 연료로 가고싶다.

x, t 에서 최적으로 운전했을 때 드는 최소한의 연료량 $\therefore\ J^*(x,t)$ 는 지금 상태에서 미래에 들 비용의 최솟값 함수

1 Optimal Control

Optimal Control

Ex) 앞으로 목적지까지 가장 적은 연료로 가고싶다.

x, t 에서 최적으로 운전했을 때 드는 최소한의 연료량 $\therefore$ $J^*(x,t)$ 는 지금 상태에서 미래에 들 비용의 최솟값 함수

그럼 우리가 원하는 최적에서의 비용함수 J*가 있을텐데 반드시 Hamilton Jacobi Bellman Equation (HJB)이라는 것을 따라야한다

핵심 흐름

- 최적해를 직접 찾는 것이 어렵다
- 하지만 최적해라면 반드시 HJB를 만족해야 한다.
- 그러므로 HJB를 만족하는 함수를 찾아내면 그게 곧 최적해

1 Optimal Control

Hamilton Jacobi Bellman Equation

왜 최적이 되려면 HJB를 따라야 하는가?

: Bellman's Principle of Optimality (벨만 최적성 원리)

앞으로 남은 과정 전체가 최적이라면, 지금 이 작은 step 에서도 당연히 최적으로 행동해야한다.

이걸 식으로 풀어낸 것이 Hamilton Jacobi Bellman Equation

Dynamics

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Cost Function

$$J = \underbrace{h(x(t_f))}_{\text{Terminal Cost}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \ell(x(t)), u(t), t)\, dt}_{\text{Running Cost}}$$

우리가 원하는 것

모든 admissible 한 제어 $u(\cdot)$ 중에서

J를 최소로 만드는 $u^*(\cdot)$

1 Optimal Control

Hamilton Jacobi Bellman Equation

Dynamics

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Cost Function

$$J = h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \ell(x(t)), u(t), t)\, dt$$

우리가 원하는 것

모든 admissible 한 제어 $u(\cdot)$ 중에서

J를 최소로 만드는 $u^*(\cdot)$

$$J^*(x,t) = \min_{u(\cdot)} \left[h(x(t_f)) + \int_{t}^{t_f} \ell(x(\tau)), u(\tau), \tau)\, d\tau \right]$$

x, t 에서 Bellman 최적성의 원리 적용

: 지금부터 t_f까지 최적으로 행동 –〉 지금부터 $t_f + \Delta t$까지 최적으로 행동 + 그 다음에도 계속 최적으로 행동

$$J^*(x,t) = \min_{u(\cdot)} \left[\boxed{\int_{t}^{t+\Delta t} \ell(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau} + \boxed{J^*\left(x(t+\Delta t),\, t+\Delta t\right)} \right]$$

KHU

Hamilton Jacobi Bellman Equation

$$J^*(x,t) = \min_{u(\cdot)} \left[\int_t^{t+\Delta t} \ell(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau + J^*\big(x(t+\Delta t),\, t+\Delta t\big) \right]$$

대입

여기서 $\Delta t \approx 0$, 1차 근사

$$\int_t^{t+\Delta t} \ell(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau \;\approx\; \ell(x(t), u(t), t)\, \Delta t$$

$$x(t+\Delta t) \;\approx\; x(t) + \dot{x}(t)\, \Delta t \;=\; x(t) + f(x(t), u(t), t)\, \Delta t$$

Taylor Expansion

$$J^*(x(t+\Delta t),\, t+\Delta t) \approx \boxed{J^*(x,t) + \frac{\partial J^*}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial x} f(x(t), u(t), t)\, \Delta t}$$

1 Optimal Control

Hamilton Jacobi Bellman Equation

$$J^*(x,t) = \min_{u(\cdot)} \left[\int_t^{t+\Delta t} \ell(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau + J^*\big(x(t+\Delta t),\, t+\Delta t\big) \right]$$

대입

$$J^*(x(t+\Delta t),\, t+\Delta t) \approx \boxed{J^*(x,t) + \frac{\partial J^*}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial x} f(x(t), u(t), t)\, \Delta t}$$

여기서 양변 $\Delta t\ (\neq 0)$, $J^*(x,t)$ **소거**

$$0 = \min_u \left[\ell(x,u,t) + \frac{\partial J^*}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x,t)\, f(x,u,t) \right]$$

Bellman 최적성 원리를 수식으로 풀어낸 Hamilton Jacobi Bellman Equation

1 Optimal Control

Hamilton Jacobi Bellman Equation

Hamilton Jacobi Bellman Equation의 일반형

$$0 = \min_u \left[\ell(x,u,t) + \frac{\partial J^*(x,t)}{\partial t} + \nabla_x J^*(x,t)^\top f(x,u,t) \right]$$

위 식을 만족하는 해를 찾는 것이 곧 최적 제어 문제의 해

-> But, HJB를 풀어서 u^*를 직접 구하는 것이 어렵다 -> PDE를 만족하는 J^*, u^*를 찾아야함

HJB가 실제로 최적성을 보장하는지 예제를 통해 검증

수치적으로 최적해를 구할 수 있는 J^*, u^* 를 HJB 식에 대입했을 때 0이 나오는지

KHU

Hamilton Jacobi Bellman Equation

Ex) Double Integrator : 가장 단순한 system

$\ddot{q} = u$ 인 system –〉 입력을 두 번 적분하면 출력 q가 결정되는 system

$$x = (q, \dot{q}) \qquad \dot{q} = \dot{q}, \qquad \ddot{q} = u$$

$$\ell(x, u) = q^2 + \dot{q}^2 + u^2$$

(→ 위치 ↑ 비용 ↑, 속도 ↑ 비용 ↑, 힘 ↑ 비용 ↑)

최적성의 원리에 의해 최적해가 HJB 식을 따르는지 검증 –〉 만약 따른다면 우리는 최적해를 구할 때 HJB를 만족하는 해를 구하는 것과 동치가 됨

$$u^*(x) = -q - \sqrt{3}\,\dot{q}, \qquad J^*(x) = \sqrt{3}\,q^2 + 2q\dot{q} + \sqrt{3}\,\dot{q}^2.$$

$$\frac{\partial J}{\partial q} = 2\sqrt{3}\,q + 2\dot{q}, \qquad \frac{\partial J}{\partial \dot{q}} = 2q + 2\sqrt{3}\,\dot{q}.$$

1 Optimal Control

Hamilton Jacobi Bellman Equation

Ex) Double Integrator : 가장 단순한 system

$\ddot{q} = u$ 인 system –> 입력을 두 번 적분하면 출력 q가 결정되는 system

$$0 = \min_u \left[\ell(x,u) + \frac{\partial J}{\partial x} f(x,u) \right]$$

$$x = (q, \dot{q}), \qquad f(x,u) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ u \end{bmatrix}$$

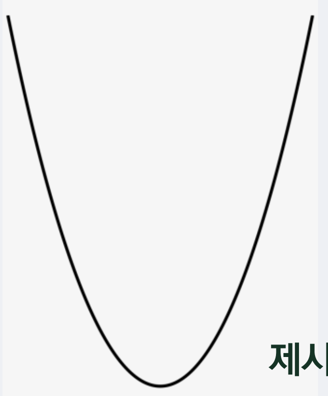
$$\ell(x,u) = q^2 + \dot{q}^2 + u^2.$$

$$\frac{\partial J}{\partial q} = 2\sqrt{3}\, q + 2\dot{q}, \qquad \frac{\partial J}{\partial \dot{q}} = 2q + 2\sqrt{3}\, \dot{q}.$$

$$\ell(x,u) + \frac{\partial J}{\partial x} f(x,u) = q^2 + \dot{q}^2 + u^2 + \left(2\sqrt{3}\, q + 2\dot{q}\right) \dot{q} + \left(2q + 2\sqrt{3}\, \dot{q}\right) u.$$

$$= \boxed{u^2 + (2q + 2\sqrt{3}\dot{q})u + \cdots}$$

u에 대한 convex 함수



제시했던 u^* 와 동일

$$2u + 2q + 2\sqrt{3}\, \dot{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = -q - \sqrt{3}\, \dot{q}.}$$

1 Optimal Control

Hamilton Jacobi Bellman Equation

핵심 내용

지금까지 우리는 optimal control 문제를 풀 때 즉 최적해를 구할 때의 핵심 원리가 Dynamic Programming이고
DP 의 핵심 개념인 최적성의 원리를 식으로 표현한 것이 Hamilton Jacobi Bellman Equation 임을 배웠다.

$$0 = \min_u \left[\ell(x, u, t) + \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t} + \nabla_x J^*(x, t)^\top f(x, u, t) \right]$$

최적해라면 반드시 만족해야 하는 optimality의 필요충분 조건

Limitation

- PDE이기 때문에 비선형 시스템에서는 풀 수 없다
- 고차원의 상태 공간에서 계산이 불가능하다

Linear Quadratic Regulator

But, 특정한 경우에서는 solvable 하다 ➡ Linear Dynamics + Quadratic Cost 일 경우

감사합니다.