Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

Spis treści

1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

1.1 Przestrzeń probabilistyczna

Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Niepusty zbiór Ω wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

Definicja 1.1.2. σ-algebra zdarzeń.

Podrodzina Σ w rodzinie wszystkich podzbiorów Ω o następujących właściwościach:

1. $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli $A \in \Sigma$ to $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma$, to $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli $A, B \in \Sigma$ to $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe

Ω – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$ – dopełnienie zdarzenia A

$A \cap B = \emptyset$ – zdarznia wzajemnie się wykluczają.

Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkładbprawdopodobieństwa).

W przestrzeni Ω z σ-algebrą zdarzeń Σ dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \to [0, 1]$$

spełniające warunki:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ zachodzi
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1. $P(\emptyset)$=0
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spełnia warunek
$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$
to
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$
3. Dla dowolnego zdarzenia A zachodzi
$$P(A') = 1 - P(A)$$
4. Dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzi
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
5. Jeśli $A \subset B$ to $P(A) \leqslant P(B)$
6. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą ciąg wstępujący, tzn.
$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots$$
to
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$
7. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą ciąg zstępujący, tzn.
$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots$$
to
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.

Trójka (Ω, Σ, P), gdzie:

Ω – niepusty zbiór,

Σ – σ-algebra w Ω,

P – miara probabilistyczna.

Liczbę $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A.

1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.

Liczba określona wzorem

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$ – zdarzenia,

$P(B) > 0$.

Jest to prawdopodobieństwo A pod warunkiem B.

Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$ jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą układ zupełny oraz $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, to dla dowolnego zdarzenia B zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)$$

Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.

Jeśli zdarzenia A_i tworzą układ zupełny taki, że $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, a B jest zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$, to dla dowolnego k zachodzi

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k) P(A_k)}{\sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

1.3 Niezależność zdarzeń

Definicja 1.3.1. Niezależność zdarzeń.

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nazywamy niezależnymi jeśli dla każdego układu indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$ oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Definicja 1.3.2. Niezależność warunkowa.

Zdarzenia A i B są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli

$$P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli dla każdego układu indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$ oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k} \mid C) = P(A_{i_1} \mid C) \cdot P(A_{i_2} \mid C) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k} \mid C)$$

2 Zmienne losowe jednowymiarowe

2.1 Zmienna losowa

Definicja 2.1.1. Zmienna losowa.

Zmienna losowa to odwzorowanie

$$X : \Omega \to \mathcal{X}$$

takie, że dla każdego $A \in \Sigma_{\mathcal{X}}$ zachodzi

$$X^{-1}(A) \in \Sigma$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{X}$ dowolnym niepustym zbiorem, a $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ-algebrą podzbiorów $\mathcal{X}$.

Definicja 2.1.2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

Funkcję

$$P_X : \Sigma_{\mathcal{X}} \to [0, 1]$$

określoną następująco

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{X}$ niepustym zbiorem, $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ-algebrą w $\mathcal{X}$, a $X : \Omega \to \mathcal{X}$ zmienną losową.

2.2 Zmienne losowe rzeczywiste

Definicja 2.2.1. Dystrybuanta zmiennej losowej.

Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową rzeczywistą. Dystrybuantą zmiennej losowej rzeczywistej X nazywamy funkcję

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

określoną wzorem

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X((-\infty, x])$$

Własności dystrybuanty:

1. Jeśli $a < b$, to $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leqslant b)$
2. F_X jest niemalejąca
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4. F_X jest prawostronnie ciągła, tzn. dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$
5. $F_X(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$
6. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$
7. F_X jest ciągła w $x_0 \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$P(X = x_0) = 0$$

Definicja 2.2.2. Funkcja prawdopodobieństwa.

Rozkład dyskretny zmiennej X jest wyznaczony przez funkcję

$$p : \mathcal{S} \to [0, 1]$$

określoną następująco:

$$p(x_k) = P_X(x_k) = P(X = x_k)$$

Funkcję p nazywamy funkcją prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej X.

Definicja 2.2.3. Funkcja gęstości.

Gęstość zmiennej losowej X to funkcja

$$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

taka, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ takich, że $a < b$ zachodzi

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

2.3 Parametry zmiennej losowej

Definicja 2.3.1. Wartość oczekiwana.

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej rzeczywistej X o rozkładzie dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa p nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{k:x_k \in \mathcal{S}} x_k \cdot p(x_k)$$

Jeśli X jest zmienną o rozkładzie ciągłym z gęstością f, to

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Własności wartości oczekiwanej:

1. $\mathbb{E}c = c$
2. $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y + c$

Definicja 2.3.2. Moment zwykły.

Momentem zwykłym rzędu k zmiennej losowej X dla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nazywamy liczbę

$$\mu'_k = \mathbb{E}(X^k)$$

Definicja 2.3.3. Moment centralny.

Momentem centralnym rzędu k zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mu_k = \mathbb{E}((X - \mu)^k)$$

Dla rozkładów dyskretnych

$$\mu'_k = \sum_{i:x_i \in \mathcal{S}} x_i^k \cdot p(x_i)$$

$$\mu_k = \sum_{i:x_i \in \mathcal{S}} (x_i - \mu)^k \cdot p(x_i)$$

Dla rozkładów ciągłych

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx$$

Definicja 2.3.4. Wariancja.

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy jej drugi moment centralny, tzn.

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2)$$

Własności wariancji:

1. $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
2. Jeśli zmienna X ma skończoną wariancję, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$
3. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
4. $Var(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest stała z prawdopodobieństwem 1, tzn. istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że
$$P(X \neq x_0) = 0$$

Definicja 2.3.5. Odchylenie standardowe.

Odchyleniem standardowym zmiennej losowej X nazywamy pierwiastek jej wariancji, tzn.
$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Definicja 2.3.6. Funkcja tworząca momenty (MGF).

Funkcją tworzącą momenty rzeczywistej zmiennej losowej X nazywa się funkcję określoną wzorem
$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$$

Jeśli X ma rozkład dyskretny z funkcją prawdopodobieństwa p, to funkcja tworząca momenty wyraża się wzorem
$$M_X(t) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} e^{tx_k} p(x_k)$$

Jeśli X ma rozkład ciągły o gęstości f, to funkcja tworząca momenty ma postać
$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Własności MGF:

1. $M_{aX}(t) = M_X(at)$
2. $M_{X+b}(t) = e^{bt} M_X(t)$
3. $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$
4. $M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$

Definicja 2.3.7. Współczynnik asymetrii (skośność).

Współczynnikiem skośności rozkładu zmiennej X nazywamy liczbę

$$A = \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Rozkład, dla którego:

- $A = 0$ nazywa się **symetrycznym**
- $A > 0$ nazywa się **prawostronnie skośnym**
- $A < 0$ nazywa się **lewostronnie skośnym**

Definicja 2.3.8. Kurtoza.

Kurtozą nazywamy liczbę

$$Kurt(X) = K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

natomiast **kurtozą nadwyżkową** nazywamy liczbę

$$\gamma_3 = Kurt(X) - 3$$

Definicja 2.3.9. Standaryzacja.

Zmienną o wartości średniej 0 i wariancji 1 nazywa się zmienną standaryzowaną. Jeśli X jest dowolną zmienną o niezerowej wariancji, to

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

jest zmienną standaryzowaną.

Twierdzenie 2.3.1. Nierówność Czebyszewa.

Jeśli zmienna losowa X ma skończoną wartość średnią μ i skończoną wariancję σ^2, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$P(|X - \mu| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Jeśli w miejsce ϵ podstawimy $\epsilon\sigma$, to otrzymamy

$$P(|X - \mu| \geqslant \epsilon\sigma) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}$$

Definicja 2.3.10. Kwantyl.

Kwantylem rzędu $p \in (0, 1)$ zmiennej losowej X o dystrybuancie F nazywamy dowolną liczbę $q_p \in \mathbb{R}$ taką, że

$$F(q_p-) \leqslant p \leqslant F(q_p)$$

Kwantyl $q_{0.5}$ rzędu $\frac{1}{2}$ nazywamy **medianą**, kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$ nazywamy **dolnym kwartylem**, a kwantyl rzędu $\frac{3}{4}$ nazywamy **górnym kwartylem**.

Jeśli X ma rozkład ciągły, to kwantylem q_p rzędu p jest dowolne q_p spełniające równanie

$$F(q_p) = p$$

Definicja 2.3.11. Moda.

Modą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym nazywa się dowolne maksimum funkcji prawdopodobieństwa tego rozkładu. Jeżeli zmienna ma rozkład ciągły to modą jest dowolne maksimum lokalne gęstości tego rozkładu.

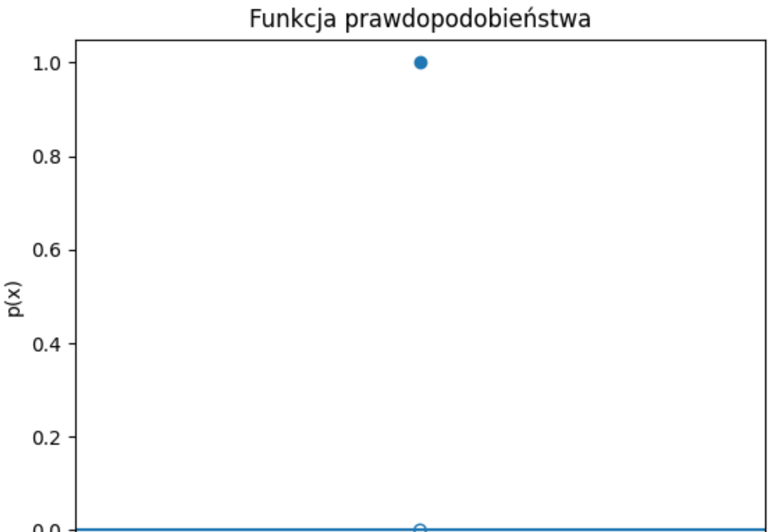
3 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

3.1 Rozkłady dyskretne

Definicja 3.1.1. Rozkład jednopunktowy.

Jeśli $\mathcal{S} = \{x_0\}$ i $p(x_0) = 1$, to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład jednopunktowy**. Wtedy przyjmuje parametry:

$$\mu = x_0$$
$$\sigma^2 = 0$$
$$A = 0$$
$$K = 0$$
$$\gamma_2 = -3$$



Rysunek 1: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie jednopunktowym.

Definicja 3.1.2. Rozkład dwupunktowy.

Jeśli

$$\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$$

oraz

$$p(x_1) = \theta$$

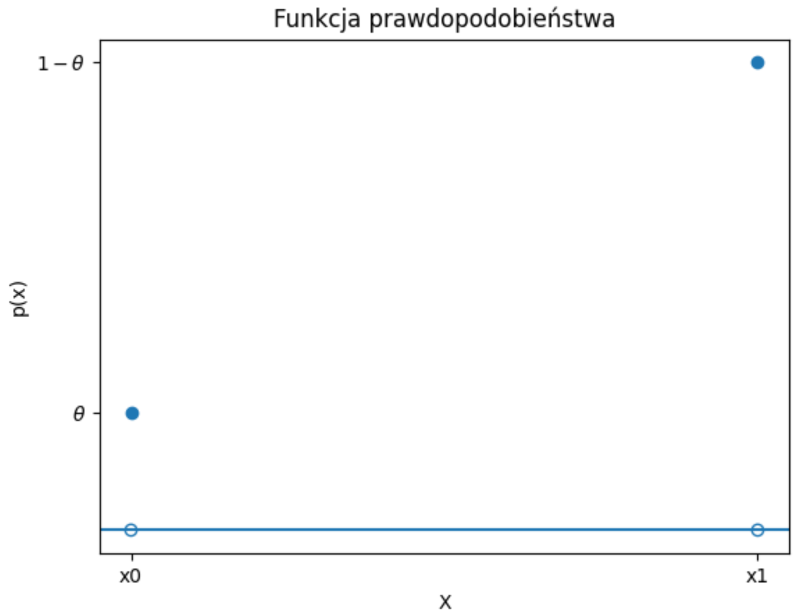
$$p(x_2) = 1 - \theta$$

dla pewnego $\theta \in (0, 1)$, to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład dwupunktowy** z parametrem θ. Wtedy przyjmuje parametry:

$$\mu = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$$

$$\sigma^2 = \theta(1 - \theta)(x_1 - x_2)^2$$

$$A = sgn(x_1 - x_2)\frac{1 - 2\theta}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}}$$



Rysunek 2: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwupunktowym.

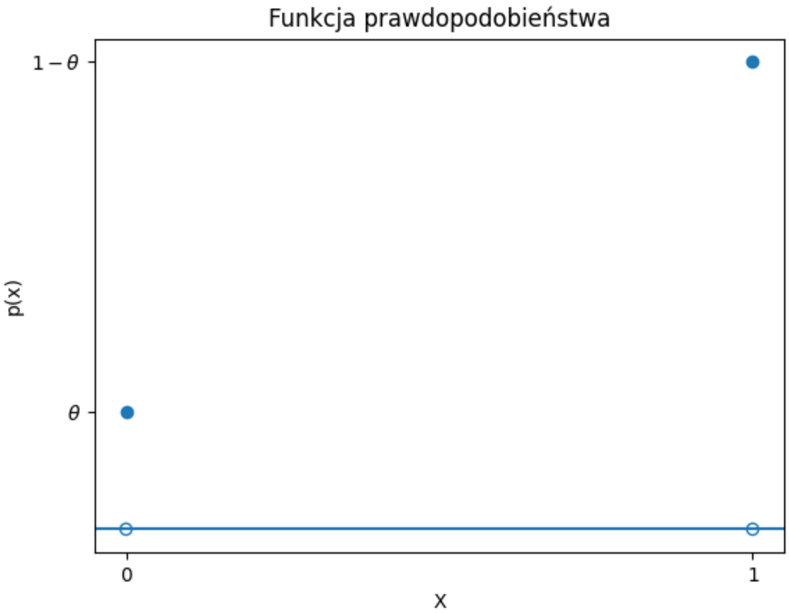
Definicja 3.1.3. Rozkład Bernoulli'ego.

Rozkład dwupunktowy, w którym $x_1 = 1$ i $x_2 = 0$ nazywa się **rozkładem Bernoulli'ego** z parametrem θ

$$X \sim Bern(\theta)$$

Wówczas

$$\mu = \theta$$
$$\sigma^2 = \theta(1-\theta)$$



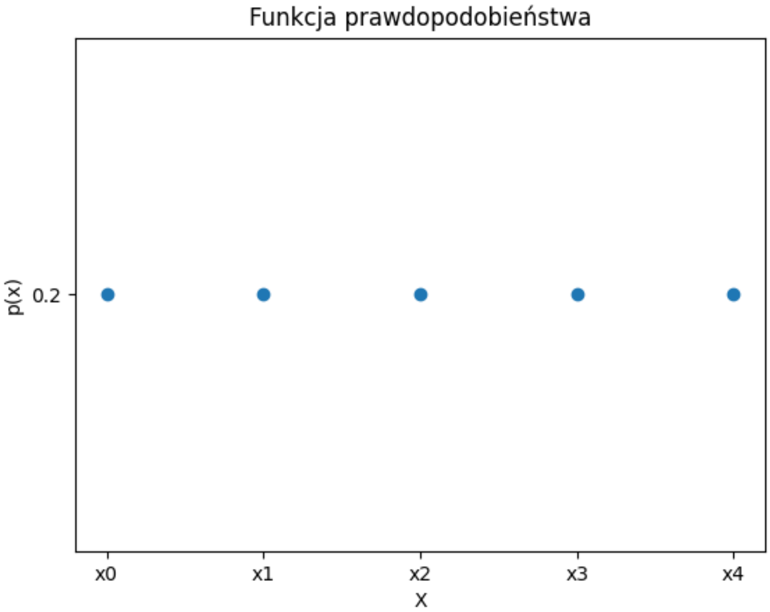
Rysunek 3: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Bernoulli'ego.

Definicja 3.1.4. Dyskretny rozkład jednostajny.

Jeśli $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $p(x_i) = \frac{1}{n}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to mówimy, że zmienna losowa ma **dyskretny rozkład jednostajny** na n punktach. Wówczas

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$



Rysunek 4: Funkcja prawdopodobieństwa w dyskretnym rozkładzie jednostajnym.

Definicja 3.1.5. Próba Bernoulli'ego.

Rozważmy doświadczenie losowe o dwu możliwych wynikach:

- **sukces** z prawdopodobieństwem $\theta \in (0, 1)$
- **porażka** z prawdopodobieństwem $1 - \theta$

Doświadczenie tego rodzaju nazywamy **próbą Bernoulli'ego**.

Definicja 3.1.6. Schemat dwumianowy.

Schemat doświadczenia określony jako n-krotne powtórzenie próby Bernoulli'ego w ten sposób, że poszczególne próby są niezależne. Długość schematu może być skończona lub nieskończona.

Definicja 3.1.7. Rozkład dwumianowy.

Niech X będzie zmienną losową, której wartością jest liczba sukcesów w schemacie dwumianowym o długości n z prawdopodobieństwem sukcesu θ. Wówczas X ma rozkład dyskretny, w którym

$$\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, n\}$$

oraz

$$p(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

Jeśli zmienna X ma rozkład dwumianowy o parametrach $n \in \mathbb{N}$ i $\theta \in (0,1)$, to zapisujemy

$$X \sim Binom(n, \theta)$$

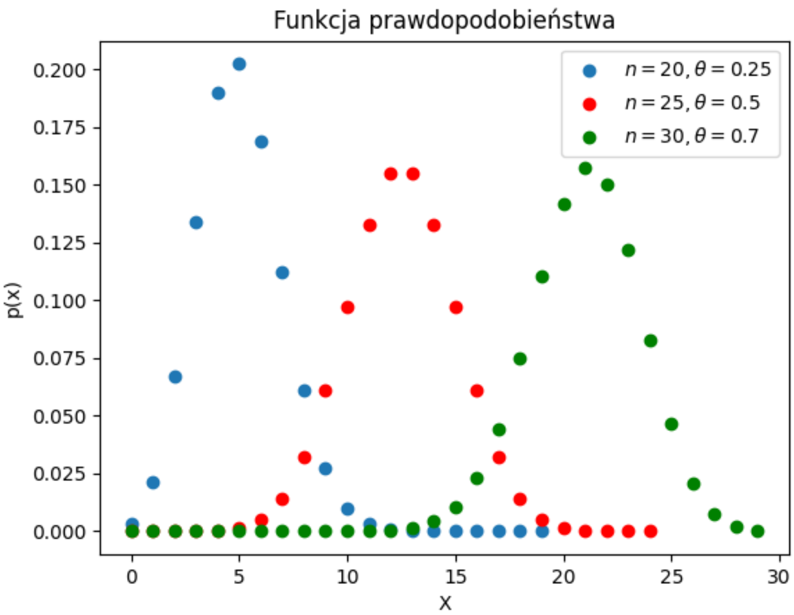
oraz

$$\mu = n\theta$$

$$\sigma^2 = n\theta(1-\theta)$$

Łatwo zauważyć, że

$$Binom(1, \theta) = Bern(\theta).$$



Rysunek 5: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym.

Definicja 3.1.8. Rozkład geometryczny.

Zmienna losowa T ma rozkład geometryczny z parametrem $\theta \in (0,1)$

$$T \sim Geom(\theta),$$

jeśli

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

a funkcja prawdopodobieństwa ma postać

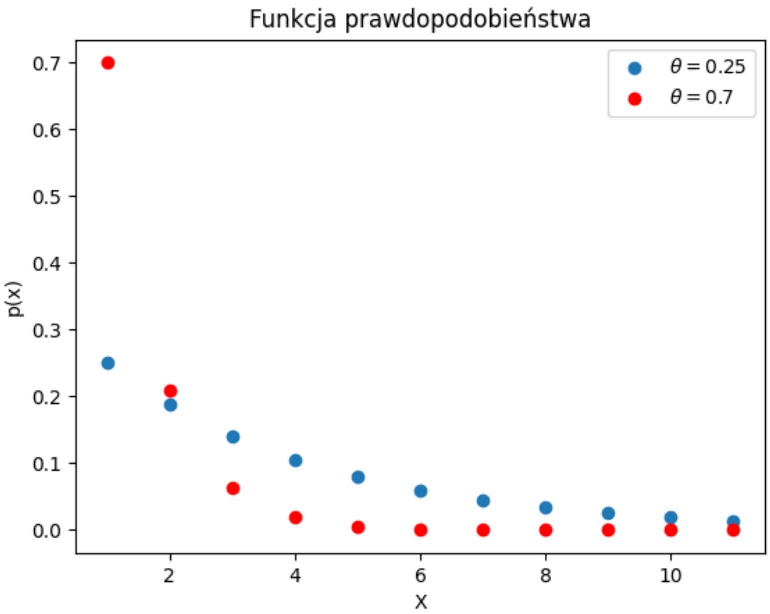
$$p(k) = (1-\theta)^{k-1}\theta$$

$$k \in \mathcal{S}$$

Zmienna T opisuje czas oczekiwania na pierwszy sukces w schemacie dwumianowym (o nieskończonej długości). Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\theta}$$

$$\sigma^2 = \frac{1-\theta}{\theta^2}$$



Rysunek 6: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie geometrycznym.

Definicja 3.1.9. Rozkład Poissona.

Jeśli zmienna N o wartościach w $\mathbb{N}$ opisuje liczbę wystąpień pewnego powtarzalnego zdarzenia w przedziale czasowym $[0, t]$, przy czym spełnione są założenia:

- powtórzenia zdarzenia występują niezależnie od siebie,
- intensywność wystąpień $r > 0$, czyli średnia liczba wystąpień w jednostce czasu jest stała,
- w danej chwili może zajść co najwyżej jedno powtórzenie,

to zmienna ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = rt > 0$

$$N \sim Pois(\lambda).$$

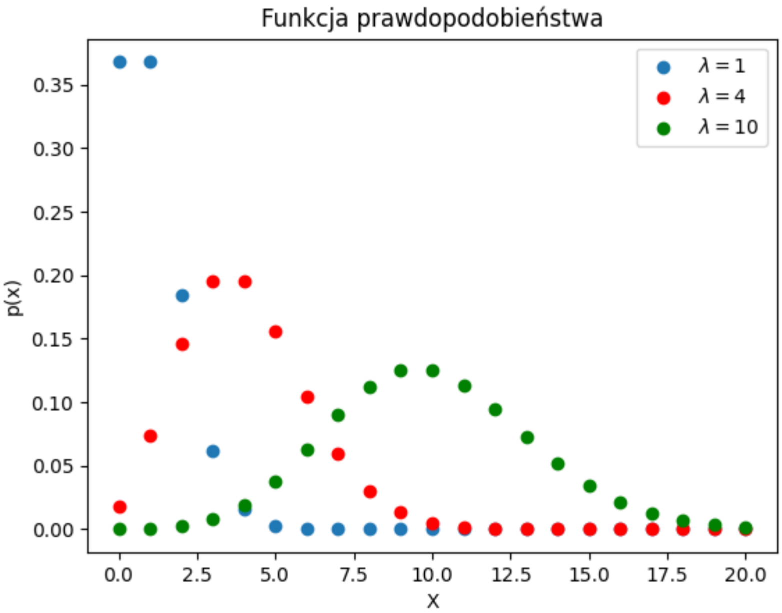
Wówczas

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
$$k \in \mathcal{S}$$

oraz

$$\mu = \lambda$$
$$\sigma^2 = \lambda$$



Rysunek 7: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Poissona.

Twierdzenie 3.1.1. Twierdzenie Poissona.

Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że

$$X_n \sim Binom(n, \theta_n),$$

gdzie θ_n jest takim ciągiem, że

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \lambda$$

dla pewnej liczby $\lambda > 0$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

3.2 Rozkłady ciągłe

Definicja 3.2.1. Rozkład jednostajny.

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[a, b]$ jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , x \notin [a, b] \end{cases}$$

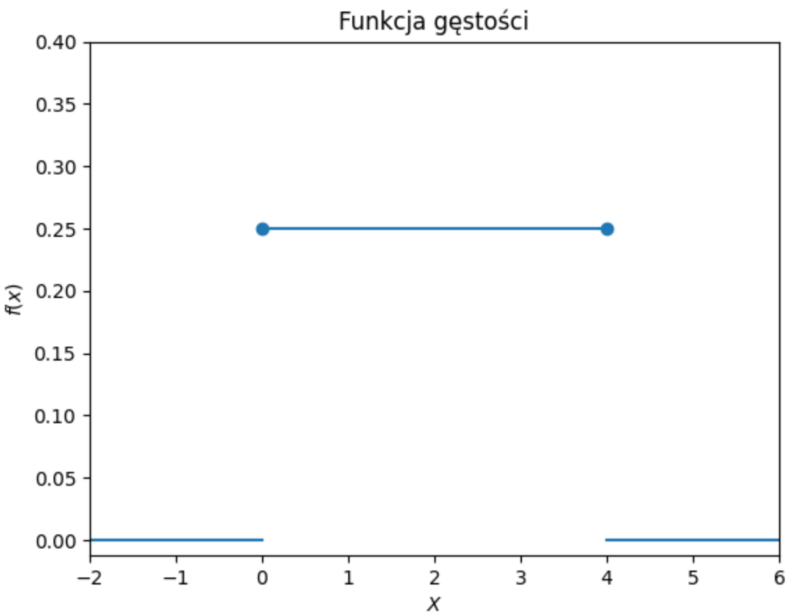
zapisujemy

$$X \sim \mathcal{U}(a, b).$$

Wówczas

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Rysunek 8: Funkcja gęstości w rozkładzie jednostajnym.

Definicja 3.2.2. Rozkład wykładniczy.

Niech T będzie zmienną modelującą czas oczekiwania na pierwsze zdarzenie w ciągu zdarzeń takim, że ich liczba w przedziale $[0, t]$ opisana jest przez zmienną X o rozkładzie Poissona z patametrem λ. Mówimy wtedy, że T ma rozkład wykładniczy z parametrem λ

$$T \sim Exp(\lambda)$$

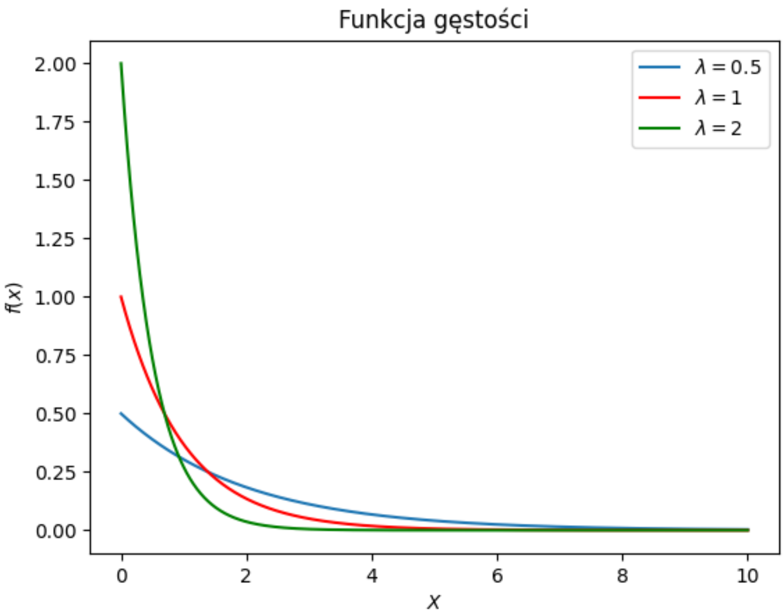
Gęstość ma postać

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & , t \geqslant 0. \end{cases}$$

Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$



Rysunek 9: Funkcja gęstości w rozkładzie wykładniczym.

Definicja 3.2.3. Rozkład gamma.

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład gamma z parametrami $s > 0$ i $r > 0$

$$X \sim Gamma(s, r)$$

jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{r^s}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-rx} & , x \geqslant 0 \end{cases}$$

gdzie $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ jest tzw. funkcją Eulera

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Jest rozkładem ogólniejszym niż rozkład wykładniczy, w szczególności

$$Gamma(1, r) = Exp(r).$$

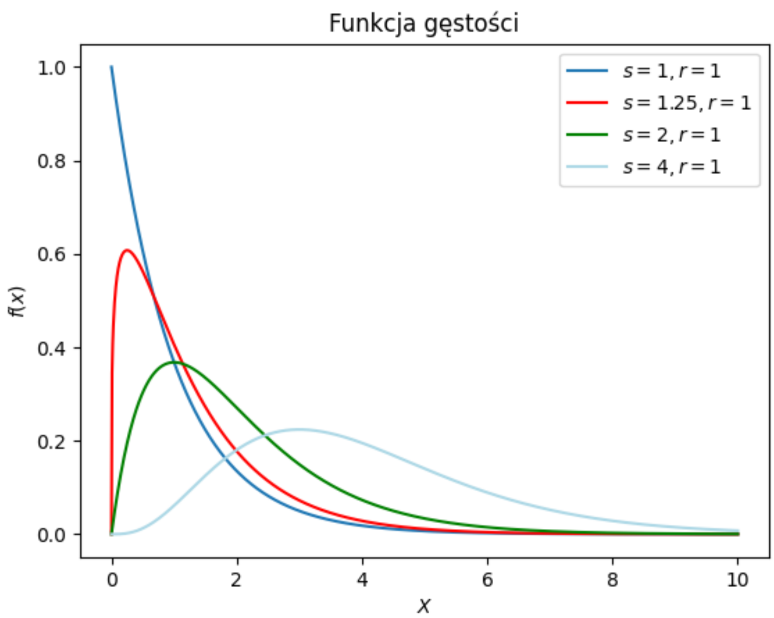
Własności funkcji Eulera:

1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
2. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $\Gamma(n+1) = n!$
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
4. $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-rx}dx = \frac{\Gamma(s)}{r^s}$

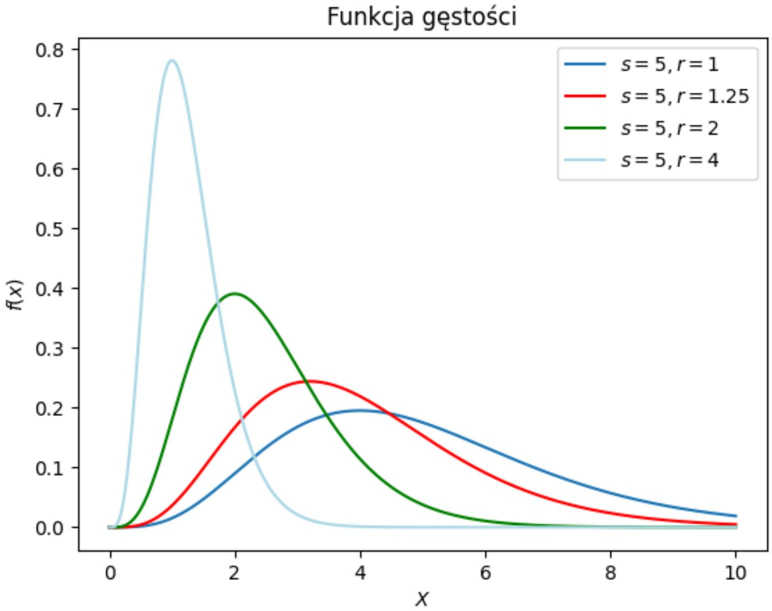
Wielkości opisujące rozkład gamma:

$$\mu = \frac{s}{r}$$

$$\sigma^2 = \frac{s}{r^2}$$



Rysunek 10: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego r.



Rysunek 11: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego s.

Definicja 3.2.4. Rozkład χ^2.

Szczególnym przypadkiem rozkładu gamma dla $s = \frac{n}{2}$ i $r = \frac{1}{2}$ jest rozkład χ^2 o n stopniach swobody

$$\chi^2(n) = Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

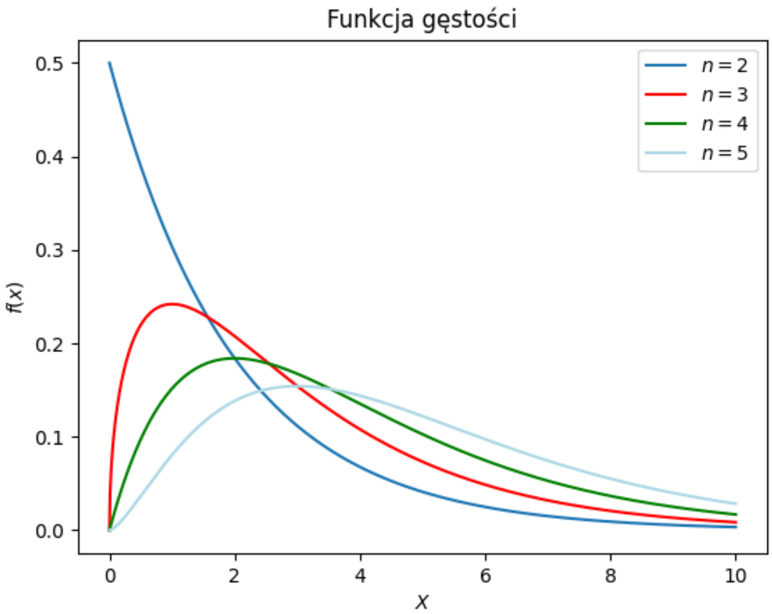
zatem gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{(\sqrt{2})^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & , x \geqslant 0 \end{cases}$$

Wielkości opisujące rozkład χ^2:

$$\mu = n$$

$$\sigma^2 = 2n$$



Rysunek 12: Funkcja gęstości w rozkładzie χ^2.

Definicja 3.2.5. Rozkład normalny.

Mówimy, że zmienna losowa X o gęstości $\phi_{\mu,\sigma}$ ma rozkład normalny z parametrami $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

jeśli

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

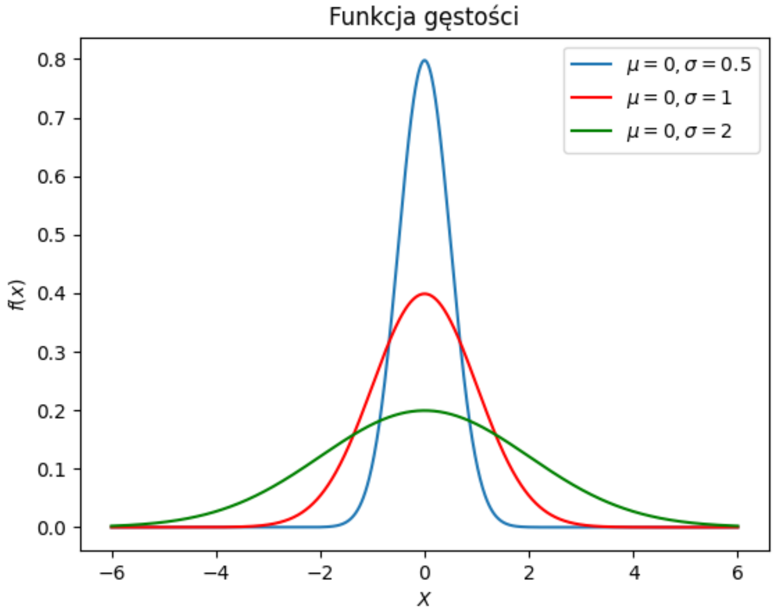
Wielkości opisujące rozkład normalny:

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

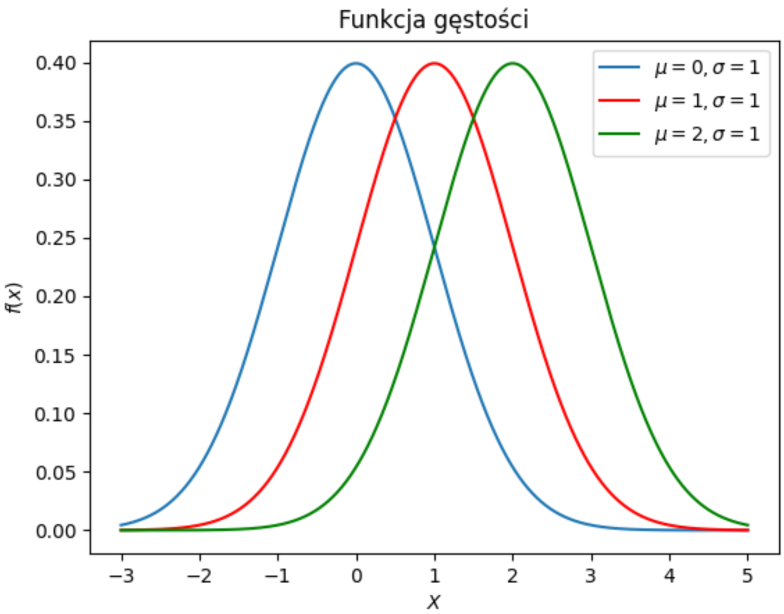
$$Var(X) = \sigma^2$$

Rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$ nazywamy standardowym rozkładem normalnym. Jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, to

$$X = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Rysunek 13: Funkcja gęstości w rozkładzie normalnym dla ustalonego μ.



Rysunek 14: Funkcja gęstości w rozkładzie normalnym dla ustalonego σ.

4 Zmienne losowe wielowymiarowe

TODO

5 Wnioskowanie statystyczne

5.1 Podstawy wnioskowania statystycznego

Definicja 5.1.1. Model statystyczny.

Modelem statystycznym nazywamy parę

$$(\mathcal{X}, \mathcal{P})$$

gdzie $\mathcal{P}$ jest rodziną rozkładów prawdopodobieństwa na zbiorze $\mathcal{X}$. Zazwyczaj przyjmuje się, że

$$\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$$

dla pewnego zbioru Θ dopuszczalnych wartości parametrów modelu θ.

Definicja 5.1.2. Prosta próba losowa.

Prostą próbą losową o liczności n z rozkładu P_θ nazywamy ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ takich, że

$$X_i \sim P_\theta$$

dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Jeśli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest prostą próbą losową, to ciąg wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takich, że

$$X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \ldots, X_n(\omega) = x_n$$

dla pewnego ω nazywamy **realizacją prostej próby losowej** $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

5.2 Statystyki

Definicja 5.2.1. Statystyka.

Statystyką nazywa się zmienną losową będącą funkcją prostej próby losowej

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Funkcja T używana do konstrukcji statystyki musi przyjmować listę argumentów dowolnej długości.

Definicja 5.2.2. Średnia w prostej próbie losowej.

Jest to statystyka dana wzorem

$$\bar{X} = \bar{X}_n - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Jeśli

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

to korzystając z własności rozkładu normalnego otrzymujemy

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Definicja 5.2.3. Wariancja w prostej próbie losowej.

Jest to statystyka dana wzorem

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

Twierdzenie 5.2.1. Centralne Twierdzenie Graniczne.

Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze skończoną średnią μ i skończoną, dodatnią wariancją σ^2. Wtedy dla dużych n rozkład $\bar{X}$ jest w przybliżeniu równy rozkładowi normalnemu

$$\bar{X} \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Natomiast dla sumy takich zmiennych losowych mamy

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

5.3 Estymatory

Definicja 5.3.1. Estymator punktowy.

Niech θ będzie parametrem lub innym wskaźnikiem liczbowym pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Estymatorem θ nazywa się statystykę

$$\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

służącą do wyznaczenia przybliżonej wartości θ. Jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest realizacją prostej próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$, to liczbę

$$\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nazywa się **wartością estymatora** albo **estymatą**.

Definicja 5.3.2. Funkcja wiarygodności.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jej realizacją. Funkcją wiarygodności dla modelu statystycznego $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, jeśli P_θ jest rozkładem ciągłym o gęstości f_θ, nazywamy funkcję

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdot f_\theta(x_2) \cdot \ldots \cdot f_\theta(x_n)$$

natomiast jeśli P_θ jest rozkładem dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa p_θ, to

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_\theta(x_1) \cdot p_\theta(x_2) \cdot \ldots \cdot p_\theta(x_n).$$

Ze względów obliczeniowych często rozważa się logarytmiczną funkcję wiarygodności

$$l(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dla rozkładów ciągłych mamy

$$l(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln f_\theta(x_1) + \ln f_\theta(x_2) + \ldots + \ln f_\theta(x_n)$$

a dla rozkładów dyskretnych

$$l(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln p_\theta(x_1) + \ln p_\theta(x_2) + \ldots + \ln p_\theta(x_n)$$

Definicja 5.3.3. Estymator największej wiarygodności (MLE).

Estymatorem największej wiarygodności nazywamy funkcję $\hat{\theta}$, która przy ustalonych danych $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maksymalizuje wartość funkcji wiarygodności, albo wartość logarytmicznej funkcji wiarygodności. Jeśli funkcja wiarygodności jest różniczkowalna względem

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to MLE można czasem wyznaczyć analitycznie obliczając pochodne względem parametrów rozkładu i rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathcal{L}(\theta|x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \mathcal{L}(\theta|x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} \mathcal{L}(\theta|x) = 0 \end{cases}$$

albo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} l(\theta|x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} l(\theta|x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} l(\theta|x) = 0 \end{cases}$$

5.4 Przedziały ufności

TODO

5.5 Testowanie hipotez

Definicja 5.5.1. Hipoteza statystyczna.

Rozważamy model statystyczny $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Hipotezą statystyczną nazywamy dowolny niepusty podzbiór $\mathcal{P}$. W praktyce wyróżniamy jedną hipotezę zwaną **hipotezą zerową** (H_0), która podlega weryfikacji, natomiast $H_1 = \mathcal{P} \setminus H_0$ nazywamy **hipotezą alternatywną**.

Definicja 5.5.2. Zbiór krytyczny testu.

Statystykę U TODO

Definicja 5.5.3. p-wartość.

p-wartość to, dla zaobserwowanej wartości statystyki testowej, najmniejszy poziom istotności, przy którym ta wartość prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej. Inaczej, dla poziomu istotności α oraz p-wartości p, jeżeli

$$\begin{aligned} p > \alpha &\Rightarrow \text{brak podstaw do odrzucenia } H_0 \\ p \leqslant \alpha &\Rightarrow \text{odrzucamy } H_0 \end{aligned}$$

Twierdzenie 5.5.1. Test dla wartości oczekiwanej przy znanej wariancji.

Mamy $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}\}$ dla ustalonego $\sigma > 0$. Ustalamy hipotezy

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Jako statystykę testową bierzemy

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

oraz przyjmujemy zbiór krytyczny na poziomie istotności α

$$C = \left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$$

p-wartość dla dwustronnej hipotezy alternatywnej wynosi

$$p(z) = 2(1 - \Phi(|z|))$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

Twierdzenie 5.5.2. Test dla wartości oczekiwanej przy nieznanej wariancji.

Jako statystykę testową bierzemy

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

oraz przyjmujemy zbiór krytyczny na poziomie istotności α dla dwustronnej hipotezy alternatywnej

$$C = \left(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] \cup \left[t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, \infty\right)$$

p-wartość wynosi

$$p(t) = 2(1 - F_{n-1}(|t|))$$

gdzie F_{n-1} jest dystrybuantą rozkładu t_{n-1}.

Twierdzenie 5.5.3. Test dla wartości oczekiwanej z dwóch prób.

Dla nieznanych, ale równych wariancji używamy statystyki

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

jeżeli wariancje są znane to

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}}}$$

Dla dwustronnej hipotezy alternatywnej

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

Twierdzenie 5.5.4. Test równości wariancji.

6 Literatura

[1] Smołka, M. (2026). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. *Wykłady prowadzone na Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie.*