Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

Spis treści

1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

1.1 Przestrzeń probabilistyczna

Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Niepusty zbiór Ω wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

Definicja 1.1.2. σ-algebra zdarzeń.

Podrodzina Σ w rodzinie wszystkich podzbiorów Ω o następujących właściwościach:

1. $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli $A \in \Sigma$ to $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma$, to $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli $A, B \in \Sigma$ to $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe

Ω – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$ – dopełnienie zdarzenia A

$A \cap B = \emptyset$ – zdarznia wzajemnie się wykluczają.

Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkładbprawdopodobieństwa).

W przestrzeni Ω z σ-algebrą zdarzeń Σ dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \to [0, 1]$$

spełniające warunki:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ zachodzi
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1. $P(\emptyset)$=0
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spełnia warunek
$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$
to
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$
3. Dla dowolnego zdarzenia A zachodzi
$$P(A') = 1 - P(A)$$
4. Dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzi
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
5. Jeśli $A \subset B$ to $P(A) \leqslant P(B)$
6. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą ciąg wstępujący, tzn.
$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots$$
to
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$
7. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą ciąg zstępujący, tzn.
$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots$$
to
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.

Trójka (Ω, Σ, P), gdzie:

Ω – niepusty zbiór,

Σ – σ-algebra w Ω,

P – miara probabilistyczna.

Liczbę $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A.

1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.

Liczba określona wzorem

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$ – zdarzenia,

$P(B) > 0$.

Jest to prawdopodobieństwo A pod warunkiem B.

Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$ jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą układ zupełny oraz $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, to dla dowolnego zdarzenia B zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)$$

Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.

Jeśli zdarzenia A_i tworzą układ zupełny taki, że $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, a B jest zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$, to dla dowolnego k zachodzi

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k) P(A_k)}{\sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

1.3 Niezależność zdarzeń

Definicja 1.3.1. Niezależność zdarzeń.

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nazywamy niezależnymi jeśli dla każdego układu indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$ oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Definicja 1.3.2. Niezależność warunkowa.

Zdarzenia A i B są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli

$$P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli dla każdego układu indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$ oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k} \mid C) = P(A_{i_1} \mid C) \cdot P(A_{i_2} \mid C) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k} \mid C)$$

2 Zmienne losowe jednowymiarowe

2.1 Zmienna losowa

Definicja 2.1.1. Zmienna losowa.

Zmienna losowa to odwzorowanie

$$X : \Omega \to \mathcal{X}$$

takie, że dla każdego $A \in \Sigma_{\mathcal{X}}$ zachodzi

$$X^{-1}(A) \in \Sigma$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{X}$ dowolnym niepustym zbiorem, a $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ-algebrą podzbiorów $\mathcal{X}$.

Definicja 2.1.2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

Funkcję

$$P_X : \Sigma_{\mathcal{X}} \to [0, 1]$$

określoną następująco

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{X}$ niepustym zbiorem, $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ-algebrą w $\mathcal{X}$, a $X : \Omega \to \mathcal{X}$ zmienną losową.

2.2 Zmienne losowe rzeczywiste

Definicja 2.2.1. Dystrybuanta zmiennej losowej.

Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową rzeczywistą. Dystrybuantą zmiennej losowej rzeczywistej X nazywamy funkcję

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

określoną wzorem

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X((-\infty, x])$$

Własności dystrybuanty:

1. Jeśli $a < b$, to $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leqslant b)$
2. F_X jest niemalejąca
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4. F_X jest prawostronnie ciągła, tzn. dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$
5. $F_X(x_0-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$
6. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$
7. F_X jest ciągła w $x_0 \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$P(X = x_0) = 0$$

Definicja 2.2.2. Funkcja prawdopodobieństwa.

Rozkład dyskretny zmiennej X jest wyznaczony przez funkcję
$$p : \mathcal{S} \to [0, 1]$$
określoną następująco:
$$p(x_k) = P_X(x_k) = P(X = x_k)$$
Funkcję p nazywamy funkcją prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej X.

Definicja 2.2.3. Funkcja gęstości.

Gęstość zmiennej losowej X to funkcja
$$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$
taka, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ takich, że $a < b$ zachodzi
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

2.3 Parametry zmiennej losowej

Definicja 2.3.1. Wartość oczekiwana.

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej rzeczywistej X o rozkładzie dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa p nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\mu = E(X) = \sum_{k:x_k \in \mathcal{S}} x_k \cdot p(x_k)$$

Jeśli X jest zmienną o rozkładzie ciągłym z gęstością f, to

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Definicja 2.3.2. Moment zwykły.

Momentem zwykłym rzędu k zmiennej losowej X dla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nazywamy liczbę

$$\mu'_k = E(X^k)$$

Definicja 2.3.3. Moment centralny.

Momentem centralnym rzędu k zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mu_k = E((X - \mu)^k)$$

Dla rozkładów dyskretnych

$$\mu'_k = \sum_{i:x_i \in \mathcal{S}} x_i^k \cdot p(x_i)$$

$$\mu_k = \sum_{i:x_i \in \mathcal{S}} (x_i - \mu)^k \cdot p(x_i)$$

Dla rozkładów ciągłych

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx$$

Definicja 2.3.4. Wariancja.

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy jej drugi moment centralny, tzn.

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu_2 = E((X - \mu)^2)$$

Definicja 2.3.5. Odchylenie standardowe.

Odchyleniem standardowym zmiennej losowej X nazywamy pierwiastek jej wariancji, tzn.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Własności wariancji:

1. $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$
2. Jeśli zmienna X ma skończoną wariancję, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$
3. $Var(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest stała z prawdopodobieństwem 1, tzn. istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że
$$P(X \neq x_0) = 0$$
4. Funkcja $\phi(c) = E((X - c)^2)$ przyjmuje wartość najmniejszą dla $c = E(X)$

Definicja 2.3.6. Standaryzacja.

Zmienną o wartości średniej 0 i wariancji 1 nazywa się zmienną standaryzowaną. Jeśli X jest dowolną zmienną o niezerowej wariancji, to

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

jest zmienną standaryzowaną.

Twierdzenie 2.3.1. Nierówność Czebyszewa.

Jeśli zmienna losowa X ma skończoną wartość średnią μ i skończoną wariancję σ^2, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$P(|X - \mu| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Jeśli w miejsce ϵ podstawimy $\epsilon\sigma$, to otrzymamy

$$P(|X - \mu| \geqslant \epsilon\sigma) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}$$

Definicja 2.3.7. Kwantyl.

Kwantylem rzędu $p \in (0, 1)$ zmiennej losowej X o dystrybuancie F nazywamy dowolną liczbę $q_p \in \mathbb{R}$ taką, że

$$F(q_p-) \leqslant p \leqslant F(q_p)$$

Kwantyl $q_{0.5}$ rzędu $\frac{1}{2}$ nazywamy **medianą**, kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$ nazywamy **dolnym kwartylem**, a kwantyl rzędu $\frac{3}{4}$ nazywamy **górnym kwartylem**.

Jeśli X ma rozkład ciągły, to kwantylem q_p rzędu p jest dowolne q_p spełniające równanie

$$F(q_p) = p$$

Definicja 2.3.8. Moda.

Modą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym nazywa się dowolne maksimum funkcji prawdopodobieństwa tego rozkładu. Jeżeli zmienna ma rozkład ciągły to modą jest dowolne maksimum lokalne gęstości tego rozkładu.

3 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

3.1 Rozkłady dyskretne

3.1.1 Rozkład jednopunktowy

4 Literatura

[1] Smołka, M. (2025). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. *Wykłady prowadzone na Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie.*