

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Podstawy rachunku prawdopodobieństwa</b>	<b>2</b>
1.1	Przestrzeń probabilistyczna . . . . .	2
1.2	Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .	4
1.3	Niezależność zdarzeń . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Zmienne losowe jednowymiarowe</b>	<b>5</b>
2.1	Zmienna losowa . . . . .	5
2.2	Zmienne losowe rzeczywiste . . . . .	5
2.3	Parametry zmiennej losowej . . . . .	7
2.4	Funkcje zmiennych losowych . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa</b>	<b>11</b>
3.1	Rozkłady dyskretne . . . . .	11
3.2	Rozkłady ciągłe . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Zmienne losowe wielowymiarowe</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Wnioskowanie statystyczne</b>	<b>24</b>
5.1	Podstawy wnioskowania statystycznego . . . . .	24
5.2	Statystyki . . . . .	25
5.3	Estymatory . . . . .	26
5.4	Przedziały ufności . . . . .	27
5.5	Testowanie hipotez . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Literatura</b>	<b>29</b>

# 1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

## 1.1 Przestrzeń probabilistyczna

### Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Niepusty zbiór  $\Omega$  wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

### Definicja 1.1.2. $\sigma$ -algebra zdarzeń.

Podrodzina  $\Sigma$  w rodzinie wszystkich podzbiorów  $\Omega$  o następujących właściwościach:

1.  $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli  $A \in \Sigma$  to  $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1.  $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$ , to  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli  $A, B \in \Sigma$  to  $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$  – zdarzenie niemożliwe

$\Omega$  – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$  – dopełnienie zdarzenia  $A$

$A \cap B = \emptyset$  – zdarzenia wzajemnie się wykluczają.

### Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkład prawdopodobieństwa).

W przestrzeni  $\Omega$  z  $\sigma$ -algebrą zdarzeń  $\Sigma$  dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$$

spełniające warunki:

1.  $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$  oraz  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$  zachodzi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1.  $P(\emptyset) = 0$
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_n$  spełnia warunek

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$

to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

3. Dla dowolnego zdarzenia  $A$  zachodzi

$$P(A') = 1 - P(A)$$

4. Dla dowolnych zdarzeń  $A$  i  $B$  zachodzi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Jeśli  $A \subset B$  to  $P(A) \leq P(B)$
6. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg wstępujący, tzn.

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

7. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg zstępujący, tzn.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

to

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

#### **Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.**

Trójka  $(\Omega, \Sigma, P)$ , gdzie:

$\Omega$  – niepusty zbiór,

$\Sigma$  –  $\sigma$ -algebra w  $\Omega$ ,

$P$  – miara probabilistyczna.

Liczbę  $P(A)$  nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$ .

## 1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

### Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.

Liczba określona wzorem

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$  – zdarzenia,

$P(B) > 0$ .

Jest to prawdopodobieństwo  $A$  pod warunkiem  $B$ .

### Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

### Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą układ zupełny oraz  $P(A_i) > 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , to dla dowolnego zdarzenia  $B$  zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B | A_i)P(A_i)$$

### Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.

Jeśli zdarzenia  $A_i$  tworzą układ zupełny taki, że  $P(A_i) > 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , a  $B$  jest zdarzeniem takim, że  $P(B) > 0$ , to dla dowolnego  $k$  zachodzi

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B | A_i)P(A_i)}$$

## 1.3 Niezależność zdarzeń

### Definicja 1.3.1. Niezależność zdarzeń.

Zdarzenia  $A$  i  $B$  nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_k$  nazywamy niezależnymi jeśli dla każdego układu indeksów  $i_1, i_2, \dots, i_k$  oraz dla każdego  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

**Definicja 1.3.2. Niezależność warunkowa.**

Zdarzenia  $A$  i  $B$  są warunkowo niezależne względem  $C$  dla  $P(C) > 0$  jeśli

$$P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$$

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_k$  są warunkowo niezależne względem  $C$  dla  $P(C) > 0$  jeśli dla każdego układu indeksów  $i_1, i_2, \dots, i_k$  oraz dla każdego  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k} \mid C) = P(A_{i_1} \mid C) \cdot P(A_{i_2} \mid C) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k} \mid C)$$

**2 Zmienne losowe jednowymiarowe****2.1 Zmienna losowa****Definicja 2.1.1. Zmienna losowa.**

Zmienna losowa to odwzorowanie

$$X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$$

takie, że dla każdego  $A \in \Sigma_{\mathcal{X}}$  zachodzi

$$X^{-1}(A) \in \Sigma$$

gdzie  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną,  $\mathcal{X}$  dowolnym niepustym zbiorem, a  $\Sigma_{\mathcal{X}}$   $\sigma$ -algebrą podzbiorów  $\mathcal{X}$ .

**Definicja 2.1.2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.**

Funkcję

$$P_X : \Sigma_{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$$

określoną następująco

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

gdzie  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną,  $\mathcal{X}$  niepustym zbiorem,  $\Sigma_{\mathcal{X}}$   $\sigma$ -algebrą w  $\mathcal{X}$ , a  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  zmienną losową.

**2.2 Zmienne losowe rzeczywiste****Definicja 2.2.1. Dystrybucja zmiennej losowej.**

Niech  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  będzie zmienną losową rzeczywistą. Dystrybucją zmiennej losowej rzeczywistej  $X$  nazywamy funkcję

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

określoną wzorem

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x])$$

Własności dystrybuanty:

1. Jeśli  $a < b$ , to  $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$
2.  $F_X$  jest niemalejąca
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4.  $F_X$  jest prawostronnie ciągła, tzn. dla dowolnego  $x_0 \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$

5.  $F_X(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$
6.  $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$
7.  $F_X$  jest ciągła w  $x_0 \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(X = x_0) = 0$$

**Definicja 2.2.2. Funkcja prawdopodobieństwa.**

Rozkład dyskretny zmiennej  $X$  jest wyznaczony przez funkcję

$$p : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$$

określoną następująco:

$$p(x_k) = P_X(x_k) = P(X = x_k)$$

Funkcję  $p$  nazywamy funkcją prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej  $X$ .

**Definicja 2.2.3. Funkcja gęstości.**

Gęstość zmiennej losowej  $X$  to funkcja

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

taka, że dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  takich, że  $a < b$  zachodzi

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

## 2.3 Parametry zmiennej losowej

### Definicja 2.3.1. Wartość oczekiwana.

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej rzeczywistej  $X$  o rozkładzie dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa  $p$  nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} x_k \cdot p(x_k)$$

Jeśli  $X$  jest zmienną o rozkładzie ciągłym z gęstością  $f$ , to

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Własności wartości oczekiwanej:

1.  $\mathbb{E}c = c$
2.  $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y + c$
3. Dla rozkładów ciągłych

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

dla rozkładów dyskretnych

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} g(x_k) f(x_k) dx$$

### Definicja 2.3.2. Moment zwykły.

Momentem zwykłym rzędu  $k$  zmiennej losowej  $X$  dla  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  nazywamy liczbę

$$\mu'_k = \mathbb{E}(X^k)$$

### Definicja 2.3.3. Moment centralny.

Momentem centralnym rzędu  $k$  zmiennej losowej  $X$  nazywamy liczbę

$$\mu_k = \mathbb{E}((X - \mu)^k)$$

Dla rozkładów dyskretnych

$$\begin{aligned}\mu'_k &= \sum_{i: x_i \in \mathcal{S}} x_i^k \cdot p(x_i) \\ \mu_k &= \sum_{i: x_i \in \mathcal{S}} (x_i - \mu)^k \cdot p(x_i)\end{aligned}$$

Dla rozkładów ciągłych

$$\begin{aligned}\mu'_k &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \\ \mu_k &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx\end{aligned}$$

**Definicja 2.3.4. Wariancja.**

Wariancją zmiennej losowej  $X$  nazywamy jej drugi moment centralny, tzn.

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2)$$

Własności wariancji:

1.  $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
2. Jeśli zmienna  $X$  ma skończoną wariancję, to dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

3.  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
4.  $Var(X) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X$  jest stała z prawdopodobieństwem 1, tzn. istnieje  $x_0 \in \mathbb{R}$  takie, że

$$P(X \neq x_0) = 0$$

**Definicja 2.3.5. Odchylenie standardowe.**

Odchyleniem standardowym zmiennej losowej  $X$  nazywamy pierwiastek jej wariancji, tzn.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

**Definicja 2.3.6. Funkcja tworząca momenty (MGF).**

Funkcją tworzącą momenty rzeczywistej zmiennej losowej  $X$  nazywa się funkcję określoną wzorem

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Jeśli  $X$  ma rozkład dyskretny z funkcją prawdopodobieństwa  $p$ , to funkcja tworząca momenty wyraża się wzorem

$$M_X(t) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} e^{tx_k} p(x_k)$$

Jeśli  $X$  ma rozkład ciągły o gęstości  $f$ , to funkcja tworząca momenty ma postać

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Niech  $a, b \in \mathbb{R}$ . Własności MGF:

1.  $M_{aX}(t) = M_X(at)$
2.  $M_{X+b}(t) = e^{bt} M_X(t)$
3.  $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$



$$4. M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$$

**Definicja 2.3.7. Współczynnik asymetrii (skośność).**

Współczynnikiem skośności rozkładu zmiennej  $X$  nazywamy liczbę

$$A = \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Rozkład, dla którego:

- $A = 0$  nazywa się **symetrycznym**
- $A > 0$  nazywa się **prawostronnie skośnym**
- $A < 0$  nazywa się **lewostronnie skośnym**

**Definicja 2.3.8. Kurtoza.**

Kurtoza nazywamy liczbę

$$Kurt(X) = K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

natomiast **kurtozą nadwyżkową** nazywamy liczbę

$$\gamma_3 = Kurt(X) - 3$$

**Definicja 2.3.9. Standaryzacja.**

Zmienną o wartości średniej 0 i wariancji 1 nazywa się zmienną standaryzowaną. Jeśli  $X$  jest dowolną zmienną o niezerowej wariancji, to

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

jest zmienną standaryzowaną.

**Twierdzenie 2.3.1. Nierówność Czebyszewa.**

Jeśli zmienna losowa  $X$  ma skończoną wartość średnią  $\mu$  i skończoną wariancję  $\sigma^2$ , to dla dowolnego  $\epsilon > 0$  zachodzi

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Jeśli w miejsce  $\epsilon$  podstawimy  $\epsilon\sigma$ , to otrzymamy

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon\sigma) \leq \frac{1}{\epsilon^2}$$

**Definicja 2.3.10. Kwantyl.**

Kwantylem rzędu  $p \in (0, 1)$  zmiennej losowej  $X$  o dystrybucji  $F$  nazywamy dowolną liczbę  $q_p \in \mathbb{R}$  taką, że

$$F(q_p-) \leq p \leq F(q_p)$$

Kwantyl  $q_{0.5}$  rzędu  $\frac{1}{2}$  nazywamy **medianą**, kwantyl rzędu  $\frac{1}{4}$  nazywamy **dolnym kwantylem**, a kwantyl rzędu  $\frac{3}{4}$  nazywamy **górnym kwantylem**.

Jeśli  $X$  ma rozkład ciągły, to kwantylem  $q_p$  rzędu  $p$  jest dowolne  $q_p$  spełniające równanie

$$F(q_p) = p$$

### Definicja 2.3.11. Moda.

Modą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym nazywa się dowolne maksimum funkcji prawdopodobieństwa tego rozkładu. Jeżeli zmienna ma rozkład ciągły to modą jest dowolne maksimum lokalne gęstości tego rozkładu.

## 2.4 Funkcje zmiennych losowych

### Twierdzenie 2.4.1. Metoda transformacji.

Jeśli  $Y = g(X)$  oraz  $g$  jest funkcją ściśle monotoniczną, to istnieje funkcja odwrotna

$$h = g^{-1}$$

jeśli funkcja  $h$  jest różniczkowalna, to gęstość rozkładu  $Y$  spełnia następującą równość

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

Ważne szczególne przypadki dla rozkładów jednowymiarowych. Załóżmy, że  $c \neq 0$  i  $d \in \mathbb{R}$ :

1. Jeśli  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  i  $Y = cX + d$ , to

$$Y \sim \mathcal{N}(c\mu + d, |c|\sigma)$$

2. Jeśli  $X \sim \mathcal{U}(a, b)$  i  $Y = cX + d$ , to

$$Y \sim \begin{cases} \mathcal{U}(ca + d, cb + d) & , c > 0 \\ \mathcal{U}(cb + d, ca + d) & , c < 0 \end{cases}$$

3. Jeśli  $X \sim \text{Gamma}(s, r)$  i  $Y = cX$  dla  $c > 0$ , to

$$Y \sim \text{Gamma}\left(s, \frac{r}{c}\right)$$

### 3 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

#### 3.1 Rozkłady dyskretne

**Definicja 3.1.1. Rozkład jednopunktowy.**

Jeśli  $\mathcal{S} = \{x_0\}$  i  $p(x_0) = 1$ , to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład jednopunktowy**.  
Wtedy przyjmuje parametry:

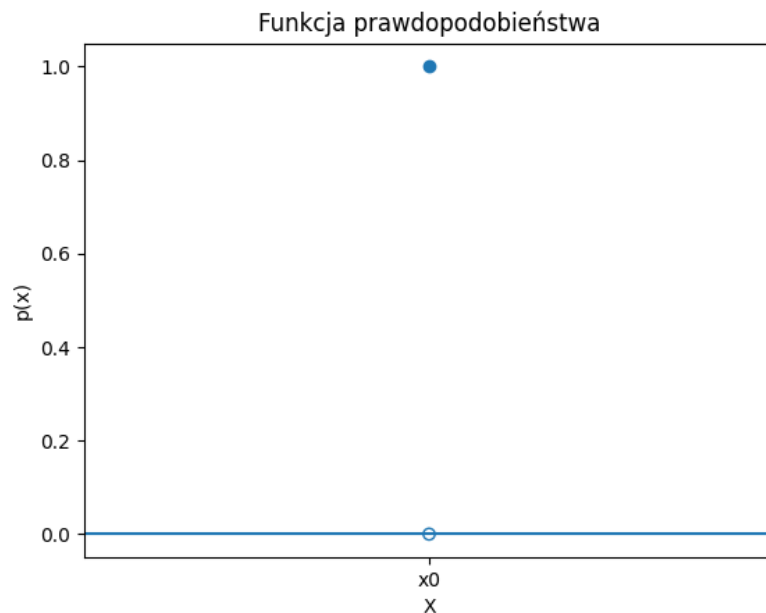
$$\mu = x_0$$

$$\sigma^2 = 0$$

$$A = 0$$

$$K = 0$$

$$\gamma_2 = -3$$



Rysunek 1: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie jednopunktowym.

**Definicja 3.1.2. Rozkład dwupunktowy.**

Jeśli

$$\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$$

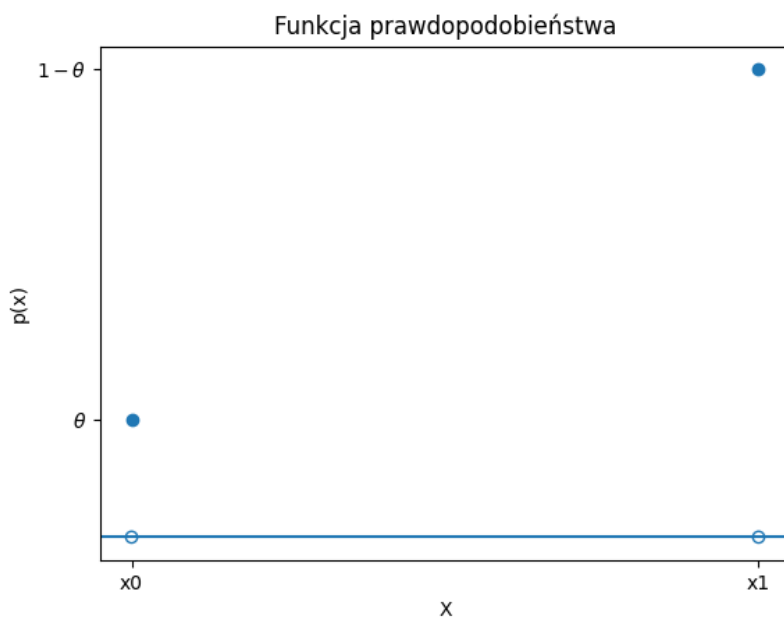
oraz

$$p(x_1) = \theta$$

$$p(x_2) = 1 - \theta$$

dla pewnego  $\theta \in (0, 1)$ , to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład dwupunktowy** z parametrem  $\theta$ . Wtedy przyjmuje parametry:

$$\begin{aligned}\mu &= \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \\ \sigma^2 &= \theta(1 - \theta)(x_1 - x_2)^2 \\ A &= \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) \frac{1 - 2\theta}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}}\end{aligned}$$



Rysunek 2: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwupunktowym.

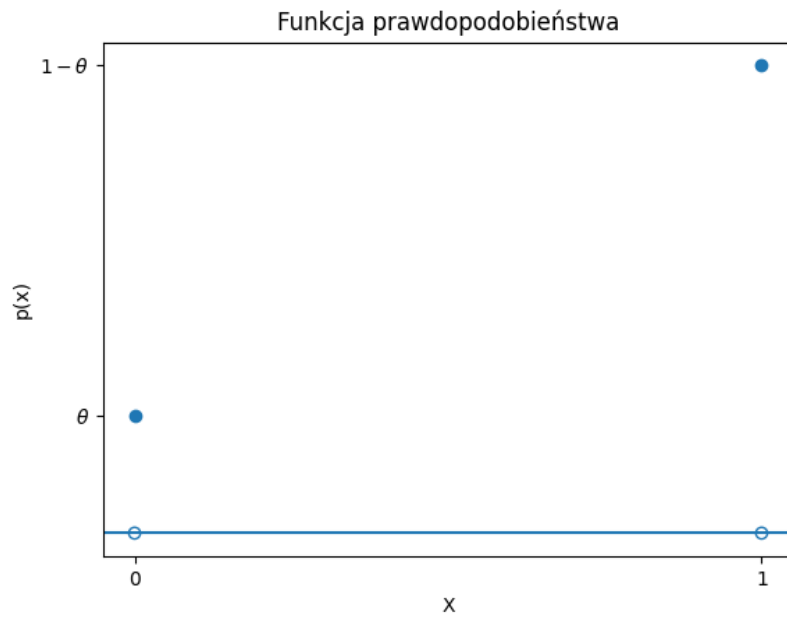
### Definicja 3.1.3. Rozkład Bernoulli'ego.

Rozkład dwupunktowy, w którym  $x_1 = 1$  i  $x_2 = 0$  nazywa się **rozkładem Bernoulli'ego** z parametrem  $\theta$

$$X \sim \operatorname{Bern}(\theta)$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\mu &= \theta \\ \sigma^2 &= \theta(1 - \theta)\end{aligned}$$



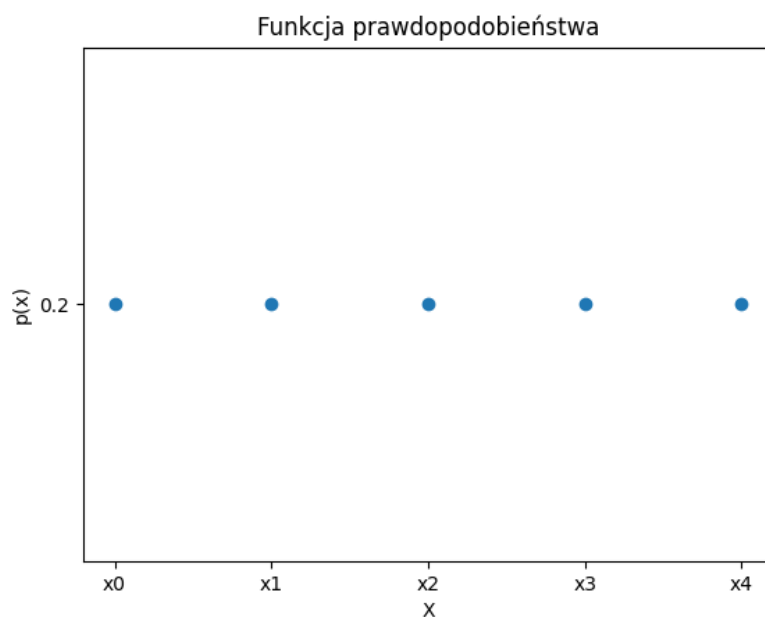
Rysunek 3: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Bernoulli'ego.

**Definicja 3.1.4. Dyskretny rozkład jednostajny.**

Jeśli  $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  i  $p(x_i) = \frac{1}{n}$  dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , to mówimy, że zmienna losowa ma **dyskretny rozkład jednostajny** na  $n$  punktach. Wówczas

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$



Rysunek 4: Funkcja prawdopodobieństwa w dyskretnym rozkładzie jednostajnym.

#### Definicja 3.1.5. Próba Bernoulli'ego.

Rozważmy doświadczenie losowe o dwu możliwych wynikach:

- **sukces** z prawdopodobieństwem  $\theta \in (0, 1)$
- **porażka** z prawdopodobieństwem  $1 - \theta$

Doświadczenie tego rodzaju nazywamy **próbą Bernoulli'ego**.

#### Definicja 3.1.6. Schemat dwumianowy.

Schemat doświadczenia określony jako  $n$ -krotne powtórzenie próby Bernoulli'ego w ten sposób, że poszczególne próby są niezależne. Długość schematu może być skończona lub nieskończona.

#### Definicja 3.1.7. Rozkład dwumianowy.

Niech  $X$  będzie zmienną losową, której wartością jest liczba sukcesów w schemacie dwumianowym o długości  $n$  z prawdopodobieństwem sukcesu  $\theta$ . Wówczas  $X$  ma rozkład dyskretny, w którym

$$\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, n\}$$

oraz

$$p(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

Jeśli zmienna  $X$  ma rozkład dwumianowy o parametrach  $n \in \mathbb{N}$  i  $\theta \in (0, 1)$ , to zapisujemy

$$X \sim \text{Binom}(n, \theta)$$

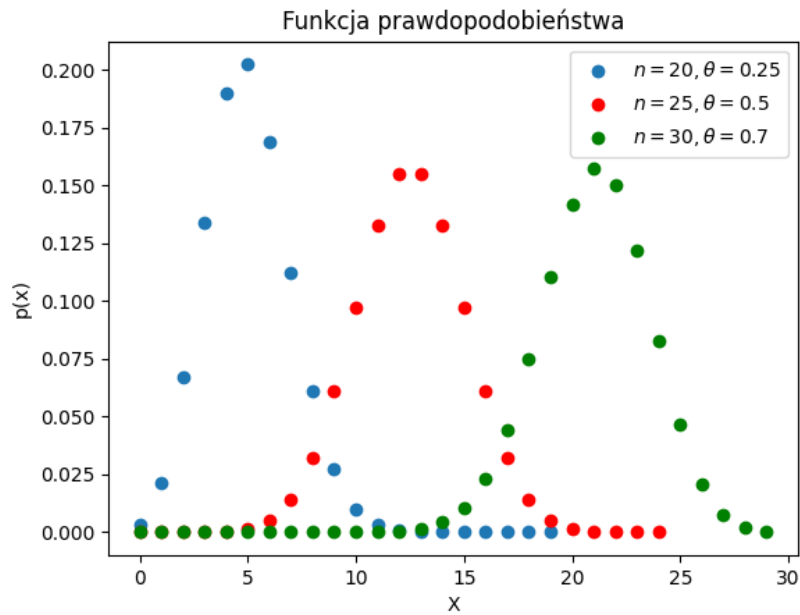
oraz

$$\mu = n\theta$$

$$\sigma^2 = n\theta(1 - \theta)$$

Łatwo zauważyć, że

$$\text{Binom}(1, \theta) = \text{Bern}(\theta).$$



Rysunek 5: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym.

### Definicja 3.1.8. Rozkład geometryczny.

Zmienna losowa  $T$  ma rozkład geometryczny z parametrem  $\theta \in (0, 1)$

$$T \sim \text{Geom}(\theta),$$

jeśli

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

a funkcja prawdopodobieństwa ma postać

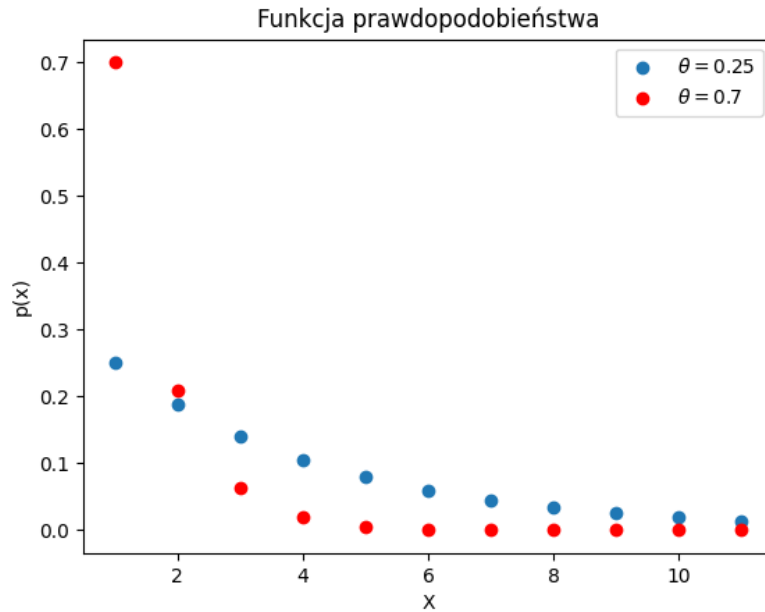
$$p(k) = (1 - \theta)^{k-1} \theta$$

$$k \in \mathcal{S}$$

Zmienna  $T$  opisuje czas oczekiwania na pierwszy sukces w schemacie dwumianowym (o nieskończonej długości). Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\theta}$$

$$\sigma^2 = \frac{1 - \theta}{\theta^2}$$



Rysunek 6: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie geometrycznym.

### Definicja 3.1.9. Rozkład Poissona.

Jeśli zmienna  $N$  o wartościach w  $\mathbb{N}$  opisuje liczbę wystąpień pewnego powtarzalnego zdarzenia w przedziale czasowym  $[0, t]$ , przy czym spełnione są założenia:

- powtórzenia zdarzenia występują niezależnie od siebie,
- intensywność wystąpień  $r > 0$ , czyli średnia liczba wystąpień w jednostce czasu jest stała,
- w danej chwili może zajść co najwyżej jedno powtórzenie,

to zmienna ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda = rt > 0$

$$N \sim Pois(\lambda).$$

Wówczas

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$



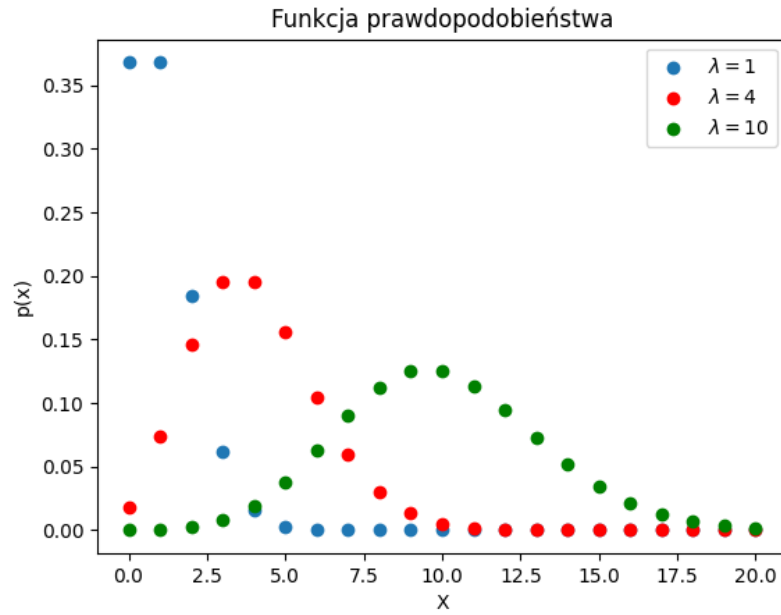
$$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$k \in \mathcal{S}$$

oraz

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$



Rysunek 7: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Poissona.

### Twierdzenie 3.1.1. Twierdzenie Poissona.

Niech  $X_n$  będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że

$$X_n \sim \text{Binom}(n, \theta_n),$$

gdzie  $\theta_n$  jest takim ciągiem, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = \lambda$$

dla pewnej liczby  $\lambda > 0$ . Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

## 3.2 Rozkłady ciągłe

### Definicja 3.2.1. Rozkład jednostajny.

Mówimy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na przedziale  $[a, b]$  jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

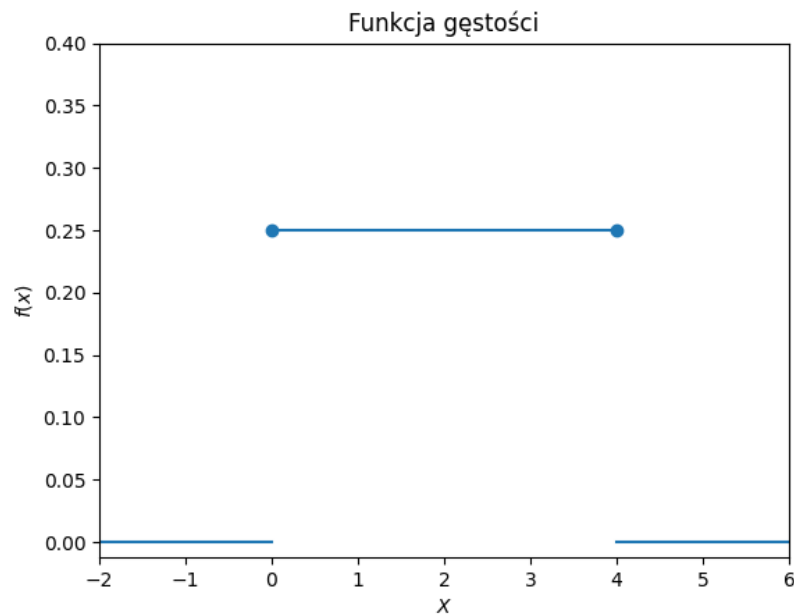
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , x \notin [a, b] \end{cases}$$

zapisujemy

$$X \sim \mathcal{U}(a, b).$$

Wówczas

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Rysunek 8: Funkcja gęstości w rozkładzie jednostajnym.

### Definicja 3.2.2. Rozkład wykładniczy.

Niech  $T$  będzie zmienną modelującą czas oczekiwania na pierwsze zdarzenie w ciągu zdarzeń takim, że ich liczba w przedziale  $[0, t]$  opisana jest przez zmienną  $X$  o rozkładzie Poissona z parametrem  $\lambda$ . Mówimy wtedy, że  $T$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda$

$$T \sim \text{Exp}(\lambda)$$

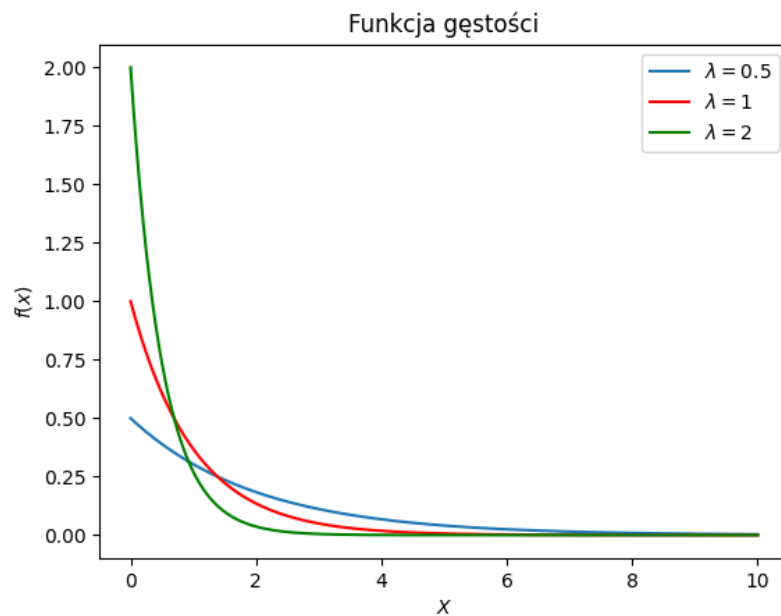
Gęstość ma postać

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & , t \geq 0. \end{cases}$$

Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$



Rysunek 9: Funkcja gęstości w rozkładzie wykładniczym.

### Definicja 3.2.3. Rozkład gamma.

Mówimy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład gamma z parametrami  $s > 0$  i  $r > 0$

$$X \sim \text{Gamma}(s, r)$$

jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{r^s}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-rx} & , x \geq 0 \end{cases}$$

gdzie  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  jest tzw. funkcją Eulera

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Jest rozkładem ogólniejszym niż rozkład wykładniczy, w szczególności

$$Gamma(1, r) = Exp(r).$$

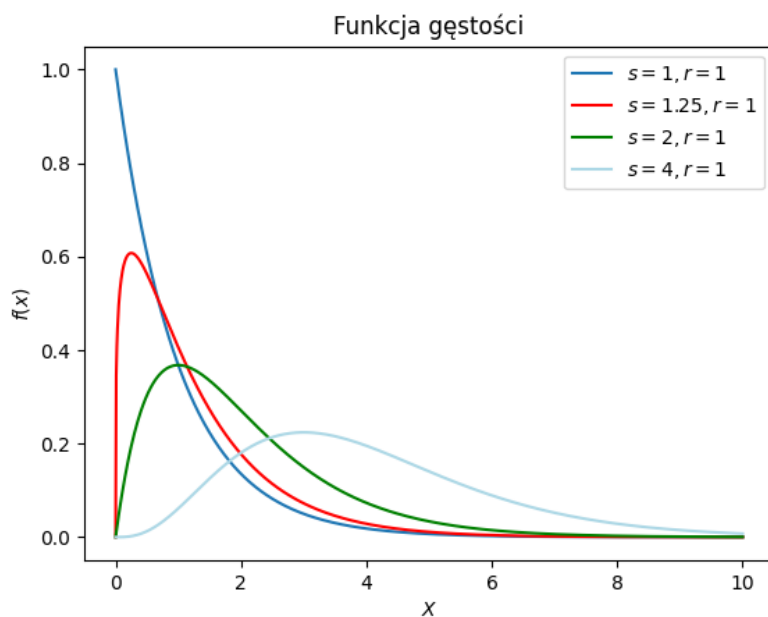
Własności funkcji Eulera:

1.  $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
2. Jeśli  $n \in \mathbb{N}$ , to  $\Gamma(n + 1) = n!$
3.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
4.  $\int_0^\infty x^{s-1} e^{-rx} dx = \frac{\Gamma(s)}{r^s}$

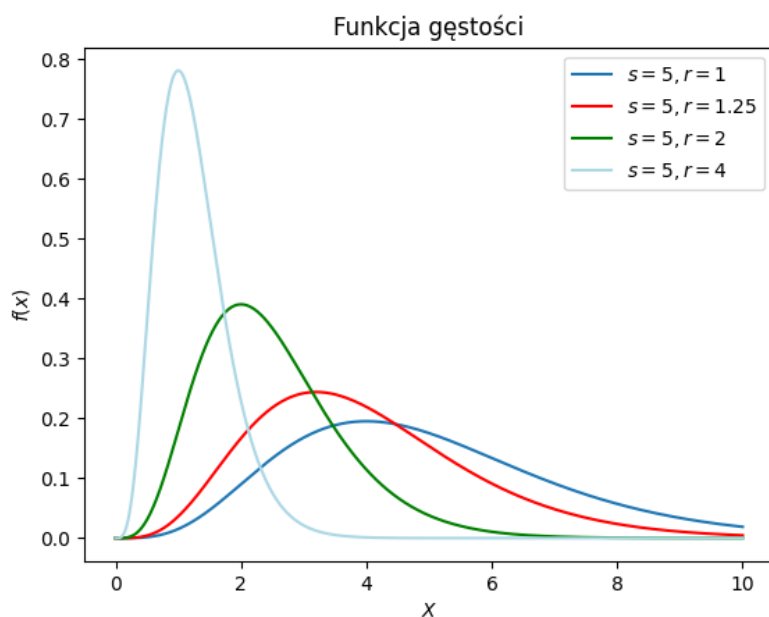
Wielkości opisujące rozkład gamma:

$$\mu = \frac{s}{r}$$

$$\sigma^2 = \frac{s}{r^2}$$



Rysunek 10: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego  $r$ .



Rysunek 11: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego  $s$ .

**Definicja 3.2.4. Rozkład  $\chi^2$ .**

Szczególnym przypadkiem rozkładu gamma dla  $s = \frac{n}{2}$  i  $r = \frac{1}{2}$  jest rozkład  $\chi^2$  o  $n$  stopniach swobody

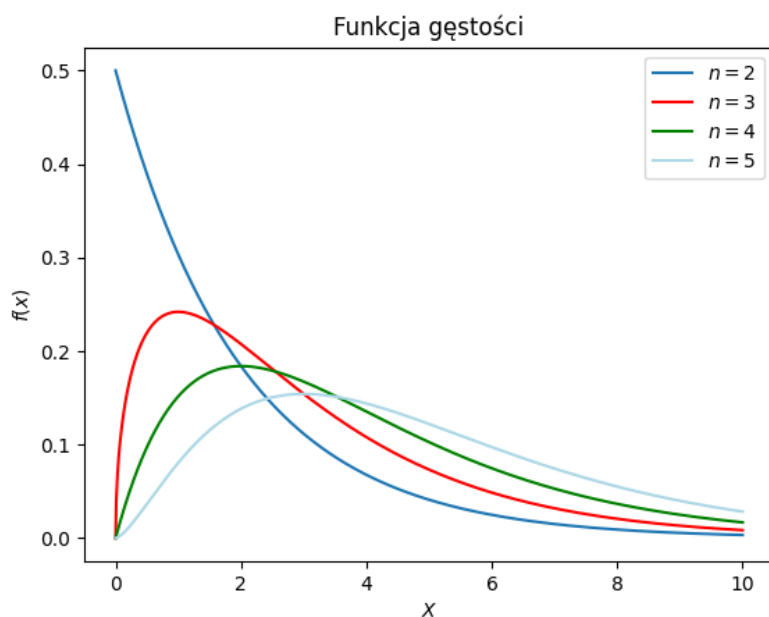
$$\chi^2(n) = \text{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

zatem gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{(\sqrt{2})^n \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Wielkości opisujące rozkład  $\chi^2$ :

$$\begin{aligned} \mu &= n \\ \sigma^2 &= 2n \end{aligned}$$



Rysunek 12: Funkcja gęstości w rozkładzie  $\chi^2$ .

**Definicja 3.2.5. Rozkład normalny.**

Mówimy, że zmienna losowa  $X$  o gęstości  $\phi_{\mu,\sigma}$  ma rozkład normalny z parametrami  $\mu \in \mathbb{R}$  i  $\sigma > 0$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

jeśli

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

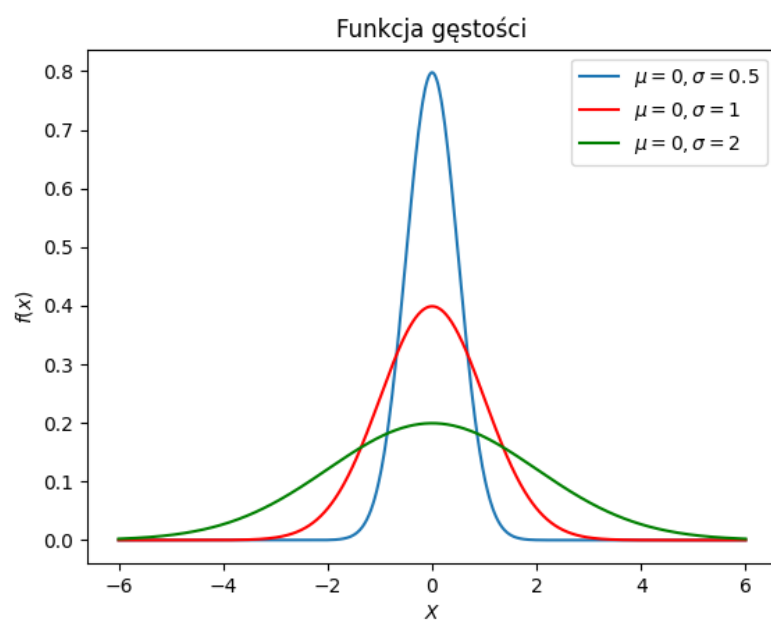
Wielkości opisujące rozkład normalny:

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

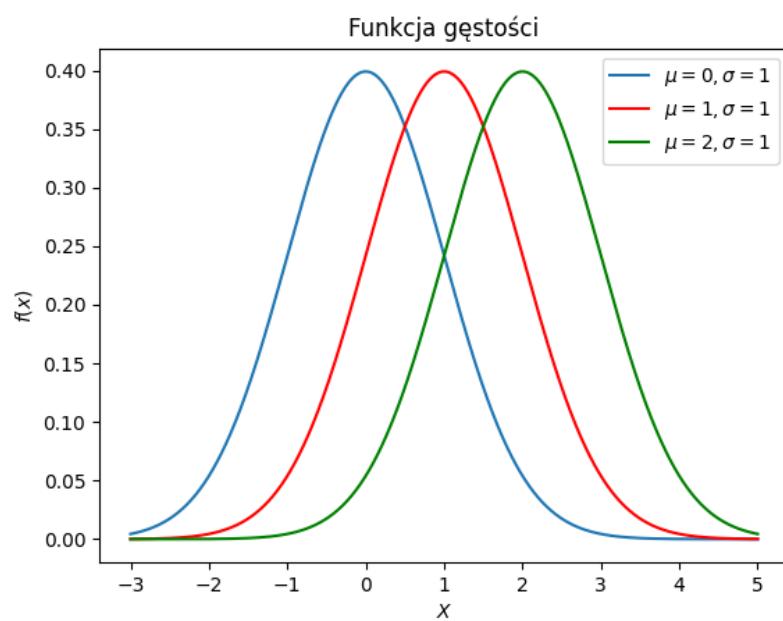
$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Rozkład  $\mathcal{N}(0, 1)$  nazywamy standardowym rozkładem normalnym. Jeśli  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , to

$$X = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Rysunek 13: Funkcja gęstości w rozkładzie normalnym dla ustalonego  $\mu$ .



Rysunek 14: Funkcja gęstości w rozkładzie normalnym dla ustalonego  $\sigma$ .

## 4 Zmienne losowe wielowymiarowe

Zmienna  $(X, Y)$  o gęstości  $f_{X,Y}(x, y)$  ma rozkłady brzegowe

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

rozkłady warunkowe

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

wartość oczekiwana

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

kowariancja

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

współczynnik korelacji

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

## 5 Wnioskowanie statystyczne

### 5.1 Podstawy wnioskowania statystycznego

**Definicja 5.1.1. Model statystyczny.**

Modelem statystycznym nazywamy parę

$$(\mathcal{X}, \mathcal{P})$$

gdzie  $\mathcal{P}$  jest rodziną rozkładów prawdopodobieństwa na zbiorze  $\mathcal{X}$ . Zazwyczaj przyjmuje się, że

$$\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$$

dla pewnego zbioru  $\Theta$  dopuszczalnych wartości parametrów modelu  $\theta$ .



**Definicja 5.1.2. Prosta próba losowa.**

Prostą próbą losową o liczności  $n$  z rozkładu  $P_\theta$  nazywamy ciąg niezależnych zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_n$  takich, że

$$X_i \sim P_\theta$$

dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$ . Jeśli  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jest prostą próbą losową, to ciąg wartości  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  takich, że

$$X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \dots, X_n(\omega) = x_n$$

dla pewnego  $\omega$  nazywamy **realizacją prostej próby losowej**  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

**5.2 Statystyki****Definicja 5.2.1. Statystyka.**

Statystyką nazywa się zmienną losową będącą funkcją prostej próby losowej

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Funkcja  $T$  używana do konstrukcji statystyki musi przyjmować listę argumentów dowolnej długości.

**Definicja 5.2.2. Średnia w prostej próbie losowej.**

Jest to statystyka dana wzorem

$$\bar{X} = \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Jeśli

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

to korzystając z własności rozkładu normalnego otrzymujemy

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

**Definicja 5.2.3. Wariancja w prostej próbie losowej.**

Jest to statystyka dana wzorem

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

**Twierdzenie 5.2.1. Centralne Twierdzenie Graniczne.**

Niech  $X_n$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze

skończoną średnią  $\mu$  i skończoną, dodatnią wariancją  $\sigma^2$ . Wtedy dla dużych  $n$  rozkład  $\bar{X}$  jest w przybliżeniu równy rozkładowi normalnemu

$$\bar{X} \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Natomiast dla sumy takich zmiennych losowych mamy

$$\sum_{i=1}^n X_i \approx \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

### 5.3 Estymatory

#### Definicja 5.3.1. Estymator punktowy.

Niech  $\theta$  będzie parametrem lub innym wskaźnikiem liczbowym pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Estymatorem  $\theta$  nazywa się statystykę

$$\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

służącą do wyznaczenia przybliżonej wartości  $\theta$ . Jeśli  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jest realizacją prostej próby losowej  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , to liczbę

$$\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nazywa się **wartością estymatora** albo **estymatą**.

#### Definicja 5.3.2. Funkcja wiarygodności.

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie prostą próbą losową, a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jej realizacją. Funkcją wiarygodności dla modelu statystycznego  $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ , jeśli  $P_\theta$  jest rozkładem ciągłym o gęstości  $f_\theta$ , nazywamy funkcję

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdot f_\theta(x_2) \cdot \dots \cdot f_\theta(x_n)$$

natomiast jeśli  $P_\theta$  jest rozkładem dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa  $p_\theta$ , to

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = p_\theta(x_1) \cdot p_\theta(x_2) \cdot \dots \cdot p_\theta(x_n).$$

Ze względów obliczeniowych często rozważa się logarytmiczną funkcję wiarygodności

$$l(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dla rozkładów ciągłych mamy

$$l(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln f_\theta(x_1) + \ln f_\theta(x_2) + \dots + \ln f_\theta(x_n)$$

a dla rozkładów dyskretnych

$$l(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln p_\theta(x_1) + \ln p_\theta(x_2) + \dots + \ln p_\theta(x_n)$$

**Definicja 5.3.3. Estymator największej wiarygodności (MLE).**

Estymatorem największej wiarygodności nazywamy funkcję  $\hat{\theta}$ , która przy ustalonych danych  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  maksymalizuje wartość funkcji wiarygodności, albo wartość logarytmicznej funkcji wiarygodności. Jeśli funkcja wiarygodności jest różniczkowalna względem

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

dla dowolnego  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , to MLE można czasem wyznaczyć analitycznie obliczając pochodne względem parametrów rozkładu i rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathcal{L}(\theta|x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \mathcal{L}(\theta|x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} \mathcal{L}(\theta|x) = 0 \end{cases}$$

albo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} l(\theta|x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} l(\theta|x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} l(\theta|x) = 0 \end{cases}$$

**Definicja 5.3.4. Estymator metody momentów.****5.4 Przedziały ufności**

TODO

**5.5 Testowanie hipotez****Definicja 5.5.1. Hipoteza statystyczna.**

Rozważamy model statystyczny  $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ . Hipotezą statystyczną nazywamy dowolny niepusty podzbiór  $\mathcal{P}$ . W praktyce wyróżniamy jedną hipotezę zwaną **hipotezą zerową** ( $H_0$ ), która podlega weryfikacji, natomiast  $H_1 = \mathcal{P} \setminus H_0$  nazywamy **hipotezą alternatywną**.

**Definicja 5.5.2. Zbiór krytyczny testu.**

Statystykę  $U$  TODO

**Definicja 5.5.3. p-wartość.**

p-wartość to, dla zaobserwowanej wartości statystyki testowej, najmniejszy poziom istotności, przy którym ta wartość prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej. Inaczej, dla

poziomu istotności  $\alpha$  oraz p-wartości  $p$ , jeżeli

$$p > \alpha \Rightarrow \text{brak podstaw do odrzucenia } H_0$$

$$p \leq \alpha \Rightarrow \text{odrzucaamy } H_0$$

**Twierdzenie 5.5.1. Test dla wartości oczekiwanej przy znanej wariancji.**

Mamy  $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}\}$  dla ustalonego  $\sigma > 0$ . Ustalamy hipotezy

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Jako statystykę testową bierzemy

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

oraz przyjmujemy zbiór krytyczny na poziomie istotności  $\alpha$

$$C = \left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$$

p-wartość dla dwustronnej hipotezy alternatywnej wynosi

$$p(z) = 2(1 - \Phi(|z|))$$

gdzie  $\Phi$  jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

**Twierdzenie 5.5.2. Test dla wartości oczekiwanej przy nieznanej wariancji.**

Jako statystykę testową bierzemy

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

oraz przyjmujemy zbiór krytyczny na poziomie istotności  $\alpha$  dla dwustronnej hipotezy alternatywnej

$$C = \left(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \cup \left[t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, \infty\right)$$

p-wartość wynosi

$$p(t) = 2(1 - F_{n-1}(|t|))$$

gdzie  $F_{n-1}$  jest dystrybuantą rozkładu  $t_{n-1}$ .

**Twierdzenie 5.5.3. Test dla wartości oczekiwanej z dwóch prób.**

Dla nieznanych, ale równych wariancji używamy statystyki

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

jeżeli wariancje są znane to

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Dla dwustronnej hipotezy alternatywnej

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

**Twierdzenie 5.5.4. Test równości wariancji.**

## 6 Literatura

- [1] Smółka, M. (2026). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. *Wykłady prowadzone na Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie.*