

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Podstawy rachunku prawdopodobieństwa</b>	<b>2</b>
1.1	Przestrzeń probabilistyczna . . . . .	2
1.2	Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .	4
1.3	Niezależność zdarzeń . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Zmienne losowe jednowymiarowe</b>	<b>5</b>
2.1	Zmienna losowa . . . . .	5
2.2	Zmienne losowe rzeczywiste . . . . .	5
2.3	Parametry zmiennej losowej . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa</b>	<b>10</b>
3.1	Rozkłady dyskretne . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Literatura</b>	<b>13</b>

# 1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

## 1.1 Przestrzeń probabilistyczna

**Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.**

Niepusty zbiór  $\Omega$  wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

**Definicja 1.1.2.  $\sigma$ -algebra zdarzeń.**

Podrodzina  $\Sigma$  w rodzinie wszystkich podzbiorów  $\Omega$  o następujących właściwościach:

1.  $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli  $A \in \Sigma$  to  $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1.  $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$ , to  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli  $A, B \in \Sigma$  to  $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$  – zdarzenie niemożliwe

$\Omega$  – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$  – dopełnienie zdarzenia  $A$

$A \cap B = \emptyset$  – zdarzenia wzajemnie się wykluczają.

**Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkład prawdopodobieństwa).**

W przestrzeni  $\Omega$  z  $\sigma$ -algebrą zdarzeń  $\Sigma$  dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$$

spełniające warunki:

1.  $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$  oraz  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$  zachodzi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1.  $P(\emptyset) = 0$
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_n$  spełnia warunek

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$

to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

3. Dla dowolnego zdarzenia  $A$  zachodzi

$$P(A') = 1 - P(A)$$

4. Dla dowolnych zdarzeń  $A$  i  $B$  zachodzi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Jeśli  $A \subset B$  to  $P(A) \leq P(B)$

6. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg wstępujący, tzn.

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

7. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg zstępujący, tzn.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

to

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

#### **Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.**

Trójka  $(\Omega, \Sigma, P)$ , gdzie:

$\Omega$  – niepusty zbiór,

$\Sigma$  –  $\sigma$ -algebra w  $\Omega$ ,

$P$  – miara probabilistyczna.

Liczbę  $P(A)$  nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$ .

## 1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

**Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.**

Liczba określona wzorem

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$  – zdarzenia,

$$P(B) > 0.$$

Jest to prawdopodobieństwo  $A$  pod warunkiem  $B$ .

**Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.**

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

**Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.**

Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą układ zupełny oraz  $P(A_i) > 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , to dla dowolnego zdarzenia  $B$  zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B | A_i)P(A_i)$$

**Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.**

Jeśli zdarzenia  $A_i$  tworzą układ zupełny taki, że  $P(A_i) > 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , a  $B$  jest zdarzeniem takim, że  $P(B) > 0$ , to dla dowolnego  $k$  zachodzi

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B | A_i)P(A_i)}$$

## 1.3 Niezależność zdarzeń

**Definicja 1.3.1. Niekorelacyjność zdarzeń.**

Zdarzenia  $A$  i  $B$  nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_k$  nazywamy niezależnymi jeśli dla każdego układu indeksów  $i_1, i_2, \dots, i_k$  oraz dla każdego  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

**Definicja 1.3.2. Niezależność warunkowa.**

Zdarzenia  $A$  i  $B$  są warunkowo niezależne względem  $C$  dla  $P(C) > 0$  jeśli

$$P(A, B | C) = P(A | C) \cdot P(B | C)$$

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_k$  są warunkowo niezależne względem  $C$  dla  $P(C) > 0$  jeśli dla każdego układu indeksów  $i_1, i_2, \dots, i_k$  oraz dla każdego  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k} | C) = P(A_{i_1} | C) \cdot P(A_{i_2} | C) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k} | C)$$

## 2 Zmienne losowe jednowymiarowe

### 2.1 Zmienna losowa

**Definicja 2.1.1. Zmienna losowa.**

Zmienna losowa to odwzorowanie

$$X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$$

takie, że dla każdego  $A \in \Sigma_{\mathcal{X}}$  zachodzi

$$X^{-1}(A) \in \Sigma$$

gdzie  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną,  $\mathcal{X}$  dowolnym niepustym zbiorem, a  $\Sigma_{\mathcal{X}}$   $\sigma$ -algebrą podzbiorów  $\mathcal{X}$ .

**Definicja 2.1.2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.**

Funkcję

$$P_X : \Sigma_{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$$

określającą następująco

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

gdzie  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną,  $\mathcal{X}$  niepustym zbiorem,  $\Sigma_{\mathcal{X}}$   $\sigma$ -algebrą w  $\mathcal{X}$ , a  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  zmienną losową.

### 2.2 Zmienne losowe rzeczywiste

**Definicja 2.2.1. Dystrybuanta zmiennej losowej.**

Niech  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  będzie zmienną losową rzeczywistą. Dystrybuantą zmiennej losowej rzeczywistej  $X$  nazywamy funkcję

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

określającą wzorem

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x])$$

Własności dystrybuanty:

1. Jeśli  $a < b$ , to  $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$
2.  $F_X$  jest niemalejąca
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4.  $F_X$  jest prawostronnie ciągła, tzn. dla dowolnego  $x_0 \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$

5.  $F_X(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$
6.  $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$
7.  $F_X$  jest ciągła w  $x_0 \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(X = x_0) = 0$$

### **Definicja 2.2.2. Funkcja prawdopodobieństwa.**

Rozkład dyskretny zmiennej  $X$  jest wyznaczony przez funkcję

$$p : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$$

określona następująco:

$$p(x_k) = P_X(x_k) = P(X = x_k)$$

Funkcję  $p$  nazywamy funkcją prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej  $X$ .

### **Definicja 2.2.3. Funkcja gęstości.**

Gęstość zmiennej losowej  $X$  to funkcja

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

taka, że dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  takich, że  $a < b$  zachodzi

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

## 2.3 Parametry zmiennej losowej

**Definicja 2.3.1. Wartość oczekiwana.**

Wartością oczekiwana zmiennej losowej rzeczywistej  $X$  o rozkładzie dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa  $p$  nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{k:x_k \in S} x_k \cdot p(x_k)$$

Jeśli  $X$  jest zmienną o rozkładzie ciągłym z gęstością  $f$ , to

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Własności wartości oczekiwanej:

1.  $\mathbb{E}c = c$
2.  $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y + c$

**Definicja 2.3.2. Moment zwykły.**

Momentem zwykłym rzędu  $k$  zmiennej losowej  $X$  dla  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  nazywamy liczbę

$$\mu'_k = \mathbb{E}(X^k)$$

**Definicja 2.3.3. Moment centralny.**

Momentem centralnym rzędu  $k$  zmiennej losowej  $X$  nazywamy liczbę

$$\mu_k = \mathbb{E}((X - \mu)^k)$$

Dla rozkładów dyskretnych

$$\mu'_k = \sum_{i:x_i \in S} x_i^k \cdot p(x_i)$$

$$\mu_k = \sum_{i:x_i \in S} (x_i - \mu)^k \cdot p(x_i)$$

Dla rozkładów ciągłych

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x)dx$$

**Definicja 2.3.4. Wariancja.**

Wariancją zmiennej losowej  $X$  nazywamy jej drugi moment centralny, tzn.

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2)$$

**Definicja 2.3.5. Odchylenie standardowe.**

Odchyleniem standardowym zmiennej losowej  $X$  nazywamy pierwiastek jej wariancji, tzn.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Własności wariancji:

1.  $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
2. Jeśli zmienna  $X$  ma skończoną wariancję, to dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

3.  $Var(X) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X$  jest stała z prawdopodobieństwem 1, tzn. istnieje  $x_0 \in \mathbb{R}$  takie, że

$$P(X \neq x_0) = 0$$

4. Funkcja  $\phi(c) = \mathbb{E}((X - c)^2)$  przyjmuje wartość najmniejszą dla  $c = \mathbb{E}(X)$

**Definicja 2.3.6. Funkcja tworząca momenty (MGF).**

Funkcją tworzącą momenty rzeczywistej zmiennej losowej  $X$  nazywa się funkcję określoną wzorem

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Jeśli  $X$  ma rozkład dyskretny z funkcją prawdopodobieństwa  $p$ , to funkcja tworząca momenty wyraża się wzorem

$$M_X(t) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} e^{tx_k} p(x_k)$$

Jeśli  $X$  ma rozkład ciągły o gęstości  $f$ , to funkcja tworząca momenty ma postać

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Niech  $a, b \in \mathbb{R}$ . Własności MGF:

1.  $M_{aX}(t) = M_X(at)$
2.  $M_{X+b}(t) = e^{bt} M_X(t)$
3.  $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$
4.  $M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$

### Definicja 2.3.7. Współczynnik asymetrii (skośność).

Współczynnikiem skośności rozkładu zmiennej  $X$  nazywamy liczbę

$$A = \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Rozkład, dla którego:

- $A = 0$  nazywa się **symetrycznym**
- $A > 0$  nazywa się **prawostronnie skośnym**
- $A < 0$  nazywa się **lewostronnie skośnym**

### Definicja 2.3.8. Kurtoza.

Kurtozą nazywamy liczbę

$$Kurt(X) = K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

natomaiast **kurtozą nadwyżkową** nazywamy liczbę

$$\gamma_3 = Kurt(X) - 3$$

### Definicja 2.3.9. Standaryzacja.

Zmienną o wartości średniej 0 i wariancji 1 nazywa się zmienną standaryzowaną. Jeśli  $X$  jest dowolną zmienną o niezerowej wariancji, to

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

jest zmienną standaryzowaną.

### Twierdzenie 2.3.1. Nierówność Czebyszewa.

Jeśli zmienna losowa  $X$  ma skończoną wartość średnią  $\mu$  i skończoną wariancję  $\sigma^2$ , to dla dowolnego  $\epsilon > 0$  zachodzi

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Jeśli w miejsce  $\epsilon$  podstawimy  $\epsilon\sigma$ , to otrzymamy

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon\sigma) \leq \frac{1}{\epsilon^2}$$

### Definicja 2.3.10. Kwantyl.

Kwantylem rzędu  $p \in (0, 1)$  zmiennej losowej  $X$  o dystrybuancie  $F$  nazywamy dowolną liczbę  $q_p \in \mathbb{R}$  taką, że

$$F(q_p) \leq p \leq F(q_p)$$

Kwantyl  $q_{0.5}$  rzędu  $\frac{1}{2}$  nazywamy **medianą**, kwantyl rzędu  $\frac{1}{4}$  nazywamy **dolnym kwartylem**, a kwantyl rzędu  $\frac{3}{4}$  nazywamy **górnym kwartylem**.

Jeśli  $X$  ma rozkład ciągły, to kwantylem  $q_p$  rzędu  $p$  jest dowolne  $q_p$  spełniające równanie

$$F(q_p) = p$$

### Definicja 2.3.11. Moda.

Modą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym nazywa się dowolne maksimum funkcji prawdopodobieństwa tego rozkładu. Jeżeli zmienna ma rozkład ciągły to modą jest dowolne maksimum lokalne gęstości tego rozkładu.

## 3 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

### 3.1 Rozkłady dyskretne

#### Definicja 3.1.1. Rozkład jednopunktowy.

Jeśli  $\mathcal{S} = \{x_0\}$  i  $p(x_0) = 1$ , to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład jednopunktowy**. Wtedy przyjmuje parametry:

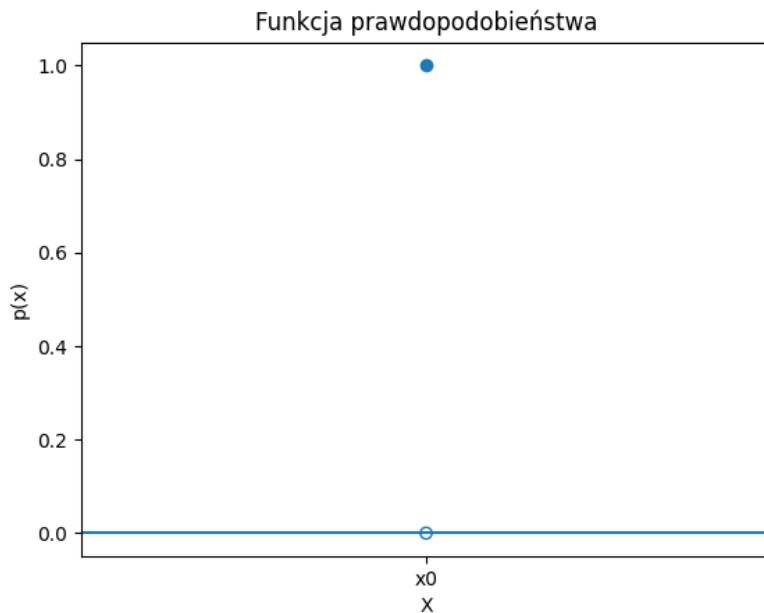
$$\mu = x_0$$

$$\sigma^2 = 0$$

$$A = 0$$

$$K = 0$$

$$\gamma_2 = -3$$



Rysunek 1: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie jednopunktowym.

### Definicja 3.1.2. Rozkład dwupunktowy.

Jeśli

$$\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$$

oraz

$$p(x_1) = \theta$$

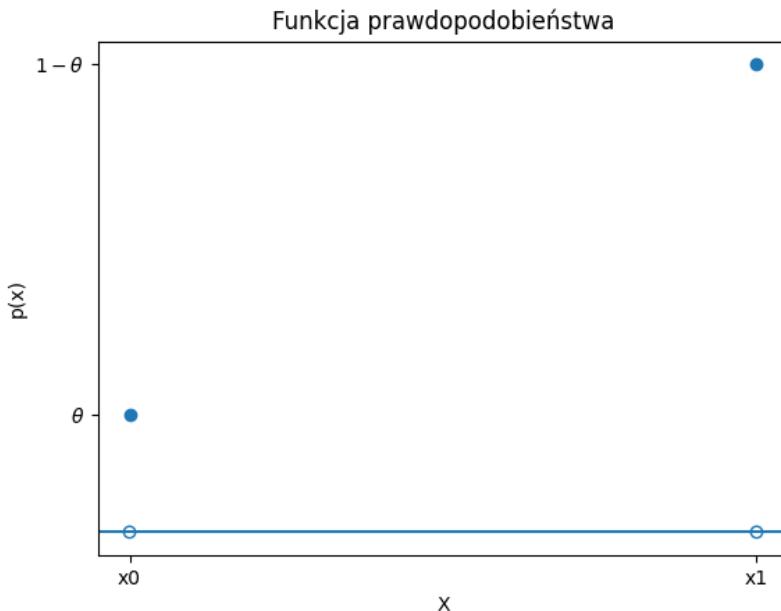
$$p(x_2) = 1 - \theta$$

dla pewnego  $\theta \in (0, 1)$ , to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład dwupunktowy** z parametrem  $\theta$ . Wtedy przyjmuje parametry:

$$\mu = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$$

$$\sigma^2 = \theta(1 - \theta)(x_1 - x_2)^2$$

$$A = \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) \frac{1 - 2\theta}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}}$$



Rysunek 2: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwupunktowym.

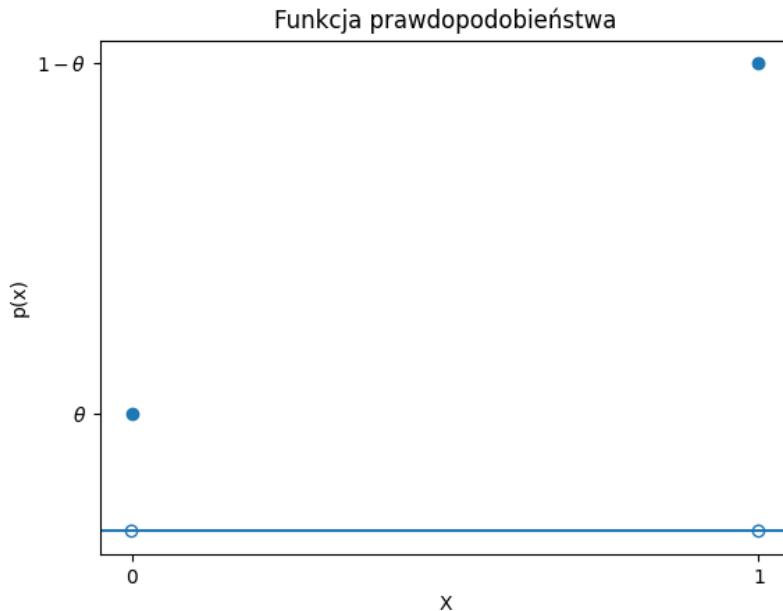
### Definicja 3.1.3. Rozkład Bernoulli'ego.

Rozkład dwupunktowy, w którym  $x_1 = 1$  i  $x_2 = 0$  nazywa się **rozkładem Bernoulli'ego** z parametrem  $\theta$

$$X \sim \operatorname{Bern}(\theta)$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\mu &= \theta \\ \sigma^2 &= \theta(1 - \theta)\end{aligned}$$



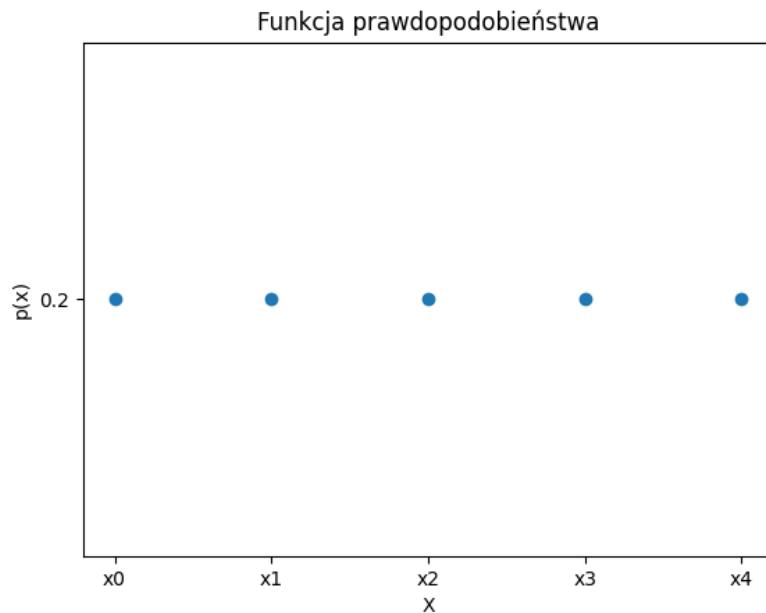
Rysunek 3: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Bernoulli'ego.

**Definicja 3.1.4. Dyskretny rozkład jednostajny.**

Jeśli  $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  i  $p(x_i) = \frac{1}{n}$  dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , to mówimy, że zmienna losowa ma **dyskretny rozkład jednostajny** na  $n$  punktach. Wówczas

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$



Rysunek 4: Funkcja prawdopodobieństwa w dyskretnym rozkładzie jednostajnym.

#### Definicja 3.1.5. Próba Bernoulli'ego.

Rozważmy doświadczenie losowe o dwu możliwych wynikach:

- **sukces** z prawdopodobieństwem  $\theta \in (0, 1)$
- **porażka** z prawdopodobieństwem  $1 - \theta$

Doświadczenie tego rodzaju nazywamy **próbą Bernoulli'ego**.

## 4 Literatura

- [1] Smołka, M. (2025). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. *Wykłady prowadzone na Akademii Górnictwo-Hutniczej w Krakowie*.