

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

## Spis treści

<b>1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa</b>	<b>2</b>
1.1 Przestrzeń probabilistyczna . . . . .	2
1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .	4
1.3 Niezależność zdarzeń . . . . .	4
<b>2 Zmienne losowe jednowymiarowe</b>	<b>5</b>
2.1 Zmienna losowa . . . . .	5
2.2 Zmienne losowe rzeczywiste . . . . .	5
2.3 Parametry zmiennej losowej . . . . .	7
<b>3 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa</b>	<b>10</b>
3.1 Rozkłady dyskretne . . . . .	10
3.2 Rozkłady ciągłe . . . . .	17
<b>4 Zmienne losowe wielowymiarowe</b>	<b>20</b>
<b>5 Wnioskowanie statystyczne</b>	<b>20</b>
5.1 Podstawy wnioskowania statystycznego . . . . .	20
5.2 Statystyki . . . . .	21
5.3 Estymatory . . . . .	21
5.4 Przedziały ufności . . . . .	22
5.5 Testowanie hipotez . . . . .	22
<b>6 Literatura</b>	<b>22</b>

# 1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

## 1.1 Przestrzeń probabilistyczna

**Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.**

Niepusty zbiór  $\Omega$  wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

**Definicja 1.1.2.  $\sigma$ -algebra zdarzeń.**

Podrodzina  $\Sigma$  w rodzinie wszystkich podzbiorów  $\Omega$  o następujących właściwościach:

1.  $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli  $A \in \Sigma$  to  $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1.  $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$ , to  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli  $A, B \in \Sigma$  to  $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$  – zdarzenie niemożliwe

$\Omega$  – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$  – dopełnienie zdarzenia  $A$

$A \cap B = \emptyset$  – zdarzenia wzajemnie się wykluczają.

**Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkład prawdopodobieństwa).**

W przestrzeni  $\Omega$  z  $\sigma$ -algebrą zdarzeń  $\Sigma$  dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$$

spełniające warunki:

1.  $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$  oraz  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$  zachodzi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1.  $P(\emptyset) = 0$
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_n$  spełnia warunek

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$

to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

3. Dla dowolnego zdarzenia  $A$  zachodzi

$$P(A') = 1 - P(A)$$

4. Dla dowolnych zdarzeń  $A$  i  $B$  zachodzi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Jeśli  $A \subset B$  to  $P(A) \leq P(B)$

6. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg wstępujący, tzn.

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

7. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg zstępujący, tzn.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

to

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

#### **Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.**

Trójka  $(\Omega, \Sigma, P)$ , gdzie:

$\Omega$  – niepusty zbiór,

$\Sigma$  –  $\sigma$ -algebra w  $\Omega$ ,

$P$  – miara probabilistyczna.

Liczbę  $P(A)$  nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$ .

## 1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

**Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.**

Liczba określona wzorem

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$  – zdarzenia,

$$P(B) > 0.$$

Jest to prawdopodobieństwo  $A$  pod warunkiem  $B$ .

**Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.**

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

**Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.**

Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą układ zupełny oraz  $P(A_i) > 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , to dla dowolnego zdarzenia  $B$  zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B | A_i)P(A_i)$$

**Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.**

Jeśli zdarzenia  $A_i$  tworzą układ zupełny taki, że  $P(A_i) > 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , a  $B$  jest zdarzeniem takim, że  $P(B) > 0$ , to dla dowolnego  $k$  zachodzi

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B | A_i)P(A_i)}$$

## 1.3 Niezależność zdarzeń

**Definicja 1.3.1. Niekorelacyjność zdarzeń.**

Zdarzenia  $A$  i  $B$  nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_k$  nazywamy niezależnymi jeśli dla każdego układu indeksów  $i_1, i_2, \dots, i_k$  oraz dla każdego  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

**Definicja 1.3.2. Niezależność warunkowa.**

Zdarzenia  $A$  i  $B$  są warunkowo niezależne względem  $C$  dla  $P(C) > 0$  jeśli

$$P(A, B | C) = P(A | C) \cdot P(B | C)$$

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_k$  są warunkowo niezależne względem  $C$  dla  $P(C) > 0$  jeśli dla każdego układu indeksów  $i_1, i_2, \dots, i_k$  oraz dla każdego  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k} | C) = P(A_{i_1} | C) \cdot P(A_{i_2} | C) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k} | C)$$

## 2 Zmienne losowe jednowymiarowe

### 2.1 Zmienna losowa

**Definicja 2.1.1. Zmienna losowa.**

Zmienna losowa to odwzorowanie

$$X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$$

takie, że dla każdego  $A \in \Sigma_{\mathcal{X}}$  zachodzi

$$X^{-1}(A) \in \Sigma$$

gdzie  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną,  $\mathcal{X}$  dowolnym niepustym zbiorem, a  $\Sigma_{\mathcal{X}}$   $\sigma$ -algebrą podzbiorów  $\mathcal{X}$ .

**Definicja 2.1.2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.**

Funkcję

$$P_X : \Sigma_{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$$

określającą następująco

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

gdzie  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną,  $\mathcal{X}$  niepustym zbiorem,  $\Sigma_{\mathcal{X}}$   $\sigma$ -algebrą w  $\mathcal{X}$ , a  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  zmienną losową.

### 2.2 Zmienne losowe rzeczywiste

**Definicja 2.2.1. Dystrybuanta zmiennej losowej.**

Niech  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  będzie zmienną losową rzeczywistą. Dystrybuantą zmiennej losowej rzeczywistej  $X$  nazywamy funkcję

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

określającą wzorem

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x])$$

Własności dystrybuanty:

1. Jeśli  $a < b$ , to  $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$
2.  $F_X$  jest niemalejąca
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4.  $F_X$  jest prawostronnie ciągła, tzn. dla dowolnego  $x_0 \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$

5.  $F_X(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$
6.  $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$
7.  $F_X$  jest ciągła w  $x_0 \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(X = x_0) = 0$$

### **Definicja 2.2.2. Funkcja prawdopodobieństwa.**

Rozkład dyskretny zmiennej  $X$  jest wyznaczony przez funkcję

$$p : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$$

określona następująco:

$$p(x_k) = P_X(x_k) = P(X = x_k)$$

Funkcję  $p$  nazywamy funkcją prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej  $X$ .

### **Definicja 2.2.3. Funkcja gęstości.**

Gęstość zmiennej losowej  $X$  to funkcja

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

taka, że dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  takich, że  $a < b$  zachodzi

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

## 2.3 Parametry zmiennej losowej

**Definicja 2.3.1. Wartość oczekiwana.**

Wartością oczekiwana zmiennej losowej rzeczywistej  $X$  o rozkładzie dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa  $p$  nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{k:x_k \in S} x_k \cdot p(x_k)$$

Jeśli  $X$  jest zmienną o rozkładzie ciągłym z gęstością  $f$ , to

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Własności wartości oczekiwanej:

1.  $\mathbb{E}c = c$
2.  $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y + c$

**Definicja 2.3.2. Moment zwykły.**

Momentem zwykłym rzędu  $k$  zmiennej losowej  $X$  dla  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  nazywamy liczbę

$$\mu'_k = \mathbb{E}(X^k)$$

**Definicja 2.3.3. Moment centralny.**

Momentem centralnym rzędu  $k$  zmiennej losowej  $X$  nazywamy liczbę

$$\mu_k = \mathbb{E}((X - \mu)^k)$$

Dla rozkładów dyskretnych

$$\mu'_k = \sum_{i:x_i \in S} x_i^k \cdot p(x_i)$$

$$\mu_k = \sum_{i:x_i \in S} (x_i - \mu)^k \cdot p(x_i)$$

Dla rozkładów ciągłych

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x)dx$$

**Definicja 2.3.4. Wariancja.**

Wariancją zmiennej losowej  $X$  nazywamy jej drugi moment centralny, tzn.

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2)$$

Własności wariancji:

1.  $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
2. Jeśli zmienna  $X$  ma skończoną wariancję, to dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

3.  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
4.  $Var(X) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X$  jest stała z prawdopodobieństwem 1, tzn. istnieje  $x_0 \in \mathbb{R}$  takie, że

$$P(X \neq x_0) = 0$$

#### **Definicja 2.3.5. Odchylenie standardowe.**

Odchyleniem standardowym zmiennej losowej  $X$  nazywamy pierwiastek jej wariancji, tzn.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

#### **Definicja 2.3.6. Funkcja tworząca momenty (MGF).**

Funkcją tworzącą momenty rzeczywistej zmiennej losowej  $X$  nazywa się funkcję określoną wzorem

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Jeśli  $X$  ma rozkład dyskretny z funkcją prawdopodobieństwa  $p$ , to funkcja tworząca momenty wyraża się wzorem

$$M_X(t) = \sum_{x_k \in S} e^{tx_k} p(x_k)$$

Jeśli  $X$  ma rozkład ciągły o gęstości  $f$ , to funkcja tworząca momenty ma postać

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Niech  $a, b \in \mathbb{R}$ . Własności MGF:

1.  $M_{aX}(t) = M_X(at)$
2.  $M_{X+b}(t) = e^{bt} M_X(t)$
3.  $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$
4.  $M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$

### Definicja 2.3.7. Współczynnik asymetrii (skośność).

Współczynnikiem skośności rozkładu zmiennej  $X$  nazywamy liczbę

$$A = \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Rozkład, dla którego:

- $A = 0$  nazywa się **symetrycznym**
- $A > 0$  nazywa się **prawostronnie skośnym**
- $A < 0$  nazywa się **lewostronnie skośnym**

### Definicja 2.3.8. Kurtoza.

Kurtozą nazywamy liczbę

$$Kurt(X) = K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

natomaiast **kurtozą nadwyżkową** nazywamy liczbę

$$\gamma_3 = Kurt(X) - 3$$

### Definicja 2.3.9. Standaryzacja.

Zmienną o wartości średniej 0 i wariancji 1 nazywa się zmienną standaryzowaną. Jeśli  $X$  jest dowolną zmienną o niezerowej wariancji, to

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

jest zmienną standaryzowaną.

### Twierdzenie 2.3.1. Nierówność Czebyszewa.

Jeśli zmienna losowa  $X$  ma skończoną wartość średnią  $\mu$  i skończoną wariancję  $\sigma^2$ , to dla dowolnego  $\epsilon > 0$  zachodzi

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Jeśli w miejsce  $\epsilon$  podstawimy  $\epsilon\sigma$ , to otrzymamy

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon\sigma) \leq \frac{1}{\epsilon^2}$$

### Definicja 2.3.10. Kwantyl.

Kwantylem rzędu  $p \in (0, 1)$  zmiennej losowej  $X$  o dystrybuancie  $F$  nazywamy dowolną liczbę  $q_p \in \mathbb{R}$  taką, że

$$F(q_p^-) \leq p \leq F(q_p)$$

Kwantyl  $q_{0.5}$  rzędu  $\frac{1}{2}$  nazywamy **medianą**, kwantyl rzędu  $\frac{1}{4}$  nazywamy **dolnym kwartylem**, a kwantyl rzędu  $\frac{3}{4}$  nazywamy **górnym kwartylem**.

Jeśli  $X$  ma rozkład ciągły, to kwantylem  $q_p$  rzędu  $p$  jest dowolne  $q_p$  spełniające równanie

$$F(q_p) = p$$

### Definicja 2.3.11. Moda.

Modą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym nazywa się dowolne maksimum funkcji prawdopodobieństwa tego rozkładu. Jeżeli zmienna ma rozkład ciągły to modą jest dowolne maksimum lokalne gęstości tego rozkładu.

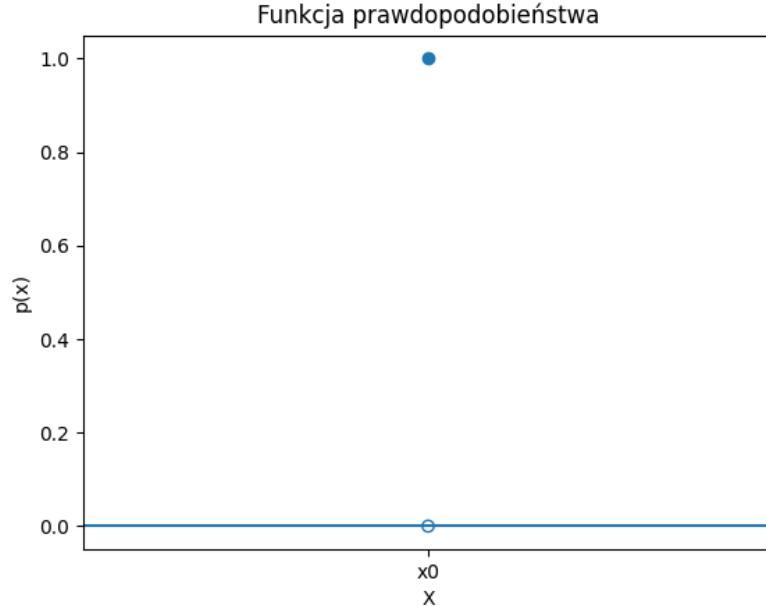
## 3 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

### 3.1 Rozkłady dyskretne

#### Definicja 3.1.1. Rozkład jednopunktowy.

Jeśli  $\mathcal{S} = \{x_0\}$  i  $p(x_0) = 1$ , to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład jednopunktowy**. Wtedy przyjmuje parametry:

$$\begin{aligned}\mu &= x_0 \\ \sigma^2 &= 0 \\ A &= 0 \\ K &= 0 \\ \gamma_2 &= -3\end{aligned}$$



Rysunek 1: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie jednopunktowym.

### Definicja 3.1.2. Rozkład dwupunktowy.

Jeśli

$$\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$$

oraz

$$p(x_1) = \theta$$

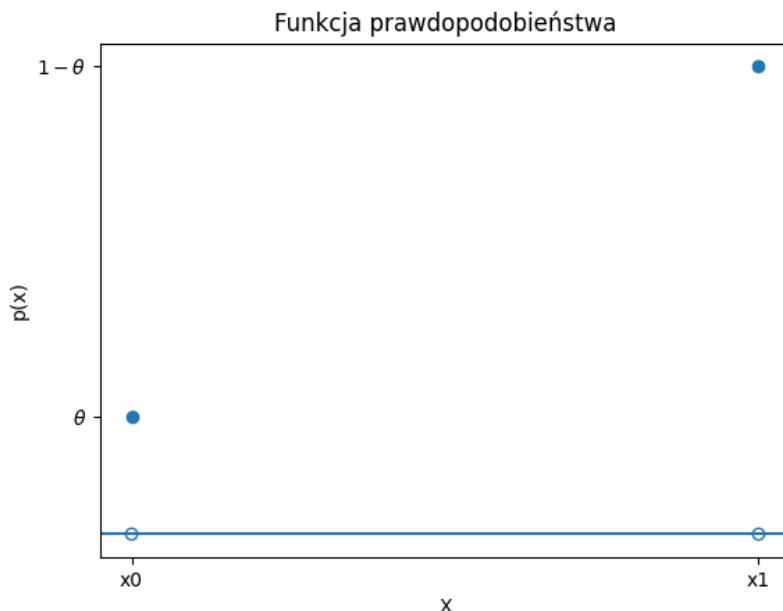
$$p(x_2) = 1 - \theta$$

dla pewnego  $\theta \in (0, 1)$ , to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład dwupunktowy** z parametrem  $\theta$ . Wtedy przyjmuje parametry:

$$\mu = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$$

$$\sigma^2 = \theta(1 - \theta)(x_1 - x_2)^2$$

$$A = \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) \frac{1 - 2\theta}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}}$$



Rysunek 2: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwupunktowym.

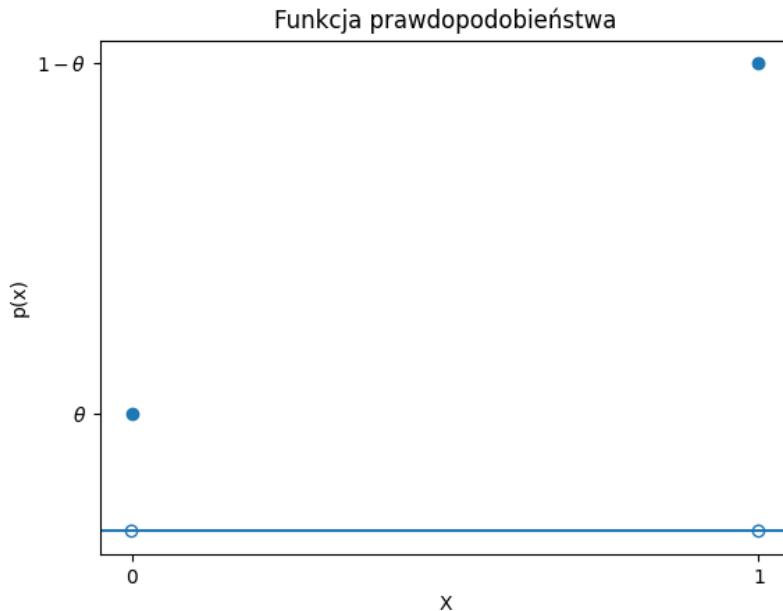
### Definicja 3.1.3. Rozkład Bernoulli'ego.

Rozkład dwupunktowy, w którym  $x_1 = 1$  i  $x_2 = 0$  nazywa się **rozkładem Bernoulli'ego** z parametrem  $\theta$

$$X \sim \operatorname{Bern}(\theta)$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\mu &= \theta \\ \sigma^2 &= \theta(1 - \theta)\end{aligned}$$



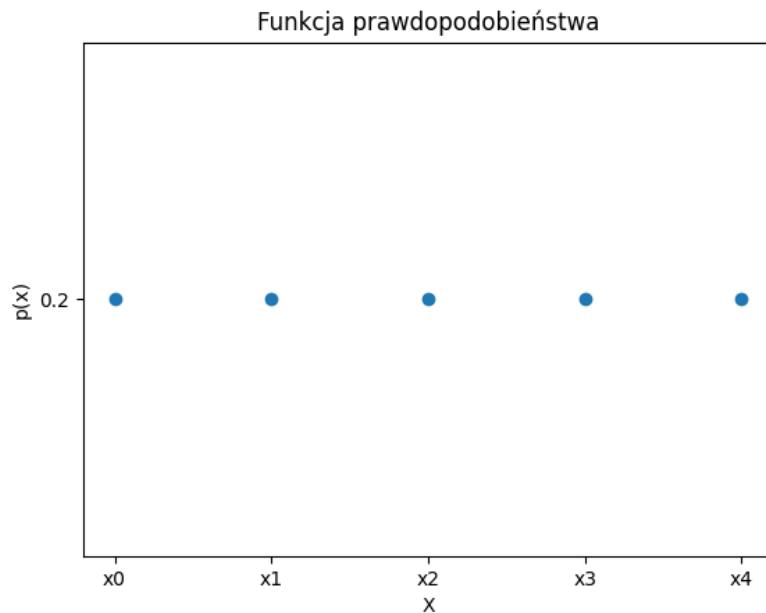
Rysunek 3: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Bernoulli'ego.

**Definicja 3.1.4. Dyskretny rozkład jednostajny.**

Jeśli  $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  i  $p(x_i) = \frac{1}{n}$  dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , to mówimy, że zmienna losowa ma **dyskretny rozkład jednostajny** na  $n$  punktach. Wówczas

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$



Rysunek 4: Funkcja prawdopodobieństwa w dyskretnym rozkładzie jednostajnym.

#### Definicja 3.1.5. Próba Bernoulli'ego.

Rozważmy doświadczenie losowe o dwu możliwych wynikach:

- **sukces** z prawdopodobieństwem  $\theta \in (0, 1)$
- **porażka** z prawdopodobieństwem  $1 - \theta$

Doświadczenie tego rodzaju nazywamy **próbą Bernoulli'ego**.

#### Definicja 3.1.6. Schemat dwumianowy.

Schemat doświadczenia określony jako n-krotne powtórzenie próby Bernoulli'ego w ten sposób, że poszczególne próby są niezależne. Długość schematu może być skończona lub nieskończona.

#### Definicja 3.1.7. Rozkład dwumianowy.

Niech  $X$  będzie zmienną losową, której wartością jest liczba sukcesów w schemacie dwumianowym o długości  $n$  z prawdopodobieństwem sukcesu  $\theta$ . Wówczas  $X$  ma rozkład dyskretny, w którym

$$\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, n\}$$

oraz

$$p(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

Jeśli zmienna  $X$  ma rozkład dwumianowy o parametrach  $n \in \mathbb{N}$  i  $\theta \in (0, 1)$ , to zapisujemy

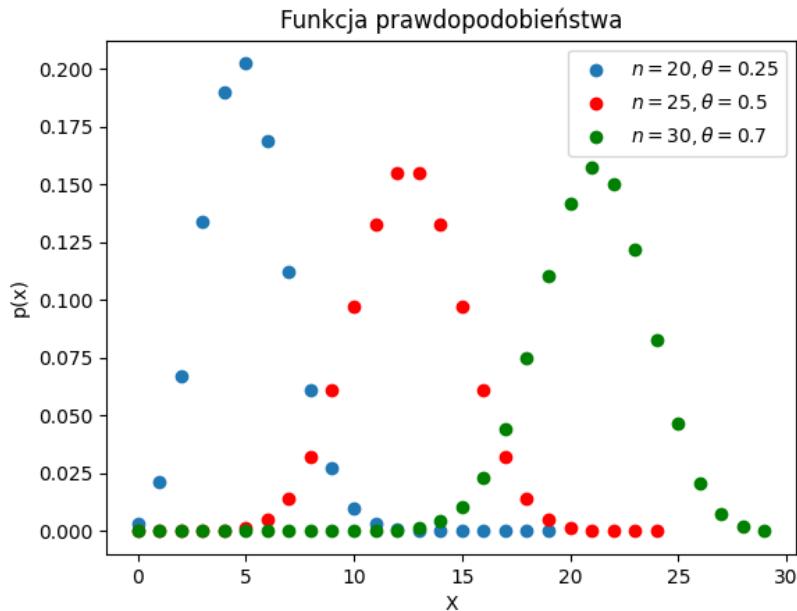
$$X \sim Binom(n, \theta)$$

oraz

$$\begin{aligned}\mu &= n\theta \\ \sigma^2 &= n\theta(1 - \theta)\end{aligned}$$

Łatwo zauważyc, że

$$Binom(1, \theta) = Bern(\theta).$$



Rysunek 5: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym.

### Definicja 3.1.8. Rozkład geometryczny.

Zmienna losowa  $T$  ma rozkład geometryczny z parametrem  $\theta \in (0, 1)$

$$T \sim Geom(\theta),$$

jeśli

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

a funkcja prawdopodobieństwa ma postać

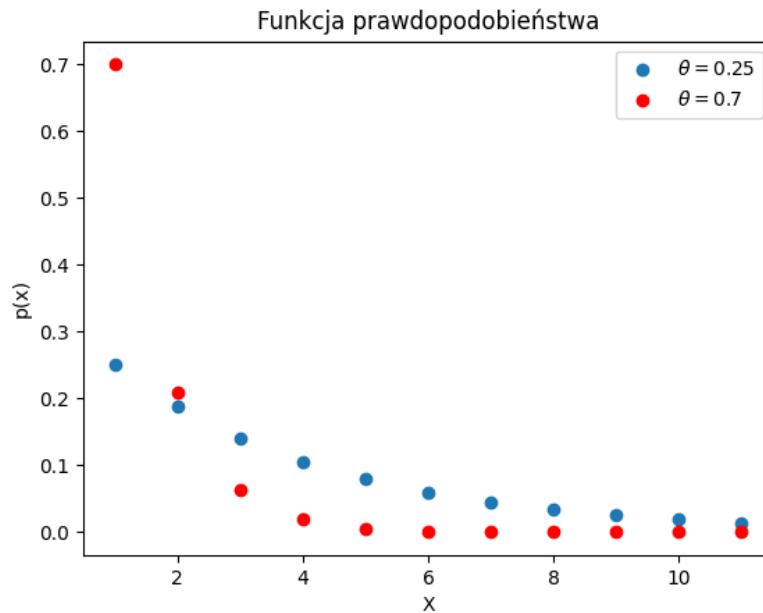
$$p(k) = (1 - \theta)^{k-1} \theta$$

$$k \in \mathcal{S}$$

Zmienna  $T$  opisuje czas oczekiwania na pierwszy sukces w schemacie dwumianowym (o nieskończonej długości). Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\theta}$$

$$\sigma^2 = \frac{1 - \theta}{\theta^2}$$



Rysunek 6: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie geometrycznym.

#### Definicja 3.1.9. Rozkład Poissona.

Jeśli zmienna  $N$  o wartościach w  $\mathbb{N}$  opisuje liczbę wystąpień pewnego powtarzalnego zdarzenia w przedziale czasowym  $[0, t]$ , przy czym spełnione są założenia:

- powtórzenia zdarzenia występują niezależnie od siebie,
- intensywność wystąpień  $r > 0$ , czyli średnia liczba wystąpień w jednostce czasu jest stała,
- w danej chwili może zajść co najwyżej jedno powtórzenie,

to zmienna ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda = rt > 0$

$$N \sim Pois(\lambda).$$

Wówczas

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

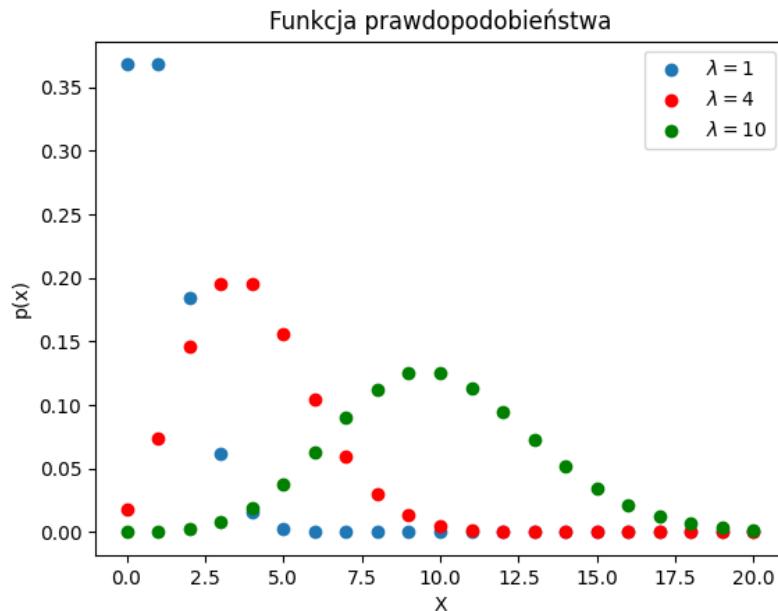
$$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$k \in \mathcal{S}$$

oraz

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$



Rysunek 7: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Poissona.

### Twierdzenie 3.1.1. Twierdzenie Poissona.

Niech  $X_n$  będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że

$$X_n \sim \text{Binom}(n, \theta_n),$$

gdzie  $\theta_n$  jest takim ciągiem, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = \lambda$$

dla pewnej liczby  $\lambda > 0$ . Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

### 3.2 Rozkłady ciągłe

**Definicja 3.2.1. Rozkład jednostajny.**

Mówimy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na przedziale  $[a, b]$  jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

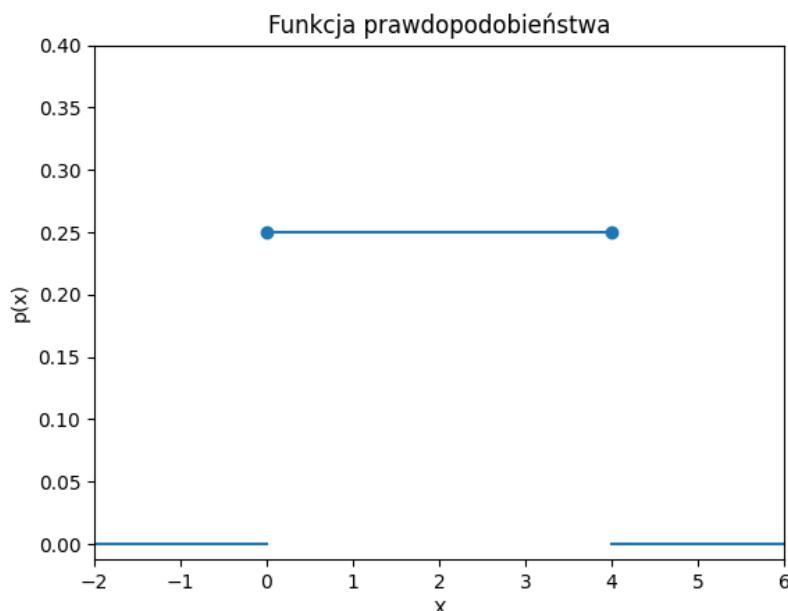
zapisujemy

$$X \sim \mathcal{U}(a, b).$$

Wówczas

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Rysunek 8: Funkcja gęstości w rozkładzie jednostajnym.

**Definicja 3.2.2. Rozkład wykładniczy.**

Niech  $T$  będzie zmienną modelującą czas oczekiwania na pierwsze zdarzenie w ciągu zdarzeń takim, że ich liczba w przedziale  $[0, t]$  opisana jest przez zmienną  $X$  o rozkładzie Poissona z parametrem  $\lambda$ . Mówimy wtedy, że  $T$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda$

$$T \sim Exp(\lambda)$$

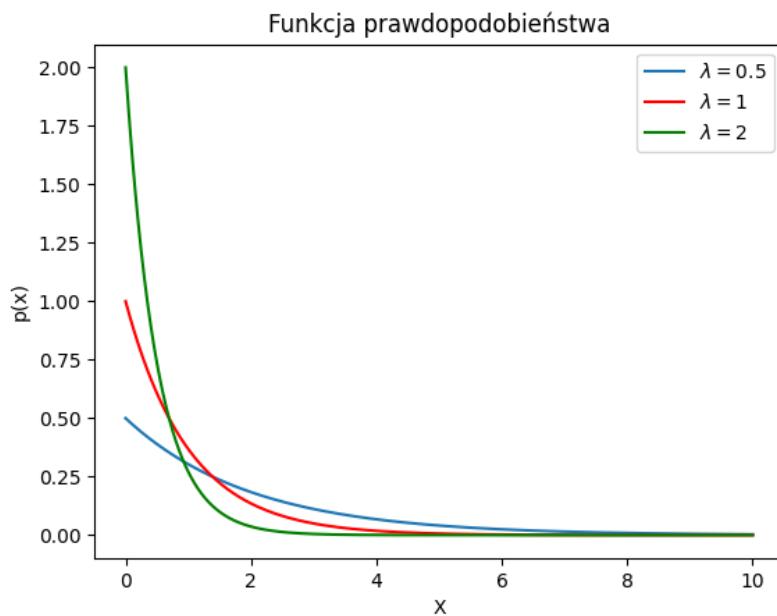
Gęstość ma postać

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & , t \geq 0. \end{cases}$$

Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$



Rysunek 9: Funkcja gęstości w rozkładzie wykładniczym.

### Definicja 3.2.3. Rozkład gamma.

Mówimy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład gamma z parametrami  $s > 0$  i  $r > 0$

$$X \sim \text{Gamma}(s, r)$$

jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{r^s}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-rx} & , x \geq 0 \end{cases}$$

gdzie  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  jest tzw. funkcją Eulera

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Jest rozkładem ogólniejszym niż rozkład wykładniczy, w szczególności

$$Gamma(1, r) = Exp(r).$$

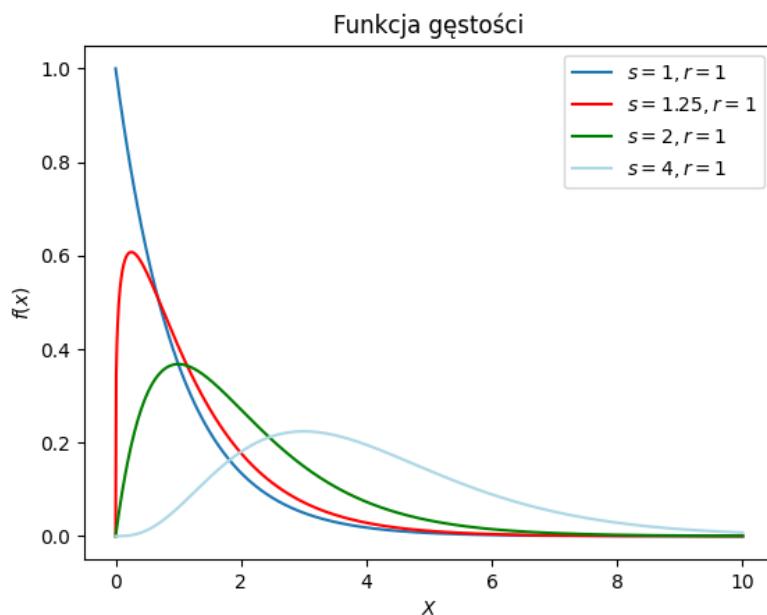
Własności funkcji Eulera:

1.  $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
2. Jeśli  $n \in \mathbb{N}$ , to  $\Gamma(n + 1) = n!$
3.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
4.  $\int_0^\infty x^{s-1} e^{-rx} dx = \frac{\Gamma(s)}{r^s}$

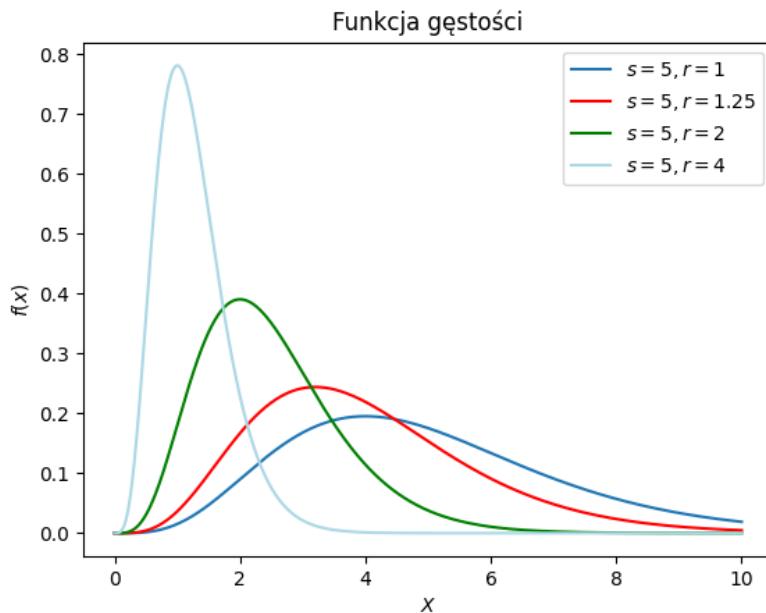
Wielkości opisujące rozkład gamma:

$$\mu = \frac{s}{r}$$

$$\sigma^2 = \frac{s}{r^2}$$



Rysunek 10: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego  $r$ .



Rysunek 11: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego  $s$ .

**Definicja 3.2.4. Rozkład  $\chi^2$ .**

TODO

## 4 Zmienne losowe wielowymiarowe

TODO

## 5 Wnioskowanie statystyczne

### 5.1 Podstawy wnioskowania statystycznego

**Definicja 5.1.1. Model statystyczny.**

Modelem statystycznym nazywamy parę

$$(\mathcal{X}, \mathcal{P})$$

gdzie  $\mathcal{P}$  jest rodziną rozkładów prawdopodobieństwa na zbiorze  $\mathcal{X}$ . Zazwyczaj przyjmuje się, że

$$\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$$

dla pewnego zbioru  $\Theta$  dopuszczalnych wartości parametrów modelu  $\theta$ .

### **Definicja 5.1.2. Prosta próba losowa.**

Prostą próbą losową o liczności  $n$  z rozkładu  $P_\theta$  nazywamy ciąg niezależnych zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_n$  takich, że

$$X_i \sim P_\theta$$

dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$ . Jeśli  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jest prostą próbą losową, to ciąg wartości  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  takich, że

$$X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \dots, X_n(\omega) = x_n$$

dla pewnego  $\omega$  nazywamy **realizacją prostej próby losowej**  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

## **5.2 Statystyki**

### **Definicja 5.2.1. Statystyka.**

Statystyką nazywa się zmienną losową będącą funkcją prostej próby losowej

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Funkcja  $T$  używana do konstrukcji statystyki musi przyjmować listę argumentów dowolnej długości.

### **Definicja 5.2.2. Średnia w prostej próbie losowej.**

Jest to statystyka dana wzorem

$$\bar{X} = \bar{X}_n - \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Jeśli

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

to korzystając z własności rozkładu normalnego otrzymujemy

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

### **Definicja 5.2.3. Wariancja w prostej próbie losowej.**

Jest to statystyka dana wzorem

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

## **5.3 Estymatory**

TODO

## **5.4 Przedziały ufności**

TODO

## **5.5 Testowanie hipotez**

TODO

## **6 Literatura**

- [1] Smołka, M. (2026). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. *Wykłady prowadzone na Akademii Górnictwo-Hutniczej w Krakowie.*