Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

Spis treści

1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

1.1 Przestrzeń probabilistyczna

Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Niepusty zbiór Ω wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

Definicja 1.1.2. σ-algebra zdarzeń.

Podrodzina Σ w rodzinie wszystkich podzbiorów Ω o następujących właściwościach:

1. $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli $A \in \Sigma$ to $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma$, to $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$
4. Jeśli $A, B \in \Sigma$ to $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe

Ω – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$ – dopełnienie zdarzenia A

$A \cap B = \emptyset$ – zdarznia wzajemnie się wykluczają.

Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkładbprawdopodobieństwa).

W przestrzeni Ω z σ-algebrą zdarzeń Σ dowolne odwzorowanie
$$P : \Sigma \to [0, 1]$$
spełniające warunki:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ zachodzi
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1. $P(\emptyset)=0$
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spełnia warunek
$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$
to
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$
3. Dla dowolnego zdarzenia A zachodzi
$$P(A') = 1 - P(A)$$
4. Dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzi
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
5. Jeśli $A \subset B$ to $P(A) \leqslant P(B)$
6. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą ciąg wstępujący, tzn.
$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots$$
to
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$
7. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą ciąg zstępujący, tzn.
$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots$$
to
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.

Trójka (Ω, Σ, P), gdzie:

Ω – niepusty zbiór,

Σ – σ-algebra w Ω,

P – miara probabilistyczna.

Liczbę $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A.

1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.

Liczba określona wzorem

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$ – zdarzenia,

$P(B) > 0$.

Jest to prawdopodobieństwo A pod warunkiem B.

Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \dots$ jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ tworzą układ zupełny oraz $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, to dla dowolnego zdarzenia B zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)$$

Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.

Jeśli zdarzenia A_i tworzą układ zupełny taki, że $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, a B jest zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$, to dla dowolnego k zachodzi

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k) P(A_k)}{\sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

1.3 Niezależność zdarzeń

Definicja 1.3.1. Niezależność zdarzeń.

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_k$ nazywamy niezależnymi jeśli dla każdego układu indeksów $i_1, i_2, \dots, i_k$ oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Definicja 1.3.2. Niezależność warunkowa.

Zdarzenia A i B są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli

$$P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli dla każdego układu indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$ oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k} \mid C) = P(A_{i_1} \mid C) \cdot P(A_{i_2} \mid C) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k} \mid C)$$

2 Zmienne losowe jednowymiarowe

2.1 Zmienna losowa

Definicja 2.1.1. Zmienna losowa.

Zmienna losowa to odwzorowanie

$$X : \Omega \to \mathcal{X}$$

takie, że dla każdego $A \in \Sigma_{\mathcal{X}}$ zachodzi

$$X^{-1}(A) \in \Sigma$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{X}$ dowolnym niepustym zbiorem, a $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ-algebrą podzbiorów $\mathcal{X}$.

Definicja 2.1.2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

Funkcję

$$P_X : \Sigma_{\mathcal{X}} \to [0, 1]$$

określoną następująco

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{X}$ niepustym zbiorem, $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ-algebrą w $\mathcal{X}$, a $X : \Omega \to \mathcal{X}$ zmienną losową.

2.2 Zmienne losowe rzeczywiste

Definicja 2.2.1. Dystrybuanta zmiennej losowej.

Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową rzeczywistą. Dystrybuantą zmiennej losowej rzeczywistej X nazywamy funkcję

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

określoną wzorem

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X((-\infty, x])$$

Własności dystrybuanty:

1. Jeśli $a < b$, to $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leqslant b)$
2. F_X jest niemalejąca
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4. F_X jest prawostronnie ciągła, tzn. dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$
5. $F_X(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$
6. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$
7. F_X jest ciągła w $x_0 \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$P(X = x_0) = 0$$

Definicja 2.2.2. Funkcja prawdopodobieństwa.

Rozkład dyskretny zmiennej X jest wyznaczony przez funkcję
$$p : \mathcal{S} \to [0, 1]$$
określoną następująco:
$$p(x_k) = P_X(x_k) = P(X = x_k)$$
Funkcję p nazywamy funkcją prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej X.

Definicja 2.2.3. Funkcja gęstości.

Gęstość zmiennej losowej X to funkcja
$$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$
taka, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ takich, że $a < b$ zachodzi
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

2.3 Parametry zmiennej losowej

Definicja 2.3.1. Wartość oczekiwana.

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej rzeczywistej X o rozkładzie dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa p nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} x_k \cdot p(x_k)$$

Jeśli X jest zmienną o rozkładzie ciągłym z gęstością f, to

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Własności wartości oczekiwanej:

1. $\mathbb{E}c = c$
2. $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y + c$
3. Dla rozkładów ciągłych
$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$
dla rozkładów dyskretnych
$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} g(x_k) f(x_k) dx$$

Definicja 2.3.2. Moment zwykły.

Momentem zwykłym rzędu k zmiennej losowej X dla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nazywamy liczbę

$$\mu'_k = \mathbb{E}(X^k)$$

Definicja 2.3.3. Moment centralny.

Momentem centralnym rzędu k zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mu_k = \mathbb{E}((X - \mu)^k)$$

Dla rozkładów dyskretnych

$$\mu'_k = \sum_{i: x_i \in \mathcal{S}} x_i^k \cdot p(x_i)$$

$$\mu_k = \sum_{i: x_i \in \mathcal{S}} (x_i - \mu)^k \cdot p(x_i)$$

Dla rozkładów ciągłych

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx$$

Definicja 2.3.4. Wariancja.

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy jej drugi moment centralny, tzn.

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2)$$

Własności wariancji:

1. $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
2. Jeśli zmienna X ma skończoną wariancję, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$
3. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
4. $Var(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest stała z prawdopodobieństwem 1, tzn. istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że
$$P(X \neq x_0) = 0$$

Definicja 2.3.5. Odchylenie standardowe.

Odchyleniem standardowym zmiennej losowej X nazywamy pierwiastek jej wariancji, tzn.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Definicja 2.3.6. Funkcja tworząca momenty (MGF).

Funkcją tworzącą momenty rzeczywistej zmiennej losowej X nazywa się funkcję określoną wzorem

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$$

Jeśli X ma rozkład dyskretny z funkcją prawdopodobieństwa p, to funkcja tworząca momenty wyraża się wzorem

$$M_X(t) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} e^{tx_k} p(x_k)$$

Jeśli X ma rozkład ciągły o gęstości f, to funkcja tworząca momenty ma postać

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Własności MGF:

1. $M_{aX}(t) = M_X(at)$
2. $M_{X+b}(t) = e^{bt} M_X(t)$
3. $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

4. $M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$

Definicja 2.3.7. Współczynnik asymetrii (skośność).

Współczynnikiem skośności rozkładu zmiennej X nazywamy liczbę

$$A = \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Rozkład, dla którego:

- $A = 0$ nazywa się **symetrycznym**
- $A > 0$ nazywa się **prawostronnie skośnym**
- $A < 0$ nazywa się **lewostronnie skośnym**

Definicja 2.3.8. Kurtoza.

Kurtozą nazywamy liczbę

$$Kurt(X) = K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

natomiast **kurtozą nadwyżkową** nazywamy liczbę

$$\gamma_3 = Kurt(X) - 3$$

Definicja 2.3.9. Standaryzacja.

Zmienną o wartości średniej 0 i wariancji 1 nazywa się zmienną standaryzowaną. Jeśli X jest dowolną zmienną o niezerowej wariancji, to

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

jest zmienną standaryzowaną.

Twierdzenie 2.3.1. Nierówność Czebyszewa.

Jeśli zmienna losowa X ma skończoną wartość średnią μ i skończoną wariancję σ^2, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$P(|X - \mu| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Jeśli w miejsce ϵ podstawimy $\epsilon\sigma$, to otrzymamy

$$P(|X - \mu| \geqslant \epsilon\sigma) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}$$

Definicja 2.3.10. Kwantyl.

Kwantylem rzędu $p \in (0,1)$ zmiennej losowej X o dystrybuancie F nazywamy dowolną liczbę $q_p \in \mathbb{R}$ taką, że

$$F(q_p-) \leqslant p \leqslant F(q_p)$$

Kwantyl $q_{0.5}$ rzędu $\frac{1}{2}$ nazywamy **medianą**, kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$ nazywamy **dolnym kwartylem**, a kwantyl rzędu $\frac{3}{4}$ nazywamy **górnym kwartylem**.

Jeśli X ma rozkład ciągły, to kwantylem q_p rzędu p jest dowolne q_p spełniające równanie

$$F(q_p) = p$$

Definicja 2.3.11. Moda.

Modą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym nazywa się dowolne maksimum funkcji prawdopodobieństwa tego rozkładu. Jeżeli zmienna ma rozkład ciągły to modą jest dowolne maksimum lokalne gęstości tego rozkładu.

2.4 Funkcje zmiennych losowych

Twierdzenie 2.4.1. Metoda transformacji.

Jeśli $Y = g(X)$ oraz g jest fukcją ściśle monotoniczną, to istnieje funkcja odwrotna

$$h = g^{-1}$$

jeśli funkcja h jest różniczkowalna, to gęstość rozkładu Y spełnia następującą równość

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

Ważne szczególne przypadki dla rozkładów jednowymiarowych. Załóżmy, że $c \neq 0$ i $d \in \mathbb{R}$:

1. Jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ i $Y = cX + d$, to

$$Y \sim \mathcal{N}(c\mu + d, |c|\sigma)$$

2. Jeśli $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ i $Y = cX + d$, to

$$Y \sim \begin{cases} \mathcal{U}(ca + d, cb + d) & , c > 0 \\ \mathcal{U}(cb + d, ca + d) & , c < 0 \end{cases}$$

3. Jeśli $X \sim Gamma(s, r)$ i $Y = cX$ dla $c > 0$, to

$$Y \sim Gamma\left(s, \frac{r}{c}\right)$$

3 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

3.1 Rozkłady dyskretne

Definicja 3.1.1. Rozkład jednopunktowy.

Jeśli $\mathcal{S} = \{x_0\}$ i $p(x_0) = 1$, to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład jednopunktowy**. Wtedy przyjmuje parametry:

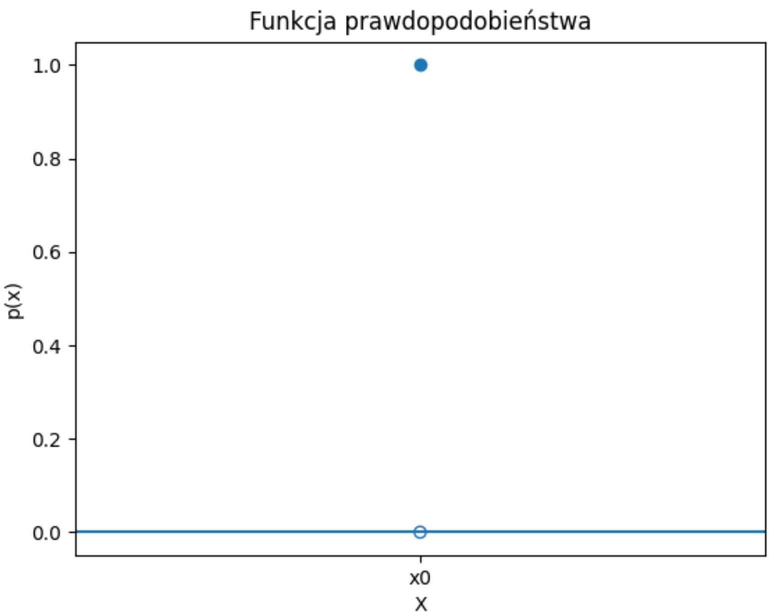
$$\mu = x_0$$

$$\sigma^2 = 0$$

$$A = 0$$

$$K = 0$$

$$\gamma_2 = -3$$



Rysunek 1: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie jednopunktowym.

Definicja 3.1.2. Rozkład dwupunktowy.

Jeśli

$$\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$$

oraz

$$p(x_1) = \theta$$

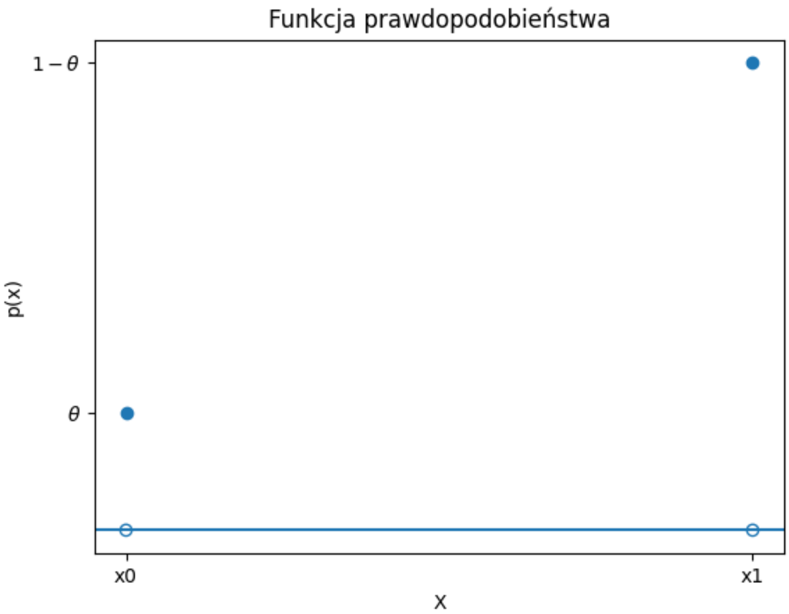
$$p(x_2) = 1 - \theta$$

dla pewnego $\theta \in (0, 1)$, to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład dwupunktowy** z parametrem θ. Wtedy przyjmuje parametry:

$$\mu = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$$

$$\sigma^2 = \theta(1 - \theta)(x_1 - x_2)^2$$

$$A = sgn(x_1 - x_2)\frac{1 - 2\theta}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}}$$



Rysunek 2: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwupunktowym.

Definicja 3.1.3. Rozkład Bernoulli'ego.

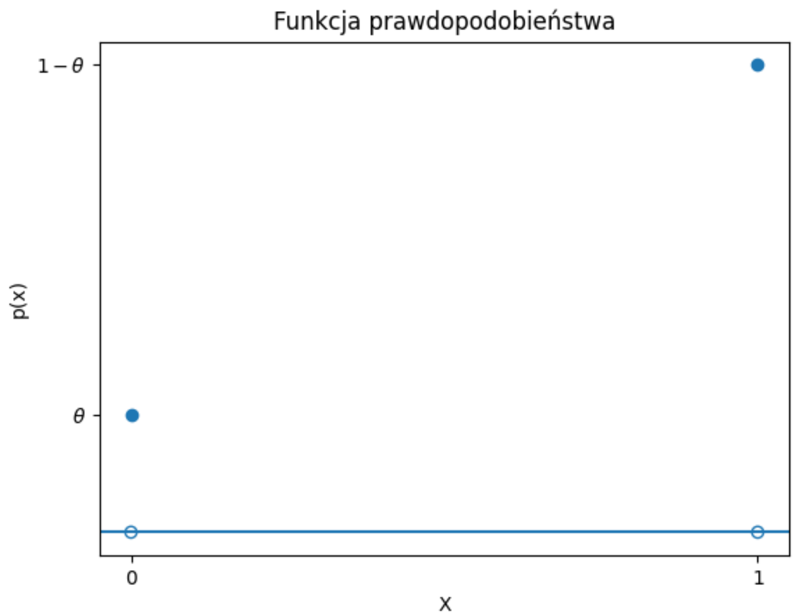
Rozkład dwupunktowy, w którym $x_1 = 1$ i $x_2 = 0$ nazywa się **rozkładem Bernoulli'ego** z parametrem θ

$$X \sim Bern(\theta)$$

Wówczas

$$\mu = \theta$$

$$\sigma^2 = \theta(1 - \theta)$$



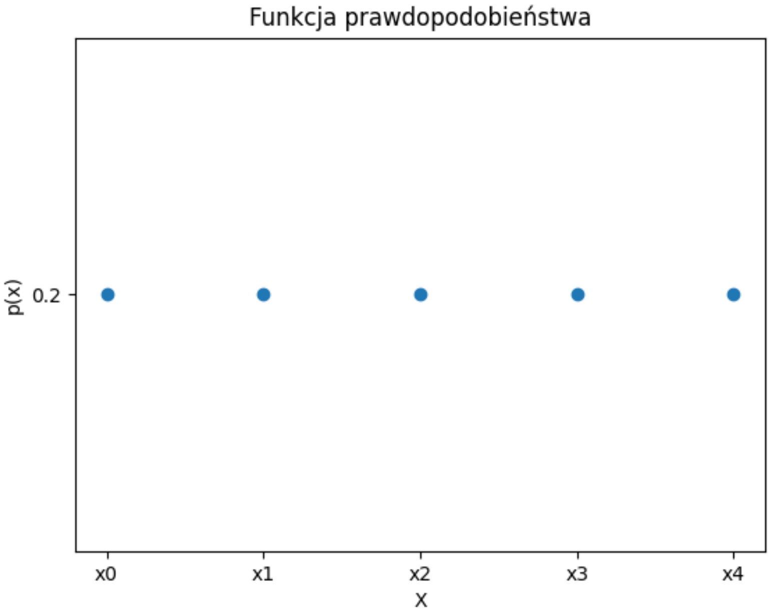
Rysunek 3: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Bernoulli'ego.

Definicja 3.1.4. Dyskretny rozkład jednostajny.

Jeśli $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $p(x_i) = \frac{1}{n}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to mówimy, że zmienna losowa ma **dyskretny rozkład jednostajny** na n punktach. Wówczas

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$



Rysunek 4: Funkcja prawdopodobieństwa w dyskretnym rozkładzie jednostajnym.

Definicja 3.1.5. Próba Bernoulli'ego.

Rozważmy doświadczenie losowe o dwu możliwych wynikach:

- **sukces** z prawdopodobieństwem $\theta \in (0, 1)$
- **porażka** z prawdopodobieństwem $1 - \theta$

Doświadczenie tego rodzaju nazywamy **próbą Bernoulli'ego**.

Definicja 3.1.6. Schemat dwumianowy.

Schemat doświadczenia określony jako n-krotne powtórzenie próby Bernoulli'ego w ten sposób, że poszczególne próby są niezależne. Długość schematu może być skończona lub nieskończona.

Definicja 3.1.7. Rozkład dwumianowy.

Niech X będzie zmienną losową, której wartością jest liczba sukcesów w schemacie dwumianowym o długości n z prawdopodobieństwem sukcesu θ. Wówczas X ma rozkład dyskretny, w którym

$$\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, n\}$$

oraz

$$p(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

Jeśli zmienna X ma rozkład dwumianowy o parametrach $n \in \mathbb{N}$ i $\theta \in (0,1)$, to zapisujemy

$$X \sim Binom(n, \theta)$$

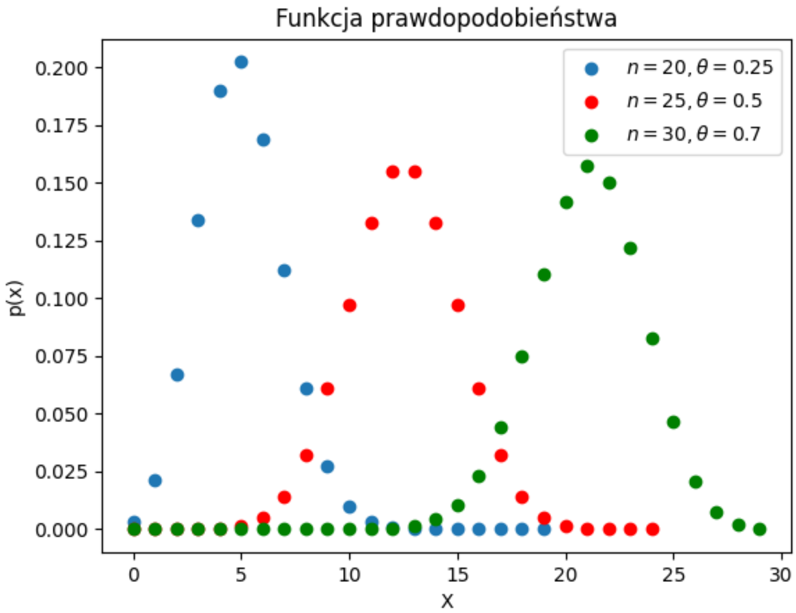
oraz

$$\mu = n\theta$$

$$\sigma^2 = n\theta(1-\theta)$$

Łatwo zauważyć, że

$$Binom(1, \theta) = Bern(\theta).$$



Rysunek 5: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym.

Definicja 3.1.8. Rozkład geometryczny.

Zmienna losowa T ma rozkład geometryczny z parametrem $\theta \in (0,1)$

$$T \sim Geom(\theta),$$

jeśli

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

a funkcja prawdopodobieństwa ma postać

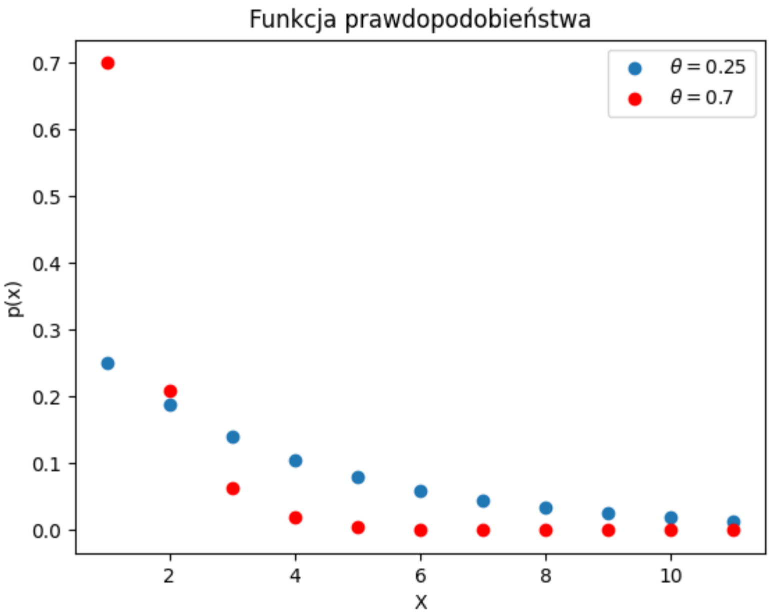
$$p(k) = (1-\theta)^{k-1}\theta$$

$$k \in \mathcal{S}$$

Zmienna T opisuje czas oczekiwania na pierwszy sukces w schemacie dwumianowym (o nieskończonej długości). Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\theta}$$

$$\sigma^2 = \frac{1-\theta}{\theta^2}$$



Rysunek 6: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie geometrycznym.

Definicja 3.1.9. Rozkład Poissona.

Jeśli zmienna N o wartościach w $\mathbb{N}$ opisuje liczbę wystąpień pewnego powtarzalnego zdarzenia w przedziale czasowym $[0, t]$, przy czym spełnione są założenia:

- powtórzenia zdarzenia występują niezależnie od siebie,
- intensywność wystąpień $r > 0$, czyli średnia liczba wystąpień w jednostce czasu jest stała,
- w danej chwili może zajść co najwyżej jedno powtórzenie,

to zmienna ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = rt > 0$

$$N \sim Pois(\lambda).$$

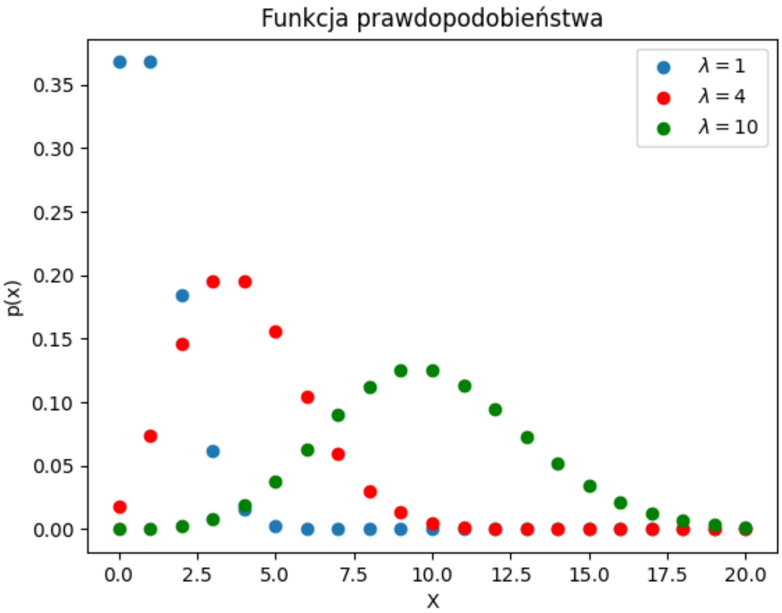
Wówczas

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
$$k \in \mathcal{S}$$

oraz

$$\mu = \lambda$$
$$\sigma^2 = \lambda$$



Rysunek 7: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Poissona.

Twierdzenie 3.1.1. Twierdzenie Poissona.

Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że

$$X_n \sim Binom(n, \theta_n),$$

gdzie θ_n jest takim ciągiem, że

$$\lim_{n\to\infty} n\theta_n = \lambda$$

dla pewnej liczby $\lambda > 0$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

3.2 Rozkłady ciągłe

Definicja 3.2.1. Rozkład jednostajny.

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[a, b]$ jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , x \notin [a, b] \end{cases}$$

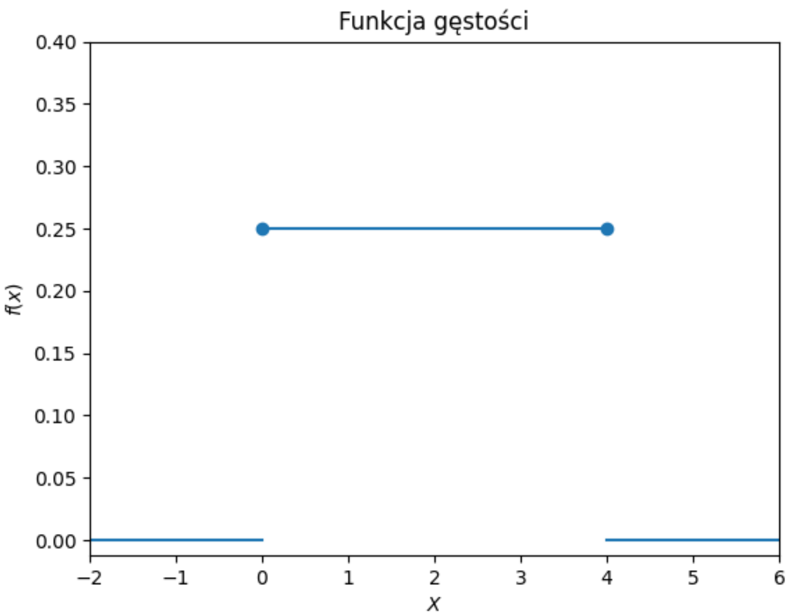
zapisujemy

$$X \sim \mathcal{U}(a, b).$$

Wówczas

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Rysunek 8: Funkcja gęstości w rozkładzie jednostajnym.

Definicja 3.2.2. Rozkład wykładniczy.

Niech T będzie zmienną modelującą czas oczekiwania na pierwsze zdarzenie w ciągu zdarzeń takim, że ich liczba w przedziale $[0, t]$ opisana jest przez zmienną X o rozkładzie Poissona z patametrem λ. Mówimy wtedy, że T ma rozkład wykładniczy z parametrem λ

$$T \sim Exp(\lambda)$$

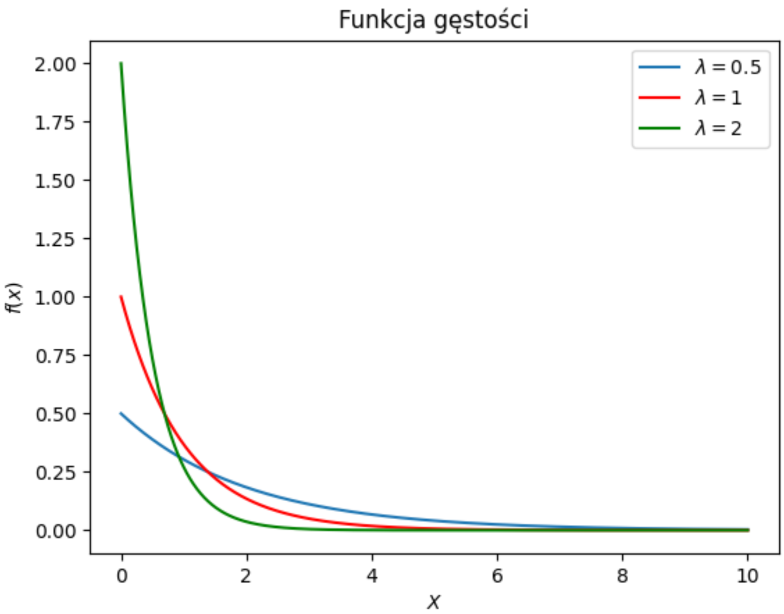
Gęstość ma postać

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & , t \geqslant 0. \end{cases}$$

Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$



Rysunek 9: Funkcja gęstości w rozkładzie wykładniczym.

Definicja 3.2.3. Rozkład gamma.

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład gamma z parametrami $s > 0$ i $r > 0$

$$X \sim Gamma(s, r)$$

jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{r^s}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-rx} & , x \geqslant 0 \end{cases}$$

gdzie $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ jest tzw. funkcją Eulera

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Jest rozkładem ogólniejszym niż rozkład wykładniczy, w szczególności

$$Gamma(1, r) = Exp(r).$$

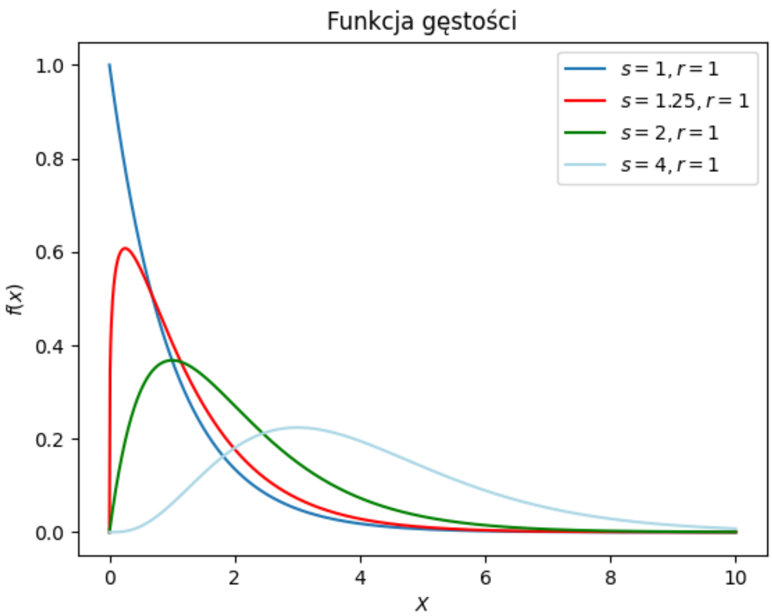
Własności funkcji Eulera:

1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
2. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $\Gamma(n+1) = n!$
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
4. $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-rx}dx = \frac{\Gamma(s)}{r^s}$

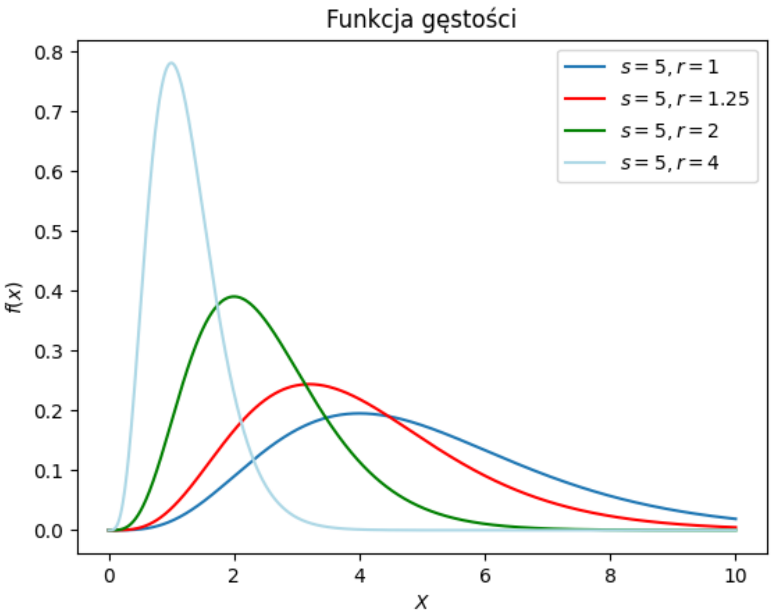
Wielkości opisujące rozkład gamma:

$$\mu = \frac{s}{r}$$

$$\sigma^2 = \frac{s}{r^2}$$



Rysunek 10: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego r.



Rysunek 11: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego s.

Definicja 3.2.4. Rozkład χ^2.

Szczególnym przypadkiem rozkładu gamma dla $s = \frac{n}{2}$ i $r = \frac{1}{2}$ jest rozkład χ^2 o n stopniach swobody

$$\chi^2(n) = Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

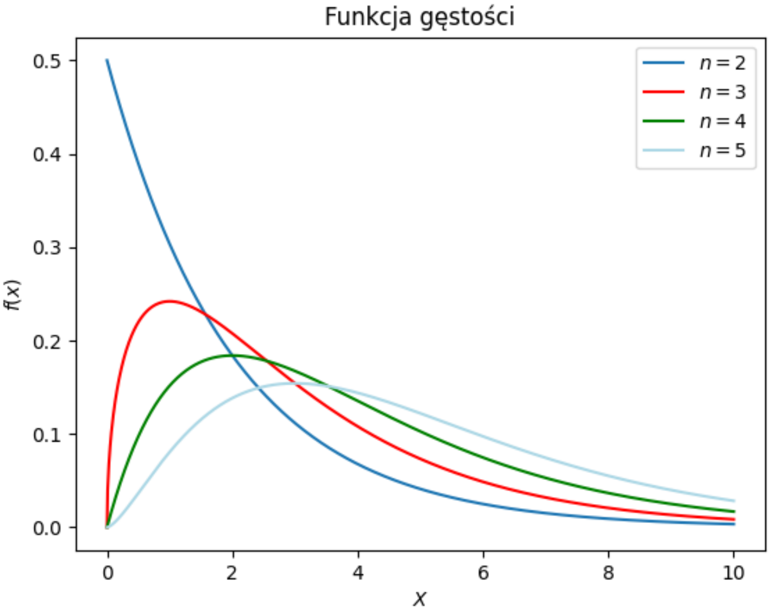
zatem gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{(\sqrt{2})^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & , x \geqslant 0 \end{cases}$$

Wielkości opisujące rozkład χ^2:

$$\mu = n$$

$$\sigma^2 = 2n$$



Rysunek 12: Funkcja gęstości w rozkładzie χ^2.

Definicja 3.2.5. Rozkład normalny.

Mówimy, że zmienna losowa X o gęstości $\phi_{\mu,\sigma}$ ma rozkład normalny z parametrami $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

jeśli

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

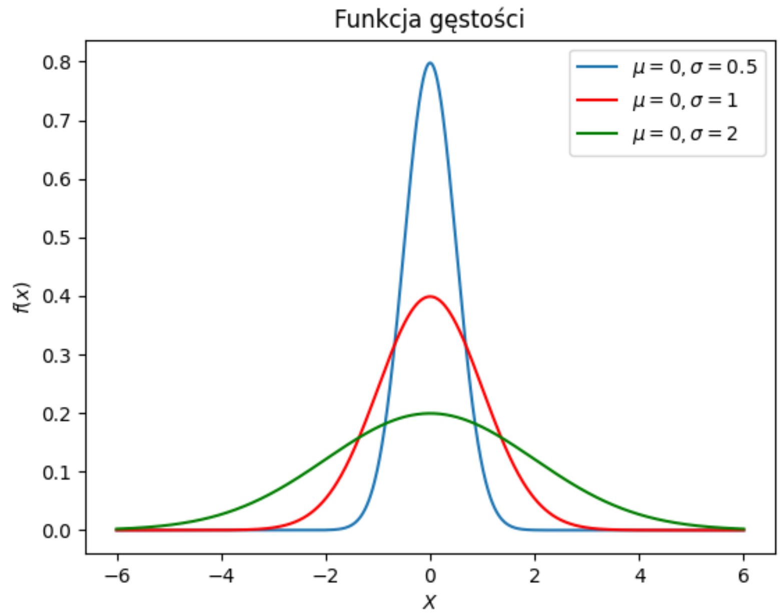
Wielkości opisujące rozkład normalny:

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

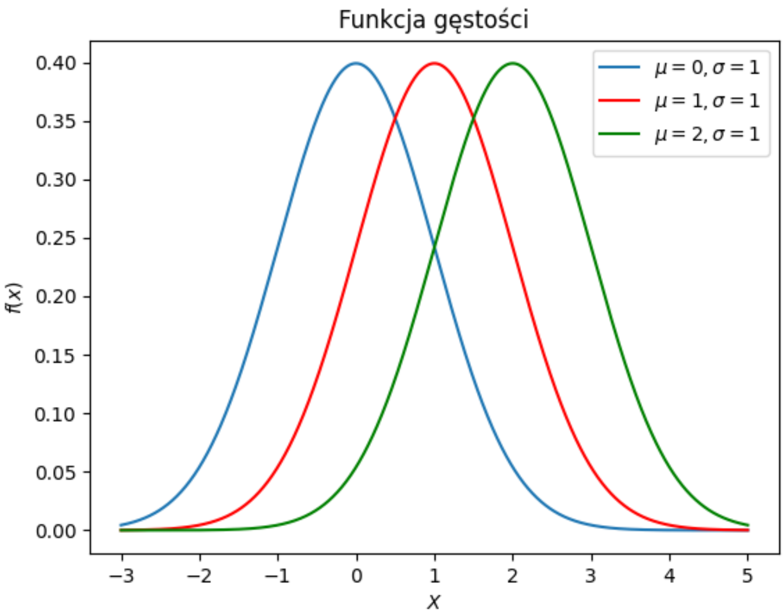
$$Var(X) = \sigma^2$$

Rozkład $\mathcal{N}(0,1)$ nazywamy standardowym rozkładem normalnym. Jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, to

$$X = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Rysunek 13: Funkcja gęstości w rozkładzie normalnym dla ustalonego μ.



Rysunek 14: Funkcja gęstości w rozkładzie normalnym dla ustalonego σ.

Definicja 3.2.6. Rozkład t-Studenta.

Rozkład t-Studenta o ν stopniach swobody dla $\nu > 0$, to rozkład ciągły o gęstości

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Jeśli zmienne losowe Z i V są niezależne, a ponadto

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

oraz

$$V \sim \chi^2(\nu)$$

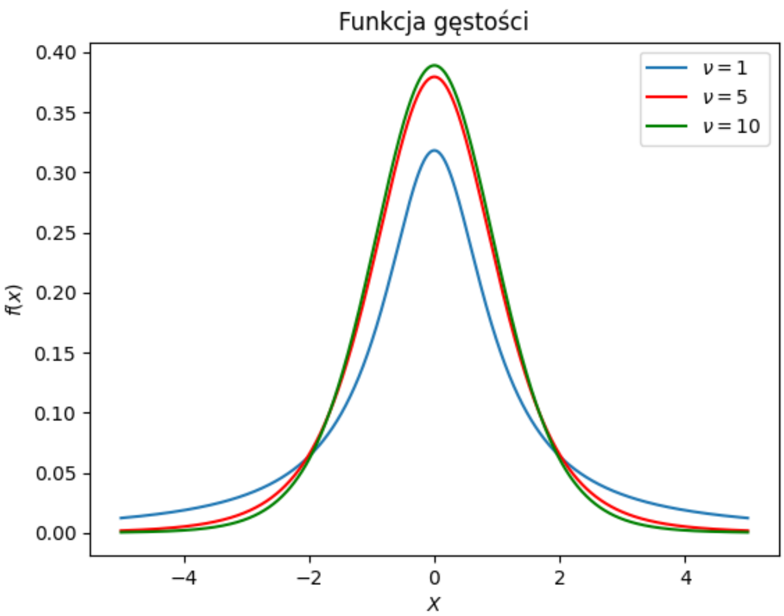
to

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}} = Z\sqrt{\frac{\nu}{V}} \sim t_\nu$$

Wielkości opisujące rozkład t-Studenta

$$\mu = \begin{cases} 0 & ,\nu > 1 \\ \text{nie istnieje} & ,\nu \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \begin{cases} \frac{\nu}{\nu-2} & ,\nu > 2 \\ \infty & ,1 < \nu \leqslant 2 \\ \text{nie istnieje} & ,\nu \leqslant 1 \end{cases}$$



Rysunek 15: Funkcja gęstości w rozkładzie t-Studenta.

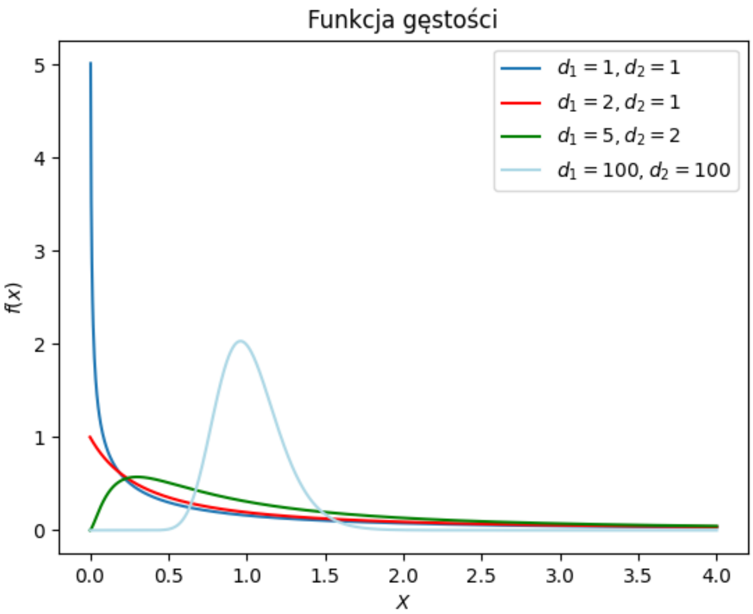
Definicja 3.2.7. Rozkład F.

Jeśli $U \sim \chi^2(n_1)$ i $V \sim \chi^2(n_2)$, przy czym zmienne są niezależne, to

$$\frac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}} \sim F(n_1, n_2)$$

gdzie $F(n_1, n_2)$ jest rozkładem F o n_1 i n_2 stopniach swobody. Jest to rozkład ciągły o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & , x \geqslant 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$



Rysunek 16: Funkcja gęstości w rozkładzie F.

4 Zmienne losowe wielowymiarowe

4.1 Podstawowe zależności wielowymiarowych zmiennych losowych

Zmienna losowa (X, Y) dwuwymiarowa o gęstości łącznej $f_{X,Y}(x, y)$ ma rozkłady brzegowe

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

rozkłady warunkowe

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(a \leqslant X \leqslant b|Y = y_0) = \int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx$$

$$P(a \leqslant Y \leqslant b|X = x_0) = \int_a^b f_{Y|X}(y|x)dy$$

wartość oczekiwana

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy$$

warunkowa wartość oczekiwana

$$\mathbb{E}[X|Y] =$$

kowariancja

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

współczynnik korelacji

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

4.2 Funkcje zmiennych losowych wielowymiarowych

Niech zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależne. Jeśli $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

jeśli $X_i \sim Gamma(s_i, r)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} s_i, r\right)$$

jeśli $X_i \sim Pois(\lambda_i)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

jeśli $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

5 Wnioskowanie statystyczne

5.1 Podstawy wnioskowania statystycznego

Definicja 5.1.1. Model statystyczny.

Modelem statystycznym nazywamy parę

$$(\mathcal{X}, \mathcal{P})$$

gdzie $\mathcal{P}$ jest rodziną rozkładów prawdopodobieństwa na zbiorze $\mathcal{X}$. Zazwyczaj przyjmuje się, że

$$\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$$

dla pewnego zbioru Θ dopuszczalnych wartości parametrów modelu θ.

Definicja 5.1.2. Prosta próba losowa.

Prostą próbą losową o liczności n z rozkładu P_θ nazywamy ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ takich, że

$$X_i \sim P_\theta$$

dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Jeśli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest prostą próbą losową, to ciąg wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takich, że

$$X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \ldots, X_n(\omega) = x_n$$

dla pewnego ω nazywamy **realizacją prostej próby losowej** $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

5.2 Statystyki

Definicja 5.2.1. Statystyka.

Statystyką nazywa się zmienną losową będącą funkcją prostej próby losowej

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Funkcja T używana do konstrukcji statystyki musi przyjmować listę argumentów dowolnej długości.

Definicja 5.2.2. Średnia w prostej próbie losowej.

Jest to statystyka dana wzorem

$$\bar{X} = \bar{X}_n - \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Jeśli

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

to korzystając z własności rozkładu normalnego otrzymujemy

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Definicja 5.2.3. Wariancja w prostej próbie losowej.

Jest to statystyka dana wzorem

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

Twierdzenie 5.2.1. Centralne Twierdzenie Graniczne.

Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze skończoną średnią μ i skończoną, dodatnią wariancją σ^2. Wtedy dla dużych n rozkład $\bar{X}$ jest w przybliżeniu równy rozkładowi normalnemu

$$\bar{X} \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Natomiast dla sumy takich zmiennych losowych mamy

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

5.3 Estymatory

Definicja 5.3.1. Estymator punktowy.

Niech θ będzie parametrem lub innym wskaźnikiem liczbowym pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Estymatorem θ nazywa się statystykę

$$\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

służącą do wyznaczenia przybliżonej wartości θ. Jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest realizacją prostej próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$, to liczbę

$$\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nazywa się **wartością estymatora** albo **estymatą**.

Definicja 5.3.2. Funkcja wiarygodności.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jej realizacją. Funkcją wiarygodności dla modelu statystycznego $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, jeśli P_θ jest rozkładem ciągłym o gęstości f_θ, nazywamy funkcję

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdot f_\theta(x_2) \cdot \ldots \cdot f_\theta(x_n)$$

natomiast jeśli P_θ jest rozkładem dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa p_θ, to

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_\theta(x_1) \cdot p_\theta(x_2) \cdot \ldots \cdot p_\theta(x_n).$$

Ze względów obliczeniowych często rozważa się logarytmiczną funkcję wiarygodności

$$l(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dla rozkładów ciągłych mamy

$$l(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln f_\theta(x_1) + \ln f_\theta(x_2) + \ldots + \ln f_\theta(x_n)$$

a dla rozkładów dyskretnych

$$l(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln p_\theta(x_1) + \ln p_\theta(x_2) + \ldots + \ln p_\theta(x_n)$$

Definicja 5.3.3. Estymator największej wiarygodności (MLE).

Estymatorem największej wiarygodności nazywamy funkcję $\hat{\theta}$, która przy ustalonych danych $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maksymalizuje wartość funkcji wiarygodności, albo wartość logarytmicznej funkcji wiarygodności. Jeśli funkcja wiarygodności jest różniczkowalna względem

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to MLE można czasem wyznaczyć analitycznie obliczając pochodne względem parametrów rozkładu i rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\theta_1}\mathcal{L}(\theta|x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial\theta_2}\mathcal{L}(\theta|x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\theta_k}\mathcal{L}(\theta|x) = 0 \end{cases}$$

albo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\theta_1}l(\theta|x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial\theta_2}l(\theta|x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\theta_k}l(\theta|x) = 0 \end{cases}$$

Definicja 5.3.4. Estymator metody momentów.

TODO

5.4 Przedziały ufności

Definicja 5.4.1. Przedział ufności.

Załóżmy, że rozkłady P_θ są ciągłe. Niech $\underline{U}$ i $\bar{U}$ będą statystykami takimi, że

$$P(\underline{U} \leqslant \bar{U}) = 1$$

ustalmy $\alpha \in (0,1)$. Przedziałem ufności dla parametru θ na **poziomie ufności** $1 - \alpha$ nazywamy przedział losowy $[\underline{U}, \bar{U}]$ o ile spełniona jest równość

$$P(\underline{U} \leqslant \theta \leqslant \bar{U}) = 1 - \alpha$$

Jeśli rozkłady P_θ są dyskretne, to

$$P(\underline{U} \leqslant \theta \leqslant \bar{U}) \geqslant 1 - \alpha$$

Definicja 5.4.2. Przedział ufności dla μ przy znanym σ.

Niech $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}\}$ dla pewnego znanego $\sigma > 0$. Szukamy przedziału ufności dla μ. Przedziałem ufności na poziomie $1 - \alpha$ dla μ jest

$$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

gdzie z_p jest kwantylem rzędu p rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.

Definicja 5.4.3. Przedział ufności dla μ przy nieznanym σ.

Tym razem $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$. Przedziałem ufności na poziomie $1 - \alpha$ dla μ jest

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

gdzie $t_{p,\nu}$ jest kwantylem rzędu p rozkładu t_ν.

Definicja 5.4.4. Porównanie wartości oczekiwanych - znane wariancje.

Rozważamy sytuację, w której dysponujemy dwoma próbami losowymi z rozkładu normalnego

$$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1} \quad \text{i} \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$$

o nieznanych wartościach oczekiwanych μ_1 i μ_2 oraz znanych wariancjach σ_1^2 i σ_2^2

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$$

$$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$$

Typowe badanie dotyczy porównania wartości oczekiwanych w obu próbach, co jest rozumiane jako analiza wartości różnicy

$$\mu_1 - \mu_2$$

Przedziałem ufności dla $\mu_1 - \mu_2$ na poziomie $1-\alpha$ jest

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

Definicja 5.4.5. Porównanie wartości oczekiwanych - nieznane, ale równe wariancje.

Zakładamy, że

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

ale σ jest nieznane. Wtedy przedział ufności dla $\mu_1 - \mu_2$ na poziomie $1-\alpha$ jest równy

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$$

gdzie

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}$$

Definicja 5.4.6. Porównanie wartości oczekiwanych - obserwacje sparowane.

Zakładamy, że

$$n_1 = n_2 = n$$

oraz

$$(X_i, Y_i) \sim \mathcal{N}((\mu_1, \mu_2), \Sigma)$$

przy czym zmienne dwuwymiarowe $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ są wzajemnie niezależne. W takiej sytuacji zmienne jednowymiarowe

$$D_i = X_i - Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_D)$$

są niezależne. Wtedy przedział ufności dla $\mu_1 - \mu_2$ na poziomie $1-\alpha$ jest równy

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\frac{S_D}{\sqrt{n}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right]$$

gdzie

$$S_D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - Y_i - \bar{X} + \bar{Y}\right)^2$$

Definicja 5.4.7. Przedział ufności dla wariancji.

Przedział ufności dla σ^2 na poziomie $1-\alpha$

$$\left[S^2\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}, S^2\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right]$$

i dla odchylenia standardowego

$$\left[S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}, S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}}\right]$$

gdzie $\chi^2_{p,\nu}$ jest kwantylem rzędu p rozkładu $\chi^2(\nu)$.

Definicja 5.4.8. Porównanie wariancji rozkładów normalnych.

Wariancje porównuje się analizując wartość ilorazu. Zakładamy, że dane są dwie niezależne próby losowe o licznościach n_1 i n_2 z rozkładów $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Przedział ufności dla ilorazu $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ na poziomie ufności $1-\alpha$ ma postać

$$\left[\frac{S_2^2}{S_1^2} f_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}, \frac{S_2^2}{S_1^2} f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}\right]$$

gdzie f_{p,ν_1,ν_2} jest kwantylem rzędu p rozkładu $F(\nu_1, \nu_2)$.

5.5 Testowanie hipotez

Definicja 5.5.1. Hipoteza statystyczna.

Rozważamy model statystyczny $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Hipotezą statystyczną nazywamy dowolny niepusty podzbiór $\mathcal{P}$. W praktyce wyróżniamy jedną hipotezę zwaną **hipotezą zerową** (H_0), która podlega weryfikacji, natomiast $H_1 = \mathcal{P} \setminus H_0$ nazywamy **hipotezą alternatywną**.

Definicja 5.5.2. Zbiór krytyczny testu.

Statystykę U nazywamy testem hipotezy zerowej H_0 przeciwko hipotezie alternatywnej H_1, a zbiór C zbiorem krytycznym testu. Weryfikacja H_0 polega na:

1. skonstruowaniu statystyki U o znanym rozkładzie dokładnym lub asymptotycznym
2. ustaleniu zbioru C tych wartości U, których wystąpienie uznaje się za wspierające odrzucenie hipotezy zerowej na korzyść hipotezy alternatywnej
3. sprawdzeniu, czy wartość statystyki U dla aktualnych danych należy do C.

Definicja 5.5.3. p-wartość.

p-wartość to, dla zaobserwowanej wartości statystyki testowej, najmniejszy poziom istotności, przy którym ta wartość prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej. Inaczej, dla poziomu istotności α oraz p-wartości p, jeżeli

$$p < \alpha \Rightarrow \text{odrzucamy } H_0$$
$$p \geqslant \alpha \Rightarrow \text{brak podstaw do odrzucenia } H_0$$

Twierdzenie 5.5.1. Test dla wartości oczekiwanej przy znanej wariancji.

Mamy $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}\}$ dla ustalonego $\sigma > 0$. Ustalamy hipotezy obustronne

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Jako statystykę testową bierzemy

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

oraz przyjmujemy zbiór krytyczny na poziomie istotności α

$$C = \left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$$

p-wartość dla dwustronnej hipotezy alternatywnej wynosi

$$p(z) = 2(1 - \Phi(|z|))$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego. Dla jednostronnej H_1 lewostronnej mamy

$$C = (-\infty, -z_{1-\alpha}]$$
$$p(z) = \Phi(z)$$

a dla prawostronnej

$$C = [z_{1-\alpha}, \infty)$$
$$p(z) = 1 - \Phi(z)$$

Twierdzenie 5.5.2. Test dla wartości oczekiwanej przy nieznanej wariancji.

Jako statystykę testową bierzemy

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

oraz przyjmujemy zbiór krytyczny na poziomie istotności α dla dwustronnej hipotezy alternatywnej

$$C = \left(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \cup \left[t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, \infty\right)$$

p-wartość wynosi

$$p(t) = 2(1 - F_{n-1}(|t|))$$

gdzie F_{n-1} jest dystrybuantą rozkładu t_{n-1}. Dla jednostronnej H_1 lewostronnej mamy

$$C = (-\infty, -t_{1-\alpha, n-1}]$$
$$p(t) = F_{n-1}(t)$$

a dla prawostronnej

$$C = [t_{1-\alpha, n-1}, \infty)$$
$$p(t) = 1 - F_{n-1}(t)$$

Twierdzenie 5.5.3. Test dla wartości oczekiwanej z dwóch prób.

Dla nieznanych, ale równych wariancji używamy statystyki

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

oraz przyjmujemy zbiór krytyczny na poziomie istotności α dla dwustronnej hipotezy alternatywnej

$$C = \left(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}\right] \cup \left[t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}, \infty\right)$$

p-wartość wynosi

$$p(t) = 2(1 - F_{n_1+n_2-2}(|t|))$$

Twierdzenie 5.5.4. Test dla dwóch sparowanych prób.

Zakładamy równe liczności X_i i Y_i oraz wspólny rozkład normalny różnic $D_i = X_i - Y_i$. Wtedy statystyką testową jest

$$T = \frac{X_i - Y_i - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

dalej jak dla pojedynczej próby.

Twierdzenie 5.5.5. Test równości wariancji.

Tutaj $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1} \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2} \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. Przyjmujemy

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

wtedy mamy statystykę testową

$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

i dla dwustronnej hipotezy alternatywnej otrzymujemy na poziomie istotności α zbiór krytyczny

$$C = \left(0, f_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}\right] \cup \left[f_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}, \infty\right)$$

p-wartość wynosi

$$p(f) = \begin{cases} 2F_{n_1-1,n_2-1}(f) & , f < f_{\frac{1}{2}, n_1-1, n_2-1} \\ 2(1 - F_{n_1-1,n_2-1}(f)) & , f \geqslant f_{\frac{1}{2}, n_1-1, n_2-1} \end{cases}$$

gdzie F_{n_1-1,n_2-1} jest dystrybuantą rozkładu $F(n_1-1, n_2-1)$. Podobnie dla jednostronnej hipotezy alternatywnej

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

zbiór krytyczny ma postać

$$C = [f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}, \infty)$$

a p-wartość wynosi

$$p(f) = 1 - F_{n_1-1,n_2-1}(f)$$

6 Literatura

[1] Smołka, M. (2026). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. *Wykłady prowadzone na Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie.*