Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

1.1 Przestrzeń probabilistyczna

Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Niepusty zbiór Ω wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

Definicja 1.1.2. σ-algebra zdarzeń.

Podrodzina Σ w rodzinie wszystkich podzbiorów Ω o następujących właściwościach:

1. $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli $A \in \Sigma$ to $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \dots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$, to $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu $A_1, A_2, \dots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli $A, B \in \Sigma$ to $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe

Ω – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$ – dopełnienie zdarzenia A

$A \cap B = \emptyset$ – zdarznia wzajemnie się wykluczają.

Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkład prawdopodobieństwa).

W przestrzeni Ω z σ-algebrą zdarzeń Σ dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \to [0, 1]$$

spełniające warunki:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń $A_1, A_2, \dots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ zachodzi
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1. $P(\emptyset)$=0
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \dots, A_n$ spełnia warunek
$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$
to
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$
3. Dla dowolnego zdarzenia A zachodzi
$$P(A') = 1 - P(A)$$
4. Dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzi
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
5. Jeśli $A \subset B$ to $P(A) \leqslant P(B)$
6. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ tworzą ciąg wstępujący, tzn.
$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$
to
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

7. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ tworzą ciąg zstępujący, tzn.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

to

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.

Trójka (Ω, Σ, P), gdzie:

Ω – niepusty zbiór,

Σ – σ-algebra w Ω,

P – miara probabilistyczna.

Liczbę $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A.

1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.

Liczba określona wzorem

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$ – zdarzenia,

$P(B) > 0$.

Jest to prawdopodobieństwo A pod warunkiem B.

Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \dots$ jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ tworzą układ zupełny oraz $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, to dla dowolnego zdarzenia B zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i)P(A_i)$$

Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.

Jeśli zdarzenia A_i tworzą układ zupełny taki, że $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, a B jest zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$, to dla dowolnego k zachodzi

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

1.3 Niezależność zdarzeń

Definicja 1.3.1. Niezależność zdarzeń.

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$