

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Podstawy rachunku prawdopodobieństwa</b>	<b>2</b>
1.1	Przestrzeń probabilistyczna . . . . .	2
1.2	Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .	4
1.3	Niezależność zdarzeń . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Zmienne losowe jednowymiarowe</b>	<b>5</b>
2.1	Zmienna losowa . . . . .	5
2.2	Zmienne losowe rzeczywiste . . . . .	5
2.3	Parametry zmiennej losowej . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Literatura</b>	<b>7</b>

# 1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

## 1.1 Przestrzeń probabilistyczna

**Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.**

Niepusty zbiór  $\Omega$  wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

**Definicja 1.1.2.  $\sigma$ -algebra zdarzeń.**

Podrodzina  $\Sigma$  w rodzinie wszystkich podzbiorów  $\Omega$  o następujących właściwościach:

1.  $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli  $A \in \Sigma$  to  $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1.  $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$ , to  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli  $A, B \in \Sigma$  to  $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$  – zdarzenie niemożliwe

$\Omega$  – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$  – dopełnienie zdarzenia  $A$

$A \cap B = \emptyset$  – zdarzenia wzajemnie się wykluczają.

**Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkład prawdopodobieństwa).**

W przestrzeni  $\Omega$  z  $\sigma$ -algebrą zdarzeń  $\Sigma$  dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$$

spełniające warunki:

1.  $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$  oraz  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$  zachodzi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1.  $P(\emptyset) = 0$
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_n$  spełnia warunek

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$

to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

3. Dla dowolnego zdarzenia  $A$  zachodzi

$$P(A') = 1 - P(A)$$

4. Dla dowolnych zdarzeń  $A$  i  $B$  zachodzi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Jeśli  $A \subset B$  to  $P(A) \leq P(B)$

6. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg wstępujący, tzn.

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

7. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg zstępujący, tzn.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

to

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

#### **Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.**

Trójka  $(\Omega, \Sigma, P)$ , gdzie:

$\Omega$  – niepusty zbiór,

$\Sigma$  –  $\sigma$ -algebra w  $\Omega$ ,

$P$  – miara probabilistyczna.

Liczbę  $P(A)$  nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$ .

## 1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

**Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.**

Liczba określona wzorem

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$  – zdarzenia,

$$P(B) > 0.$$

Jest to prawdopodobieństwo  $A$  pod warunkiem  $B$ .

**Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.**

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

**Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.**

Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą układ zupełny oraz  $P(A_i) > 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , to dla dowolnego zdarzenia  $B$  zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B | A_i)P(A_i)$$

**Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.**

Jeśli zdarzenia  $A_i$  tworzą układ zupełny taki, że  $P(A_i) > 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , a  $B$  jest zdarzeniem takim, że  $P(B) > 0$ , to dla dowolnego  $k$  zachodzi

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B | A_i)P(A_i)}$$

## 1.3 Niezależność zdarzeń

**Definicja 1.3.1. Niezależność zdarzeń.**

Zdarzenia  $A$  i  $B$  nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_k$  nazywamy niezależnymi jeśli dla każdego układu indeksów  $i_1, i_2, \dots, i_k$  oraz dla każdego  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

**Definicja 1.3.2. Niezależność warunkowa.**

Zdarzenia  $A$  i  $B$  są warunkowo niezależne względem  $C$  dla  $P(C) > 0$  jeśli

$$P(A, B | C) = P(A | C) \cdot P(B | C)$$

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_k$  są warunkowo niezależne względem  $C$  dla  $P(C) > 0$  jeśli dla każdego układu indeksów  $i_1, i_2, \dots, i_k$  oraz dla każdego  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k} | C) = P(A_{i_1} | C) \cdot P(A_{i_2} | C) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k} | C)$$

## 2 Zmienne losowe jednowymiarowe

### 2.1 Zmienna losowa

**Definicja 2.1.1. Zmienna losowa.**

Zmienna losowa to odwzorowanie

$$X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$$

takie, że dla każdego  $A \in \Sigma_{\mathcal{X}}$  zachodzi

$$X^{-1}(A) \in \Sigma$$

gdzie  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną,  $\mathcal{X}$  dowolnym niepustym zbiorem, a  $\Sigma_{\mathcal{X}}$   $\sigma$ -algebrą podzbiorów  $\mathcal{X}$ .

**Definicja 2.1.2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.**

Funkcję

$$P_X : \Sigma_{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$$

określającą następująco

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

gdzie  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną,  $\mathcal{X}$  niepustym zbiorem,  $\Sigma_{\mathcal{X}}$   $\sigma$ -algebrą w  $\mathcal{X}$ , a  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  zmienną losową.

### 2.2 Zmienne losowe rzeczywiste

**Definicja 2.2.1. Dystrybuanta zmiennej losowej.**

Niech  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  będzie zmienną losową rzeczywistą. Dystrybuantą zmiennej losowej rzeczywistej  $X$  nazywamy funkcję

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

określającą wzorem

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x])$$

Własności dystrybuanty:

1. Jeśli  $a < b$ , to  $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$
2.  $F_X$  jest niemalejąca
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4.  $F_X$  jest prawostronnie ciągła, tzn. dla dowolnego  $x_0 \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$

5.  $F_X(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$
6.  $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$
7.  $F_X$  jest ciągła w  $x_0 \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(X = x_0) = 0$$

### Definicja 2.2.2. Funkcja prawdopodobieństwa.

Rozkład dyskretny zmiennej  $X$  jest wyznaczony przez funkcję

$$p : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$$

określoną następująco:

$$p(x_k) = P_X(x_k) = P(X = x_k)$$

Funkcję  $p$  nazywamy funkcją prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej  $X$ .

### Definicja 2.2.3. Funkcja gęstości.

Gęstość zmiennej losowej  $X$  to funkcja

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

taka, że dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  takich, że  $a < b$  zachodzi

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

## 2.3 Parametry zmiennej losowej

### Definicja 2.3.1. Wartość oczekiwana.

Wartością oczekiwana zmiennej losowej rzeczywistej  $X$  o rozkładzie dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa  $p$  nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\mu = \mu_X = E(X) = EX = \sum_{k: x_k \in \mathcal{S}} x_k \cdot p(x_k)$$

Jeśli  $X$  jest zmienną o rozkładzie ciągłym z gęstością  $f$ , to

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

### **3 Literatura**

- [1] Smołka, M. (2025). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. *Wykłady prowadzone na Akademii Górnictwo-Hutniczej w Krakowie.*