

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

## 1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

**Definicja 1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych** to niepusty zbiór  $\Omega$  wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

Jego elementy to zdarzenia elementarne.

**Definicja 1.2.  $\sigma$ -algebra zdarzeń** to podrodzina  $\Sigma$  w rodzinie wszystkich podzbiorów  $\Omega$  o następujących właściwościach:

1.  $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli  $A \in \Sigma$  to  $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1.  $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$ , to  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli  $A, B \in \Sigma$  to  $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$  – zdarzenie niemożliwe

$\Omega$  – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$  – dopełnienie zdarzenia  $A$

$A \cap B = \emptyset$  – zdarzenia wzajemnie się wykluczają.

**Definicja 1.3. Miara probabilistyczna** (rozkład prawdopodobieństwa) to w przestrzeni  $\Omega$  z  $\sigma$ -algebrą zdarzeń  $\Sigma$  dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$$

spełniające warunki:

1.  $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  takiego, że  $A_i \in \Sigma$  dla  $i \in \mathbb{N}$  oraz  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$  zachodzi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1.  $P(\emptyset) = 0$
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_n$  spełnia warunek

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$

to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

3. Dla dowolnego zdarzenia  $A$  zachodzi

$$P(A') = 1 - P(A)$$

4. Dla dowolnych zdarzeń  $A$  i  $B$  zachodzi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Jeśli  $A \subset B$  to  $P(A) \leq P(B)$

6. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg wstępujący, tzn.

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

7. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$  tworzą ciąg zstępujący, tzn.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

to

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

**Definicja 1.4. Przestrzeń probabilistyczna** to trójka  $(\Omega, \Sigma, P)$ , gdzie:

$\Omega$  – niepusty zbiór,

$\Sigma$  –  $\sigma$ -algebra w  $\Omega$ ,

$P$  – miara probabilistyczna.

Liczbę  $P(A)$  nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$ .

## 2 Prawdopodobieństwo warunkowe

**Definicja 2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe** to liczba określona wzorem

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$  – zdarzenia,

$P(B) > 0$  .

Jest to prawdopodobieństwo  $A$  pod warunkiem  $B$ .

## 3 Literatura