

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

Spis treści

1	Podstawy rachunku prawdopodobieństwa	2
1.1	Przestrzeń probabilistyczna	2
1.2	Prawdopodobieństwo warunkowe	4
1.3	Niezależność zdarzeń	4
2	Zmienne losowe jednowymiarowe	5
2.1	Zmienna losowa	5
2.2	Zmienne losowe rzeczywiste	5
2.3	Parametry zmiennej losowej	7
2.4	Funkcje zmiennych losowych	10
3	Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa	11
3.1	Rozkłady dyskretne	11
3.2	Rozkłady ciągłe	18
4	Zmienne losowe wielowymiarowe	25
5	Wnioskowanie statystyczne	25
5.1	Podstawy wnioskowania statystycznego	25
5.2	Statystyki	26
5.3	Estymatory	27
5.4	Przedziały ufności	28
5.5	Testowanie hipotez	30
6	Literatura	32

1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

1.1 Przestrzeń probabilistyczna

Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Niepusty zbiór Ω wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

Definicja 1.1.2. σ -algebra zdarzeń.

Podrodzina Σ w rodzinie wszystkich podzbiorów Ω o następujących właściwościach:

1. $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli $A \in \Sigma$ to $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów A_1, A_2, \dots takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$, to $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu A_1, A_2, \dots takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli $A, B \in \Sigma$ to $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

\emptyset – zdarzenie niemożliwe

Ω – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$ – dopełnienie zdarzenia A

$A \cap B = \emptyset$ – zdarzenia wzajemnie się wykluczają.

Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkład prawdopodobieństwa).

W przestrzeni Ω z σ -algebrą zdarzeń Σ dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$$

spełniające warunki:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń A_1, A_2, \dots takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ zachodzi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń A_1, A_2, \dots, A_n spełnia warunek

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$

to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

3. Dla dowolnego zdarzenia A zachodzi

$$P(A') = 1 - P(A)$$

4. Dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Jeśli $A \subset B$ to $P(A) \leq P(B)$
6. Jeśli zdarzenia A_1, A_2, \dots tworzą ciąg wstępujący, tzn.

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

7. Jeśli zdarzenia A_1, A_2, \dots tworzą ciąg zstępujący, tzn.

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

to

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$$

Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.

Trójka (Ω, Σ, P) , gdzie:

Ω – niepusty zbiór,

Σ – σ -algebra w Ω ,

P – miara probabilistyczna.

Liczbę $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A .

1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.

Liczba określona wzorem

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$ – zdarzenia,

$P(B) > 0$.

Jest to prawdopodobieństwo A pod warunkiem B .

Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń A_1, A_2, \dots jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Jeśli zdarzenia A_1, A_2, \dots tworzą układ zupełny oraz $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, to dla dowolnego zdarzenia B zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B | A_i)P(A_i)$$

Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.

Jeśli zdarzenia A_i tworzą układ zupełny taki, że $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, a B jest zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$, to dla dowolnego k zachodzi

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B | A_i)P(A_i)}$$

1.3 Niezależność zdarzeń

Definicja 1.3.1. Niezależność zdarzeń.

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_k nazywamy niezależnymi jeśli dla każdego układu indeksów i_1, i_2, \dots, i_k oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Definicja 1.3.2. Niezależność warunkowa.

Zdarzenia A i B są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli

$$P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$$

Zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_k są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli dla każdego układu indeksów i_1, i_2, \dots, i_k oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k} \mid C) = P(A_{i_1} \mid C) \cdot P(A_{i_2} \mid C) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k} \mid C)$$

2 Zmienne losowe jednowymiarowe**2.1 Zmienna losowa****Definicja 2.1.1. Zmienna losowa.**

Zmienna losowa to odwzorowanie

$$X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$$

takie, że dla każdego $A \in \Sigma_{\mathcal{X}}$ zachodzi

$$X^{-1}(A) \in \Sigma$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, \mathcal{X} dowolnym niepustym zbiorem, a $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ -algebrą podzbiorów \mathcal{X} .

Definicja 2.1.2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

Funkcję

$$P_X : \Sigma_{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$$

określoną następująco

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, \mathcal{X} niepustym zbiorem, $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ -algebrą w \mathcal{X} , a $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ zmienną losową.

2.2 Zmienne losowe rzeczywiste**Definicja 2.2.1. Dystrybucja zmiennej losowej.**

Niech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zmienną losową rzeczywistą. Dystrybucją zmiennej losowej rzeczywistej X nazywamy funkcję

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

określoną wzorem

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x])$$

Własności dystrybuanty:

1. Jeśli $a < b$, to $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$
2. F_X jest niemalejąca
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4. F_X jest prawostronnie ciągła, tzn. dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$

5. $F_X(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$
6. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$
7. F_X jest ciągła w $x_0 \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(X = x_0) = 0$$

Definicja 2.2.2. Funkcja prawdopodobieństwa.

Rozkład dyskretny zmiennej X jest wyznaczony przez funkcję

$$p : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$$

określoną następująco:

$$p(x_k) = P_X(x_k) = P(X = x_k)$$

Funkcję p nazywamy funkcją prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej X .

Definicja 2.2.3. Funkcja gęstości.

Gęstość zmiennej losowej X to funkcja

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

taka, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ takich, że $a < b$ zachodzi

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

2.3 Parametry zmiennej losowej

Definicja 2.3.1. Wartość oczekiwana.

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej rzeczywistej X o rozkładzie dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa p nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} x_k \cdot p(x_k)$$

Jeśli X jest zmienną o rozkładzie ciągłym z gęstością f , to

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Własności wartości oczekiwanej:

1. $\mathbb{E}c = c$
2. $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y + c$
3. Dla rozkładów ciągłych

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

dla rozkładów dyskretnych

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} g(x_k) f(x_k) dx$$

Definicja 2.3.2. Moment zwykły.

Momentem zwykłym rzędu k zmiennej losowej X dla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nazywamy liczbę

$$\mu'_k = \mathbb{E}(X^k)$$

Definicja 2.3.3. Moment centralny.

Momentem centralnym rzędu k zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mu_k = \mathbb{E}((X - \mu)^k)$$

Dla rozkładów dyskretnych

$$\begin{aligned}\mu'_k &= \sum_{i: x_i \in \mathcal{S}} x_i^k \cdot p(x_i) \\ \mu_k &= \sum_{i: x_i \in \mathcal{S}} (x_i - \mu)^k \cdot p(x_i)\end{aligned}$$

Dla rozkładów ciągłych

$$\begin{aligned}\mu'_k &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \\ \mu_k &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx\end{aligned}$$

Definicja 2.3.4. Wariancja.

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy jej drugi moment centralny, tzn.

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2)$$

Własności wariancji:

1. $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
2. Jeśli zmienna X ma skończoną wariancję, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

3. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
4. $Var(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest stała z prawdopodobieństwem 1, tzn. istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że

$$P(X \neq x_0) = 0$$

Definicja 2.3.5. Odchylenie standardowe.

Odchyleniem standardowym zmiennej losowej X nazywamy pierwiastek jej wariancji, tzn.

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Definicja 2.3.6. Funkcja tworząca momenty (MGF).

Funkcją tworzącą momenty rzeczywistej zmiennej losowej X nazywa się funkcję określoną wzorem

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Jeśli X ma rozkład dyskretny z funkcją prawdopodobieństwa p , to funkcja tworząca momenty wyraża się wzorem

$$M_X(t) = \sum_{x_k \in \mathcal{S}} e^{tx_k} p(x_k)$$

Jeśli X ma rozkład ciągły o gęstości f , to funkcja tworząca momenty ma postać

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Własności MGF:

1. $M_{aX}(t) = M_X(at)$
2. $M_{X+b}(t) = e^{bt} M_X(t)$
3. $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

$$4. M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$$

Definicja 2.3.7. Współczynnik asymetrii (skośność).

Współczynnikiem skośności rozkładu zmiennej X nazywamy liczbę

$$A = \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Rozkład, dla którego:

- $A = 0$ nazywa się **symetrycznym**
- $A > 0$ nazywa się **prawostronnie skośnym**
- $A < 0$ nazywa się **lewostronnie skośnym**

Definicja 2.3.8. Kurtoza.

Kurtozę nazywamy liczbę

$$Kurt(X) = K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

natomiast **kurtozą nadwyżkową** nazywamy liczbę

$$\gamma_3 = Kurt(X) - 3$$

Definicja 2.3.9. Standaryzacja.

Zmienną o wartości średniej 0 i wariancji 1 nazywa się zmienną standaryzowaną. Jeśli X jest dowolną zmienną o niezerowej wariancji, to

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

jest zmienną standaryzowaną.

Twierdzenie 2.3.1. Nierówność Czebyszewa.

Jeśli zmienna losowa X ma skończoną wartość średnią μ i skończoną wariancję σ^2 , to dla dowolnego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Jeśli w miejsce ϵ podstawimy $\epsilon\sigma$, to otrzymamy

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon\sigma) \leq \frac{1}{\epsilon^2}$$

Definicja 2.3.10. Kwantyl.

Kwantylem rzędu $p \in (0, 1)$ zmiennej losowej X o dystrybucji F nazywamy dowolną liczbę $q_p \in \mathbb{R}$ taką, że

$$F(q_p-) \leq p \leq F(q_p)$$

Kwantyl $q_{0.5}$ rzędu $\frac{1}{2}$ nazywamy **medianą**, kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$ nazywamy **dolnym kwantylem**, a kwantyl rzędu $\frac{3}{4}$ nazywamy **górnym kwantylem**.

Jeśli X ma rozkład ciągły, to kwantylem q_p rzędu p jest dowolne q_p spełniające równanie

$$F(q_p) = p$$

Definicja 2.3.11. Moda.

Modą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym nazywa się dowolne maksimum funkcji prawdopodobieństwa tego rozkładu. Jeżeli zmienna ma rozkład ciągły to modą jest dowolne maksimum lokalne gęstości tego rozkładu.

2.4 Funkcje zmiennych losowych

Twierdzenie 2.4.1. Metoda transformacji.

Jeśli $Y = g(X)$ oraz g jest funkcją ściśle monotoniczną, to istnieje funkcja odwrotna

$$h = g^{-1}$$

jeśli funkcja h jest różniczkowalna, to gęstość rozkładu Y spełnia następującą równość

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

Ważne szczególne przypadki dla rozkładów jednowymiarowych. Załóżmy, że $c \neq 0$ i $d \in \mathbb{R}$:

1. Jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ i $Y = cX + d$, to

$$Y \sim \mathcal{N}(c\mu + d, |c|\sigma)$$

2. Jeśli $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ i $Y = cX + d$, to

$$Y \sim \begin{cases} \mathcal{U}(ca + d, cb + d) & , c > 0 \\ \mathcal{U}(cb + d, ca + d) & , c < 0 \end{cases}$$

3. Jeśli $X \sim \text{Gamma}(s, r)$ i $Y = cX$ dla $c > 0$, to

$$Y \sim \text{Gamma}\left(s, \frac{r}{c}\right)$$

3 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

3.1 Rozkłady dyskretne

Definicja 3.1.1. Rozkład jednopunktowy.

Jeśli $\mathcal{S} = \{x_0\}$ i $p(x_0) = 1$, to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład jednopunktowy**.
Wtedy przyjmuje parametry:

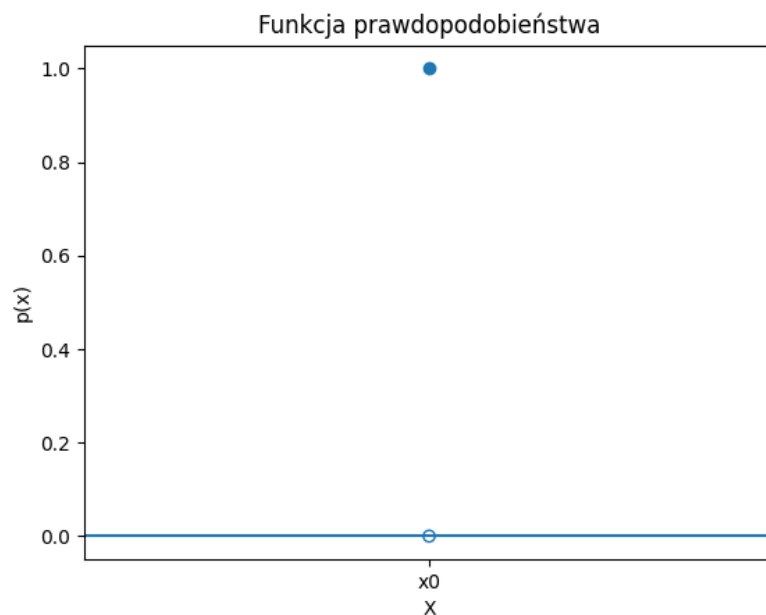
$$\mu = x_0$$

$$\sigma^2 = 0$$

$$A = 0$$

$$K = 0$$

$$\gamma_2 = -3$$



Rysunek 1: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie jednopunktowym.

Definicja 3.1.2. Rozkład dwupunktowy.

Jeśli

$$\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$$

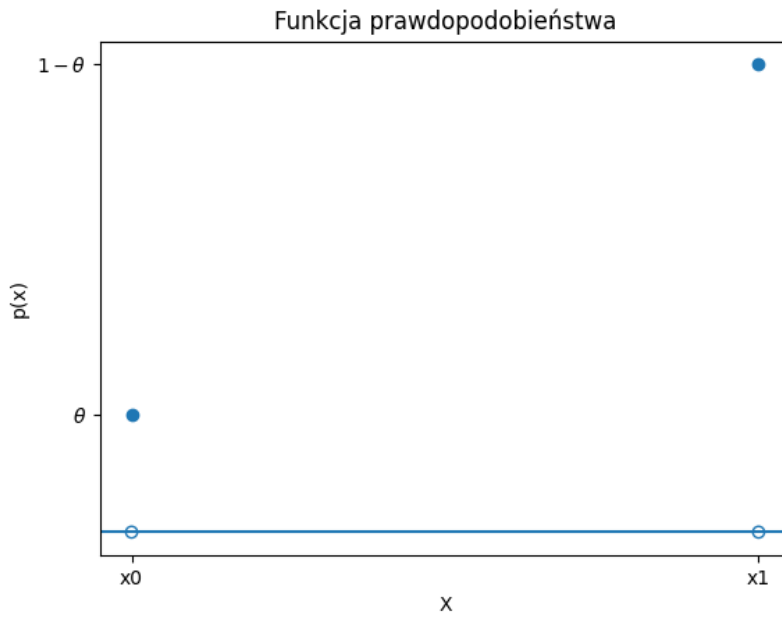
oraz

$$p(x_1) = \theta$$

$$p(x_2) = 1 - \theta$$

dla pewnego $\theta \in (0, 1)$, to mówimy, że zmienna losowa ma **rozkład dwupunktowy** z parametrem θ . Wtedy przyjmuje parametry:

$$\begin{aligned}\mu &= \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \\ \sigma^2 &= \theta(1 - \theta)(x_1 - x_2)^2 \\ A &= \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) \frac{1 - 2\theta}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}}\end{aligned}$$



Rysunek 2: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwupunktowym.

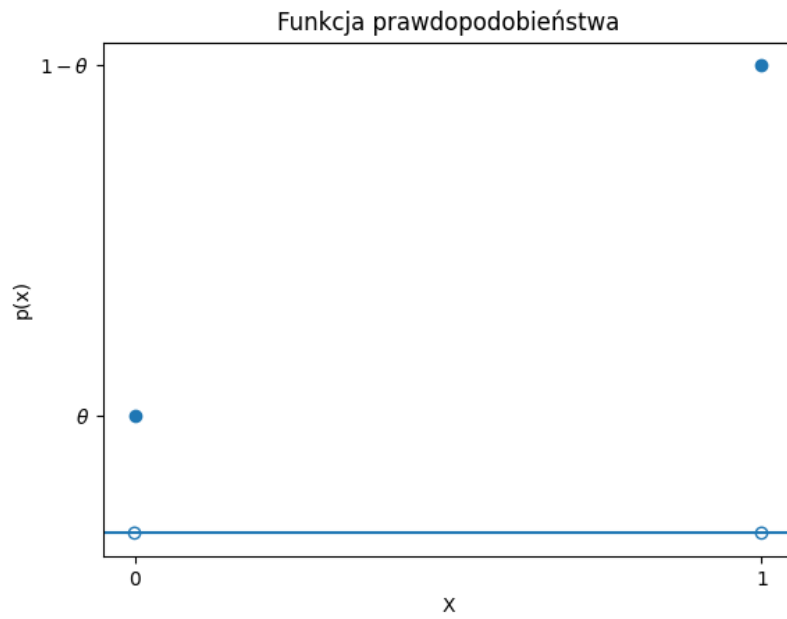
Definicja 3.1.3. Rozkład Bernoulli’ego.

Rozkład dwupunktowy, w którym $x_1 = 1$ i $x_2 = 0$ nazywa się **rozkładem Bernoulli’ego** z parametrem θ

$$X \sim \operatorname{Bern}(\theta)$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\mu &= \theta \\ \sigma^2 &= \theta(1 - \theta)\end{aligned}$$



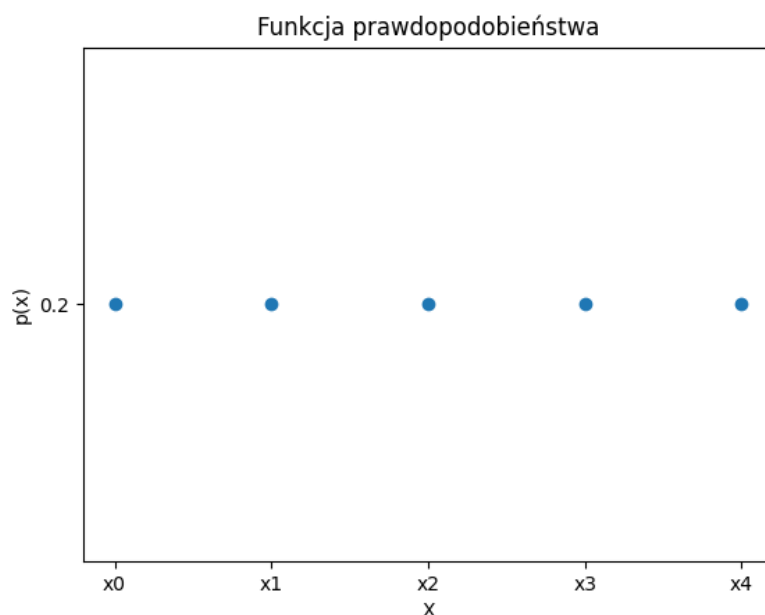
Rysunek 3: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Bernoulli'ego.

Definicja 3.1.4. Dyskretny rozkład jednostajny.

Jeśli $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $p(x_i) = \frac{1}{n}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to mówimy, że zmienna losowa ma **dyskretny rozkład jednostajny** na n punktach. Wówczas

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$



Rysunek 4: Funkcja prawdopodobieństwa w dyskretnym rozkładzie jednostajnym.

Definicja 3.1.5. Próba Bernoulli’ego.

Rozważmy doświadczenie losowe o dwu możliwych wynikach:

- **sukces** z prawdopodobieństwem $\theta \in (0, 1)$
- **porażka** z prawdopodobieństwem $1 - \theta$

Doświadczenie tego rodzaju nazywamy **próbą Bernoulli’ego**.

Definicja 3.1.6. Schemat dwumianowy.

Schemat doświadczenia określony jako n -krotne powtórzenie próby Bernoulli’ego w ten sposób, że poszczególne próby są niezależne. Długość schematu może być skończona lub nieskończona.

Definicja 3.1.7. Rozkład dwumianowy.

Niech X będzie zmienną losową, której wartością jest liczba sukcesów w schemacie dwumianowym o długości n z prawdopodobieństwem sukcesu θ . Wówczas X ma rozkład dyskretny, w którym

$$\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, n\}$$

oraz

$$p(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

Jeśli zmienna X ma rozkład dwumianowy o parametrach $n \in \mathbb{N}$ i $\theta \in (0, 1)$, to zapisujemy

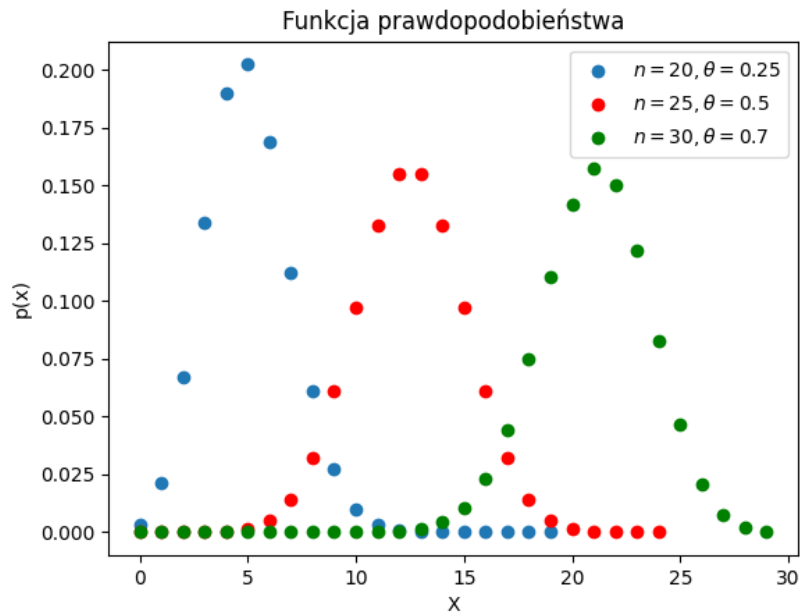
$$X \sim \text{Binom}(n, \theta)$$

oraz

$$\begin{aligned}\mu &= n\theta \\ \sigma^2 &= n\theta(1 - \theta)\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że

$$\text{Binom}(1, \theta) = \text{Bern}(\theta).$$



Rysunek 5: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym.

Definicja 3.1.8. Rozkład geometryczny.

Zmienna losowa T ma rozkład geometryczny z parametrem $\theta \in (0, 1)$

$$T \sim \text{Geom}(\theta),$$

jeśli

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

a funkcja prawdopodobieństwa ma postać

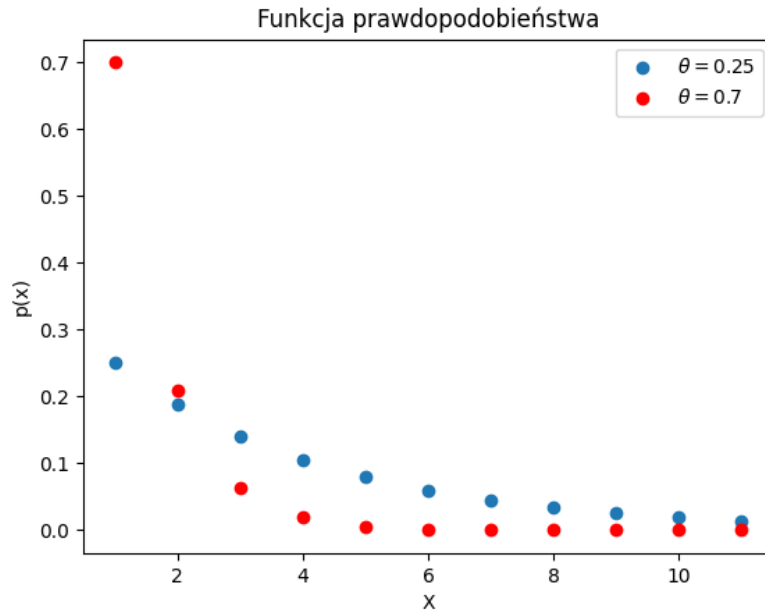
$$p(k) = (1 - \theta)^{k-1} \theta$$

$$k \in \mathcal{S}$$

Zmienna T opisuje czas oczekiwania na pierwszy sukces w schemacie dwumianowym (o nieskończonej długości). Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\theta}$$

$$\sigma^2 = \frac{1 - \theta}{\theta^2}$$



Rysunek 6: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie geometrycznym.

Definicja 3.1.9. Rozkład Poissona.

Jeśli zmienna N o wartościach w \mathbb{N} opisuje liczbę wystąpień pewnego powtarzalnego zdarzenia w przedziale czasowym $[0, t]$, przy czym spełnione są założenia:

- powtórzenia zdarzenia występują niezależnie od siebie,
- intensywność wystąpień $r > 0$, czyli średnia liczba wystąpień w jednostce czasu jest stała,
- w danej chwili może zajść co najwyżej jedno powtórzenie,

to zmienna ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = rt > 0$

$$N \sim Pois(\lambda).$$

Wówczas

$$\mathcal{S} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

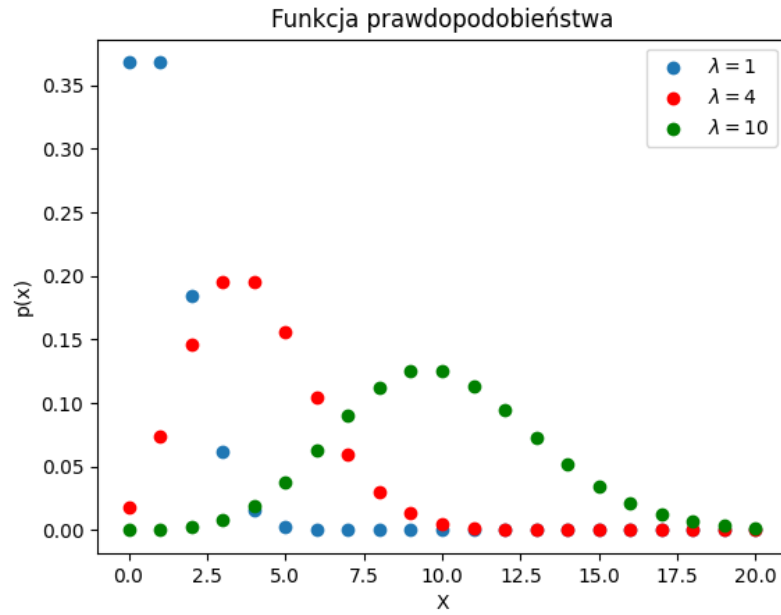
$$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$k \in \mathcal{S}$$

oraz

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$



Rysunek 7: Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Poissona.

Twierdzenie 3.1.1. Twierdzenie Poissona.

Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że

$$X_n \sim \text{Binom}(n, \theta_n),$$

gdzie θ_n jest takim ciągiem, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = \lambda$$

dla pewnej liczby $\lambda > 0$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

3.2 Rozkłady ciągłe

Definicja 3.2.1. Rozkład jednostajny.

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[a, b]$ jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

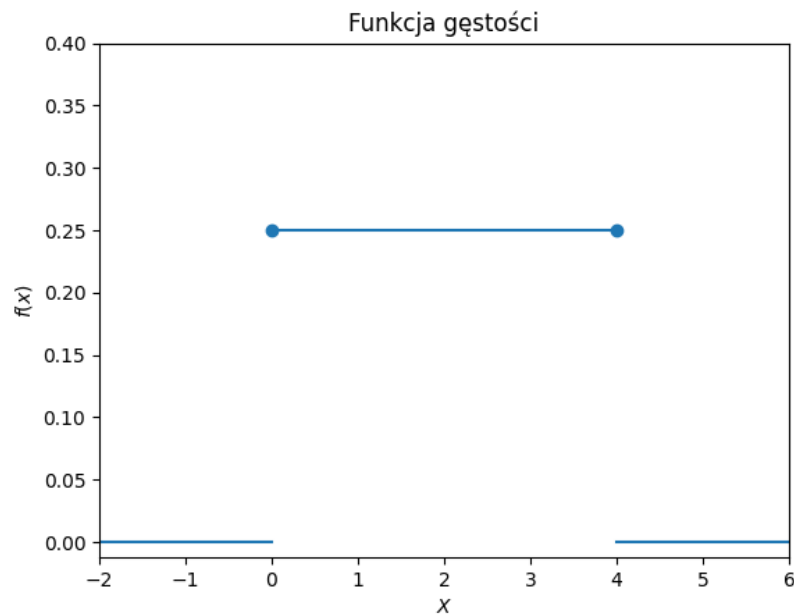
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , x \notin [a, b] \end{cases}$$

zapisujemy

$$X \sim \mathcal{U}(a, b).$$

Wówczas

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Rysunek 8: Funkcja gęstości w rozkładzie jednostajnym.

Definicja 3.2.2. Rozkład wykładniczy.

Niech T będzie zmienną modelującą czas oczekiwania na pierwsze zdarzenie w ciągu zdarzeń takim, że ich liczba w przedziale $[0, t]$ opisana jest przez zmienną X o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Mówimy wtedy, że T ma rozkład wykładniczy z parametrem λ

$$T \sim \text{Exp}(\lambda)$$

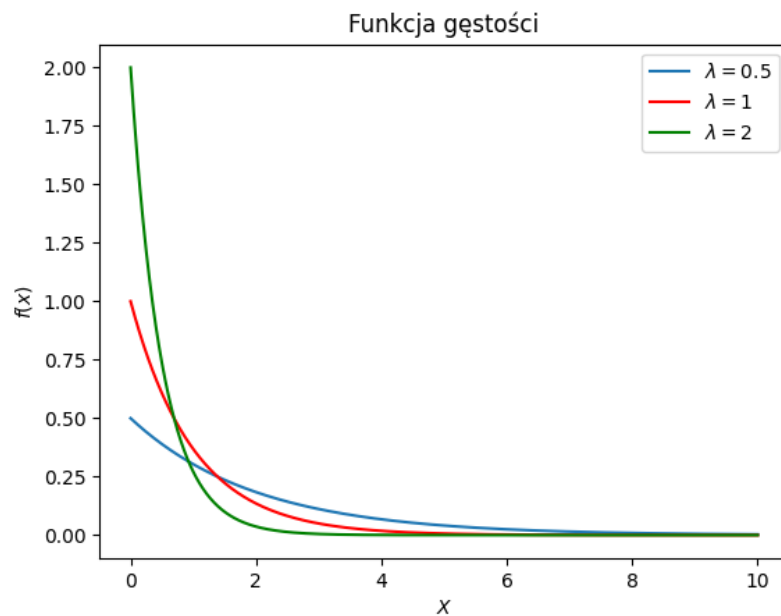
Gęstość ma postać

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & , t \geq 0. \end{cases}$$

Wówczas

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$



Rysunek 9: Funkcja gęstości w rozkładzie wykładniczym.

Definicja 3.2.3. Rozkład gamma.

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład gamma z parametrami $s > 0$ i $r > 0$

$$X \sim \text{Gamma}(s, r)$$

jeśli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{r^s}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-rx} & , x \geq 0 \end{cases}$$

gdzie $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ jest tzw. funkcją Eulera

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Jest rozkładem ogólniejszym niż rozkład wykładniczy, w szczególności

$$\text{Gamma}(1, r) = \text{Exp}(r).$$

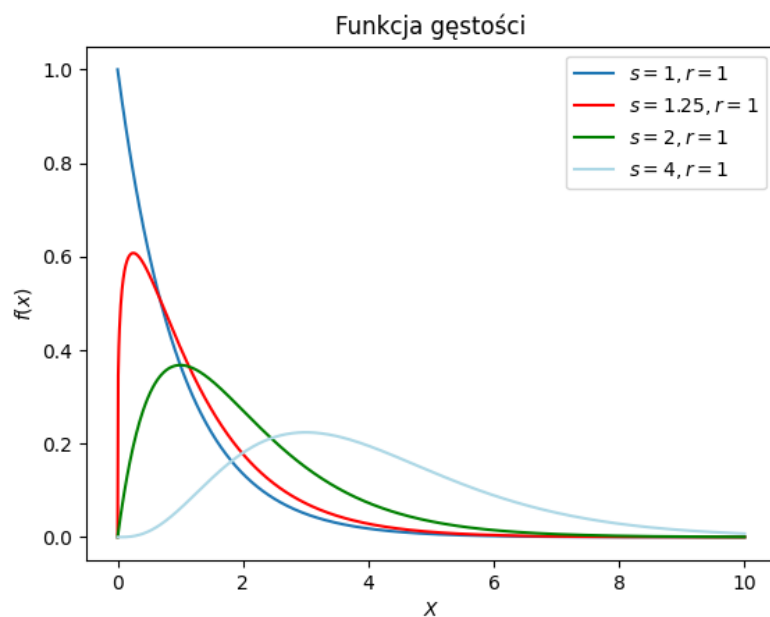
Własności funkcji Eulera:

1. $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
2. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $\Gamma(n + 1) = n!$
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
4. $\int_0^\infty x^{s-1} e^{-rx} dx = \frac{\Gamma(s)}{r^s}$

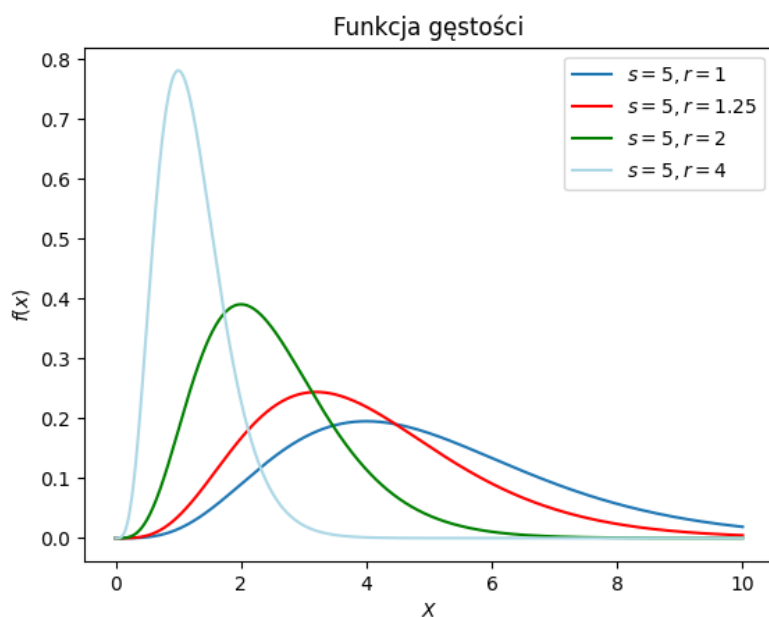
Wielkości opisujące rozkład gamma:

$$\mu = \frac{s}{r}$$

$$\sigma^2 = \frac{s}{r^2}$$



Rysunek 10: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego r .



Rysunek 11: Funkcja gęstości w rozkładzie gamma dla ustalonego s .

Definicja 3.2.4. Rozkład χ^2 .

Szczególnym przypadkiem rozkładu gamma dla $s = \frac{n}{2}$ i $r = \frac{1}{2}$ jest rozkład χ^2 o n stopniach swobody

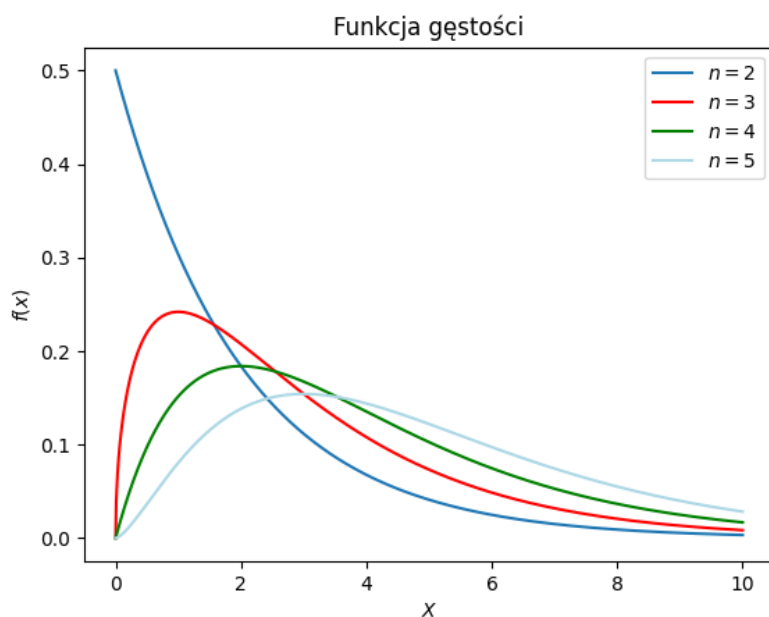
$$\chi^2(n) = \text{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

zatem gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{(\sqrt{2})^n \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Wielkości opisujące rozkład χ^2 :

$$\begin{aligned} \mu &= n \\ \sigma^2 &= 2n \end{aligned}$$



Rysunek 12: Funkcja gęstości w rozkładzie χ^2 .

Definicja 3.2.5. Rozkład normalny.

Mówimy, że zmienna losowa X o gęstości $\phi_{\mu,\sigma}$ ma rozkład normalny z parametrami $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

jeśli

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

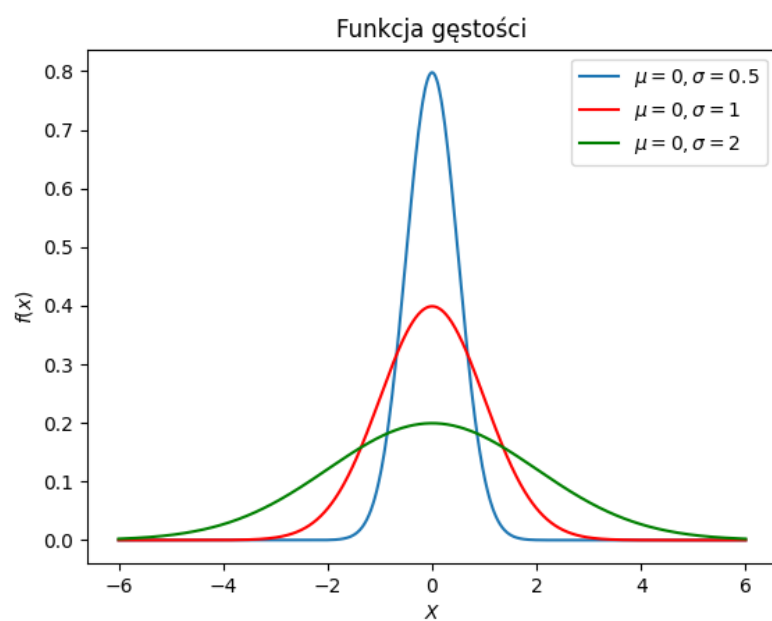
Wielkości opisujące rozkład normalny:

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

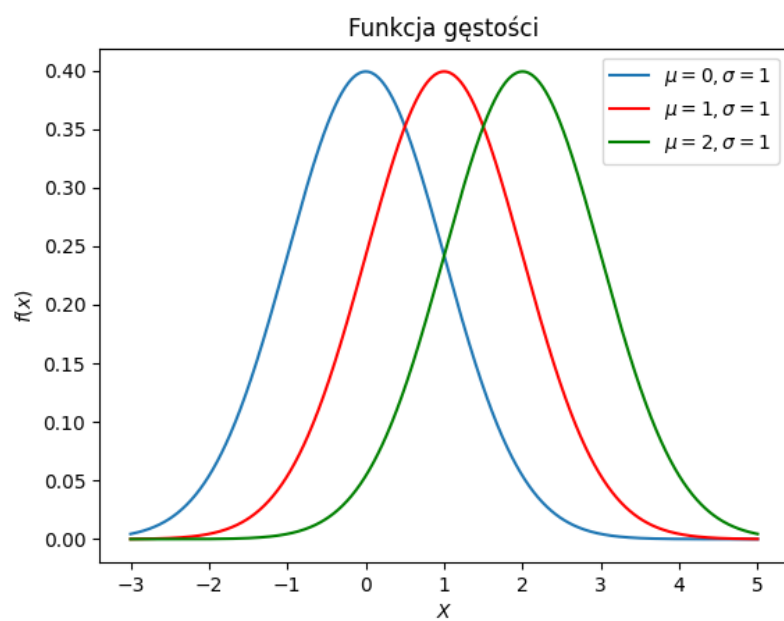
$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$ nazywamy standardowym rozkładem normalnym. Jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, to

$$X = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Rysunek 13: Funkcja gęstości w rozkładzie normalnym dla ustalonego μ .



Rysunek 14: Funkcja gęstości w rozkładzie normalnym dla ustalonego σ .

Definicja 3.2.6. Rozkład t-Studenta.

Rozkład t-Studenta o ν stopniach swobody dla $\nu > 0$, to rozkład ciągły o gęstości

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Jeśli zmienne losowe Z i V są niezależne, a ponadto

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

oraz

$$V \sim \chi^2(\nu)$$

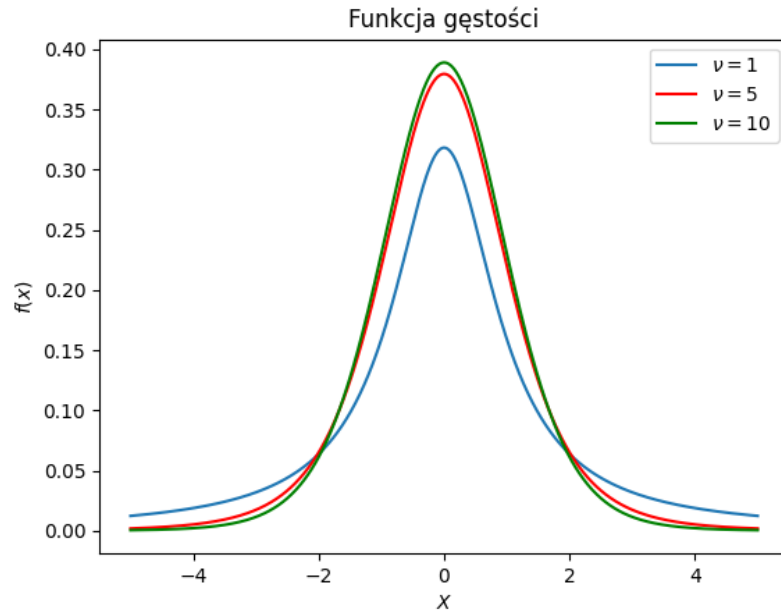
to

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}} = Z \sqrt{\frac{\nu}{V}} \sim t_\nu$$

Wielkości opisujące rozkład t-Studenta

$$\mu = \begin{cases} 0 & , \nu > 1 \\ \text{nie istnieje} & , \nu \leq 1 \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \begin{cases} \frac{\nu}{\nu-2} & , \nu > 2 \\ \infty & , 1 < \nu \leq 2 \\ \text{nie istnieje} & , \nu \leq 1 \end{cases}$$



Rysunek 15: Funkcja gęstości w rozkładzie t-Studenta.

Definicja 3.2.7. Rozkład F.

TODO

4 Zmienne losowe wielowymiarowe

Zmienna losowa (X, Y) dwuwymiarowa o gęstości $f_{X,Y}(x, y)$ ma rozkłady brzegowe

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

rozkłady warunkowe

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

wartość oczekiwana

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

kowariancja

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

współczynnik korelacji

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

5 Wnioskowanie statystyczne

5.1 Podstawy wnioskowania statystycznego

Definicja 5.1.1. Model statystyczny.

Modelem statystycznym nazywamy parę

$$(\mathcal{X}, \mathcal{P})$$

gdzie \mathcal{P} jest rodziną rozkładów prawdopodobieństwa na zbiorze \mathcal{X} . Zazwyczaj przyjmuje się, że

$$\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$$

dla pewnego zbioru Θ dopuszczalnych wartości parametrów modelu θ .

Definicja 5.1.2. Prosta próba losowa.

Prostą próbą losową o liczności n z rozkładu P_θ nazywamy ciąg niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n takich, że

$$X_i \sim P_\theta$$

dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$. Jeśli X_1, X_2, \dots, X_n jest prostą próbą losową, to ciąg wartości $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ takich, że

$$X_1(\omega) = x_1, X_2(\omega) = x_2, \dots, X_n(\omega) = x_n$$

dla pewnego ω nazywamy **realizacją prostej próby losowej** X_1, X_2, \dots, X_n .

5.2 Statystyki**Definicja 5.2.1. Statystyka.**

Statystyką nazywa się zmienną losową będącą funkcją prostej próby losowej

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Funkcja T używana do konstrukcji statystyki musi przyjmować listę argumentów dowolnej długości.

Definicja 5.2.2. Średnia w prostej próbie losowej.

Jest to statystyka dana wzorem

$$\bar{X} = \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Jeśli

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

to korzystając z własności rozkładu normalnego otrzymujemy

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Definicja 5.2.3. Wariancja w prostej próbie losowej.

Jest to statystyka dana wzorem

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Twierdzenie 5.2.1. Centralne Twierdzenie Graniczne.

Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze

skończoną średnią μ i skończoną, dodatnią wariancją σ^2 . Wtedy dla dużych n rozkład \bar{X} jest w przybliżeniu równy rozkładowi normalnemu

$$\bar{X} \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Natomiast dla sumy takich zmiennych losowych mamy

$$\sum_{i=1}^n X_i \approx \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

5.3 Estymatory

Definicja 5.3.1. Estymator punktowy.

Niech θ będzie parametrem lub innym wskaźnikiem liczbowym pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Estymatorem θ nazywa się statystykę

$$\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

służącą do wyznaczenia przybliżonej wartości θ . Jeśli x_1, x_2, \dots, x_n jest realizacją prostej próby losowej X_1, X_2, \dots, X_n , to liczbę

$$\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nazywa się **wartością estymatora** albo **estymatą**.

Definicja 5.3.2. Funkcja wiarygodności.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie prostą próbą losową, a x_1, x_2, \dots, x_n jej realizacją. Funkcją wiarygodności dla modelu statystycznego $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, jeśli P_θ jest rozkładem ciągłym o gęstości f_θ , nazywamy funkcję

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdot f_\theta(x_2) \cdot \dots \cdot f_\theta(x_n)$$

natomiast jeśli P_θ jest rozkładem dyskretnym z funkcją prawdopodobieństwa p_θ , to

$$\mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = p_\theta(x_1) \cdot p_\theta(x_2) \cdot \dots \cdot p_\theta(x_n).$$

Ze względów obliczeniowych często rozważa się logarytmiczną funkcję wiarygodności

$$l(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln \mathcal{L}(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dla rozkładów ciągłych mamy

$$l(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln f_\theta(x_1) + \ln f_\theta(x_2) + \dots + \ln f_\theta(x_n)$$

a dla rozkładów dyskretnych

$$l(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln p_\theta(x_1) + \ln p_\theta(x_2) + \dots + \ln p_\theta(x_n)$$

Definicja 5.3.3. Estymator największej wiarygodności (MLE).

Estymatorem największej wiarygodności nazywamy funkcję $\hat{\theta}$, która przy ustalonych danych $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ maksymalizuje wartość funkcji wiarygodności, albo wartość logarytmicznej funkcji wiarygodności. Jeśli funkcja wiarygodności jest różniczkowalna względem

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, to MLE można czasem wyznaczyć analitycznie obliczając pochodne względem parametrów rozkładu i rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathcal{L}(\theta|x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \mathcal{L}(\theta|x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} \mathcal{L}(\theta|x) = 0 \end{cases}$$

albo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} l(\theta|x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} l(\theta|x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} l(\theta|x) = 0 \end{cases}$$

Definicja 5.3.4. Estymator metody momentów.

TODO

5.4 Przedziały ufności**Definicja 5.4.1. Przedział ufności.**

Założmy, że rozkłady P_θ są ciągłe. Niech \underline{U} i \bar{U} będą statystykami takimi, że

$$P(\underline{U} \leq \bar{U}) = 1$$

ustalmy $\alpha \in (0, 1)$. Przedziałem ufności dla parametru θ na **poziomie ufności** $1 - \alpha$ nazywamy przedział losowy $[\underline{U}, \bar{U}]$ o ile spełniona jest równość

$$P(\underline{U} \leq \theta \leq \bar{U}) = 1 - \alpha$$

Jeśli rozkłady P_θ są dyskretne, to

$$P(\underline{U} \leq \theta \leq \bar{U}) \geq 1 - \alpha$$

Definicja 5.4.2. Przedział ufności dla μ przy znanym σ .

Niech $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}\}$ dla pewnego znanego $\sigma > 0$. Szukamy przedziału ufności dla μ . Przedziałem ufności na poziomie $1 - \alpha$ dla μ jest

$$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

gdzie z_p jest kwantylem rzędu p rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$.

Definicja 5.4.3. Przedział ufności dla μ przy nieznanym σ .

Tym razem $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$. Przedziałem ufności na poziomie $1 - \alpha$ dla μ jest

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

gdzie $t_{p, \nu}$ jest kwantylem rzędu p rozkładu t_ν .

Definicja 5.4.4. Porównanie wartości oczekiwanych - znane wariancje.

Rozważamy sytuację, w której dysponujemy dwoma próbami losowymi z rozkładu normalnego

$$X_1, X_2, \dots, X_{n_1} \quad \text{i} \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$$

o nieznanach wartościach oczekiwanych μ_1 i μ_2 oraz znanych wariancjach σ_1^2 i σ_2^2

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$$

$$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$$

Typowe badanie dotyczy porównania wartości oczekiwanych w obu próbach, co jest rozumiane jako analiza wartości różnicy

$$\mu_1 - \mu_2$$

Przedziałem ufności dla $\mu_1 - \mu_2$ na poziomie $1 - \alpha$ jest

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

Definicja 5.4.5. Porównanie wartości oczekiwanych - nieznanne, ale równe wariancje.

Zakładamy, że

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

ale σ jest nieznanne. Wtedy przedział ufności dla $\mu_1 - \mu_2$ na poziomie $1 - \alpha$ jest równy

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$$

gdzie

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Definicja 5.4.6. Porównanie wartości oczekiwanych - obserwacje sparowane.

Zakładamy, że

$$n_1 = n_2 = n$$

oraz

$$(X_i, Y_i) \sim \mathcal{N}((\mu_1, \mu_2), \Sigma)$$

przy czym zmienne dwuwymiarowe $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ są wzajemnie niezależne. W takiej sytuacji zmienne jednowymiarowe

$$D_i = X_i - Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_D)$$

są niezależne. Wtedy przedział ufności dla $\mu_1 - \mu_2$ na poziomie $1 - \alpha$ jest równy

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \right]$$

gdzie

$$S_D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i - \bar{X} + \bar{Y})^2$$

5.5 Testowanie hipotez**Definicja 5.5.1. Hipoteza statystyczna.**

Rozważamy model statystyczny $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Hipotezą statystyczną nazywamy dowolny niepusty podzbiór \mathcal{P} . W praktyce wyróżniamy jedną hipotezę zwaną **hipotezą zerową** (H_0), która podlega weryfikacji, natomiast $H_1 = \mathcal{P} \setminus H_0$ nazywamy **hipotezą alternatywną**.

Definicja 5.5.2. Zbiór krytyczny testu.

Statystykę U TODO

Definicja 5.5.3. p-wartość.

p-wartość to, dla zaobserwowanej wartości statystyki testowej, najmniejszy poziom istotności, przy którym ta wartość prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej. Inaczej, dla poziomu istotności α oraz p-wartości p , jeżeli

$$p > \alpha \Rightarrow \text{brak podstaw do odrzucenia } H_0$$

$$p \leq \alpha \Rightarrow \text{odrzucaamy } H_0$$

Twierdzenie 5.5.1. Test dla wartości oczekiwanej przy znanej wariancji.

Mamy $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma) : \mu \in \mathbb{R}\}$ dla ustalonego $\sigma > 0$. Ustalamy hipotezy

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Jako statystykę testową bierzemy

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

oraz przyjmujemy zbiór krytyczny na poziomie istotności α

$$C = \left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$$

p-wartość dla dwustronnej hipotezy alternatywnej wynosi

$$p(z) = 2(1 - \Phi(|z|))$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

Twierdzenie 5.5.2. Test dla wartości oczekiwanej przy nieznanej wariancji.

Jako statystykę testową bierzemy

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

oraz przyjmujemy zbiór krytyczny na poziomie istotności α dla dwustronnej hipotezy alternatywnej

$$C = \left(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \cup \left[t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, \infty\right)$$

p-wartość wynosi

$$p(t) = 2(1 - F_{n-1}(|t|))$$

gdzie F_{n-1} jest dystrybuantą rozkładu t_{n-1} .

Twierdzenie 5.5.3. Test dla wartości oczekiwanej z dwóch prób.

Dla nieznanych, ale równych wariancji używamy statystyki

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

jeżeli wariancje są znane to

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Dla dwustronnej hipotezy alternatywnej

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

Twierdzenie 5.5.4. Test równości wariancji.

6 Literatura

- [1] Smółka, M. (2026). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. *Wykłady prowadzone na Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie.*