Đại học Mở TpHCM
Khoa XÂY DỰNG& ĐIỆN

Môn học

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

GV : Trần Trung Dũng

Ho Chi Minh city, 2008

Chương IV

Đa thức nội suy và xấp xỉ hàm

Từ thực nghiệm n điểm ta có n giá trị x, y..

$$x_k = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$$

$$y_k = y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n$$

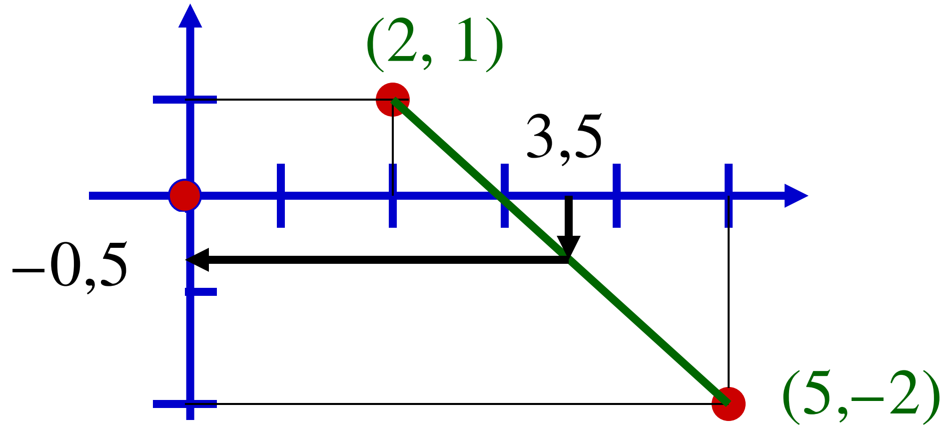
Phép nội suy được định nghĩa là với một giá trị x nào khác thì giá trị y = bao nhiêu ?

Thí dụ:

$x_i = 2 \quad 5$

$y_i = 1 \quad -2$

x = 3,5 thì y=?



Xét hàm $y = f(x)$ cho dưới dạng bảng số

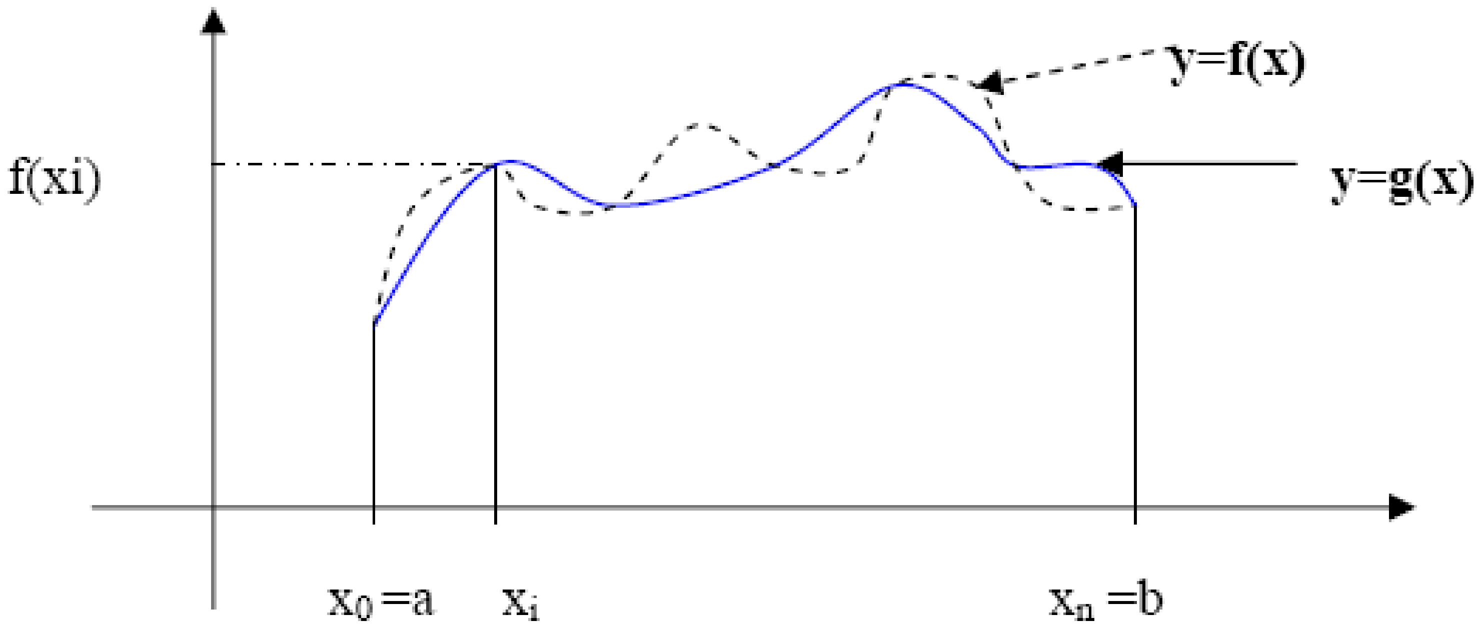
x	x_o	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_o	y_1	y_2	. . .	y_n

- Các giá trị x_k, $k = 0, 1, .., n$ được sắp theo thứ tự tăng dần gọi là các điểm nút nội suy
- Các giá trị $y_k = f(x_k)$ là các giá trị cho trước của hàm tại x_k

Bài toán : xây dựng 1 đa thức $p_n(x)$ bậc $\leq n$ thoả điều kiện $p_n(x_k) = y_k$, $k=0,1,..$ n. Đa thức này gọi là đa thức nội suy của hàm f(x).

Đa thức nội suy

Về mặt hình học bài toán nội suy được diễn đạt như sau: Tìm hàm *g(x)* có đồ thị đi qua các điểm



Xét bảng số sau

$$x_k = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n$$

$$y_k = y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n$$

Chúng ta sẽ xây dựng đa thức Lagrange thoả các điều kiện sau:

- Bậc của đa thức nhỏ hơn hay bằng n.
- Giá trị của đa thức tại điểm nút x_k bằng giá trị y_k cho trước.

Đa thức nội suy Lagrange có dạng

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_n^k(x)$$

Trong đó:

$$L_n^k(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq k}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i=0, i \neq k}^{n} (x_k - x_i)}$$

Đa thức nội suy Lagrange được viết lại như sau:

$$L_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)....(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)....(x_0 - x_n)} \times y_0$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)....(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)....(x_1 - x_n)} \times y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)....(x_n - x_{n-1})} \times y_n$$

Khi đoạn [a,b] được chia bởi phép phân hoạch đều.

Đặt **$q = (x - x_0)/h$** với **$h = (b - a)/n$** ta thu được :

$$\begin{cases} x - x_k = (q-k)h \\ x_i - x_j = (i-j)h \end{cases}$$

Ta thu được công thức Lagrange dưới dạng :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} q(q-1)\ldots(q-n)}{k!(n-k)!(q-k)} y_k$$

Đặt $\omega_n(t) = (x-x_0)(x-x_1)..(x-x_n)$

Nếu đạo hàm cấp (n+1) của f bị chặn: $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ với $\forall x \in [a,b]$ thì ta có ước lượng sai số nội suy là

$$\left| f(x) - L_n(x) \right| \le \frac{M}{(n+1)!} \left| \omega_n(x) \right|$$

Ví dụ 1 : Cho bảng số

x	0	1	3
y	1	-1	2

Tính gần đúng giá trị hàm tại x = 2 theo Lagrange

Ví dụ 2 : Cho bảng số

x	0	1	3	4
y	1	1	2	-1

Tính gần đúng giá trị hàm tại x = 2 theo Lagrange

Giải

n = 2

$$L_n^{(0)}(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$$

$$L_n^{(1)}(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x)$$

$$L_n^{(2)}(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2 - x)$$

Đa thức nội suy Lagrange

$$L_n(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{2}(x^2 - 3x) + \frac{1}{3}(x^2 - x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{19}{6}x + 1$$

$f(2) \approx L_n(2) = -2/3$

Giải

n = 3

$$L_n^{(0)}(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = -\frac{1}{6}$$

$$L_n^{(1)}(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{2}{3}$$

$$L_n^{(2)}(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{2}{3}$$

$$L_n^{(3)}(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = -\frac{1}{6}$$

Đa thức nội suy Lagrange

$f(2) \approx L_n(2) = 2$

Xét bảng số

x_k	x_0	x_1	...	x_n
y_k	y_0	y_1	...	y_n

Trên đoạn $[x_k , x_{k+1}]$ ta định nghĩa đại lượng

$$f\left[x_k, x_{k+1}\right] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Được gọi là tỉ sai phân cấp một của hàm trên đoạn $[x_k , x_{k+1}]$.

Tỉ sai phân cấp 2 của hàm trên đoạn $[x_k , x_{k+2}]$ như sau :

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{(x_{k+2} - x_k)}$$

Tỉ sai phân cấp p của hàm trên đoạn $[x_k , x_{k+p}]$ như sau :

$$f[x_k, x_{k+1}, ..., x_p] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+p}] - f[x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+p-1}]}{(x_{p+k} - x_k)}$$

Đa thức $N_n(x)$ bậc không cao hơn n thoả $N_n(x_k) = y_k$,

$\forall\ k = 1, n$ theo cách Newton như sau :

$$\begin{aligned} y = y_0 &+ (x - x_0).f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1).f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ &+ \ldots \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}).f[x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n] \end{aligned}$$

<u>Chứng minh</u> : Theo định nghĩa tỉ sai phân cấp 1 của hàm *f(x)*

$$f\left[x, x_0\right] = \frac{f(x) - y_0}{x - x_0}$$

Do đó : $f(x) = y_0 + (x-x_0)\, f[x\,,\, x_0]$

Lại dùng định nghĩa tỉ sai phân cấp 2 của hàm *f(x)*

$$f\left[x, x_0, x_1\right] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

Ta được :

$$f(x) = y_0 + (x-x_0)\, f[x_0\,,\, x_1] + (x-x_0)\,(x-x_1)\, f[x, x_0\,, x_1]$$

Tiếp tục bằng qui nạp ta được

$$f(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$
$$+ f[x, x_0, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

Đặt

$$N(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$
$$\Re_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

Ta được $$\boxed{f(x) = N_n^{(1)}(x) + \Re_n(x)}$$

Công thức này gọi là công thức Newton tiến xuất phát từ điểm nút x_o

Tương tự ta có công thức Newton lùi

$$\boxed{f(x) = N_n^{(2)}(x) + \Re_n(x)}$$

$$N_n^{(2)}(x) = y_n + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1)$$

$N_n^{(1)}(x)$: *đa thức nội suy Newton tiến*

$N_n^{(2)}(x)$: *đa thức nội suy Newton lùi*

$\Re_n(x)$: *xác định sai số*

Nếu hàm f có đạo hàm liên tục đến cấp n+1, ta có công thức đánh giá sai số :

$$\boxed{|\Re_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)| \quad \text{với } M_{n+1} = \max|f^{(n+1)}(x)|}$$

Ví dụ 1 : Cho bảng số

x	0	0.3	0.7	1.0
y	2	2.26	2.52	2.72

Tính gần đúng giá trị hàm tại x = 0.12 theo Newton

Ví dụ 2 : Cho bảng số

x	1.0	1.3	1.6	1.9
y	0.76	0.62	0.45	0.28

Tính gần đúng giá trị hàm tại x = 1.2 theo Newton

Ví dụ : Cho hàm f xác định trên [0,1] và bảng số

x	0	0.3	0.7	1
y	2	2.2599	2.5238	2.7183

Tính gần đúng f(0.12) bằng Newton tiến và f(0.9) bằng Newton lùi

Giải : ta lập bảng các tỉ sai phân

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$
0	2			
		0.8663		Newton tiến
0.3	2.2599		-0.2950	
		0.6598		0.2786
0.7	2.5238		-0.0164	
		0.6483		Newton lùi
1	2.7183			

Ta có

$$f(0.12) \approx N_n^{(1)}(0.12)$$

$$= 2 + 0.8663(0.12) - 0.2950(0.12)(-0.18) + 0.2786(0.12)(-0.18)(-0.58)$$

$$= 2.1138$$

$$f(0.9) \approx N_n^{(2)}(0.9)$$

$$= 2.7183 + 0.6483(-0.1) - 0.0164(-0.1)(0.2) + 0.2786(-0.1)(0.2)(0.6)$$

$$= 2.6505$$

Ví dụ : Cho hàm f xác định trên [1,2] và bảng số

x	1	1.3	1.6	1.9
y	0.76	0.62	0.45	0.28

Tính gần đúng f(0.12) bằng Newton tiến và f(0.9) bằng Newton lùi

Giải : ta lập bảng các tỉ sai phân

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$
1	0.76			
		-0.4667		Newton tiến
1.3	0.62		-0.1667	
		-0.5667		0.1852
1.6	0.45		0.0	
		-0.5667		Newton lùi
1.9	0.28			

Ta có

$$
\begin{aligned}
f(0.9) &\approx N_n^{(2)}(0.9) \\
&= 2.7183 + 0.6483(-0.1) - 0.0164(-0.1)(0.2) + 0.2786(-0.1)(0.2)(0.6) \\
&= 2.6505
\end{aligned}
$$

BÀI TOÁN XẤP XỈ THỰC NGHIỆM :

Xét bài toán thống kê lượng mưa trong 12 tháng
Thực nghiệm (k=1..12)

x_k	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	550	650	540	580	610	605	......	

Các giá trị y_k được xác định bằng thực nghiệm nên có thể không chính xác. Khi đó việc xây dựng một đường cong đi qua tất cả các điểm $M_k(x_k, y_k)$ cũng không còn chính xác

Bài toán xấp xỉ thực nghiệm : là tìm hàm f(x) xấp xỉ bảng $\{(x_k, y_k)\}$ theo phương pháp bình phương cực tiểu :

$$g(f) = \sum (f(x_k) - y_k)^2 \ \textit{đạt} \ \min$$

Hàm f tổng quát rất đa dạng. Để đơn giản, trong thực tế thường ta tìm hàm f theo một trong các dạng sau :

- $f(x) = A + Bx$
- $f(x) = A+Bx+Cx^2$
- $f(x) = A\sin x+B\cos x$
- $f(x) = Ae^{Bx}$
- $f(x) = Ax^B$
- $f(x) = A\ln Bx$ ...

1. Trường hợp f(x) = A+ Bx :

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B)=\sum(A+Bx_k-y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial A}=2\sum(A+Bx_k-y_k)=0\\ \dfrac{\partial g}{\partial B}=2\sum(A+Bx_k-y_k)x_k=0\end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases}nA+(\sum x_k)B=\sum y_k\\ (\sum x_k)A+(\sum x_k^2)B=\sum x_k y_k\end{cases}$$

Ví dụ : Tìm hàm f(x) = A + Bx xấp xỉ bảng số

x	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
y	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7

Theo pp BPCT

Ta có n = 10

Giải hệ pt

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B = \sum x_k y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10A + 29B = 39 \\ 29A + 109B = 140 \end{cases}$$

Nghiệm A = 0.7671, B=1.0803

Vậy f(x) = 0.7671+1.0803x

2. Trường hợp f(x) = Acosx + Bsinx :

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B) = \sum (A\cos x_k + B\sin x_k - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng
$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (A\cos x_k + B\sin x_k - y_k)\cos x_k = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (A\cos x_k + B\sin x_k - y_k)\sin x_k = 0 \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} (\sum \cos^2 x_k)A + (\sum \sin x_k \cos x_k)B = \sum y_k \cos x_k \\ (\sum \sin x_k \cos x_k)A + (\sum \sin^2 x_k)B = \sum y_k \sin x_k \end{cases}$$

Ví dụ : Tìm hàm f(x)=Acosx+Bsinx xấp xỉ bảng số

x	10	20	30	40	50	rad
y	1.45	1.12	0.83	1.26	1.14	

Theo pp BPCT

Ta có n = 5

Giải hệ pt

$$\begin{cases} (\sum \cos^2 x_k)A + (\sum \sin x_k \cos x_k)B = \sum y_k \cos x_k \\ (\sum \sin x_k \cos x_k)A + (\sum \sin^2 x_k)B = \sum y_k \sin x_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.2703A - 0.0735B = -0.3719 \\ -0.0735A + 2.7297B = 0.0533 \end{cases}$$

Nghiệm A = -0.1633, B=0.0151

Vậy f(x) = -0.1633cosx+0.0151sinx

3. Trường hợp f(x) = Ax² + Bsinx :

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B) = \sum (Ax_k^2 + B\sin x_k - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (Ax_k^2 + B\sin x_k - y_k)x_k^2 = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (Ax_k^2 + B\sin x_k - y_k)\sin x_k = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} (\sum x_k^4)A + (\sum x_k^2 \sin x_k)B = \sum x_k^2 y_k \\ (\sum x_k^2 \sin x_k)A + (\sum \sin^2 x_k)B = \sum y_k \sin x_k \end{cases}$$

Ví dụ : Tìm hàm $f(x)=Ax^2+B\sin x$ xấp xỉ bảng số

x	1.3	1.5	1.8	2.0	2.4	2.6	2.7
y	2.7	1.8	3.51	3.1	3.78	3.9	4.32

Theo pp BPCT

Ta có n =7

Giải hệ pt

$$\begin{cases} (\sum x_k^4)A+(\sum x_k^2 \sin x_k)B=\sum x_k^2 y_k \\ (\sum x_k^2 \sin x_k)A+(\sum \sin^2 x_k)B=\sum y_k \sin x_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 166.4355A+21.1563B=112.015 \\ 21.1563A+\ \ 4.6033B=17.0441 \end{cases}$$

Nghiệm A = 0.4867, B=1.4657

Vậy $f(x) = 0.4857x^2 + 1.4657\sin x$

4. Trường hợp f(x) = A+ Bx+Cx²:

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B,C) = \sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 3 biến g(A,B,C)

Điểm dừng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial C} = 2\sum (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k^2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} nA + (\sum x_k)B + (\sum x_k^2)C = \sum y_k \\ (\sum x_k)A + (\sum x_k^2)B + (\sum x_k^3)C = \sum x_k y_k \\ (\sum x_k^2)A + (\sum x_k^3)B + (\sum x_k^4)C = \sum x_k^2 y_k \end{cases}$$

Ví dụ : Tìm hàm f(x) = A + Bx+Cx^2 xấp xỉ bảng số

x	1	1	2	3	3	4	5
y	4.12	4.18	6.23	8.34	8.38	12.13	18.32

Theo pp BPCT

Ta có n = 7

Giải hệ pt

$$\begin{cases} nA+(\sum x_k)B+(\sum x_k^2)C=\sum y_k \\ (\sum x_k)A+(\sum x_k^2)B+(\sum x_k^3)C=\sum x_k y_k \\ (\sum x_k^2)A+(\sum x_k^3)B+(\sum x_k^4)C=\sum x_k^2 y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7A+\ 19B+\ \ 65C=61.70 \\ 19A+\ 65B\ +253C=211.04 \\ 65A+253B+1061C=835.78 \end{cases}$$

Nghiệm A = 4.3, B=-0.71, C=0.69

Vậy f(x) = 4.3-0.71x+0.69x^2

Thank you for following me