



## ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۹۷-۹۸

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

---

مدرس	دکتر علی شریفی زارچی
طراحان تمرین	امیرمجتبی صبور، علیرضا موسوی
طراحان سربزرگ	سپهر زمانی، پویان شیرزادیان، سینا ریسمانچیان، سیدسجاد کاهانی
تمرین	عملی چهارم
مباحث	هرم و مجموعه‌های مجزا
مهلت ارسال	۱۳ اردیبهشت ۱۳۹۸، ساعت ۲۳

- پاسخ سؤال‌های این تمرین را به‌صورت جداگانه در قالب یک فایل Python در کوئرا آپلود کنید.
- به ازای هر روز دیرکرد در بارگذاری تمرین‌ها، طبق سیلابس درس بخشی از نمره را از دست خواهید داد.
- سعی کنید تا ۲۴ ساعت پیش از پایان موعد تحویل، سؤالات و ابهامات خود را در پیاتزا مطرح کنید.

## موش آزمایشگاهی و توپ‌هایش

- محدودیت زمان: ۲ ثانیه
- محدودیت حافظه: ۱۰۰ مگابایت

در این سوال اجازه استفاده از داده‌ساختار Heap یا DSU آماده در پایتون را ندارید.

در یک آزمایشگاه،  $n$  ظرف وجود دارد که به ترتیب از 1 تا  $n$  شماره‌گذاری شده‌اند. داخل هر ظرف تعدادی توپ است که تعداد توپ‌های داخل ظرف  $i$ ام را با  $x_i$  نمایش می‌دهیم. در این آزمایشگاه یک موش آزمایشگاهی وجود دارد که یاد گرفته اگر توپ‌های بین ظرف  $i$ ام و  $j$ ام را به گونه‌ای جابه‌جا کند که بعد از جابه‌جایی، داخل ظرف  $i$ ام به تعداد  $x'_i = \lfloor \frac{x_i + x_j}{2} \rfloor$  و داخل ظرف  $j$ ام به تعداد  $x'_j = \lfloor \frac{x_i + x_j}{2} \rfloor$  توپ قرار بگیرد به اندازه‌ی  $|x_i - x'_i| + |x_j - x'_j|$  تکه‌پنیر جایزه می‌گیرد. مسئول آزمایشگاه  $k$  بار این موش را از قفسش خارج می‌کند و هربار به او اجازه می‌دهد تا عملیات فوق را روی دو ظرف انجام دهد. این مسئول زحمت‌کش سپس جایزه‌ی موش را به او می‌دهد و او را به قفس برمی‌گرداند. اما موش از آن‌جایی که نمی‌داند  $k$  چند است، تلاش می‌کند تا هربار بیشترین جایزه‌ی ممکن را بگیرد. حال شما باید مشخص کنید که بیشترین مجموع جایزه‌ای که موش می‌تواند بعد از  $k$  مرحله به‌دست آورد چه‌قدر است.

### ورودی

ورودی شامل دو خط است که در خط اول به ترتیب اعداد  $n$  و  $k$  داده می‌شوند و در خط دوم  $n$  عدد می‌آیند که عدد  $i$ ام برابر با  $x_i$  است.

$$1 \leq k, n \leq 500000$$

$$1 \leq x_i \leq 10^9$$

### خروجی

شما باید در تنها خط خروجی پاسخ مساله را چاپ کنید.

### ورودی و خروجی نمونه

#### ورودی نمونه ۱

```
4 1
1 2 3 4
```

## خروجی نمونه ۱

4

بهترین حالت برای موش این است که ظرف‌های ۱ و ۴ را انتخاب کرده و تعداد توپ‌های آن‌ها را تبدیل به ۳ و ۲ بکند و  $|1 - 3| + |4 - 2| = 4$  تکه‌پنیر جایزه بگیرد.

## ورودی نمونه ۲

3 2  
10 20 100

## خروجی نمونه ۲

126

موش در مرحله‌ی اول ظرف‌های ۱ و ۳ را انتخاب می‌کند؛ به این ترتیب در هر کدام ۵۵ توپ قرار می‌گیرد و  $|10 - 55| + |100 - 55| = 90$  تکه‌پنیر جایزه می‌گیرد. او در مرحله دوم یکی از این ظرف‌ها و ظرف ۲ را انتخاب می‌کند و در آن‌دو به ترتیب ۳۸ و ۳۷ توپ قرار می‌دهد و  $|55 - 38| + |20 - 37| = 36$  تکه‌پنیر نیز از این مرحله جایزه می‌گیرد. بنابراین او مجموعاً ۱۲۶ تکه‌پنیر جایزه می‌گیرد.

## متین و کیانوش

- محدودیت زمان: ۱ ثانیه
- محدودیت حافظه: ۲۵۶ مگابایت

در این سوال اجازه استفاده از داده‌ساختار Heap یا DSU آماده در پایتون را ندارید.

متین و کیانوش در اوقات فراغتشان با نقاط و خطوط بازی می‌کنند. بازی به این صورت است که متین ابتدا  $n$  نقطه روی دایره‌ای رسم می‌کند و آن‌ها را از 1 تا  $n$  شماره‌گذاری می‌کند؛ سپس تمام خطوط بین این نقاط را رسم و تعدادی از آن‌ها را با یکی از دو رنگ سبز یا قرمز رنگ می‌کند (ممکن است این تعداد از 0 تا  $\frac{n(n-1)}{2}$  باشد)؛ و نهایتاً آن را به کیانوش می‌دهد. کیانوش باید تعداد حالت‌های رنگ‌آمیزی پاره‌خط‌های رنگ‌نشده را با دو رنگ سبز و قرمز پیدا کند که در شکل نهایی در هر مثلی که رؤس آن از بین این  $n$  نقطه هستند، تعداد یالهای قرمز آن مثلث زوج باشد. از آنجا که کیانوش این بازی را اصلاً دوست ندارد از شما می‌خواهد به او در شمردن تعداد آن‌ها کمک کنید.

از آنجا که ممکن است جواب بزرگ باشد، باقیمانده‌ی آن را به  $10^9 + 7$  چاپ بکنید. توجه کنید ممکن است جواب صفر هم بشود.

## ورودی

در خط اول ورودی به ترتیب اعداد  $n$  و  $m$  داده می‌شوند که به ترتیب تعداد نقاط شکل و تعداد پاره‌خط‌های رنگ‌شده توسط متین است.

در  $m$  خط بعدی توضیحات پاره‌خط‌های رنگ‌شده می‌آیند؛ به این ترتیب که در خط  $i$ ام، سه عدد  $a_i$ ،  $b_i$  و  $c_i$  داده می‌شود که  $a_i$  و  $b_i$  شماره‌ی نقاط دو سر پاره‌خط هستند و اگر  $c_i$  برابر 1 باشد، پاره‌خط مذکور سبز و در غیر این صورت قرمز است.

$$3 \leq n \leq 10^5$$

$$0 \leq m \leq 10^5$$

## خروجی

شما باید در خروجی جواب را به پیمانه‌ی عدد  $10^9 + 7$  چاپ بکنید.

## ورودی و خروجی نمونه

ورودی نمونه ۱

3 0

### خروجی نمونه ۱

4

در این نمونه، رنگ‌آمیزی تمامی یال‌ها در دست کیانوش است. او یا می‌تواند مثلث را تمام‌سبز کند، یا باید دقیقاً یک یالش را سبز کند که مجموعاً چهار حالت میشود.

### ورودی نمونه ۲

4 4  
1 2 1  
2 3 1  
3 4 0  
4 1 0

### خروجی نمونه ۲

1

در این نمونه تنها حالتی که کیانوش دارد این است که پاره‌خط بین نقاط ۱ و ۳ را با رنگ سبز و پاره‌خط بین نقاط ۲ و ۴ را با رنگ قرمز به هم وصل کند.

### ورودی نمونه ۳

3 3  
1 2 0  
2 3 0  
1 3 0

### خروجی نمونه ۳

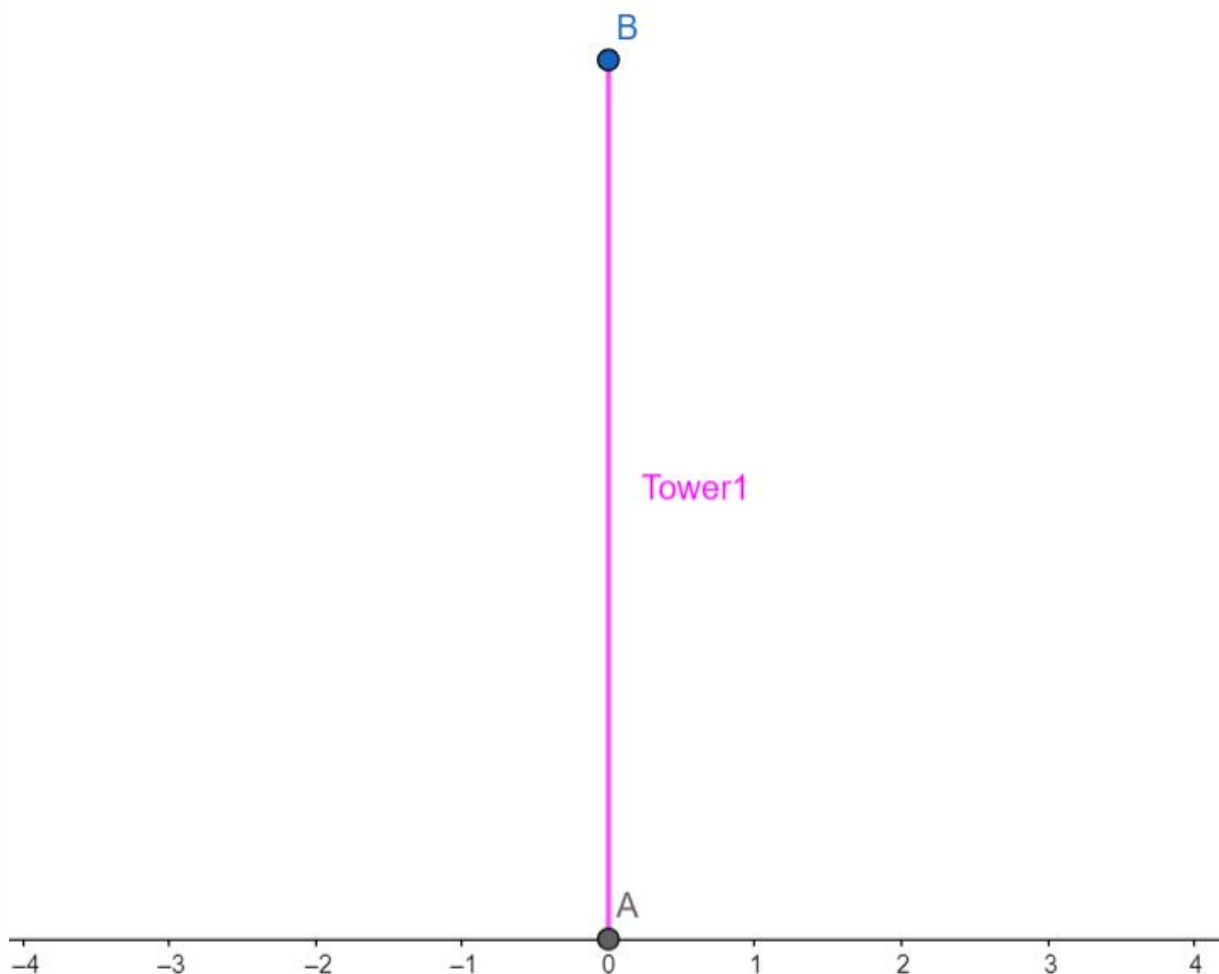
0

## برج‌های لگویی

- محدودیت زمان: ۵ ثانیه
- محدودیت حافظه: ۲۵۶ مگابایت

در این سوال اجازه استفاده از داده‌ساختار Heap یا DSU آماده در پایتون را ندارید.

علی در حال بازی با تعدادی لگو است. او تعدادی لگو دارد که هر کدام یک مکعب  $1 \times 1 \times 1$  هستند. علی با استفاده از این لگوهایی که در اختیار دارد،  $n$  برج می‌سازد که برج  $i$ ام به شکل یک مکعب مستطیل  $h_i \times 1 \times 1$  است (با ارتفاع  $h_i$ ). او می‌خواهد از آن‌ها به عنوان دومینو استفاده کند. بنابراین آن‌ها را روی یک خط (با فاصله‌های نه لزوماً یکسان) پشت هم قرار می‌دهد. در واقع اگر از کنار به این برج‌ها نگاه کنیم، آن‌ها مانند تعدادی پاره‌خط موازی محور  $y$  هستند که یک سرشان روی محور  $x$  قرار دارد که طول‌هایشان هم اعداد دلخواه هستند.



افتادن این برج‌ها به این شکل است که اگر برجی شروع به افتادن کند، حتماً تا حالت موازی محور  $x$  خواهد رفت و از قرار گرفتن بقیه‌ی برج‌ها در زیر آن صرف نظر می‌کنیم. اگر هم در حین افتادن با دومینوی دیگری تماس داشته باشد (حتی در نقطه‌ی واقع بر محور  $x$ )، دومینوی دیگر هم در همان جهت شروع به افتادن خواهد کرد.

علی‌درباره‌ی این شاهکار خود  $q$  سوال دارد. سوال  $i$ ام او به این صورت است که حداقل چند تا لگوی جدید باید بخرد و به برج‌هایش وصل کند که اگر او برج  $l_i$  ام را بیندازد، این روند افتادن‌ها حداقل تا برج  $r_i$  ام ادامه پیدا کند. منظور از ادامه پیدا نکردن این است که ممکن است در این حین برجی آن قدر از برج‌های قبلی خود دور باشد که افتادن آنها این برج را نیندازد و به همین دلیل علی مجبور باشد برای جلوگیری از این اتفاق، ارتفاع برج‌های قبلی را با لگو افزایش دهد. برای هر یک از این  $q$  سوال، او  $l_i$  و  $r_i$  را به شما می‌دهد و از شما حداقل تعداد لگوهای اضافه‌ای که باید بخرد را می‌خواهد.

## ورودی

در خط اول ورودی عدد  $n$  داده می‌شود که تعداد برج‌های علی است. (هر برج را از کنار به صورت یک خط موازی محور  $y$  در نظر بگیرید)

در  $n$  خط بعدی توضیحات برج‌ها داده می‌شود؛ به این صورت که در خط  $i$ ام  $x_i$  و  $h_i$  می‌آیند که به ترتیب محل قرارگیری برج  $i$ ام روی محور  $x$  و ارتفاع آن است. در خط بعد  $q$  داده می‌شود که برابر با تعداد سوالات است. نهایتاً در هر یک از  $q$  خط بعدی مشخصات پرسش‌ها می‌آیند که خط  $i$ ام به ترتیب شامل  $l_i$  و  $r_i$  است.

$$2 \leq n \leq 2 \times 10^5$$

$$1 \leq x_i, h_i \leq 10^9$$

$$1 \leq q \leq 10^5$$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

$$1 \leq l_i \leq r_i \leq n$$

## خروجی

خروجی شامل  $q$  خط است که در خط  $i$ ام باید جواب سوال  $i$ ام را چاپ کنید.

## ورودی و خروجی نمونه

### ورودی نمونه

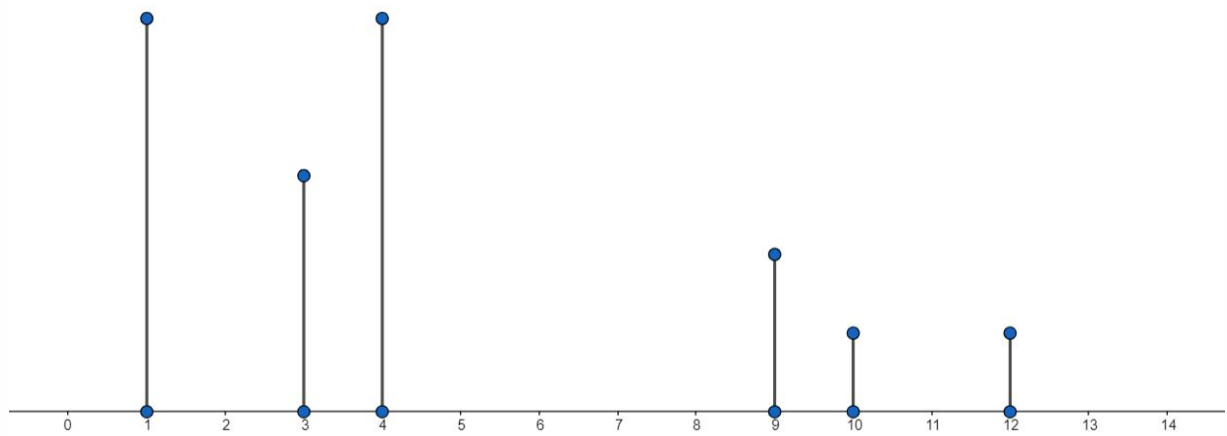
6  
1 5  
3 3

4 5  
9 2  
10 1  
12 1  
4  
1 2  
2 4  
2 5  
2 6

## خروجی نمونه

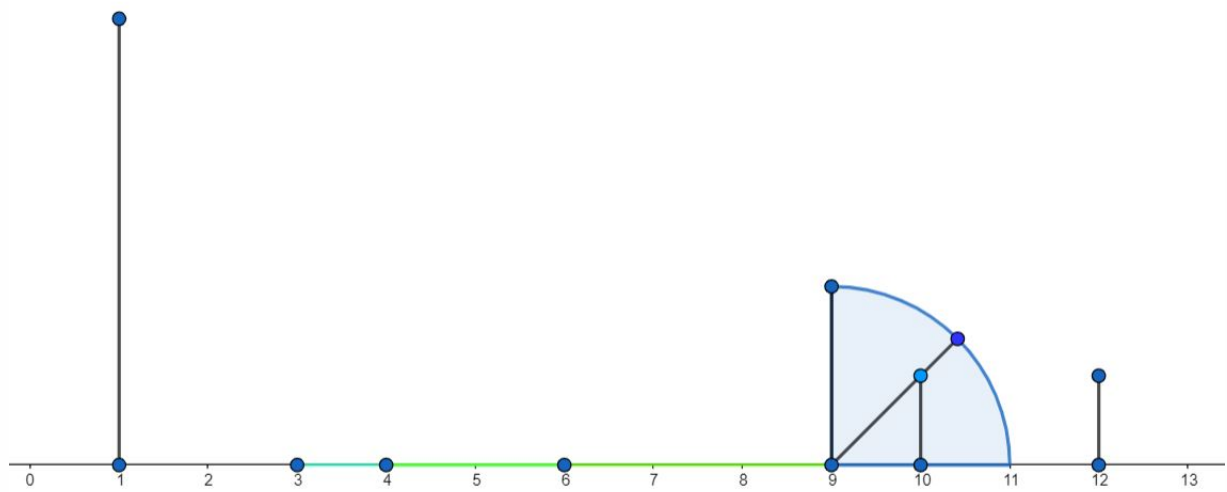
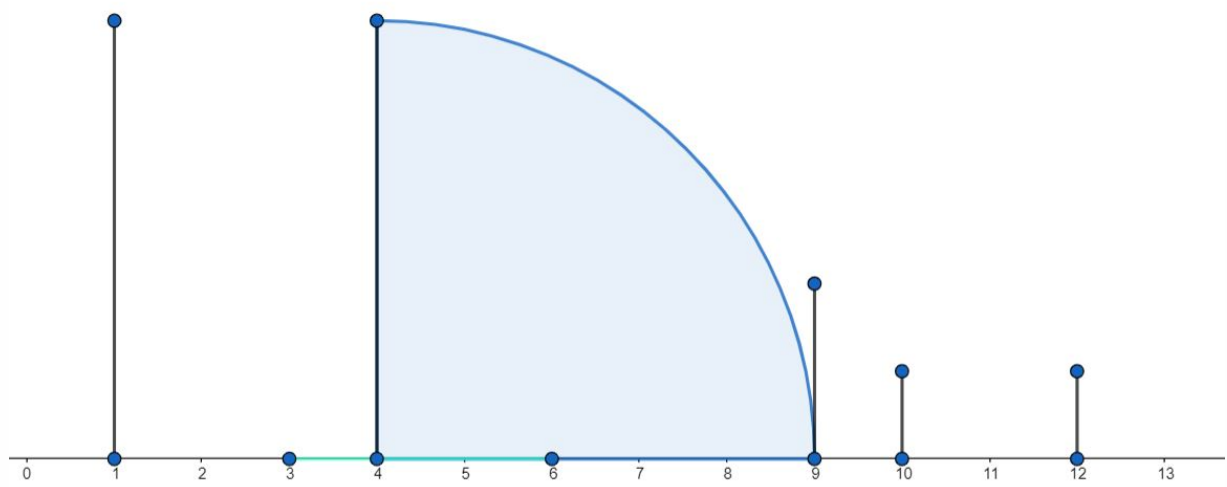
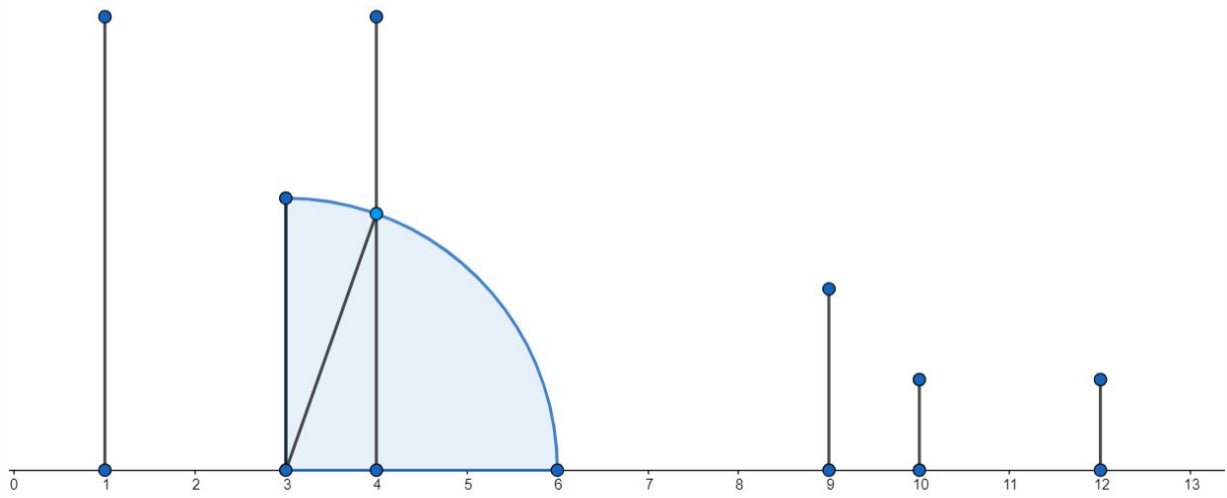
0  
0  
0  
1

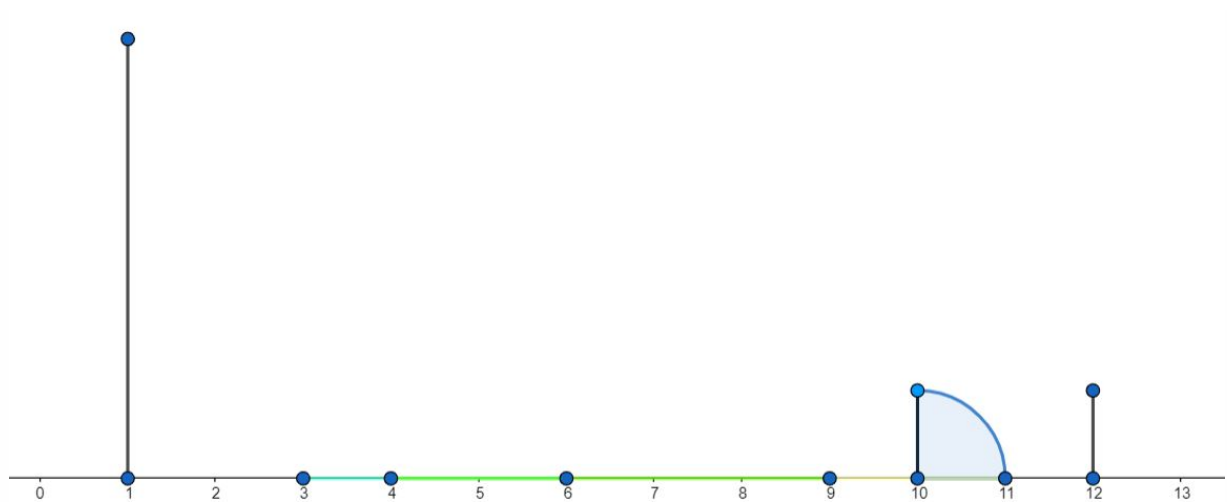
وضعیت برج‌ها در ابتدا مطابق شکل زیر است:



برای مثال، سوال چهارم را بررسی می‌کنیم؛ اگر برج دوم رو بندازیم دنباله ی افتادن ها این طور میشود.







که همانطور که میبینید برج 6 ام نیفتاده است. برای اینکه این اتفاق نیفتد کافیست به برج 4 یا 5 ام 1 لگو اضافه کنیم.