

Estimação da amplitude de sinais em calorimetria de altas energias em condições de alta ocupação de eventos no detector

Sarita de Miranda Rimes, Bernardo Sotto-Maior Peralva, Luciano Manhães de Andrade Filho, Augusto Santiago Cerqueira e José Manoel de Seixas

Resumo— Aplicações que têm como foco a estimação de parâmetros podem ser encontradas em diversas áreas do conhecimento. Na calorimetria de altas energias, por exemplo, a amplitude de um sinal conformado corresponde a energia da partícula absorvida. No entanto, em condições de alta luminosidade, o sinal de interesse surge deformado por um efeito de empilhamento de sinais, que possui características não-gaussianas, degradando a eficiência de métodos tipicamente utilizados. Neste trabalho, é proposto um estimador projetado para um ruído que pode ser descrito por um modelo lognormal. Este é comparado com dois métodos lineares comumente utilizados. Sob diferentes condições de operação, os resultados mostram que o estimador projetado para o ruído lognormal apresenta uma melhor eficiência na estimação da amplitude do sinal adquirido pelo calorímetro considerado.

Palavras-Chave— Estimação de parâmetros, filtro ótimo, ruído lognormal, calorimetria de altas energias.

Abstract— Parameter estimation tasks can be found in many applications. In high-energy calorimetry, for example, the amplitude from a conditioned readout signal corresponds to the energy deposited from the particle that generated that signal. However, in high event rate conditions, the received signal may be corrupted from nongaussian noise, degrading the performance from typical methods used for energy estimation. This work presents a estimator that is designed for lognormal noise. The efficiency is compared to other two methods commonly used. Under different operation conditions, the results show that the estimation efficiency achieved using the lognormal design surpasses the other methods for the calorimeter considered in this work.

Keywords— Parameter estimation, Optimal filter, Lognormal noise, High-energy calorimetry.

I. INTRODUÇÃO

Problemas de estimação de parâmetros são comuns em várias áreas das ciências e engenharias. Em tais problemas, usualmente, trabalha-se com equações ou modelos a partir dos quais parâmetros específicos precisam ser estimados para que propriedades e características possam ser estudadas. No

Sarita de Miranda Rimes, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo-RJ, e-mail: smrimes@iprj.uerj.br; Bernardo Sotto-Maior Peralva, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo-RJ, e-mail: bernardo.peralva@uerj.br; Luciano Manhães de Andrade Filho, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFJF, Juiz de Fora-MG, e-mail: luciano.andrade@ufjf.edu.br; Augusto Santiago Cerqueira, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFJF, Juiz de Fora-MG, e-mail: augusto.santiago@ufjf.edu.br; José Manoel de Seixas, Laboratório de Processamento de Sinais, COPPE/POLI - UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, e-mail: seixas@lps.ufrj.br.

âmbito da análise e processamento de sinais, a necessidade de se estimar parâmetros ocorre com grande frequência. Dentro disso, é possível citar exemplos de estudos em áreas como análise de imagens, radares, sonares e comunicações [1].

Tipicamente, a informação de interesse é corrompida por ruído, o qual introduz incertezas na estimação dos parâmetros de interesse. Em condições nas quais essas incertezas podem ser descritas por funções gaussianas, estimadores lineares são amplamente empregados. Por outro lado, quando incertezas de características não-gaussianas estão presentes, tais estimadores fornecem medidas imprecisas e tendenciosas [2]. Entretanto, se a densidade de probabilidade do ruído for conhecida, é possível, neste cenário, obter-se um estimador de mínima variância dos parâmetros de interesse, através da utilização do estimador de máxima verossimilhança [3]. Em alguns casos, a distribuição do ruído pode ser determinada empiricamente e utilizada neste estimador.

A área de física experimental de altas energias lida com enormes desafios de processamento de sinais, visto que os sistemas utilizados operam coletando informação proveniente de colisões de partículas numa alta taxa de eventos. Diversos sistemas são projetados com o intuito de estimar parâmetros específicos das partículas produzidas pelas colisões [6]. Os sistemas de calorimetria, por exemplo, são projetados para absorver e amostrar a energia das partículas que interagem com o material do calorímetro, visando reconstruir a energia depositada em cada canal e inferir a identidade da partícula detectada [4]. Tipicamente, calorímetros modernos possuem milhares de canais de leitura, fornecendo alta resolução espacial na absorção e amostragem da energia da partícula. Além disso, a eletrônica de leitura de cada canal fornece um pulso típico, corrompido por ruído, que é amplificado, conformado e digitalizado para o processamento de estimação de seus parâmetros, tais como a amplitude e a fase [5].

Neste contexto, o principal calorímetro hadrônico do experimento ATLAS (do inglês, *A Toroidal LHC Apparatus*) [6], o Calorímetro de Telhas, ou TileCal, é responsável por amostrar em forma de sinal digital os dados de partículas provenientes das colisões entre os feixes do LHC (do inglês, *Large Hadron Collider*) [7], o maior acelerador de partículas do mundo. Esse sinal, no entanto, é embestado em ruído, o que dificulta a estimação de sua amplitude, parâmetro de interesse que permite determinar a energia de uma partícula.

Visto que o LHC opera com luminosidades cada vez maiores [8], o que pode ser associado a ocupação de sinais

no calorímetro, sinais de colisões adjacentes podem ser observados numa mesma janela de aquisição de um canal de leitura, resultando no efeito conhecido como empilhamento de sinais, que acrescenta ao sinal de interesse componentes não-gaussianas [9]. Tais componentes são formadas por somas de sinais exponenciais, gerando uma distribuição Gamma [10], e podem ser tratadas como ruído adicional, já que, juntamente com o ruído típico proveniente da eletrônica, acabam por deformar o sinal recebido. Atualmente, o método conhecido como OF (do inglês, *Optimal Filter*) é utilizado para estimar a amplitude do sinal, minimizando o ruído. Porém, este método trabalha em seu ponto ótimo apenas para ruídos gaussianos [11], tendo sua eficiência reduzida quando se trata de ruído não-gaussiano.

Com o intuito de mitigar o problema da não-gaussianidade do ruído, no presente trabalho é proposto um método baseado no MLE (do inglês, *Maximum Likelihood Estimation*) [12], utilizando-se uma distribuição lognormal para caracterizar o ruído, já que esta se assemelha à Gamma [13] e exige cálculos menos complexos para a estimação de seus parâmetros. Esta modelagem visa encontrar um modelo mais correto do ruído presente em condições de empilhamento de sinais.

A próxima seção descreve o problema de estimação presente no TileCal e seu método de estimação atual. Na Seção III, os métodos baseados no MLE são apresentados, destacando suas vantagens e desvantagens no que tange ao modelo do ruído. Os resultados são mostrados na Seção IV, em que diversas condições de operação são analisadas. Por fim, as conclusões são apresentadas na Seção V.

II. ESTIMAÇÃO EM CALORIMETRIA

Nesta seção, são apresentados o ambiente a partir do qual os dados utilizados nas simulações foram gerados e o método de estimação atualmente utilizado.

A. O Calorímetro TileCal

O Calorímetro de Telhas (TileCal) é o principal calorímetro hadrônico do experimento ATLAS. Com formato cilíndrico e altamente segmentado, o TileCal é composto por aproximadamente 10.000 canais de leitura. A eletrônica de leitura de cada canal gera um pulso conformado, que é digitalizado numa taxa de 40 MHz, e sua amplitude é proporcional a energia depositada no respectivo canal [14]. Dessa forma, a partir da estimação da amplitude do sinal, a energia pode ser recuperada. A Figura 1(a) mostra o modelo do sinal produzido, o qual é formado por amostras discretas em intervalos de 25 ns, compondo uma janela de leitura de 150 ns (7 amostras).

Devido ao aumento do número de interações por colisão no LHC, sinais de colisões adjacentes podem ser observados numa mesma janela de leitura do TileCal, causando o fenômeno indesejado de empilhamento de sinais. A Figura 1(b) ilustra o efeito de empilhamento de dois sinais dentro de uma mesma janela de leitura. Aqui, o sinal de interesse é aquele que se encontra com o pico em $t = 0$, mas, antes que ele possa ser completamente amostrado, um segundo sinal, com a quarta amostra em $t = 50$, é recebido, formando o sinal resultante observado.

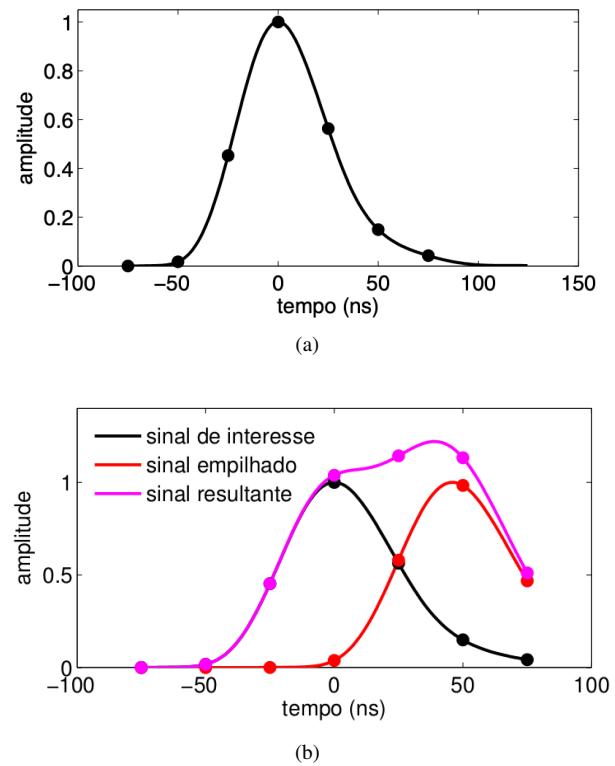


Fig. 1. (a) Pulso analógico do TileCal descrito em amostras digitais e (b) Sinais recebidos sobrepostos devido ao empilhamento.

O efeito de empilhamento de sinais modifica o ruído presente no sinal de interesse, degradando a eficiência de métodos tipicamente utilizados para a estimação de sua amplitude. Desta forma, a caracterização do ruído em condições de empilhamento e o desenvolvimento de métodos computacionais podem ser utilizados, com o intuito de diminuir ao máximo o efeito do ruído de empilhamento na estimação da amplitude do sinal de interesse.

B. Filtro Ótimo

Atualmente, é utilizado no TileCal o método chamado de Filtro Ótimo, ou OF (do inglês, *Optimal Filter*), um algoritmo que, a partir das amostras digitais, minimiza o ruído presente, estimando a amplitude do sinal [11]. Nesta abordagem, a amplitude do sinal de interesse é dada pela soma ponderada entre as amostras digitais recebidas e os coeficientes $w[k]$ do OF, como descrito pela equação (1).

$$\hat{A}_{OF} = \sum_{k=0}^{N-1} w[k]r[k], \quad (1)$$

sendo o sinal recebido $r[k]$ representado pela seguinte equação:

$$r[k] = As[k] - A\tau\dot{s}[k] + n[k] + ped, \quad (2)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ é o instante de amostragem e N , o número total de amostras (7, neste caso). O parâmetro A é a amplitude que se deseja estimar, $s[k]$ são as amostras do pulso de referência e $\dot{s}[k]$ a sua derivada, uma aproximação linear para a fase do pulso, τ . Já $n[k]$ é o ruído total em cada

amostra e *ped* se refere ao pedestal, que corresponde a uma linha de base para a medida da amplitude.

O OF tem como objetivo a minimização da variância na estimativa do parâmetro de interesse, o que faz com que este método seja altamente eficaz quando se tratando de ruídos gaussianos. Os coeficientes do filtro são calculados aplicando-se ao processo de otimização as três restrições descritas pela equação (3).

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} w[k]s[k] &= 1 \\ \sum_{k=0}^{N-1} w[k]\dot{s}[k] &= 0 \\ \sum_{k=0}^{N-1} w[k] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Tais restrições são eficientes para minimizar os efeitos das flutuações da fase e da linha de base do sinal. No entanto, acabam por aumentar a variância do estimador, o que torna menos acurada a estimativa da amplitude.

III. ESTIMADORES BASEADOS NA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

O MLE é um método que tem como foco a estimativa do valor do parâmetro de interesse que maximiza a função densidade de probabilidade, ou PDF (do inglês, *Probability Density Function*), utilizada [1]. A equação (4) mostra matematicamente este raciocínio, através da derivada parcial da função.

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}|\hat{A}_{mle})}{\partial A} = 0, \quad (4)$$

onde \mathbf{r} é o vetor que corresponde ao processo que está sendo modelado e A é o parâmetro de interesse. No caso deste trabalho, \mathbf{r} representa todas as amostras do sinal completo (sinal + ruído) e o parâmetro no qual se está interessado é a amplitude.

Devido ao complexo sistema de calibração do TileCal, responsável por sua eletrônica de leitura, no MLE, o pedestal é subtraído assim que as amostras digitais são recebidas e a fase do sinal pode ser considerada nula ($\tau = 0$). Dessa forma, a partir da equação (2), tem-se:

$$r[k] = As[k] + n[k] \quad (5)$$

A. MLE Gaussiano

O MLE com o uso de uma função densidade de probabilidade gaussiana pode ser aplicado quando deseja-se modelar o problema de acordo com uma distribuição Normal. A equação (6) mostra a PDF gaussiana utilizada para essa abordagem [15].

$$p(\mathbf{n}) = \frac{1}{|\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu})}{2}\right] \quad (6)$$

onde $\mathbf{n} = \mathbf{r} - As$ é o vetor das $N = 7$ amostras de ruído, \mathbf{C} é a matriz de covariância e $\boldsymbol{\mu}$ é um vetor nulo, por se tratar de

uma distribuição linear. Quando a equação (6) é derivada com relação a A e igualada a zero, obtém-se uma expressão fechada para a estimativa da amplitude, \hat{A}_{gauss} , que é mostrada na equação (7).

$$\hat{A}_{gauss} = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s}}{\mathbf{s}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s}}. \quad (7)$$

B. MLE Lognormal

Em colisionadores de partículas, o empilhamento de sinais pode ser tratado como uma soma de sinais exponenciais, tendo como resultado um ruído que pode ser descrito por uma distribuição Gamma [10]. No entanto, a obtenção dos parâmetros da função Gamma com múltiplas variáveis é uma tarefa bastante complexa. Uma função cuja parametrização é bem mais simples e que se assemelha a esta é a Lognormal [13]. Nesta última, toda a informação está contida na matriz de covariância entre as amostras, após a aplicação de uma função logarítmica nas mesmas. A PDF desta função é descrita pela equação (8) [16].

$$p(\mathbf{n}) = B \exp\{C\}, \quad (8)$$

onde

$$B = \frac{1}{\left(\prod_{k=0}^{N-1} n[k]\right) |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{N}{2}}}$$

e

$$C = \frac{-[\ln(\mathbf{n}) - \boldsymbol{\mu}]^T \mathbf{C}^{-1} [\ln(\mathbf{n}) - \boldsymbol{\mu}]}{2}.$$

Quando a derivada parcial, em A , da equação (8) é igualada a zero, não é possível encontrar uma fórmula fechada para estimar a amplitude $\hat{A}_{lognormal}$. Portanto, é necessário que algum método numérico seja aplicado para resolver o problema. Neste trabalho, optou-se por utilizar um recurso baseado em *busca exaustiva*. Assim, A foi variado percorrendo-se uma faixa de valores que são definidos tendo como base a amplitude estimada pelo método MLE Gaussiano. A amplitude estimada que resultou no maior valor para a PDF foi escolhida como a amplitude do sinal.

IV. RESULTADOS

Esta seção apresenta o conjunto de dados e a análise de eficiência dos métodos descritos anteriormente, operando em diferentes condições de empilhamento de sinais, considerando o calorímetro TileCal. Os resultados referentes à estimação da amplitude e aos parâmetros associados ao erro de estimação são apresentados em contagens de ADC (do inglês, *Analog to Digital Converter*). Vale ressaltar que o TileCal possui sistemas de calibração altamente eficientes [17] para medir os fatores de conversão de contagens de ADC para MeV (do inglês, *Mega electron-Volt*), unidade tipicamente utilizada em física de altas energias.

A. Banco de dados

No TileCal, o ruído eletrônico é tipicamente modelado por uma função gaussiana de média zero e desvio padrão 1,5 contagens de ADC. O ruído de empilhamento, no entanto, é dependente das condições de operação do LHC e da posição espacial do canal de leitura no calorímetro. Para simular o ruído de empilhamento, uma distribuição exponencial foi utilizada [18], devido ao fato de que os sinais do TileCal possuem assinatura exponencial [19].

Com o intuito de estudar o método proposto de forma abrangente, foram estudadas condições de ocupação de 0% a 100%. A ocupação é a probabilidade de um canal receber um sinal proveniente de uma colisão. Quanto maior essa probabilidade, maior a chance de que um canal receba um segundo sinal antes de amostrar completamente um primeiro, produzindo empilhamento de sinais.

Vale ressaltar que, para cada condição de ocupação, 30 conjuntos distintos de sinais de ruído, contendo cada um um total de 100.000 sinais, foram gerados, sob as mesmas condições de simulação. Cada conjunto foi dividido em dois conjuntos de 50.000 sinais cada, sendo um conjunto, chamado de conjunto de desenvolvimento, destinado para a estimativa dos parâmetros do ruído utilizados nos métodos avaliados (PDF do ruído) e o outro, o conjunto de teste, utilizado para verificar a generalização e para a análise de eficiência. Foi gerado, ainda, um conjunto de 50.000 sinais (dos quais a amplitude deverá ser estimada) segundo uma distribuição exponencial de média igual a 100 contagens de ADC, o qual foi imerso no conjunto de teste de ruído.

B. Caracterização do ruído

A escolha do método de estimativa da amplitude do sinal recebido está fortemente associada à descrição do ruído, visto que o objetivo é minimizar a incerteza na estimativa do parâmetro de interesse. Como todas as 7 amostras de ruído apresentam distribuições semelhantes, a primeira do conjunto de desenvolvimento foi selecionada para descrever o ruído nas diferentes condições de ocupação propostas e analisar o modelo. As funções gaussianas e lognormal foram testadas e o valor do parâmetro χ^2 [20] dividido pelo número de graus de liberdade (representado por ndf), referente ao ajuste da função no histograma, foi utilizado para ter-se uma percepção da qualidade do ajuste. Quanto mais próximo da unidade é o valor de χ^2/ndf , melhor é o ajuste da função nos dados.

A Figura 2(a) mostra o ajuste das curvas normal e lognormal ao ruído na condição de 80% de ocupação. Pode ser observado o melhor ajuste da função lognormal quando comparada à função gaussiana, enfatizando a não-gaussianidade do ruído em condições de empilhamento de sinais. A Figura 2(b) mostra o comportamento do parâmetro χ^2/ndf para os diferentes valores de ocupação. Nota-se que até uma ocupação de aproximadamente 30% a função normal apresenta uma piora no ajuste aos dados devido à presença do ruído de empilhamento de sinais. A partir deste ponto, o ajuste começa a melhorar, devido ao teorema do limite central [20]. Para o caso da função lognormal, o ajuste melhora em função da ocupação, uma

vez que a soma de exponenciais provenientes do ruído de empilhamento se aproxima mais deste modelo.

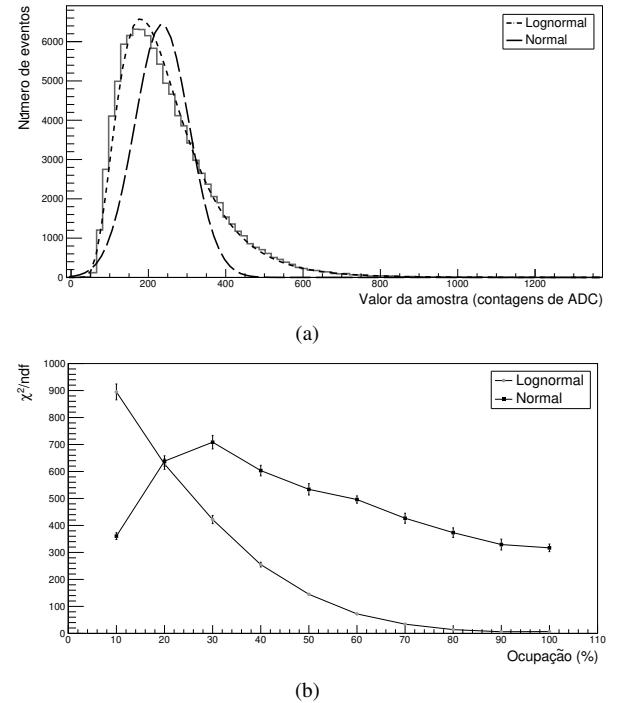


Fig. 2. (a) Histograma do ruído, com ajuste das funções Lognormal e Normal considerando a condição de 80% de ocupação, e (b) parâmetro χ^2/ndf para toda a faixa de ocupação, comparando os ajustes com as funções Normal e Lognormal.

C. Análise de eficiência

Para avaliar a eficiência de estimação dos métodos descritos neste trabalho, a média e o desvio padrão do erro de estimação foram utilizados como parâmetros, considerando o conjunto de teste com 50.000 observações. O erro de estimação é calculado subtraindo-se o valor estimado pelo método e o valor conhecido da simulação. A Figura 3 mostra os histogramas dos erros de estimação para os três métodos abordados neste trabalho, considerando a condição de 80% de ocupação. Pode-se observar que o método OF apresenta uma dispersão maior, e o método MLE Lognormal mostra um desempenho levemente superior ao MLE Gaussiano.

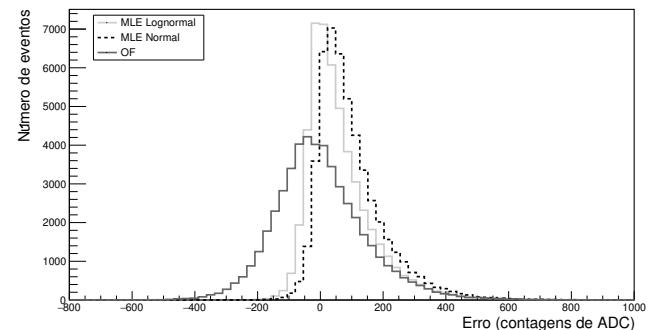


Fig. 3. Histograma do erro de estimação para todos os métodos, considerando a condição de 80% de ocupação.

As Figuras 4(a) e 4(b) mostram, respectivamente, os gráficos de média e desvio padrão dos erros para os três métodos estudados, considerando toda a faixa de ocupação (0% a 100%). As barras de erro em ambas as figuras foram definidas a partir do cálculo do desvio padrão de cada medida, considerando os 30 arquivos gerados para cada ocupação, e é importante ressaltar que todas foram aumentadas em um fator de 5, para que a visualização fosse facilitada. Na Figura 4(a) nota-se que a média para o MLE Lognormal é menor do que para o MLE Gaussiano, indicando uma menor tendência na medida da amplitude. Esse valor pode ser parametrizado e subtraído durante a aplicação dos métodos baseados no MLE. O método OF não apresenta uma tendência, devido às restrições impostas no procedimento de otimização que computa os coeficientes do método. Visto que o ruído possui somente a componente gaussiana para a ocupação de 0%, o método MLE Gaussiano e o método OF apresentam um desempenho melhor para esta condição (menor desvio padrão do erro de estimação), como mostra a Figura 4(b). A medida que a ocupação aumenta, o desempenho do método MLE Lognormal parece superar os métodos MLE Gaussiano e OF, em média, em aproximadamente 3% e 20%, respectivamente.

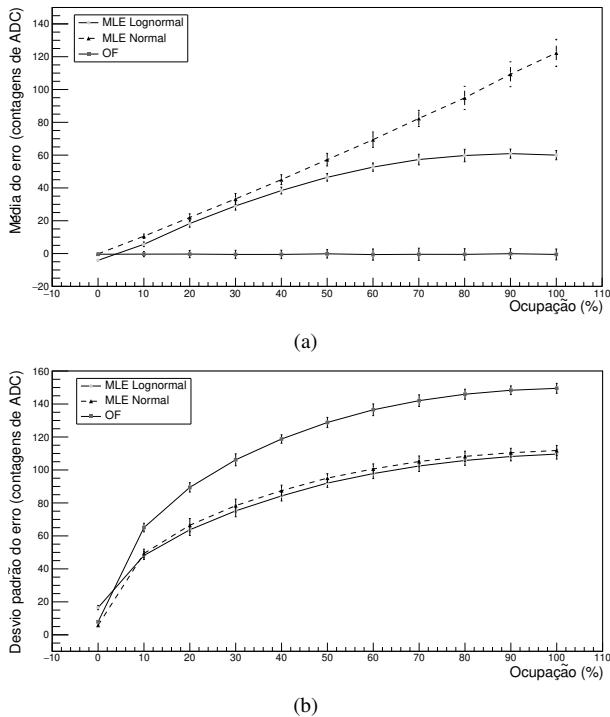


Fig. 4. (a) Média e (b) Desvio padrão dos erros, para todas as ocupações.

V. CONCLUSÕES

Experimentos modernos, como o LHC, visam aumentar a taxa de eventos, buscando ampliar a probabilidade de observação de fenômenos raros. No calorímetro de telhas do ATLAS, no LHC, essa estratégia causa um aumento da ocupação dos canais de leitura deste sistema, dificultando a estimativa da energia da partícula absorvida pelo experimento. Este trabalho mostrou que o efeito de empilhamento de sinais introduz uma

componente adicional ao sinal, que pode ser melhor modelada por uma função lognormal do que por uma função normal, que é tipicamente utilizada. Foi demonstrado que o estimador MLE Lognormal parece apresentar uma eficiência melhor do que o MLE Gaussiano e o método atualmente utilizado, chamado de Filtro Ótimo, que também assume o ruído modelado por uma função gaussiana.

Os trabalhos futuros se concentram no estudo da dependência estatística entre as amostras do ruído, visando otimizar a aplicação do método MLE multivariado, e no emprego de métodos numéricos para a estimativa da amplitude do sinal. Além disso, a aplicação do método MLE Lognormal em dados reais adquiridos durante operação nominal do LHC é prevista.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores agradecem a FAPERJ, CNPq e RENAFAE pelo suporte para sua realização.

REFERÊNCIAS

- [1] Kay, S. M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- [2] Middleton D., *Non-Gaussian noise models in signal processing for telecommunications: new methods and results for class A and class B noise models*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 45, no. 4, pp. 1129-1149, 1999.
- [3] Constable, C. G., *Parameter Estimation in non-Gaussian noise*, Geophysical Journal International, v.94, number 1, pp. 131-142, 1988.
- [4] Wigmans, R. *Calorimetry: Energy Measurement in Particle Physics*, 2nd Edition, Clarendon Press, ISBN: 9780198786351, 2017.
- [5] Kleinkecht, K. *Detector for Particle Radiation*, 2nd Edition, Cambridge University Press, ISBN: 9780521648547, 1998.
- [6] ATLAS Collaboration. *The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider*, JINST, 3:S08003, 2008.
- [7] Evans, L., Bryant, P. *LHC Machine*. JINST 3 S08001, 2008.
- [8] Bruning, O., Rossi, L. *The High Luminosity Large Hadron Collider: The New Machine for Illuminating the Mysteries of Universe*, volume 24. World Scientific, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, 2015.
- [9] Marshall, Z., ATLAS Collaboration. *Simulation of pile-up in the ATLAS experiment*, Journal of Physics: Conference Series, 513(2):022024, 2014.
- [10] Evans, M., Hastings, N., Peacock, B. *Statistical Distributions*, 3a. edição. Wiley, New York, 2000.
- [11] Fullana, E. et. al. Digital Signal Reconstruction in the ATLAS Hadronic Tile Calorimeter. *IEEE Transaction On Nuclear Science*, v. 53, number 4, pp. 2139-2143, 2005.
- [12] Millar, R. B. *Maximum likelihood estimation and inference: with examples in R, SAS and ADMB*, John Wiley & Sons, 2011.
- [13] Johnson, N. L., Kotz, S., Balakrishnan, N. *Continuous Univariate Distributions*, 2a. edição. Wiley, New York, 1995.
- [14] Francavilla, P. The ATLAS Tile Hadronic Calorimeter performance at the LHC. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 404, pp. 012007, 2012.
- [15] Anderson, T. W. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 3a. edição, Wiley-Interscience, New Jersey, 2003.
- [16] Tarmast, G. Multivariate LogNormal Distribution, *ISI Proceedings: 53o. Session Seoul*, 2001.
- [17] Marjanović, M. *ATLAS Tile Calorimeter Calibration and Monitoring Systems*, in *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 66, no. 7, pp. 1228-1235, 2019, doi: 10.1109/TNS.2019.2921941.
- [18] Chapman, J. ATLAS simulation computing performance and pile-up simulation in ATLAS. *Presented at the LPCC Detector Simulation Workshop*, Geneva, Switzerland, 2011.
- [19] Khandai, P. K., Sett, P., SHUKLA, P., et al. Hadron Spectra in p+p Collisions at RHIC and LHC Energies. *International Journal of Modern Physics A*, v. 28, n. 16, pp. 1350066, 2013.
- [20] Papoulis, A., Pillai, S. U. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 2002.