

中山大学本科生期末考试
考试科目:《数学物理方法》(A 卷)

学年学期: 2019 学年第 1 学期

学 院: 物理学院

考试方式: 闭卷

考试时长: 120 分钟

姓 名: _____

学 号: _____

年级专业: _____ 18 级 物理

班 别: _____

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位。”

—————以下为试题区域,共三道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答—————

一、选择题 (请将正确答案的序号填写在答题纸上. 共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.)

1. 已知一解析函数的实部为 $u(x, y) = 2x - y$, 则该解析函数可能是
A) $(2+i)z + 3i$ (B) $(2-i)z$ (C) $2z + i\bar{z} + 2i$ (D) $2z - i\bar{z}$
2. 已知变上限积分 $\int_1^z d\zeta (a/\zeta - 1/\zeta^{2n+1}) \cos \zeta$ ($z \neq 0$ 且积分路径不经过 $\zeta = 0, n \in \mathbb{N}$) 是 z 的单值函数, 则
A) $a = 0$ (B) $a = (-)^n/(2n)!$ (C) $a = 1/(2n)!$ (D) $a = (-)^n(2n)!$
3. 将函数 $1/\cosh(\pi z)$ 以 $a = 0$ 为中心展开为 Taylor 级数, 则该级数的收敛半径 R 为
A) 2 (B) 1 (C) $1/2$ (D) $+\infty$
4. $z = 0$ 是函数 $1/\sin(1/z)$ 的什么奇点?
A) 本性奇点 (B) 可去奇点 (C) 单极点 (D) 非孤立奇点
5. $x = 0$ 是方程 $x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$ (其中 a, b, c 是非零常数) 的
A) 单极点 (B) 本性奇点 (C) 常点 (D) 正则奇点
6. 对于本征值问题 $y'' + 2y'/x + (\lambda - 2/x^2)y = 0$ ($0 < x < a < +\infty$), $y(0) = y(a) = 0$, 对应于不同本征值的本征函数有正交关系
A) $\int_0^a y_m(x)y_n(x)dx = 0$ (B) $\int_0^a xy_m(x)y_n(x)dx = 0$ (C) $\int_0^a x^2y_m(x)y_n(x)dx = 0$
(D) $\int_0^a x^{-2}y_m(x)y_n(x)dx = 0$
7. 弹性均匀细杆, 在纵振动过程中, 其一端受到已知拉力 $F(t)$ 的作用, 则 $F(t)$ 在定解问题中表现为
A) 第一类边界条件 (B) 第二类边界条件 (C) 第三类边界条件 (D) 方程中的非齐次项
8. 上半平面的 Laplace 方程 $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ 在对 x 作 Fourier 变换 $\mathcal{F}[u(x, y)] = U(k, y)$ 后成为
A) $d^2U/dy^2 - k^2U = 0$ (B) $d^2U/dy^2 + k^2U = 0$ (C) $d^2U/dk^2 - k^2U = 0$ (D) $d^2U/dk^2 + k^2U = 0$

二、填空题 (共 2 小题, 各小题分数依次为 10 分、15 分, 共 25 分.)

1. 球坐标系中, 轴对称边界条件下, Laplace 方程的一般解是 (1) $u(r, \theta) =$ _____. 考虑球内的定解问题, 设球面上 $u|_{r=a} = u_0 \cos 2\theta$, 其中 u_0 为常数, 则球内 (2) $u(r, \theta) =$ _____.
2. 考虑球内的定解问题 $\nabla^2 u = 0$ ($r < a$), $u|_{r=a} = f(\theta, \phi)$. 相应的 Green 函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 满足的定解问题是
(1) _____, 该 Green 函数为 (2) _____.

三、计算题 (共 2 小题, 各小题分数依次为 15 分、20 分, 共 35 分.)

1. 计算积分 $I = \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{1 + 2p \cos \varphi + p^2} d\varphi$, 其中 $0 < p < 1, n \in \mathbb{N}$.
2. 均匀导热细杆, 长为 l , 侧面绝热, 左端保持温度为零度, 右端温度为时间的已知函数 At , 其中 A 为常数, 初始时杆上各点温度均为零度, 求以后的温度分布 $u(x, t)$.