中山大学理工学院 2010 学年 1 学期期末
数学物理方法 试卷 (A)

09 年级　物理、临床医学、理工逸仙班 专业　姓名：________ 学号：________

老师姓名：林琼桂

考试成绩：

一、选择题（在正确答案前打 √，每题只有一个正确答案．每题 5 分，共 35 分．）

1. 如果 $f(z)$ 是 z 平面上的解析函数，则可以断定

(A) $f(z)=$ 常数　(B) $|f(z)|=$ 常数　(C) 当 $z\to\infty$，$f(z)\to\infty$　(D) $\forall$ 围线 C，有 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$

2. 在推导弦的横振动方程时曾作了若干物理上的简化假设，下面哪一项不在这些假设中？

(A) 振动发生在一固定平面内　(B) 弦是完全柔软的　(C) 弦的两端是固定的　(D) 振动幅度很小

3. 在柱形细管扩散问题中，单位时间内有质量为 $q(t)$ 的杂质流入其开放端，则 $q(t)$ 在定解问题中表现为

(A) 第一类边界条件　(B) 第二类边界条件　(C) 第三类边界条件　(D) 方程中的非齐次项

4. 无界细杆的热传导方程 $\partial u/\partial t-a^2\partial^2u/\partial x^2=0$ 在对 x 作 Fourier 变换 $\mathscr{F}[u(x,t)]=U(k,t)$ 后成为

(A) $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t+k^2a^2U=0$　(B) $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t-k^2a^2U=0$　(C) $\mathrm{d}U/\mathrm{d}k+k^2a^2U=0$　(D) $\mathrm{d}U/\mathrm{d}k-k^2a^2U=0$

5. $x=0$ 是常微分方程 $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$（其中 λ 是常数）的

(A) 常点　(B) 正则奇点　(C) 非正则奇点　(D) 极点

6. 用 Gree[illegible]法求解区域 D 上的 Laplace 方程定解问题 $\nabla^2u(r)=0$（其中 $r\in D$），$u|_{r\in\partial D}=\varphi(r)$，相应的 Green 函数 $G(r,r_0)$ 应该满足定解问题

(A) $\nabla^2G(r,r_0)=-\delta(r-r_0)$，$G|_{r\in\partial D}=-\delta(r-r_0)$　[illegible] $^2G(r,r_0)=-\delta(r-r_0)$，$G|_{r\in\partial D}=0$

(C) $\nabla^2G(r,r_0)=0$，$G|_{r\in\partial D}=-\delta(r-r_0)$　[illegible] $^2G(r,r_0)=0$，$G|_{r\in\partial D}=0$

7. 用镜像法求解半径为 a 的球内 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数，在球内 r_0 处放置点电荷 ϵ_0，则应该在球外对称的位置 $r_0'=(a/r_0)^2r_0$ 处放置像电荷，其电量 Q 为

(A) $Q=-\epsilon_0$　(B) $Q=-(r_0/a)\epsilon_0$　(C) $Q=-(a/r_0)\epsilon_0$　(D) 以上三项都不对

二、填空题（答案直接填在下面空白处．每题 15 分，共 30 分．）

1. 在 $z=0$ 附近将 $f(z)=\mathrm{e}^{1/(2-z)}$ 展开为 Taylor 级数至 z^3，结果是

(1) $f(z)=$ $e^{\frac{1}{2}}(1+\frac{z}{4}+\frac{3}{32}z^2+\frac{13}{384}z^3)$

该 Taylor 级数的收敛半径为 (2) $R=$ 2

2. 球坐标系中，轴对称边界条件下，Laplace 方程的一般解是

$(A_0+B_0)(2x^2-1)$?

(1) $u(r,\theta)=$ $\sum_{l=0}^{\infty}[A_l r^l+B_l(\frac{1}{r})^{l+1}]P_l(\cos\theta)$.

考虑球内的定解问题，设球面上 $u|_{r=a}=u_0\cos2\theta$，[illegible]．

$\cancel{P_0=1.\ P_1=x.\ P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)}$

$\cancel{\frac{4}{3}P_2+\frac{2}{3}P_0}$

(2) $u(r,\theta)=$ $\sum_{l=0}^{\infty}A_l(\frac{r}{a})^lP_l(x)=u_0(2x^2-1)$.

三、计算题（在答题纸上解答．共 35 分．）

$A_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}u_0[illegible]u(x)\,dx$

1. 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+2p\cos\varphi+p^2}$（其中 $0<p<1$）．（15 分）

$\int_{|z|=1}[illegible]\frac{1}{[illegible]+p(z^2+1)}dz$　$z=-p/-\frac{1}{p}$　$z=-\frac{1}{p}$　$2\pi i\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot 2p}=\frac{2\pi p}{-p^2+1}$

2. 求解弦振动问题．设弦长为 l，两端固定．弦受到强迫力，使波动方程中[illegible]齐次项 $f(x,t)=f_0\sin(\pi x/l)\mathrm{e}^{-\alpha t}$，其中 f_0 和 $\alpha>0$ 均为常数．已知初始位移 $\varphi(x)=0$，初始速度 $\psi(x)=\psi_0\delta(x-x_0)$，其中 ψ_0 和 x_0 为常数，且 $0<x_0<l$．（20 分）

$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f(x,t)$.　$u=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$.　$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f_0\sin\frac{\pi x}{l}e^{-\alpha t}$

$u|_{x=0}=0$.. $u|_{x=l}=0$　$T''+a^2T(t)(\frac{n\pi}{l})^2=f_0e^{-\alpha t}$　$f_{n\neq1}=0,\ f_1=f_0e^{-\alpha t}$

学号：________ 姓名：________ 成绩：________ 教师签字：________

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位."

一、选择题（每题 5 分，共 35 分．每题只有一个正确答案．请直接在正确选项前打 √．）

1. 对于在挖去本性奇点z_0而形成的环域上的解析函数$f(z)$，如果把它在环内一点z_1的去心邻域展开成 Laurent级数，则该级数 (A) 无负幂项；(B) 有有限个负幂项；(C) 有无限个负幂项；(D) 不收敛．

2. 某区域上的解析函数为实函数，则它 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}=0$

(A) 必为零；(B) 必为常数；(C) 一阶导数不为零；(D) 二阶导数不为零．

3. $x=0$ 是常微分方程 $(1-x)xy''+3xy'+(1-x^2)y=0$ 的 $\frac{3x}{1-x}$ $\frac{1-x^2}{1-x}$

(A) 常点；(B) 正则奇点；(C) 非正则奇点；(D) 可去奇点．

4. 两端与外界绝热的导热细杆，中点保持与恒温物体接触，则此物体在定解问题中表现为

(A) 第一类边界条件；(B) 第二类边界条件；(C) 第三类边界条件；(D) 初始条件．

5. 下列哪个值可以做为本征值问题 $T''-\lambda T=0$，$T(0)=0$, $T(t_0)=0$ 的本征值 λ？

(A) π^2/t_0^2；(B) $2\pi^2/t_0^2$；(C) $-\pi^2/t_0^2$；(D) $-2\pi^2/t_0^2$． $-\lambda>0$ $\lambda<0$

6. $z=1$ 是函数 $f(z)=e^{1/(z-1)}$ 的 $\lim_{z\to1^+}$ $\lim_{z\to1^-}$ (A) 一阶极点；(B) 可去奇点；(C) 非孤立奇点；(D) 本性奇点．

7. 设复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析，则 D 内的曲线 $u(x,y)=c_1$ 和曲线 $v(x,y)=c_2$ 在交点处

(A) 夹角为锐角；(B) 夹角为钝角；(C) 夹角为直角；(D) 需要看具体函数才能确定．

二、填空题（答案直接填在下面空白处．每小题 6 分，共 30 分．请不要把答案写在答题纸上．）

1. 考虑复变函数 $f(z)=1/(z^2+a^2)(z^2+b^2)$，（其中 $a,b>0$，且 $a\neq b$）．$f(z)$ 在上半平面的奇点及类型分别是 (1) ~~$\pm a$~~ ai bi 都为一阶极点；$f(z)$ 在这些奇点处的留数分别是

(2) $\frac{\frac{1}{b^2-a^2}}{2ai}$ $\frac{\frac{1}{a^2-b^2}}{2bi}$ $=\frac{\frac{1}{b^2-a^2}}{2ai}$, $\frac{\frac{1}{a^2-b^2}}{2bi}$；利用留数定理求实变积分 $I=\int_0^\infty f(x)dx$，结果是 (3) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$．

$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}$ $=\pi i[\mathrm{Res}f(ai)+\mathrm{Res}f(bi)]$ $=\frac{\pi}{a^2-b^2}[-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}]$

2. 考虑四分之一空间的定解问题 $\nabla^2u=0,(0<x<+\infty,0<y<+\infty,-\infty<z<+\infty),u\big|_{x=0}=f(y,z),u\big|_{y=0}=g(x,z)$．

相应的 Green 函数的定解问题是

(1) $\vec{r}-\vec{r_0}$ $(0<x<\infty, \ldots)$ $G(\vec{r},\vec{r_0})\big|_{x=0}=0$, $G(\vec{r},\vec{r_0})\big|_{y=0}=0$；

该 Green 函数为

(x_0,y_0) $(-x_0,y_0)$ $(x_0,-y_0)$ $(-x_0,-y_0)$

(2) $G=\frac{1}{4\pi R_1}-\frac{1}{4\pi R_2}-\frac{1}{4\pi R_3}+\frac{1}{4\pi R_4}$．

三、计算题（在答题纸上解答．共 35 分．）

1.（15 分）求解球内 Laplace 方程定解问题（其中 a 是球的半径）：$\nabla^2u=0,(r<a)$，$u\big|_{r=a}=\cos^2\theta$．

2.（20 分）长为 l 的柱形管，$x=l$ 端封闭，$x=0$ 端开放．管外空气中含有某种杂质气体，其浓度为 u_0，向管内扩散．设初始时刻管内空气不含该种杂质气体，求以后各时刻该气体在管内的浓度 $u(x,t)$．

初始条件仅有一个． $u\big|_{x=0}=u_0$ $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=l}=0$

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位."

中山大学理工学院 2012 学年 1 学期期末
数学物理方法 试卷 (A)

11 年级　　物理 专业　　姓名：________　学号：________

老师姓名：林琼桂　　考试成绩：

一、选择题（在正确答案前打 √，每题只有一个正确答案. 每题 5 分，共 35 分.）

1. 已知一解析函数的实部为 $u(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\cos y$，则其虚部可能是

(A) $\mathrm{e}^{x}\sin y$　(B) $-\mathrm{e}^{x}\sin y$　(C) $\mathrm{e}^{-x}\sin y+1$　(D) $-\mathrm{e}^{-x}\sin y+2$

2. $z=0$ 是函数 $z\sin(1/z^2)$ 的

(A) 本性奇点　(B) 一阶极点　(C) 二阶极点　(D) 非孤立奇点

3. 函数 $\cos[(z^2-9)/(z^2-4)]$ 可以在下列哪个区域内展开为 Taylor 级数或 Laurent 级数？

(A) $|z-2|<4$　(B) $0<|z-2|<2$　(C) $|z|<3$　(D) $|z-3|<2$

4. 已知 $f(z)$ 在 $0<|z|<4$ 内解析，则可以肯定

(A) $\int_{|z|=1} f(z)\,dz\neq 0$ (B) $f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\,dz$ (C) $f(2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-2|=1}\frac{f(z)}{z-2}\,dz$ (D) $\int_{|z|=1} f(z)\,dz=0$

5. 弹性均匀细杆，在纵向振动过程中，其一端与弹簧连接，则弹簧的作用在定解问题中表现为

(A) 方程中的非齐次项　(B) 第一类边界条件　(C) 第二类边界条件　(D) 第三类边界条件

6. 长直细管内的扩散方程 $\partial u/\partial t-a^2\partial^2u/\partial x^2=0$ 在对 x 作 Fourier 变换 $\mathscr{F}[u(x,t)]=U(k,t)$ 后成为

(A) $\mathrm{d}U/\mathrm{d}k+k^2a^2U=0$　(B) $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t+k^2a^2U=0$　(C) $\mathrm{d}U/\mathrm{d}k-k^2a^2U=0$　(D) $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t-k^2a^2U=0$

7. 某均匀导热球，球面绝热，球内有稳定热源，热传导方程为 $\partial u/\partial t-a^2\nabla^2u=f(r)$，为使球内的温度分布在长时间后达到稳定，从物理上判断，应该要求

(A) $f(r)$ 为常数 (B) $f(r)$ 为常数且初始温度分布均匀 (C) $\int_{球} f(r)\,\mathrm{d}r=0$ (D) 只当 $f(r)\equiv 0$ 才能达到稳定

二、填空题（答案直接填在下面空白处. 每题 15 分，共 30 分.）

2. 球坐标系中，轴对称边界条件下，Laplace 方程的一般解是

(1) $u(r,\theta)=$ ________

考虑球内的定解问题，设球面上 $u|_{r=a}=u_0\sin^2\theta$，则球内

(2) $u(r,\theta)=$ ________

2. 考虑 1/4 空间的定解问题 $\nabla^2u=0\ (x>0,y>0,-\infty<z<+\infty)$，　$u|_{x=0}=g(y,z)$，　$u|_{y=0}=f(x,z)$. 相应的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 满足的定解问题是

(1) ________

该 Green 函数为

(2) ________

三、计算题（在答题纸上解答. 共 35 分.）

1. 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+2p\sin\varphi+p^2}$（其中 $0<p<1$）.（15 分）

2. 考虑细杆的热传导问题. 设杆长为 l，杆侧面绝热，左端保持零度，右端绝热. 杆上有热源分布，使热传导方程中出现非齐次项 $f(x,t)=f_0\sin(\pi x/2l)\mathrm{e}^{-\alpha t}$，其中 f_0 和 $\alpha>0$ 均为常数，且 $\alpha\neq(\pi a/2l)^2$. 已知初始时杆上的温度分布为 $u_0\sin(3\pi x/2l)$，其中 u_0 是常数. 求 $t>0$ 时杆上的温度分布 $u(x,t)$.（20 分）

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位."

中山大学理工学院 2013 学年 2 学期期末
数学物理方法 试卷 (A)

12 年级　　物理、临床医学 专业　　姓名：＿＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿＿

老师姓名：林琼桂

考试成绩：

一、选择题（在正确答案前打 √，每题只有一个正确答案. 每题 5 分，共 40 分.）

1. 已知一解析函数的实部为 $u(x,y)=\mathrm{e}^y\cos x$，则其虚部可能是

(A) $\mathrm{e}^y\sin x$　(B) $-\mathrm{e}^y\sin x+1$　(C) $\mathrm{e}^{-y}\cos x$　(D) $\mathrm{e}^{-y}\sin x$

2. 将函数 $1/(1-z+z^2)$ 以 $a=0$ 为中心展开为 Taylor 级数，则该级数的收敛半径 R 满足

(A) $R<1$　(B) $R>1$　(C) $R=1$　(D) 难以算出通项，无法确定.

3. 用分离变量法求解一维波动或热传导问题时，如果方程与定解条件均非齐次，则首先应该将哪一项齐次化?

(A) 边界条件　(B) 方程　(C) 初始条件　(D) 以上三项中至少两项.

4. 考虑一维金属细杆的热传导问题，细杆上有直流电流 I 通过，则 I 在定解问题中表现为

(A) 初始条件　(B) 方程中的非齐次项　(C) 第二类边界条件　(D) 第三类边界条件

5. 上半平面的 Laplace 方程 $\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2=0$ 在对 x 作 Fourier 变换 $\mathscr{F}[u(x,y)]=U(k,y)$ 后成为

(A) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}k^2+k^2U=0$　(B) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}k^2-k^2U=0$　(C) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}y^2-k^2U=0$　(D) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}y^2+k^2U=0$

6. 用 Green 函数法求解区域 D 上的 Laplace 方程定解问题 $\nabla^2u(\boldsymbol{r})=0$（其中 $\boldsymbol{r}\in D$），$u|_{\boldsymbol{r}\in\partial D}=\varphi(\boldsymbol{r})$，相应的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 应该满足定解问题

(A) $\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$，$G|_{\boldsymbol{r}\in\partial D}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$　(B) $\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=0$，$G|_{\boldsymbol{r}\in\partial D}=0$

(C) $\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=0$，$G|_{\boldsymbol{r}\in\partial D}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$　(D) $\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$，$G|_{\boldsymbol{r}\in\partial D}=0$

7. 用镜像法求解圆内 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数，在圆内 ρ_0 处放置二维点电荷 ϵ_0，则应该在圆外的对称点（圆的半径为 a）$\rho_0'=(a^2/\rho_0^2)\rho_0$ 处放置二维点电荷

(A) $Q=-\epsilon_0$　(B) $Q=\epsilon_0$　(C) $Q=-(a/\rho_0)\epsilon_0$　(D) $Q=-(\rho_0/a)\epsilon_0$

8. $x=1$ 是常微分方程 $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$（其中 λ 是常数）的

(A) 极点　(B) 本性奇点　(C) 常点　(D) 正则奇点

二、填空题（答案直接填在下面空白处. 共 25 分.）

1. （10 分）在 $z=0$ 附近将 $f(z)=\mathrm{e}^{1/(1+z)}$ 展开为 Taylor 级数至 z^3，结果是

(1) $f(z)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. （15 分）球坐标系中，轴对称边界条件下，Laplace 方程的一般解是

(1) $u(r,\theta)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

考虑球内的定解问题，设球面上 $u|_{r=a}=u_0(\cos 2\theta-1)$，则球内

(2) $u(r,\theta)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

三、计算题（在答题纸上解答. 共 35 分.）

1. 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-2p\cos\varphi+p^2)^2}$（其中 $0<p<1$）.（15 分）

2. 弹性均匀细杆，长为 l，$x=0$ 端固定，$x=l$ 端被压缩至 $x=l-d$（其中 d 不超过弹性限度）并保持静止. 在 $t=0$ 时突然放开该端. 求解 $t>0$ 时的位移函数 $u(x,t)$.（20 分）

中山大学本科生期末考试

考试科目:《数学物理方法》(A 卷)

学年学期:	2016 学年第 1 学期	姓　名:	
学　院:	物理学院	学　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	15 级　物理
考试时长:	120 分钟	班　别:	

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:"考试作弊者,不授予学士学位."

———以下为试题区域,共三道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答———

一、选择题(请直接在下面 √ 出正确答案. 共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.)

1. 已知一解析函数的实部为 $u(x,y)=x+y$,则该解析函数可能是

(A) $(1-\mathrm{i})z+2\mathrm{i}$　(B) $(1+\mathrm{i})z$　(C) $z+\mathrm{i}\bar{z}$　(D) $z-\mathrm{i}\bar{z}$

2. 已知变上限积分 $\int_{z_0}^{z}\mathrm{d}\zeta(\mathrm{e}^{\zeta}+a\cos\zeta)/\zeta$ 是 z 的单值函数,则

(A) $a=1$　(B) $a=-1$　(C) $a=0$　(D) a 可以是任意常数

3. 将函数 $1/(1-z-z^2)$ 以 $a=-1/2$ 为中心展开为 Taylor 级数,则该级数的收敛半径 R 为

(A) 1　(B) $\sqrt{7}/2$　(C) $\sqrt{5}/2$　(D) $\sqrt{3}/2$

4. $z=0$ 是函数 $\cot z/z^2$ 的

(A) 本性奇点　(B) 一阶极点　(C) 二阶极点　(D) 三阶极点

5. 上半平面的 Laplace 方程 $\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2=0$ 在对 x 作 Fourier 变换 $\mathscr{F}[u(x,y)]=U(k,y)$ 后成为

(A) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}k^2+k^2U=0$　(B) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}k^2-k^2U=0$　(C) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}y^2+k^2U=0$　(D) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}y^2-k^2U=0$

6. 弹性均匀细杆,在纵振动过程中,其一端受到已知拉力 $F(t)$ 的作用,则 $F(t)$ 在定解问题中表现为

(A) 方程中的非齐次项　(B) 第一类边界条件　(C) 第二类边界条件　(D) 第三类边界条件

7. 长为 l 的均匀导热细杆,两端和侧面均绝热,杆上有热源,热传导方程为 $\partial u/\partial t-a^2\partial^2u/\partial x^2=f_0\sin\lambda x$,其中 f_0 和 λ 为常数,下述哪个条件可以使杆上的温度分布在长时间后达到稳定?

(A) $\lambda l=\pi$　(B) $\lambda l=2\pi$　(C) $\lambda l=\pi/2$　(D) $\lambda l=3\pi/2$

8. 对于本征值问题 $y''+2y'/x+\lambda y=0$ $(0<a<x<b<+\infty)$, $y(a)=y(b)=0$,对应于不同本征值的本征函数有正交关系

(A) $\int_a^b x^2y_m(x)y_n(x)\,\mathrm{d}x=0$　(B) $\int_a^b xy_m(x)y_n(x)\,\mathrm{d}x=0$　(C) $\int_a^b y_m(x)y_n(x)\,\mathrm{d}x=0$　(D) 不一定正交

二、填空题(共 2 小题,各小题分数依次为 10 分、15 分,共 25 分.)

1. 球坐标系中,轴对称边界条件下,Laplace 方程的一般解是 (1) $u(r,\theta)=$ ______. 考虑球外的定解问题,设球面上 $u|_{r=a}=(3/2)u_0\sin^2\theta$,则球外 (2) $u(r,\theta)=$ ______.

2. 考虑 1/4 空间的定解问题 $\nabla^2u=0$ $(-\infty<x<+\infty, y>0, z>0)$, $u|_{y=0}=g(x,z)$, $u|_{z=0}=f(x,y)$. 相应的 Green 函数 $G(r,r_0)$ 满足的定解问题是 (1) ______,该 Green 函数为 (2) ______.

三、计算题(共 2 小题,各小题分数依次为 15 分、20 分,共 35 分.)

1. 计算积分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2m\pi x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$,其中 $m>0$.

2. 均匀导热薄板,形状为 1/4 圆盘(即扇形),半径为 a. 板面绝热,两条直边(即半径)保持温度为 0 度,而圆弧上保持恒定温度 u_0. 求板上的稳定温度分布 $u(\rho,\phi)$. 已知平面极坐标中 $\nabla^2u=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{\partial^2u}{\partial\phi^2}$.