一、求表面积为a^2，体积最大的圆柱体的体积。

解 设圆柱体的底面半径为x，高为y，由于表面积为a^2，所以

$$2\pi x^2+2\pi xy=a^2\text{。}$$

于是本题转化成条件极值问题：在约束条件$2\pi x^2+2\pi xy=a^2$下，求体积函数$V=\pi x^2 y$的最大值。

构造拉格朗日函数$L(x,y,z;\lambda)=\pi x^2 y+\lambda\left(2\pi x^2+2\pi xy-a^2\right)$，并解方程组

$$\begin{cases}2\pi xy+2\pi\lambda\left(2x+y\right)=0\\ \pi x^2+2\pi\lambda x=0\\ 2\pi x^2+2\pi xy=a^2\end{cases}.$$

因为$x>0$，$y>0$，所以$\lambda\neq 0$，$x+2\lambda=0$，

$$\begin{cases}xy+\lambda\left(2x+y\right)=0\\ xy+2\lambda y=0\end{cases}，\ 2\lambda x=\lambda y，\ 2x=y，\ x=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}a\text{。}$$

根据题目的暗示，存在最大体积，而最大值只能在唯一的稳定点$x=\dfrac{\sqrt{6\pi}}{6\pi}a$，

$y=\dfrac{\sqrt{6\pi}}{3\pi}a$达到，所以体积的最大值为$\dfrac{\sqrt{6\pi}}{18\pi}a^3$。

二、求二元函数$f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$，在椭圆周$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上任意一点处沿外法线的方向导数。

解 椭圆的外法线方向为$\left(\dfrac{2x}{a^2},\dfrac{2y}{b^2}\right)$，单位化得到方向余弦

$$\overrightarrow{n^0}=\left(\cos\alpha,\cos\beta\right)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2}\right)$$

函数$f(x,y)$的梯度为

$$grad\left(f\right)=\left(\frac{1}{y^2},-\frac{2x}{y^3}\right)$$

于是方向导数为

$$\frac{df}{d\overrightarrow{n^0}}=\left(\frac{1}{y^2},-\frac{2x}{y^3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}\left(\frac{x}{a^2y^2}-\frac{2xy}{b^2y^3}\right)=\frac{x}{y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{b^2}\right)$$

三、求二重积分 $\iint\limits_D xy^2dxdy$，其中积分区域 D 是由椭圆盘 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}\le 1$。

解 做变量代换

$$\begin{cases}u=\dfrac{x-1}{2}\\ v=\dfrac{y+1}{3}\end{cases}，\ 即\begin{cases}x=2u+1\\ y=3v-1\end{cases}，$$

则 D 变为半径为1圆盘 $\overline{D}=\{(u,v):u^2+v^2\le 1\}$。

变换的雅克比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6$$

所以

$$\iint\limits_D\left(xy^2+yx^2\right)dxdy=\iint\limits_{\overline{D}}(2u+1)(3v-1)^2\cdot 6dudv$$

利用区域的对称性和函数的奇偶性，

$$\iint\limits_{\overline{D}}u(3v-1)^2dudv=0，\quad \iint\limits_{\overline{D}}vdudv=0，$$

于是

$$\iint\limits_D\left(xy^2+yx^2\right)dxdy=\frac{1}{6}\iint\limits_{\overline{D}}(3v-1)^2dudv=\frac{1}{6}\iint\limits_{\overline{D}}\left(9v^2+1\right)dudv$$

$$=6\left(9\iint\limits_{\overline{D}}v^2dudv+\iint\limits_{\overline{D}}dudv\right)$$

$$=6\left(9\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r\sin\theta)^2\cdot rdr+\pi\right)$$

$$=6\left(9\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2\theta d\theta+\pi\right)$$

$$=6\left(9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta+\pi\right)$$

$$=6\left(9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\frac{39}{2}\pi$$

四、求满足下列等式的函数$u(x,y)$：

$$du=\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy$$

解 凑微分

$$du=d\left(x^2\cos x+y^2\cos x\right)$$

所以

$$u=x^2\cos x+y^2\cos x+C\text{，其中}C\text{为任意常数。}$$

五、求第二型曲面积分

$$\iint\limits_S dydz-xdzdx+e^{x^2+y}\sin(x-z)dxdy\,,$$

其中S是曲面

$$y=e^x\text{，}1\le y\le e\text{，}0\le z\le 2$$

的前侧。

解 曲面是函数$F(x,y,z)=e^x-y$的等高面：$F(x,y,z)=0$，法方向为

$$n=\left(F_x',F_y',F_z'\right)=\left(e^x,-1,0\right),$$

方向余弦

$$\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}\left(e^x,-1,0\right),$$

正好符合题目的“前侧”要求$\cos\alpha>0$。

$$dydz:dzdx:dxdy=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=e^x:-1:0$$

所以

$$dxdy=0,dydz=-e^xdzdx$$

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S dydz-xdzdx+e^{x^2+y}\sin(x-z)dxdy\\&=\iint\limits_S -e^xdzdx-xdzdx\\&=-\iint\limits_S\left(e^x+x\right)dzdx\end{aligned}$$

在将第二型曲面积分转化为二重积分时，

1、 曲面S在坐标面xOz上的投影是一个长方形D：$0\le x\le 1$，$0\le z\le 2$

2、 $dzdx=\cos\beta dS=-\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}dS<0$

于是

$$\iint_S dydz - xdzdx + e^{x^2+y}\sin(x-z)dxdy$$
$$= -\iint_S \left(e^x + x\right)dzdx, \text{第二型曲面积分}$$
$$= \iint_D \left(e^x + x\right)dzdx, \text{二重积分}$$
$$= \int_0^1 dx\int_0^2 \left(e^x + x\right)dz, \text{二次积分}$$
$$= 2\int_0^1 \left(e^x + x\right)dx$$
$$= 2\left(e - 1 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2e - 1$$

六、求方程$\left(x+1\right)y' + 1 = 2e^{-y}$的通积分。

解 当$x \neq -1$，$2e^{-y} - 1 \neq 0$时，

$$\frac{dy}{2e^{-y}-1} = \frac{dx}{x+1}, \quad \frac{e^y dy}{2-e^y} = \frac{dx}{x+1},$$

$$-\frac{d\left(2-e^y\right)}{2-e^y} = \frac{d(x+1)}{x+1},$$

$$-\ln\left|2-e^y\right| = \ln\left|x+1\right| + C_1,$$

$$\ln\left|x+1\right| + \ln\left|2-e^y\right| = -C_1, \quad \ln\left|\left(x+1\right)\left(2-e^y\right)\right| = -C_1,$$

$$\left|\left(x+1\right)\left(2-e^y\right)\right| = e^{-C_1}, \quad \left(x+1\right)\left(2-e^y\right) = \pm e^{-C_1} \triangleq C,$$

其中C_1为任意常数，$C = \pm e^{-C_1} \neq 0$。

由$2e^{-y} - 1 = 0$得方程的特解$y = \ln 2$。

故$\left(x+1\right)\left(2-e^y\right) = C$是方程的通积分，其中$C$为任意常数。

七、求二阶常系数线性微分方程$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\cos x$的通解

1、特征方程：$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$，$\lambda = -2$是二重根；

2、齐次线性方程的通解$y'' + 4y' + 4y = 0$是$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} = \left(C_1 + C_2x\right)e^{-2x}$；

3、$f(x) = e^{-2x}\cos x = e^{-2x}\left(1\cdot\cos\left(1\cdot x\right) + 0\cdot\sin\left(1\cdot x\right)\right)$；

4、因为$-2+1\cdot i$不是特征方程的根，所以可设特解为

5、$y=x^{0}e^{-2x}\left(a\cdot\cos(1\cdot x)+b\cdot\sin(1\cdot x)\right)=e^{-2x}\left(a\cdot\cos x+b\cdot\sin x\right)$；

6、代入方程求出$a=$，$b=$；

7、所以原方程的通解是$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-2x}+e^{-2x}\left(a\cdot\cos x+b\cdot\sin x\right)$。

八、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$是否收敛，若收敛求级数的和。

解

$$\frac{\frac{n+1}{(n+1+1)!}}{\frac{n}{(n+1)!}}=\frac{n+1}{(n+1+1)!}\frac{(n+1)!}{n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+2}\to 1\cdot 0=0,$$

根据比较判别法，无穷级数收敛。

级数的前 N 项和为

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1-\frac{1}{(N+1)!}\to 1,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$。

九、设$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=a$，其中$0<a<\infty$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

证明 根据数列极限的性质，存在 N，当 n>N 时，

$$\frac{a}{2}<nu_n\le\frac{3a}{2},\quad \frac{a}{2n}<u_n\le\frac{3a}{2n},$$

根据比较判别法，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{2n}=\frac{a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3a}{2n}\right)^2=\frac{9a^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$也收敛。