

数值分析第四次上机练习报告

——插值法

周懿

力 1-2021013053

一、问题的描述

设 $\frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1]$, 取 $x_j = -1 + \frac{2j}{n}, j = 0, 1, \dots, n$. 取适当的 n (比如 $n = 10, 20, \dots$ 等), 试求出 n 次 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 、分段线性插值函数 $I_1^h(x)$ 和三次样条插值函数 $S_3^h(x)$ (采用自然边界条件), 画出它们的图像, 并对结果做一个比较说明。

二、方法描述

(a) Lagrange 插值法

这里我们取 $n = 10$ 。那么 10 次的 Lagrange 插值函数为：

$$L_{10}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x) \quad (1)$$

其中基函数 $l_i(x)$ 如下：

$$l_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j) \quad (2)$$

我们根据式(1)(2)编写程序，通过循环即可生成 Lagrange 插值函数。

理论上通过这种方法可以在区间 $[-1, 1]$ 上给出近似于 $f(x)$ 的插值多项式 $L_n(x)$ ，且多项式的次数 n 越高精度就越好，但实际上在区间边界处如果 $f(x)$ 的 n 阶导数不一致收敛，当 $n \rightarrow +\infty$ 时 $L_n(x)$ 不一定收敛到 $f(x)$ ，这就是 Runge 现象。因而我们通常不选择这种插值方式，转而采取分段低次插值。分段低次插值有分段线性插值、分段 Hermite 插值、三次样条插值等。我们下面采用分段线性插值和三次样条插值。

(b) 分段线性插值法

分段线性插值法的插值函数为：

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \phi_j(x) \quad (3)$$

其中基函数 ϕ_j 如下：

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 0, & x_1 < x \\ \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, & x_0 \leq x \leq x_1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{n-1} \\ \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{j-1} \text{ or } x \geq x_{j+1} \\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \end{cases} \quad (6)$$

我们根据式(4)(5)(6)编写程序，通过循环即可生成分段线性插值函数。分段线性插值可以获得较高的精确度，但是分段线性插值的一大缺点就是光滑性太差，采样点处都是角点。而下面的三次样条插值在精确度和光滑性上都可以取得良好的效果。

(c) 三次样条插值法

三次样条插值得到的曲线在连接点上二阶导连续。我们记三次样条插值函数为 $S(x)$ ，它在每个区间 $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 上是三次函数，我们有插值条件：

$$S(x_j) = f(x_j) = \frac{1}{1 + 25x_j^2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

在每个节点上满足连续性条件：

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0), S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0) \quad (8)$$

我们假设 $S''(x_j) = M_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ 。则在每个小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上，

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}) \frac{x - x_j}{h_j} \quad (9)$$

其中

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad h_j = x_{j+1} - x_j$$

我们利用边界条件(7)(8)(9)可得：

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \quad (10)$$

其中：

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, d_j = 6 \frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]}{h_{j-1} + h_j} = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$$

两端的边界条件：

$$M_0 = M_n = 0 \quad (11)$$

将边界条件写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad (12)$$

根据自然条件(11)有

$$\lambda_0 = \mu_n = 0, d_0 = d_n = 0$$

我们解方程(12)就可以得到 M_j ，再代入式(9)就可以得到各段区间上的 $S(x)$ 的值。

三、 方案设计

我们通过编写 MATLAB 程序来进行线性方程组的求解。文件结构如下：

1. main.m：主程序。该程序会生成题目给定的函数，并分别调用三个插值方法的.m 文件，指定采样点数 n ，基于这些采样点对函数进行插值。最终绘出三个插值效果的示意图。
2. lagrange_interp.m：使用 Lagrange 插值法进行插值的程序。该程序接受一个 x 值和指定的采样点序列 (x_i, y_i) ，利用 Lagrange 插值公式进行插值，最终返回 x 对应的函数值 y 。
3. piece_lin_interp.m：使用分段线性插值法进行插值的程序。该程序接受一个 x 值和指定的采样点序列 (x_i, y_i) ，利用分段线性插值公式进行插值，最终返回 x 对应的函数值 y 。
4. spline_interp.m：使用三次样条插值法进行插值的程序。该程序接受一个 x 值和指定的采样点序列 (x_i, y_i) ，利用三次样条插值公式进行插值，最终返回 x 对应的函数值 y 。

四、 计算结果及其分析

表 1 是我们根据程序计算结果得到的数据。前两列给出了原函数 $f(x)$ 的真实值 (Baseline)，用作对照和计算误差。

(a) 使用 Lagrange 插值法的结果

计算结果如表 1 所示表格的第 3-5 列所示。从左至右依次为插值之后各点的函数值、绝对误差和相对误差。我们从 Lagrange 插值的数据中已经可以看出 Runge 现象，图 1 是 Lagrange 插值结果的示意图。图中红色曲线代表 $f(x)$ 的曲线，蓝色曲线代表 Lagrange 插值函数的曲线。从图中我们可以看出，二者差别较大，而在边界点处更是出现了明显的 Runge 现象。

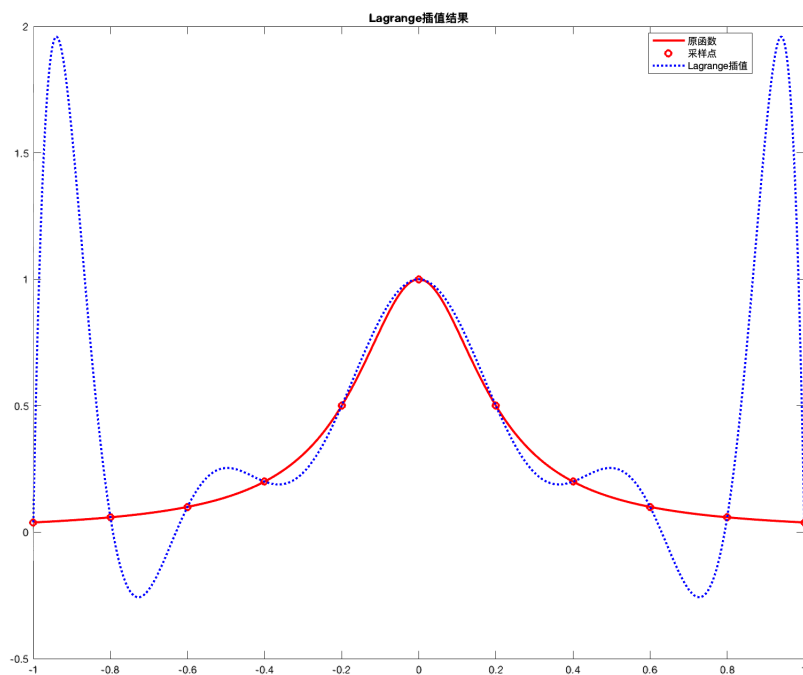


图 1: Lagrange 插值示意图

(b) 使用分段线性插值法的结果

计算结果如表 1所示表格的第 6-8 列所示，每列的数据意义同上。图 2是分段线性插值结果的示意图。图中红色曲线代表 $f(x)$ 的曲线，蓝色曲线代表分段线性插值函数的曲线。从图中我们可以看出，分段线性插值的结果显然和原函数差别小了很多，但是也能明显的看出插值之后光滑性很差。

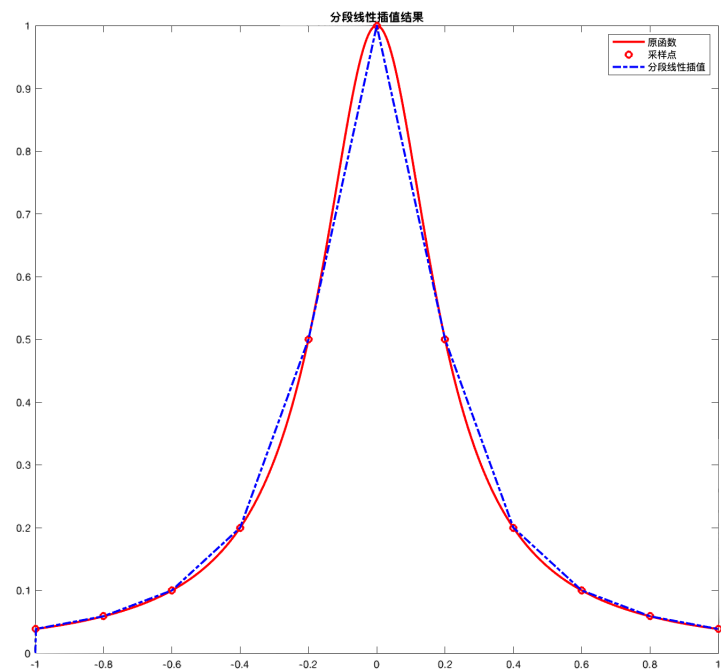


图 2: 分段线性插值示意图

(c) 使用三次样条插值的结果

计算结果如表 1所示表格的第 9-11 列所示，每列的数据意义同上。图 3是分段线性插值结果的示意图。图中红色曲线代表 $f(x)$ 的曲线，蓝色曲线代表三次样条插值函数的曲线。从图中我们可以看出，三次样条插值的结果显然和原函数差别进一步缩小，而且光滑性也很好。

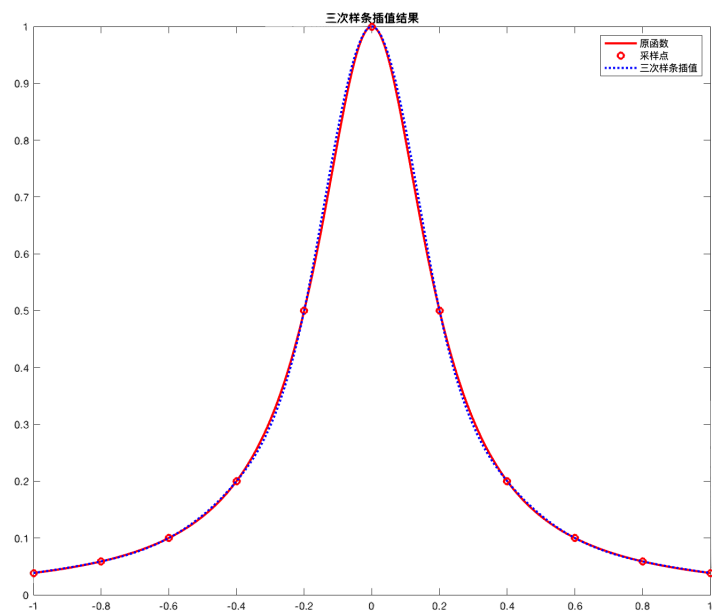


图 3: 三次样条插值示意图

x	$f(x)$	L_{10}	Err	Rel-Err	P-L	Err	Rel-Err	Spline	Err	Rel-Err
-1.0000	0.0385	0.0385	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0385	-1.0000	0.0385	0.0000	0.0000
-0.9800	0.0400	1.2303	1.1903	29.7702	0.0405	0.0005	0.0128	0.0402	0.0002	0.0061
-0.9600	0.0416	1.8044	1.7628	42.3774	0.0425	0.0009	0.0225	0.0420	0.0004	0.0099
-0.9400	0.0433	1.9590	1.9156	44.2322	0.0446	0.0013	0.0291	0.0438	0.0005	0.0119
-0.9200	0.0451	1.8458	1.8007	39.9039	0.0466	0.0015	0.0328	0.0457	0.0006	0.0124
-0.9000	0.0471	1.5787	1.5317	32.5478	0.0486	0.0016	0.0337	0.0476	0.0006	0.0119
-0.8800	0.0491	1.2402	1.1911	24.2507	0.0507	0.0016	0.0318	0.0496	0.0005	0.0104
-0.8600	0.0513	0.8881	0.8368	16.3087	0.0527	0.0014	0.0274	0.0517	0.0004	0.0084
-0.8400	0.0536	0.5604	0.5068	9.4467	0.0548	0.0011	0.0206	0.0540	0.0003	0.0059
-0.8200	0.0561	0.2802	0.2241	3.9907	0.0568	0.0006	0.0114	0.0563	0.0002	0.0031
-0.8000	0.0588	0.0588	0.0000	0.0000	0.0588	0.0000	0.0000	0.0588	0.0000	0.0000
-0.7800	0.0617	-0.1007	-0.1624	-2.6327	0.0629	0.0013	0.0203	0.0615	-0.0002	-0.0032
-0.7600	0.0648	-0.2013	-0.2661	-4.1080	0.0671	0.0023	0.0354	0.0644	-0.0004	-0.0061
-0.7400	0.0681	-0.2496	-0.3177	-4.6667	0.0712	0.0031	0.0456	0.0675	-0.0006	-0.0084
-0.7200	0.0716	-0.2546	-0.3262	-4.5543	0.0753	0.0037	0.0511	0.0709	-0.0007	-0.0099
-0.7000	0.0755	-0.2262	-0.3017	-3.9971	0.0794	0.0039	0.0522	0.0747	-0.0008	-0.0105
-0.6800	0.0796	-0.1743	-0.2540	-3.1897	0.0835	0.0039	0.0491	0.0788	-0.0008	-0.0101
-0.6600	0.0841	-0.1083	-0.1924	-2.2879	0.0876	0.0035	0.0421	0.0834	-0.0007	-0.0087
-0.6400	0.0890	-0.0363	-0.1253	-1.4082	0.0918	0.0028	0.0314	0.0884	-0.0006	-0.0064
-0.6200	0.0943	0.0349	-0.0594	-0.6300	0.0959	0.0016	0.0173	0.0939	-0.0003	-0.0035
-0.6000	0.1000	0.1000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	0.0000
-0.5800	0.1063	0.1554	0.0491	0.4619	0.1100	0.0037	0.0351	0.1067	0.0004	0.0038
-0.5600	0.1131	0.1987	0.0856	0.7567	0.1200	0.0069	0.0608	0.1140	0.0009	0.0075
-0.5400	0.1206	0.2292	0.1086	0.9003	0.1300	0.0094	0.0777	0.1219	0.0013	0.0110
-0.5200	0.1289	0.2472	0.1183	0.9179	0.1400	0.0111	0.0864	0.1306	0.0018	0.0138
-0.5000	0.1379	0.2538	0.1158	0.8397	0.1500	0.0121	0.0875	0.1401	0.0021	0.0156
-0.4800	0.1479	0.2510	0.1031	0.6969	0.1600	0.0121	0.0816	0.1503	0.0024	0.0161
-0.4600	0.1590	0.2414	0.0825	0.5187	0.1700	0.0110	0.0693	0.1614	0.0024	0.0151
-0.4400	0.1712	0.2278	0.0566	0.3306	0.1800	0.0088	0.0512	0.1733	0.0021	0.0123
-0.4200	0.1848	0.2131	0.0282	0.1528	0.1900	0.0052	0.0279	0.1862	0.0013	0.0073
-0.4000	0.2000	0.2000	0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000
-0.3800	0.2169	0.1912	-0.0258	-0.1188	0.2300	0.0131	0.0603	0.2149	-0.0020	-0.0093
-0.3600	0.2358	0.1888	-0.0471	-0.1996	0.2600	0.0242	0.1024	0.2315	-0.0044	-0.0186
-0.3400	0.2571	0.1946	-0.0625	-0.2429	0.2900	0.0329	0.1281	0.2503	-0.0068	-0.0264
-0.3200	0.2809	0.2099	-0.0710	-0.2527	0.3200	0.0391	0.1392	0.2720	-0.0089	-0.0316
-0.3000	0.3077	0.2353	-0.0723	-0.2351	0.3500	0.0423	0.1375	0.2973	-0.0103	-0.0336
-0.2800	0.3378	0.2710	-0.0668	-0.1978	0.3800	0.0422	0.1248	0.3269	-0.0110	-0.0324

(接下页)

(续表)

-0.2600	0.3717	0.3165	-0.0552	-0.1486	0.4100	0.0383	0.1029	0.3613	-0.0105	-0.0282
-0.2400	0.4098	0.3708	-0.0390	-0.0952	0.4400	0.0302	0.0736	0.4012	-0.0087	-0.0212
-0.2200	0.4525	0.4326	-0.0199	-0.0440	0.4700	0.0175	0.0387	0.4472	-0.0053	-0.0117
-0.2000	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000
-0.1800	0.5525	0.5710	0.0185	0.0334	0.5500	-0.0025	-0.0045	0.5597	0.0072	0.0131
-0.1600	0.6098	0.6432	0.0334	0.0548	0.6000	-0.0098	-0.0160	0.6242	0.0145	0.0237
-0.1400	0.6711	0.7142	0.0431	0.0642	0.6500	-0.0211	-0.0315	0.6909	0.0198	0.0295
-0.1200	0.7353	0.7817	0.0465	0.0632	0.7000	-0.0353	-0.0480	0.7573	0.0220	0.0299
-0.1000	0.8000	0.8434	0.0434	0.0543	0.7500	-0.0500	-0.0625	0.8205	0.0205	0.0257
-0.0800	0.8621	0.8971	0.0350	0.0406	0.8000	-0.0621	-0.0720	0.8782	0.0161	0.0187
-0.0600	0.9174	0.9409	0.0235	0.0256	0.8500	-0.0674	-0.0735	0.9275	0.0101	0.0110
-0.0400	0.9615	0.9733	0.0118	0.0123	0.9000	-0.0615	-0.0640	0.9661	0.0045	0.0047
-0.0200	0.9901	0.9933	0.0032	0.0032	0.9500	-0.0401	-0.0405	0.9911	0.0010	0.0010
0.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0200	0.9901	0.9933	0.0032	0.0032	0.9500	-0.0401	-0.0405	0.9911	0.0010	0.0010
0.0400	0.9615	0.9733	0.0118	0.0123	0.9000	-0.0615	-0.0640	0.9661	0.0045	0.0047
0.0600	0.9174	0.9409	0.0235	0.0256	0.8500	-0.0674	-0.0735	0.9275	0.0101	0.0110
0.0800	0.8621	0.8971	0.0350	0.0406	0.8000	-0.0621	-0.0720	0.8782	0.0161	0.0187
0.1000	0.8000	0.8434	0.0434	0.0543	0.7500	-0.0500	-0.0625	0.8205	0.0205	0.0257
0.1200	0.7353	0.7817	0.0465	0.0632	0.7000	-0.0353	-0.0480	0.7573	0.0220	0.0299
0.1400	0.6711	0.7142	0.0431	0.0642	0.6500	-0.0211	-0.0315	0.6909	0.0198	0.0295
0.1600	0.6098	0.6432	0.0334	0.0548	0.6000	-0.0098	-0.0160	0.6242	0.0145	0.0237
0.1800	0.5525	0.5710	0.0185	0.0334	0.5500	-0.0025	-0.0045	0.5597	0.0072	0.0131
0.2000	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000
0.2200	0.4525	0.4326	-0.0199	-0.0440	0.4700	0.0175	0.0387	0.4472	-0.0053	-0.0117
0.2400	0.4098	0.3708	-0.0390	-0.0952	0.4400	0.0302	0.0736	0.4012	-0.0087	-0.0212
0.2600	0.3717	0.3165	-0.0552	-0.1486	0.4100	0.0383	0.1029	0.3613	-0.0105	-0.0282
0.2800	0.3378	0.2710	-0.0668	-0.1978	0.3800	0.0422	0.1248	0.3269	-0.0110	-0.0324
0.3000	0.3077	0.2353	-0.0723	-0.2351	0.3500	0.0423	0.1375	0.2973	-0.0103	-0.0336
0.3200	0.2809	0.2099	-0.0710	-0.2527	0.3200	0.0391	0.1392	0.2720	-0.0089	-0.0316
0.3400	0.2571	0.1946	-0.0625	-0.2429	0.2900	0.0329	0.1281	0.2503	-0.0068	-0.0264
0.3600	0.2358	0.1888	-0.0471	-0.1996	0.2600	0.0242	0.1024	0.2315	-0.0044	-0.0186
0.3800	0.2169	0.1912	-0.0258	-0.1188	0.2300	0.0131	0.0603	0.2149	-0.0020	-0.0093
0.4000	0.2000	0.2000	0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000	0.2000	0.0000	0.0000
0.4200	0.1848	0.2131	0.0282	0.1528	0.1900	0.0052	0.0279	0.1862	0.0013	0.0073
0.4400	0.1712	0.2278	0.0566	0.3306	0.1800	0.0088	0.0512	0.1733	0.0021	0.0123
0.4600	0.1590	0.2414	0.0825	0.5187	0.1700	0.0110	0.0693	0.1614	0.0024	0.0151

(接下页)

(续表)

0.4800	0.1479	0.2510	0.1031	0.6969	0.1600	0.0121	0.0816	0.1503	0.0024	0.0161
0.5000	0.1379	0.2538	0.1158	0.8397	0.1500	0.0121	0.0875	0.1401	0.0021	0.0156
0.5200	0.1289	0.2472	0.1183	0.9179	0.1400	0.0111	0.0864	0.1306	0.0018	0.0138
0.5400	0.1206	0.2292	0.1086	0.9003	0.1300	0.0094	0.0777	0.1219	0.0013	0.0110
0.5600	0.1131	0.1987	0.0856	0.7567	0.1200	0.0069	0.0608	0.1140	0.0009	0.0075
0.5800	0.1063	0.1554	0.0491	0.4619	0.1100	0.0037	0.0351	0.1067	0.0004	0.0038
0.6000	0.1000	0.1000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	0.0000	0.1000	0.0000	0.0000
0.6200	0.0943	0.0349	-0.0594	-0.6300	0.0959	0.0016	0.0173	0.0939	-0.0003	-0.0035
0.6400	0.0890	-0.0363	-0.1253	-1.4082	0.0918	0.0028	0.0314	0.0884	-0.0006	-0.0064
0.6600	0.0841	-0.1083	-0.1924	-2.2879	0.0876	0.0035	0.0421	0.0834	-0.0007	-0.0087
0.6800	0.0796	-0.1743	-0.2540	-3.1897	0.0835	0.0039	0.0491	0.0788	-0.0008	-0.0101
0.7000	0.0755	-0.2262	-0.3017	-3.9971	0.0794	0.0039	0.0522	0.0747	-0.0008	-0.0105
0.7200	0.0716	-0.2546	-0.3262	-4.5543	0.0753	0.0037	0.0511	0.0709	-0.0007	-0.0099
0.7400	0.0681	-0.2496	-0.3177	-4.6667	0.0712	0.0031	0.0456	0.0675	-0.0006	-0.0084
0.7600	0.0648	-0.2013	-0.2661	-4.1080	0.0671	0.0023	0.0354	0.0644	-0.0004	-0.0061
0.7800	0.0617	-0.1007	-0.1624	-2.6327	0.0629	0.0013	0.0203	0.0615	-0.0002	-0.0032
0.8000	0.0588	0.0588	0.0000	0.0000	0.0588	0.0000	0.0000	0.0588	0.0000	0.0000
0.8200	0.0561	0.2802	0.2241	3.9907	0.0568	0.0006	0.0114	0.0563	0.0002	0.0031
0.8400	0.0536	0.5604	0.5068	9.4467	0.0548	0.0011	0.0206	0.0540	0.0003	0.0059
0.8600	0.0513	0.8881	0.8368	16.3087	0.0527	0.0014	0.0274	0.0517	0.0004	0.0084
0.8800	0.0491	1.2402	1.1911	24.2507	0.0507	0.0016	0.0318	0.0496	0.0005	0.0104
0.9000	0.0471	1.5787	1.5317	32.5478	0.0486	0.0016	0.0337	0.0476	0.0006	0.0119
0.9200	0.0451	1.8458	1.8007	39.9039	0.0466	0.0015	0.0328	0.0457	0.0006	0.0124
0.9400	0.0433	1.9590	1.9156	44.2322	0.0446	0.0013	0.0291	0.0438	0.0005	0.0119
0.9600	0.0416	1.8044	1.7628	42.3774	0.0425	0.0009	0.0225	0.0420	0.0004	0.0099
0.9800	0.0400	1.2303	1.1903	29.7702	0.0405	0.0005	0.0128	0.0402	0.0002	0.0061
1.0000	0.0385	0.0385	0.0000	0.0000	0.0385	0.0000	0.0000	0.0385	0.0000	0.0000

表 1: 计算结果

五、 结论

插值方法中最基本的是多项式插值，而我们可以通过 Lagrange 多项式来方便的实现这种插值方式。理论上我们根据给定区间上的给定的节点做出的插值多项式 $L_n(x)$ 近似于 $f(x)$ ，而多项式 $L_n(x)$ 的次数 n 越高逼近 $f(x)$ 的精度就越好。但实际上对任意的插值节点，当 $n \rightarrow +\infty$ 的时候 $L_n(x)$ 不一定收敛到 $f(x)$ ；而是有时会在插值区间的两端点附近会出现严重的 Runge 现象。因此用高次插值多项式 $L_n(x)$ 近似 $f(x)$ 的效果并不总是好的，而我们通过本次试验中的实际计算发现对本次试验中的函数确实出现了 Runge 现象，插值结果很不令人满意。我们转而采用分段的线性插值和三次样条插值，其中线性插值虽然效果好了很多，但是光滑性无法得到保证，而我们使用三次样条插值得到了非常好的插值效果。