Understanding Quaternions 中文翻译《理解四元数》

Tags: math, quaternion

原文地址:http://www.3dgep.com/understanding-quaternions/

正文

在这篇文章中我会尝试用简单的方式去解释四元数的概念，即用可视化的方式解释四元数以及几种对四元数的操作。我将把矩阵、欧拉角和四元数放在一起比较，并解释什么时候该用四元数、什么时候该用欧拉角或矩阵。

内容结构

介绍

在计算机图形学中，我们使用转换矩阵来表示空间中的一个位置以及朝向。一个转换矩阵还可以表示对一个目标的缩放(scale)或错切(shear)等。 我们可以把转换矩阵想象成一个空间，当你用这个矩阵乘以向量、点（甚至矩阵）后， 你就把向量、点、矩阵转换进这个空间了。

在这篇文章中，我不会讨论转换矩阵的细节。你可以查看我前面的文章，文章中描述了转换矩阵的细节。

在这篇文章中，我想要讨论一个可替代的方案，即用四元数来描述空间里的物体的朝向。

四元数的概念是由爱尔兰数学家Sir William Rowan Hamilton发明的（1843年，都柏林）。Hamilton当时正和他的妻子前往爱尔兰皇家研究院，当他从Brougham桥通过皇家运河时，他领悟到了一个激动人心的东西，并立刻把它刻在桥的一个石头上：

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

William Rowan Hamilton Plaque on Broome Bridge on the Royal Canal commemorating his discovery of the fundamental formula for quaternion multiplication.

复数

在我们能够完全理解四元数之前，我们必须先知道四元数是怎么来的。四元数的根源其实是**复数**。

除了知名的数集（自然数、整数、实数、分数）之外，复数系统引入了一个新的数集——虚数。虚数的发明是为了解决一些特定的无解的方程，例如：

$$x^2 + 1 = 0$$

要解决这个等式，必须让$x^2 = -1$，这当然是不行的，因为任意实数的平方都是非负数。

一般而言，数学家是不能忍受一个等式是无解的。于是，一个新的术语被发明了，它就是虚数，一个可以解决上面这个等式的数。

虚数有这样的形式：

$$\mathbf{i}^2 = -1$$

不要为这个术语较真，因为逻辑上这个数是不存在的。只要知道i是一个平方等于-1的东西即可。

虚数的集合可以用$\mathbb{I}$来表示。

复数的集合$\mathbb{C}$是一个实数和一个虚数的和，形式如下：

$$z = a + b\mathbf{i}\ a, b \in R,\ \mathbf{i}^2 = -1$$

可以认为所有实数都是b=0的复数、所有虚数都是a=0的复数。

复数的加减

加法：

$$(a_1 + b_1\mathbf{i}) + (a_2 + b_2\mathbf{i}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}$$

减法：

$$(a_1 + b_1\mathbf{i}) - (a_2 + b_2\mathbf{i}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathbf{i}$$

复数的系数缩放

$$\lambda(a_1 + b_1\mathbf{i}) = \lambda a_1 + \lambda b_1\mathbf{i}$$

复数的积

$$z_1 = (a_1 + b_1\mathbf{i})$$

$$z_2 = (a_2 + b_2\mathbf{i})$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1\mathbf{i})(a_2 + b_2\mathbf{i}) = a_1 a_2 + a_1 b_2\mathbf{i} + b_1 a_2\mathbf{i} + b_1 b_2\mathbf{i}^2$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\mathbf{i}$$

复数的平方

$$z = (a + b\mathbf{i})$$

$$z^2 = (a + b\mathbf{i})(a + b\mathbf{i})$$

$$z^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\mathbf{i}$$

共轭复数

复数的共轭就是指把复数的虚数部分变成负的。共轭复数的符号是$\bar{z}$或z^*。

$$z = (a + b\mathbf{i})$$

$$z^* = (a - b\mathbf{i})$$

复数和它的共轭复数的乘积是：

$$zz^* = (a + b\mathbf{i})(a - b\mathbf{i}) = a^2 - ab\mathbf{i} + ab\mathbf{i} + b^2 = a^2 + b^2$$

复数的绝对值

我们使用共轭复数来计算复数的绝对值：

$$z = (a + b\mathbf{i})$$

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{(a + b\mathbf{i})(a - b\mathbf{i})} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

两复数的商

$$z_1 = (a_1 + b_1\mathbf{i})$$

$$z_2 = (a_2 + b_2\mathbf{i})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\mathbf{i}}{a_2 + b_2\mathbf{i}} = \frac{(a_1 + b_1\mathbf{i})(a_2 - b_2\mathbf{i})}{(a_2 + b_2\mathbf{i})(a_2 - b_2\mathbf{i})}$$

$$= \frac{a_1a_2 - a_1b_2\mathbf{i} + b_1a_2\mathbf{i} - b_1b_2\mathbf{i}^2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\mathbf{i}$$

i的幂

如果**i**的平方等于-1，那么**i**的n次幂也应该存在：

$$\mathbf{i}^0 = 1$$

$$\mathbf{i}^1 = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{i}^2 = -1$$

$$\mathbf{i}^3 = \mathbf{i}\mathbf{i}^2 = -i$$

$$\mathbf{i}^4 = \mathbf{i}^2\mathbf{i}^2 = 1$$

$$\mathbf{i}^5 = \mathbf{i}\mathbf{i}^4 = i$$

$$\mathbf{i}^6 = \mathbf{i}\mathbf{i}^5 = \mathbf{i}^2 = -1$$

如果按照这个顺序写下去，会出现这样一个模式： (1,\mathbf i,-1,-\mathbf i,1,...)

一个类似的模式也出现在递增的负数幂：

$$\mathbf{i}^0 = 1$$

$$\mathbf{i}^{-1} = -i$$

$$\mathbf{i}^{-2} = -1$$

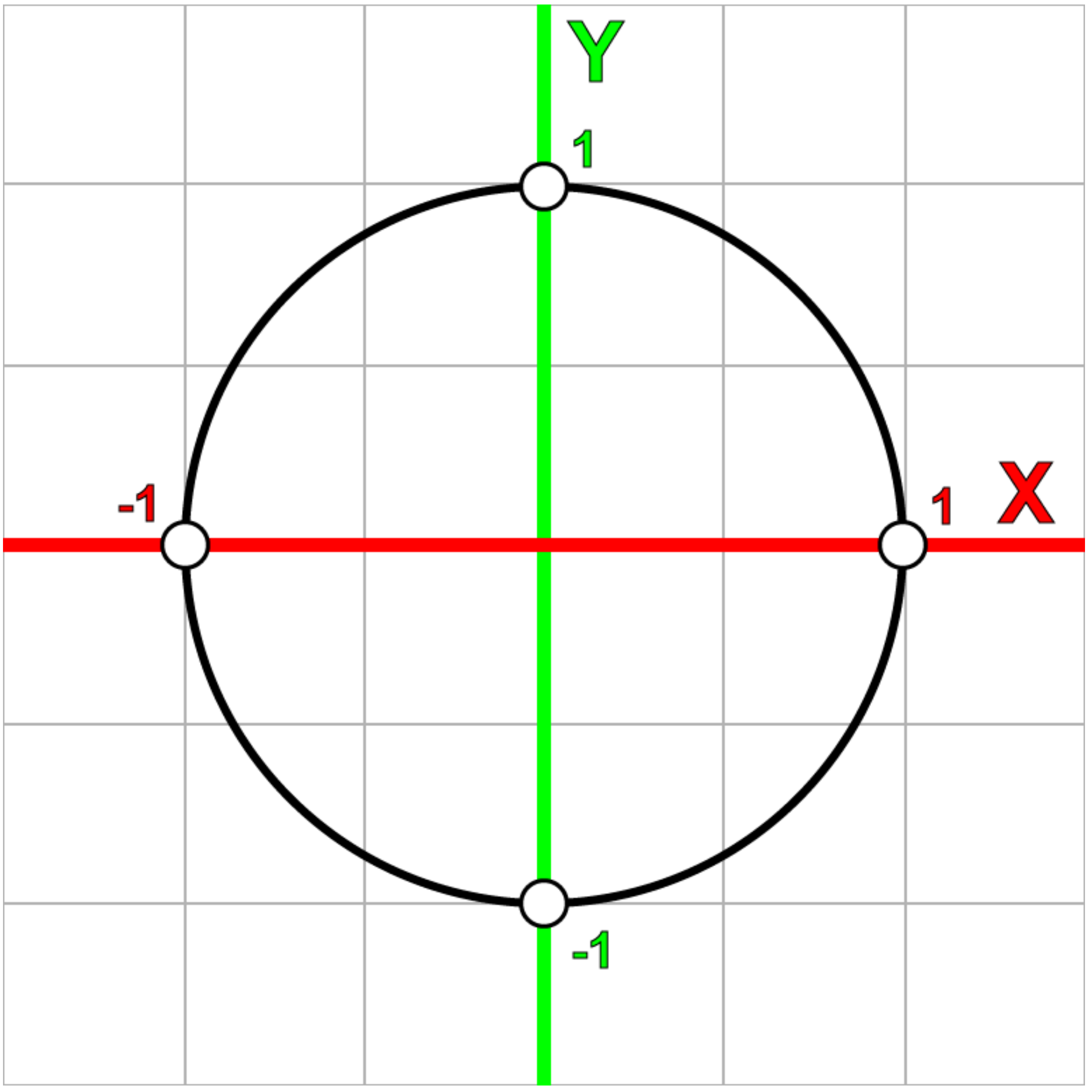
$$\mathbf{i}^{-3} = i$$

$$\mathbf{i}^{-4} = 1$$

$$\mathbf{i}^{-5} = -i$$

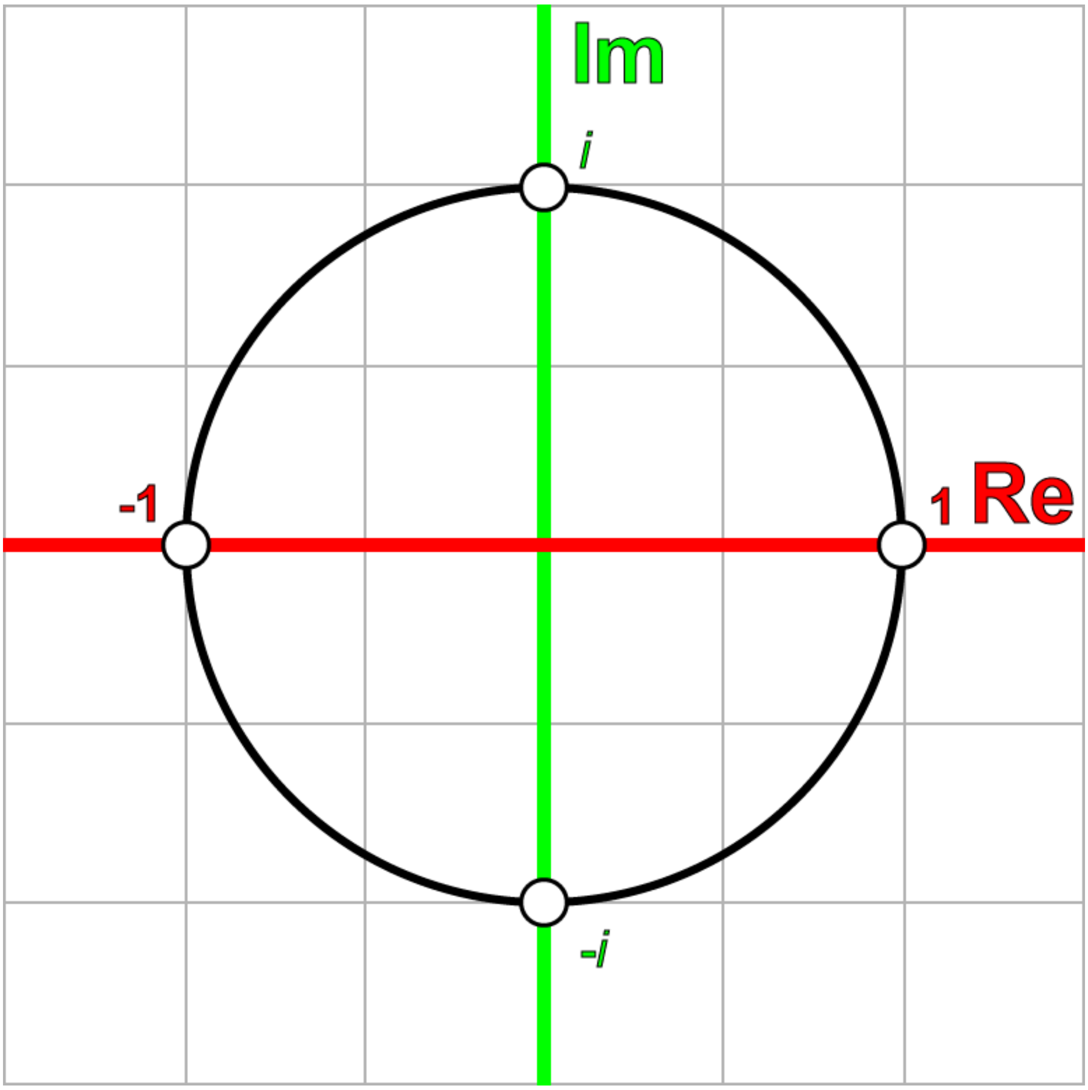
$$\mathbf{i}^{-6} = -1$$

你可能已经在数学里头见过类似的模式，但是是以（x,y,-x,-y,x,...)的形式，这是在2D笛卡尔平面对一个点逆时针旋转90度时生成的；（x,-y,-x,y,x,...)则是在2D笛卡尔平面对一个点顺时针旋转90度时生成的。



复数平面

我们也能够把复数映射到一个2D网格平面——复数平面，只需要把实数映射到横轴、虚数映射到纵轴。



如前面的序列所示，我们可以认为，对一个复数乘以i，这个复数就在复数平面上旋转了90度。

让我们看看这是不是真的。我们随机地在复数平面上取一个点：

$$p = 2 + \mathbf{i}$$

p乘以i后得到q：

$$q = p\mathbf{i} = (2 + \mathbf{i})\mathbf{i} = 2\mathbf{i} + \mathbf{i}^2 = -1 + 2\mathbf{i}$$

q乘以i后得到r：

$$r = q\mathbf{i} = (-1 + 2\mathbf{i})\mathbf{i} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{i}^2 = -2 - \mathbf{i}$$

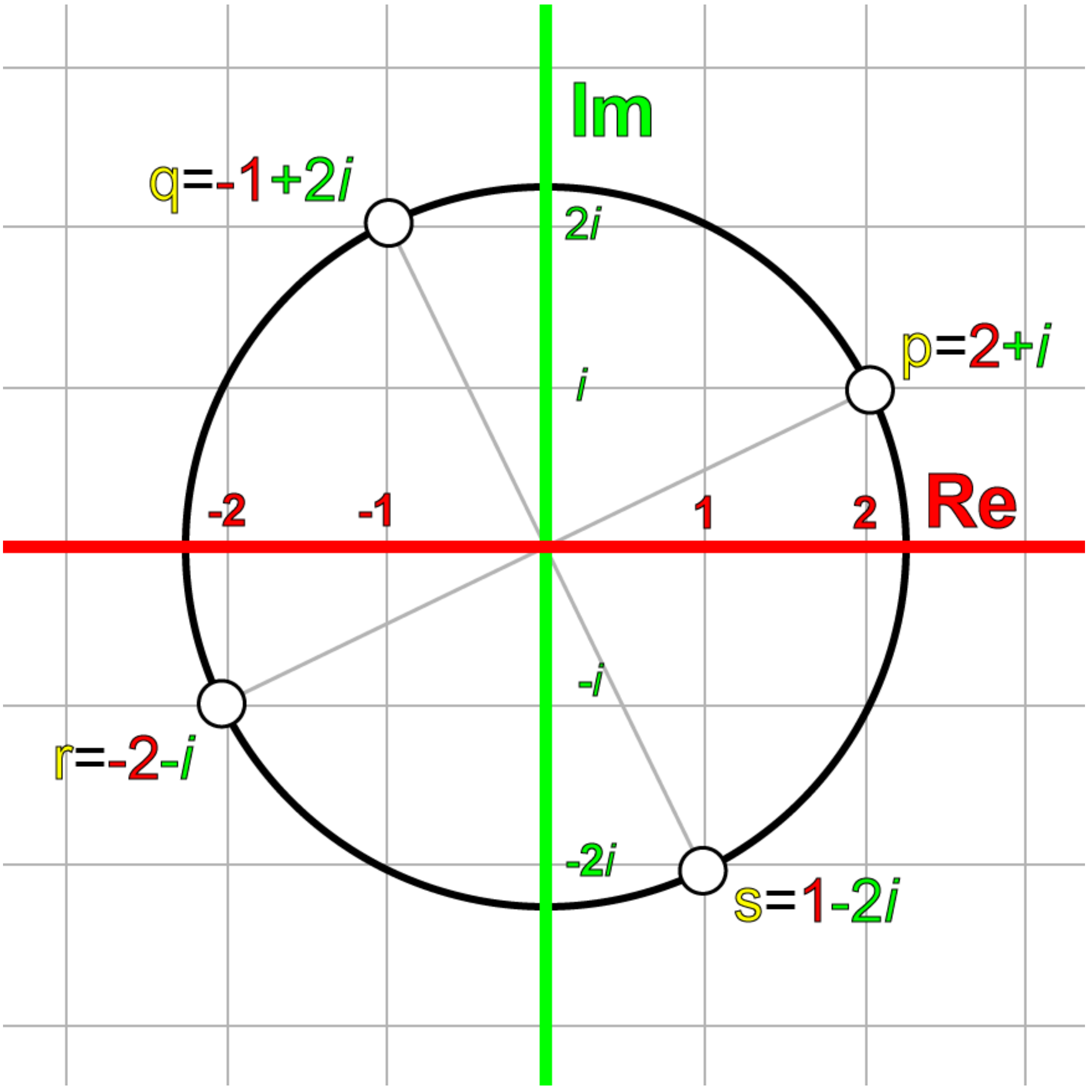
r乘以i后得到s：

$$s = r\mathbf{i} = (-2 - \mathbf{i})\mathbf{i} = -2\mathbf{i} - \mathbf{i}^2 = 1 - 2\mathbf{i}$$

s乘以i后得到t：

$$t = s\mathbf{i} = (1 - 2\mathbf{i})\mathbf{i} = \mathbf{i} - 2\mathbf{i}^2 = 2 + \mathbf{i}$$

t刚好是开始的p。如果我们把这些复数放到复数平面上，就得到下面的图：



我们也可以按顺时针方向旋转，只需要把上面的乘数i改成-i。

旋转数（Rotors)

我们也可以在复数平面上进行任意角度的旋转，只需要定义下面这个复数：

$$q = cos\theta + \mathbf{i}sin\theta$$

任意的复数乘以q：

$$p = a + b\mathbf{i}$$

$$q = cos\theta + \mathbf{i}sin\theta$$

$$pq = (a + b\mathbf{i})(cos\theta + \mathbf{i}sin\theta)$$

$$a' + b'\mathbf{i} = acos\theta - bsin\theta + (asin\theta + bcos\theta)\mathbf{i}$$

也可以写成矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

这也是一个在复数平面绕原点逆时针旋转任意点的方法。（译注：这句话应该是在说旋转矩阵）

四元数

了解了复数系统和复数平面后，我们可以额外增加2个虚数到我们的复数系统，从而把这些概念拓展到3维空间。

四元数的一般形式：

$$q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad s, x, y, z \in \mathbb{R}$$

上面的公式是根据Hamilton的著名的表达式得到的：

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

以及：

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

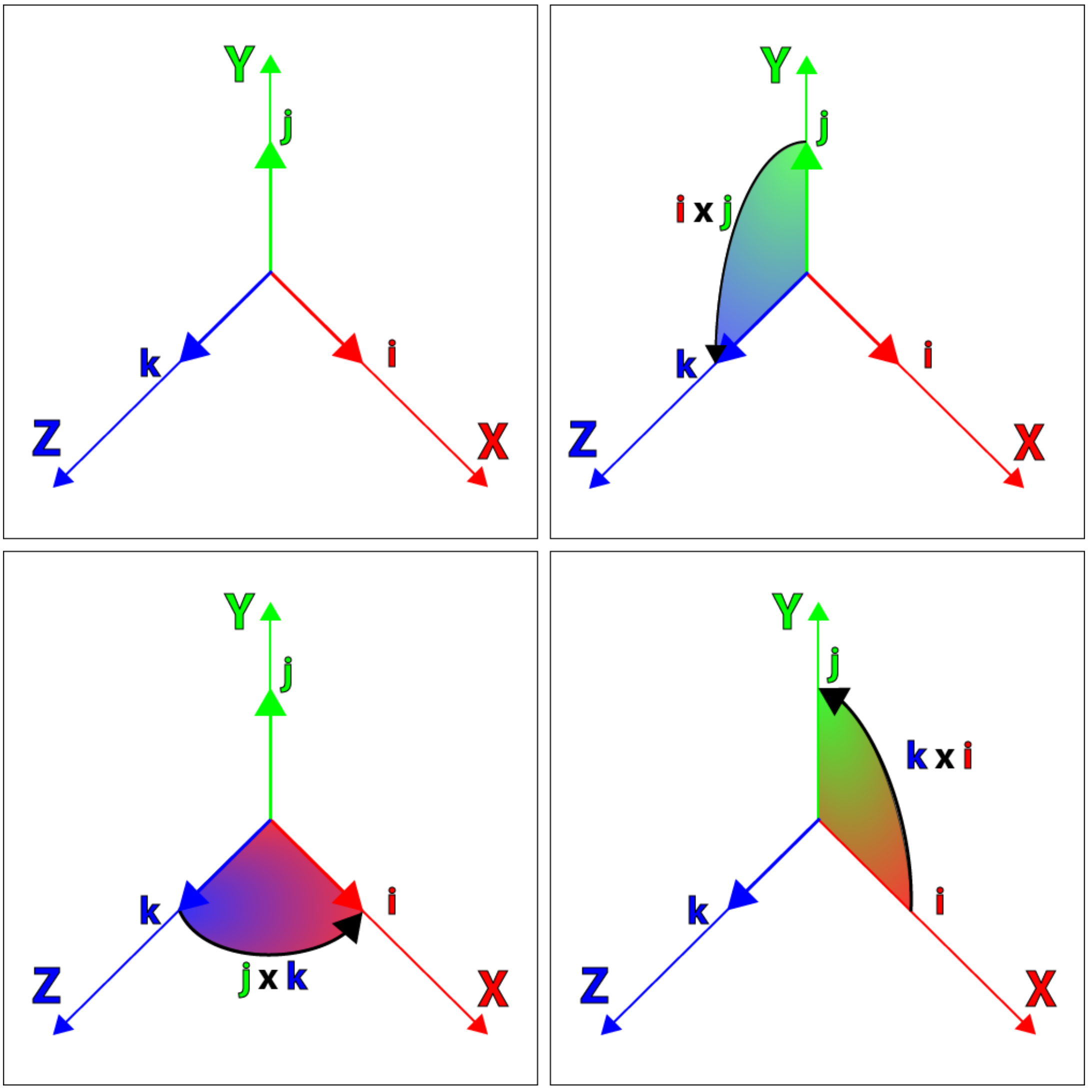
$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

你可能已经注意到了，i、j、k之间的关系非常像笛卡尔坐标系下单位向量的叉积规则：

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{z} \quad \mathbf{y} \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -\mathbf{z} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{y} = -\mathbf{x} \quad \mathbf{x} \times \mathbf{z} = -\mathbf{y}$$

Hamilton自己也发现i、j、k虚数可以被用来表达3个笛卡尔坐标系单位向量i、j、k，并且仍然保持有虚数的性质，也即$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$。



(\mathbf i \mathbf j, \mathbf j \mathbf k, \mathbf k \mathbf i这几个性质的可视化)

上图展示了如何用i、j、k作为笛卡尔坐标系的单位向量。

作为有序数的四元数

我们可以用有序对的形式，来表示四元数：

$$[s, \mathbf{v}] \quad s \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3$$

其中的v，也可以用它各自独立的3个分量表示：

$$q = [s, x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}] \quad s, x, y, z \in \mathbb{R}$$

使用这种表示法，我们可以更容易地展示四元数和复数之间的相似性。

四元数的加减

和复数类似，四元数也可以被加减：

$$q_a = [s_a, \mathbf{a}]$$

$$q_b = [s_b, \mathbf{b}]$$

$$q_a + q_b = [s_a + s_b, \mathbf{a} + \mathbf{b}]$$

$$q_a - q_b = [s_a - s_b, \mathbf{a} - \mathbf{b}]$$

四元数的积

我们也可以表示四元数的乘积：

$$q_a q_b = [s_a, \mathbf{a}][s_b, \mathbf{b}]$$

$$= (s_a + x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k})(s_b + x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k})$$

$$= (s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b)$$

$$+(s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)\mathbf{i}$$

$$+(s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)\mathbf{j}$$

$$+(s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)\mathbf{k}$$

可以看到，四元数的乘积依然还是一个四元数。如果我们把虚数$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$替换成有序对：

$$\mathbf{i} = [0, \mathbf{i}] \quad \mathbf{j} = [0, \mathbf{j}] \quad \mathbf{k} = [0, \mathbf{k}]$$

以及还有[1,0] = 1，将它们代入前面的表达式，就得到了：

$$q_a q_b = (s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b)[1, \mathbf{0}]$$

$$+(s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)[0, \mathbf{i}]$$

$$+(s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)[0, \mathbf{j}]$$

$$+(s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)[0, \mathbf{k}]$$

再把这个表达式扩展成多个有序对的和：

$$q_a q_b = [(s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b), \mathbf{0}]$$

$$+[0, (s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)\mathbf{i}]$$

$$+[0, (s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)\mathbf{j}]$$

$$+[0, (s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)\mathbf{k}]$$

如果把后3个四元数相加，并提取公共部分，就可以把等式改写成：

$$q_a q_b = [(s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b), \mathbf{0}]$$
$$+[0, s_a(x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}) + s_b(x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k})$$
$$+(y_a z_b - y_b z_a)\mathbf{i} + (z_a x_b - z_b x_a)\mathbf{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\mathbf{k}]$$

这个等式是2个有序对的和。第1个有序对是一个**实**四元数，第2个是一个**纯**四元数。这两个四元数也可以合并成一个：

$$q_a q_b = [(s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b),$$
$$s_a(x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}) + s_b(x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k})$$
$$+(y_a z_b - y_b z_a)\mathbf{i} + (z_a x_b - z_b x_a)\mathbf{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\mathbf{k}]$$

如果把下面的表达式代入上面的等式：

$$\mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (y_a z_b - y_b z_a)\mathbf{i} + (z_a x_b - z_b x_a)\mathbf{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\mathbf{k}$$

（译注：注意，第三条和第四条并不是四元数的点积和叉积，而是向量的点积和叉积）

我们就得到了：

$$q_a q_b = [s_a s_b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, s_a\mathbf{b} + s_b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}]$$

这就是四元数乘积的一般式。

实四元数

一个实四元数是一个虚部向量为零向量的四元数：

$$q = [s, \mathbf{0}]$$

两个实四元数的乘积是另一个实四元数：

$$q_a = [s_a, \mathbf{0}]$$
$$q_b = [s_b, \mathbf{0}]$$
$$q_a q_b = [s_a, \mathbf{0}][s_b, \mathbf{0}] = [s_a s_b, \mathbf{0}]$$

这和2个虚部为0的复数的乘积几乎一样：

$$z_1 = a_1 + 0\mathbf{i}$$
$$z_2 = a_2 + 0\mathbf{i}$$
$$z_1 z_2 = (a_1 + 0\mathbf{i})(a_2 + 0\mathbf{i}) = a_1 a_2$$

四元数的系数缩放

我们也可以用一个系数（实数）去乘四元数：

$$q = [s, \mathbf{v}]$$
$$\lambda q = \lambda[s, \mathbf{v}] = [\lambda s, \lambda\mathbf{v}]$$

我们可以用实四元数与普通四元数的乘积，来确认这个等式是否正确：

$$q = [s, \mathbf{v}]$$

$$\lambda = [\lambda, 0]$$

$$\lambda q = [\lambda, \mathbf{0}][s, \mathbf{v}] = [\lambda s, \lambda v]$$

纯四元数

和实四元数相似，Hamilton也定义了纯四元数。纯四元数是s=0的四元数：

$$q = [0, \mathbf{v}]$$

也可以写成下面的形式：

$$q = x\mathbf{i} + y\mathbf{k} + z\mathbf{k}$$

然后是2个纯四元数的乘积：

$$q_a = [0, \mathbf{a}]$$

$$q_b = [0, \mathbf{b}]$$

$$q_a q_b = [0, \mathbf{a}][0, \mathbf{b}] = [-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}]$$

四元数的加法形式

我们可以把四元数写成实四元数和纯四元数的和：

$$q = [s, \mathbf{v}]$$

$$= [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}]$$

单位四元数

给定任意的向量v，我们可以把这个向量写成一个系数和一个单位方向向量的乘积：

$$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}} \;\; v = |\mathbf{v}|, |\hat{\mathbf{v}}| = 1$$

将这个定义和纯四元数的定义结合，就得到了：

$$q = [0, \mathbf{v}]$$

$$= [0, v\hat{\mathbf{v}}]$$

$$= v[0, \hat{\mathbf{v}}]$$

然后，我们可以定义单位四元数了，它是一个s=0、$\mathbf{v}$为单位向量的四元数：

$$\hat{q} = [0, \hat{\mathbf{v}}]$$

四元数的二元形式

我们现在可以把单位四元数的定义和四元数的加法形式结合到一起，就创造了一种新的四元数的表示法，这种表示法和复数的表示法形似：

$$q = [s, \mathbf{v}]$$

$$= [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}]$$

$$= [s, \mathbf{0}] + v[0, \hat{\mathbf{v}}]$$

$$= s + v\hat{\mathbf{q}}$$

这就给了我们一种和复数非常相似的四元数表示法：

$$z = a + b\mathbf{i}$$

$$q = s + v\hat{\mathbf{q}}$$

共轭四元数

共轭四元数的计算，就是将四元数的虚向量取反：

$$q = [s, \mathbf{v}]$$

$$q^* = [s, -\mathbf{v}]$$

四元数和它的共轭四元数的乘积：

$$qq^* = [s, \mathbf{v}][s, -\mathbf{v}]$$

$$= [s^2 - \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{v}), -s\mathbf{v} + s\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (-\mathbf{v})]$$

$$= [s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{0}]$$

$$= [s^2 + \mathbf{v}^2, \mathbf{0}]$$

四元数范数

回忆下复数范数的定义：

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$zz^* = |z|^2$$

类似的，四元数的范数可以这样定义：

$$\mathbf{q} = [s, \mathbf{v}]$$

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{s^2 + v^2}$$

这也让我们可以这样表达四元数范数：

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^* = |\mathbf{q}|^2$$

四元数规范化

利用四元数范数的定义，就可以对四元数进行规范化。要让一个四元数规范化，只需要让这个四元数去除以它的范数：

$$\mathbf{q}' = \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{s^2 + v^2}}$$

举一个例子，让我们规范化下面这个四元数：

$$\mathbf{q} = [1, 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}]$$

第一步，先计算q的范数：

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 4^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

然后，q除以|q|:

$$\mathbf{q}' = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$$

$$= \frac{(1 + 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k})}{7}$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{4}{7}\mathbf{i} + \frac{4}{7}\mathbf{j} - \frac{4}{7}\mathbf{k}$$

四元数的逆

四元数的逆用$\mathbf{q}^{-1}$表示。要计算四元数的逆，需要用四元数的共轭四元数去除以四元数的范数的平方：

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{|\mathbf{q}|^2}$$

为了证明这个式子，我们先根据**逆**的定义，有：

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = [1, \mathbf{0}] = 1$$

两边都左乘共轭四元数 $\mathbf{q}^*$：

$$\mathbf{q}^*\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$$

将上文中的$\mathbf{q}\mathbf{q}^* = |\mathbf{q}|^2$代入这个式子，得到：

$$|\mathbf{q}|^2\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{|\mathbf{q}|^2}$$

对于单位四元数，它的范数是1，所以可以写成：

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$$

四元数的点积

和向量的点积相似，我们也可以计算2个四元数的点积，只需要将各个对应的系数相乘，然后相加:

$$\mathbf{q}_1 = [s_1, x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{q}_2 = [s_2, x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = s_1s_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

我们也可以利用四元数点积，来计算四元数之间的角度差：

$$cos\theta = \frac{s_1s_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2|}$$

对于单位四元数，我们可以简化上面的等式：

$$cos\theta = s_1s_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

旋转

前面我们定义了一个特殊的复数：旋转数。它是用来旋转2D复数平面的点的：

$$\mathbf{q} = cos\theta + \mathbf{i}sin\theta$$

根据四元数和复数的相似性，应该有可能设计一个可以旋转3D空间的点的四元数：

$$\mathbf{q} = [cos\theta, sin\theta\mathbf{v}]$$

让我们测试一下这个理论是否可靠，方法就是计算四元数q和向量p的积。第一步，我们把p写成纯四元数的形式：

$$\mathbf{p} = [0, \mathbf{p}]$$

以及单位四元数q：

$$\mathbf{q} = [s, \lambda\hat{\mathbf{v}}]$$

从而：

$$\mathbf{p}' = \mathbf{qp} = [s, \lambda\hat{\mathbf{v}}][0, \mathbf{p}]$$

$$= [-\lambda\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p}, s\mathbf{p} + \lambda\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{p}]$$

我们可以看到结果是一个同时有系数、有虚向量的四元数。

让我们先考虑特殊的情形：$\mathbf{p}$与$\hat{\mathbf{v}}$正交。这种情况下，点乘部分等于0：$-\lambda\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p} = 0$。所以上面的四元数就变成了纯四元数：

$$p' = [0, s\mathbf{p} + \lambda\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{p}]$$

这时候，要使$\mathbf{p}$绕$\hat{\mathbf{v}}$旋转，我们只需要代入$s = cos\theta$和$\lambda = sin\theta$：

$$p' = [0, cos\theta\mathbf{p} + sin\theta\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{p}]$$

现在，让我们找一个例子来测试上面的公式。譬如绕z轴(就是k轴)旋转45度，那么我们的四元数q就变成：

$$q = [cos\theta, sin\theta\mathbf{k}]$$

$$= [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}]$$

然后，选一个特殊的p，并且p要和k轴正交，譬如把p放到i轴上，也就是：

$$p = [0, 2\mathbf{i}]$$

好了，现在计算下qp：

$$\mathbf{p}' = \mathbf{qp}$$

$$= [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}][0, 2\mathbf{i}]$$

$$= [0, 2\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k} \times \mathbf{i}]$$

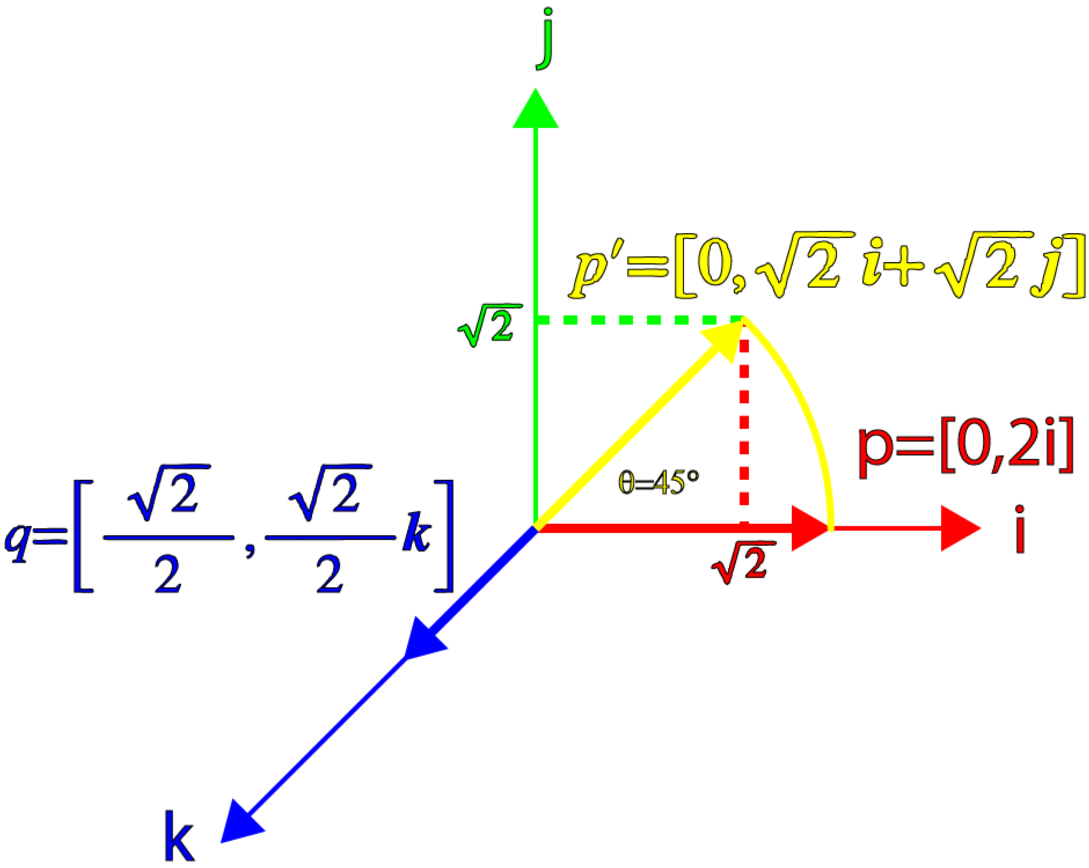
$$= [0, \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}]$$

结果是一个绕了k轴转了45度的纯四元数。 我们可以确认这个四元数的向量部分的长度是：

$$\mathbf{p}' = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$$

这正是我们所期望的！

我们可以用图像展示旋转过程：



现在，让我们考虑更一般化的四元数，即和p不正交的四元数。现在让我们把p的向量部分偏移45度：

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{p} = 2\mathbf{i}$$

$$q = [cos\theta, sin\theta\hat{\mathbf{v}}]$$

$$p = [0, \mathbf{p}]$$

然后算qp：

$$\mathbf{p}' = \mathbf{qp}$$

$$= [cos\theta, sin\theta\hat{\mathbf{v}}][0, \mathbf{p}]$$

$$[-sin\theta\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p}, cos\theta\mathbf{p} + sin\theta\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{p}]$$

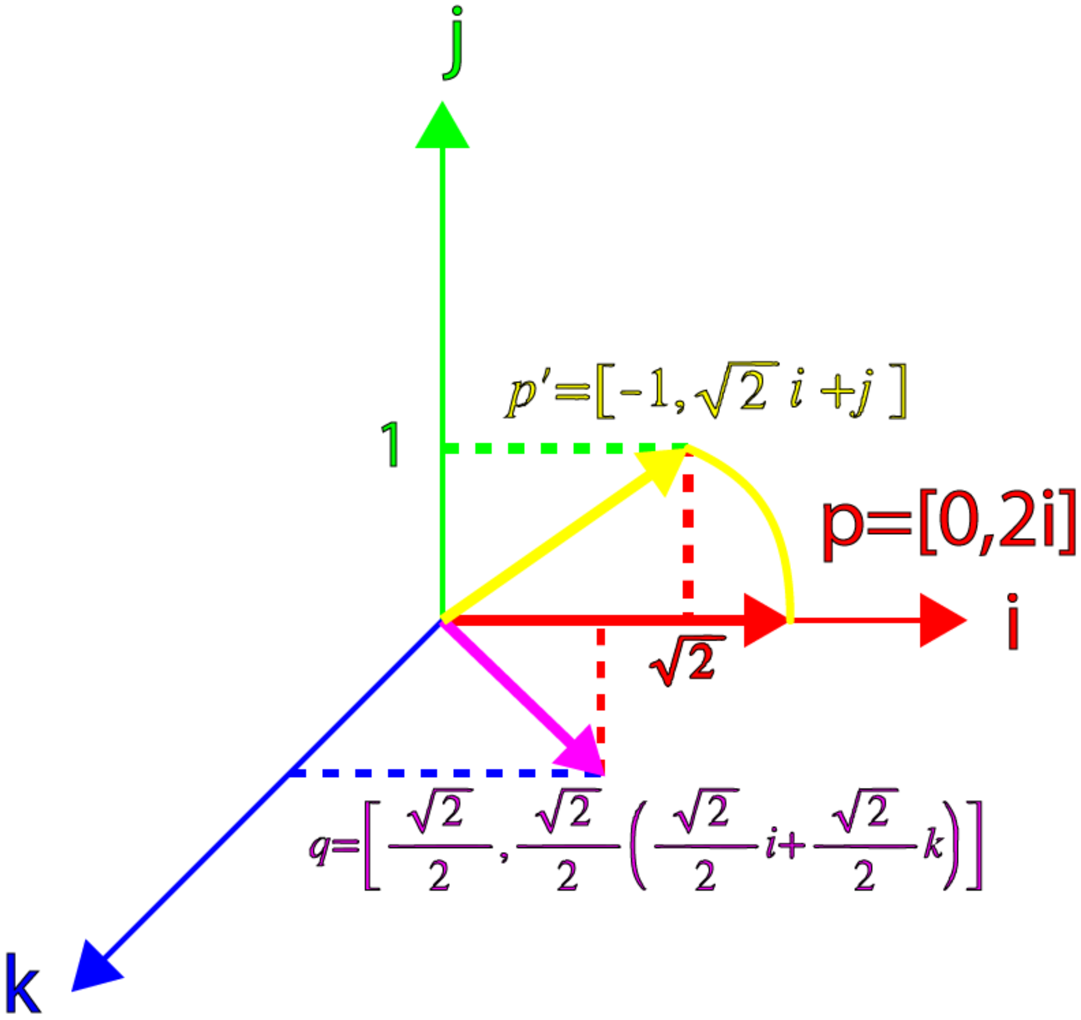
代入我们设定的$\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{p}$，以及$\theta = 45°$，得到：

$$p' = [-\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i}), \frac{\sqrt{2}}{2}2\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}) \times 2\mathbf{i}]$$

$$= [-1, \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}]$$

注意，算出来的结果已经不是纯四元数了，并且，它并没有旋转45度、范数也不再是2(反而变小了，变成$\sqrt{3}$)

我们可以用图像展示旋转过程：



> *严格来说，这样子在3维空间中表示p′是不正确的。因为它其实是一个4维的向量！为了简单起见，我只将这个四元数的向量部分显示出来。*

然而，还有一线生机。Hamilton发现（但没有正式宣布），如果对qp右乘q的逆，出来的结果是一个纯四元数，并且四元数向量部分的范数可以保持不变。让我们试试应用在我们的例子里。

首先计算：

$$\mathbf{q} = [cos\theta, sin\theta(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k})]$$

$$\mathbf{q}^{-1} = [cos\theta, -sin\theta(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k})]$$

(译注：这里$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$是因为q是单位四元数)

再代入$\theta = 45°$，得到：

$$\mathbf{q}^{-1} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k})]$$

$$\frac{1}{2}[\sqrt{2}, -\mathbf{i} - \mathbf{k}]$$

现在，把前面算出来的qp再次拿出来：

$$\mathbf{qp} = [-1, \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}]$$

$$qpq^{-1} = [-1, \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}]\frac{1}{2}[\sqrt{2}, -\mathbf{i} - \mathbf{k}]$$

$$= \frac{1}{2}[-\sqrt{2} - (\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i} - \mathbf{k}), \mathbf{i} + \mathbf{k} + \sqrt{2}(\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}) - \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}]$$

$$= \frac{1}{2}[-\sqrt{2} + \sqrt{2}, \mathbf{i} + \mathbf{k} + 2\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}]$$

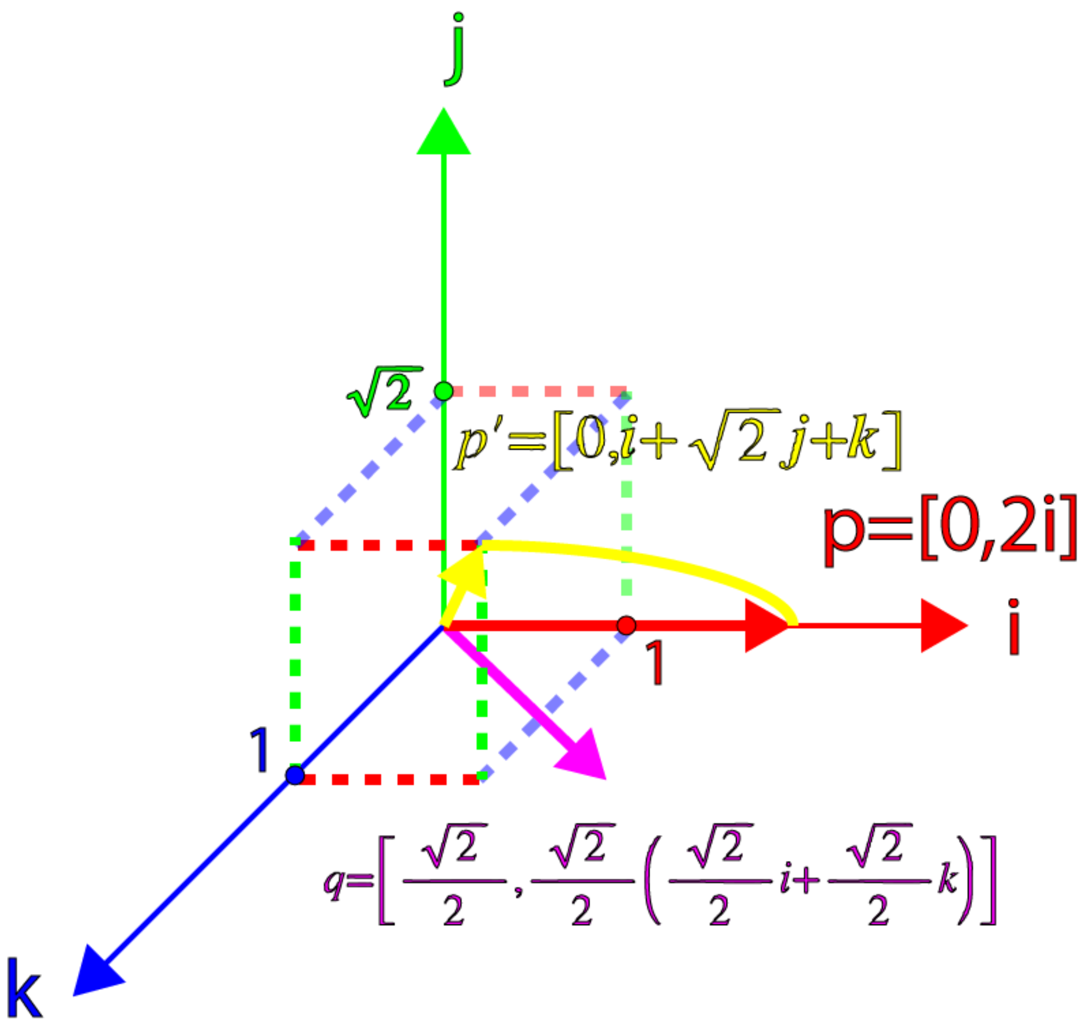
$$= [0, \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}]$$

这下是纯四元数了，并且它的范数是：

$$|\mathbf{qpq}^{-1}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

这和原始的p的范数一致。

下面的图像展示了旋转结果：



所以我们可以看到，这个结果是一个纯四元数，并且原四元数的向量的范数也保持住了。但是还有一个问题：向量被旋转了90度而不是45度。这刚好是我们需要的度数的两倍！为了正确地让一个向量绕某个轴向量旋转某个角度，我们必须以目标角度的一半来计算。因此，我们构造了下面的四元数：

$$q = [cos\frac{1}{2}\theta, sin\frac{1}{2}\theta\hat{\mathbf{v}}]$$

这就是**旋转四元数**的一般形式！

四元数插值

在计算机图形学中使用四元数，其中一个重要原因是四元数非常适合用来表示空间中的旋转。四元数解决了其他3维空间旋转算法会遇到的恼人的问题，比如使用欧拉角来表示旋转操作时会遇到的万向节锁问题(Gimbal lock)。

使用四元数，我们可以定义好几种方案来表示3维空间的转动插值。第一种是SLERP，它被用来把一个点(物体)从一个朝向平滑地插值到另一个朝向。第二个是SLERP的扩展版本，被称为SQAD，它被用来处理用一系列朝向定义得到的一条路径的插值。

SLERP

SLERP代表**S**pherical **L**inear Int**erp**olation。SLERP可以在2个朝向之间平滑地插值。

第一个朝向设为q_1，第二个朝向设为q_2 (请记住，这2个指示朝向的四元数是单位四元数，不然阅读下文会混乱）。被插值前的点设为$\mathbf{p}$，插值后的点设为$\mathbf{p}'$。而插值参数t，当t=0时会把$\mathbf{p}$转到q_1，当t=1时会转到q_2。

标准的线性插值公式是(译注：这个公式是笛卡尔坐标系下的，不是指四元数)：

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 + t(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$$

应用这个等式的一般步骤是：

- 计算$\mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_2$之间的差。
- 根据参数t，计算两个点的差的小数值(因为0<=t<=1)
- 把第二步的值加上原始点的值，算出结果

我们可以把这个基础公式，套用到2个用四元数表示的朝向的插值上。

四元数的差

根据上面的公式的第一步，我们必须先计算q_1、q_2的差。对于四元数来说，这等价于计算2个四元数的角度差(**angular difference**)：

$$diff = \mathbf{q}_1^{-1}\mathbf{q}_2$$

（译注：由$\mathbf{q}_1\mathbf{p}_{diff} = \mathbf{q}_2$推出 ）

四元数的幂运算

接下来的目标是干掉上面四元数的差的分数部分，方法是计算四元数的t次幂(就是上面的那个插值参数t，区间是[0,1])。

四元数的幂运算的一般化公式是：

$$\mathbf{q}^t = exp(t \log \mathbf{q})$$

其中，(纯)四元数的exp函数的公式是：

$$e^{\mathbf{q}} = exp(\mathbf{q}) = exp([0, \theta\hat{\mathbf{v}}])$$

$$= [cos\theta, sin\theta\hat{\mathbf{v}}]$$

(纯)四元数的对数公式是：

$$\log\mathbf{q} = \log(cos\theta + sin\theta\hat{\mathbf{v}})$$

$$= \log(exp(\theta\hat{\mathbf{v}}))$$

$$= \theta\hat{\mathbf{v}}$$

$$= [0, \theta\hat{\mathbf{v}}]$$

(译注：上述的2次公式推导，其实省略了很多证明过程。具体可以参考： 四元数公式的补充)

对于t = 0，我们有：

$$q^0 = exp(0\log\mathbf{q})$$

$$= exp([cos(0), sin(0)\hat{\mathbf{v}}])$$

$$= exp([1, \mathbf{0}])$$

$$= [1, \mathbf{0}]$$

而对于t = 1，有：

$$\mathbf{q}^1 = exp(1\log\mathbf{q}) = \mathbf{q}$$

2个四元数的分数差

对于角旋转的插值计算，我们利用q1和q2的角度分数差来调整原始朝向q1：

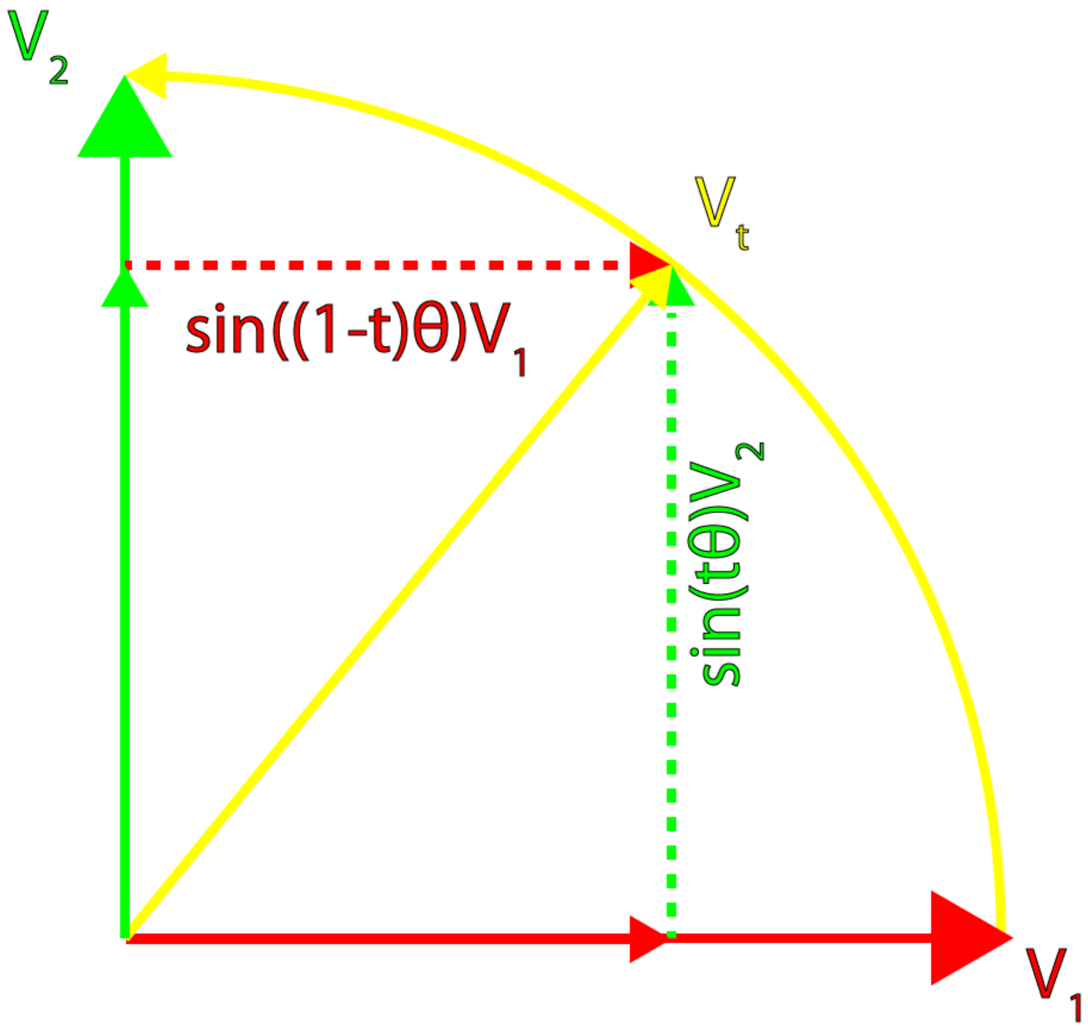
$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}_1(\mathbf{q}_1^{-1}\mathbf{q}_2)^t$$

这也就是使用四元数的球面线性插值的一般形式。然而，这不是slerp函数的常用形式。

我们可以应用类似的用于计算向量的球面插值公式，到四元数里。计算向量的球面插值的一般形式定义如下：

$$\mathbf{v}_t = \frac{sin((1-t)\theta)}{sin\theta}\mathbf{v}_1 + \frac{sin(t\theta)}{sin\theta}\mathbf{v}_2$$

用图像表示如下：



这个公式可以原封不动地应用到四元数：

$$\mathbf{q}_t = \frac{sin((1-t)\theta)}{sin\theta}\mathbf{q}_1 + \frac{sin(t\theta)}{sin\theta}\mathbf{q}_2$$

但这个公式需要提供角度θ，我们可以计算$\mathbf{q}_1$和$\mathbf{q}_2$的点积从而得出角度θ：

$$cos\theta = \frac{\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2|}$$

$$cos\theta = \frac{s_1s_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2|}$$

$$\theta = cos^{-1}(\frac{s_1s_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2|})$$

注意事项

这个方案有2个问题，必须在实现过程中加以考虑。

第一，如果四元数点积的结果是负值，那么后面的插值就会在4D球面上绕远路，这并不是我们想要的。为了解决这个问题，我们测试点积的结果，当结果是负值时，我们将2个四元数的其中一个取反，取反它的系数和向量部分，并不会改变它代表的朝向。而经过这一步操作，可以保证这个旋转走的是最短路径。

当$\mathbf{q}_1$和$\mathbf{q}_2$的角度差非常小，小到导致$sin\theta = 0$时，会出现第二个问题。如果这个情况出现了，当我们除以$sin\theta$时就会得到一个未定义的结果。在这个情况下，我们可以回退去使用$\mathbf{q}_1$和$\mathbf{q}_2$的线性插值。

SQUAD

正如一个SLERP可以被用来计算四元数之间的插值，一个SQUAD (**S**pherical and **Quad**rangle)可以被用来对旋转路径进行平滑插值。

如果我们有四元数序列：

$$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \cdots, \mathbf{q}_{n-2}, \mathbf{q}_{n-1}, \mathbf{q}_n$$

然后我们再定义一个"辅助"四元数(s_i)，它是一个中间控制点：

$$s_i = exp(-\frac{\log(\mathbf{q}_{i+1}\mathbf{q}_i^{-1}) + \log(\mathbf{q}_{i-1}\mathbf{q}_i^{-1})}{4})\mathbf{q}_i$$

所以，沿着子曲线的朝向可以定义为：

$$\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \mathbf{q}_{i+2}$$

在t时刻的朝向就是：

$$squad(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}, s_i, s_{i+1}, t) = slerp(slerp(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}, t), slerp(s_i, s_{i+1}, t), 2t(1-t))$$

总结

除了特别难理解之外，相比矩阵或欧拉角，四元数在表示旋转这个事情上，拥有一些明显的优点。

- SLERP和SQUAD，提供了一种使得在朝向之间可以平滑过渡的方法。
- 使用四元数来串联"旋转"，要比使用矩阵快得多。
- 对于单位四元数，逆向旋转可以通过对向量部分取反来实现。而计算一个矩阵的逆矩阵是被认为比较慢的，如果这个矩阵未被标准正交化的话(标准正交矩阵的逆矩阵是它的转置矩阵)。
- 从四元数转换到矩阵，要比从欧拉角转换到矩阵快一点。
- 四元数只需要4个数字(如果旋转四元数已经单位化了那么只需要3个，实数部分可以在运行时计算)来表示一个旋转，而矩阵需要至少9个数字。

尽管使用四元数有这么多优点，还是有缺点存在的。

- 因为浮点数的舍入运算错误，四元数可能会变无效。不过，这个错误可以通过重新单位化四元数来避免。
- 使用四元数最具威慑性的地方，还是四元数的理解难度大。我希望这个问题可以通过阅读本文来解决。

存在一些已经实现了四元数、并且是正确的的数学程序库。在我的个人经验里，我发现GLM(OpenGL Math Library)是一个优秀的数学库，它的四元数的实现极其不错。如果你对在你的程序中使用四元数感兴趣，那么我会推荐你使用这个数学库。

下载Demo

我实现了一个小demo来演示一个四元数如何被用来旋转一个3维物体。这个demo是用Unity3.5.2实现的，你可以免费下载它和阅读它的脚本。zip文件也包含了一个Windows版的Unity程序。当然你可以自己构建一个Mac的版本。

Understanding Quaternions.zip

Written on September 30, 2015

写作不易，您的支持是我写作的动力！

微信支付

支付宝
ALIPAY

ALSO ON **WWW.QIUJIAWEI.COM**

线性代数之视角矩阵 Lookat Matrix

6 years ago • 1 comment

引言 （下文的讨论基于右手坐标系，以及矩阵左乘顺序。） …

线性代数之主成分分析(PCA)算法

5 years ago • 1 comment

PCA(Principal Component …

用线性代数知识解决光线和三角形的交点问题

5 years ago • 1 comment

本文可认为是《PBRT》3.6节的公式推导笔记。

立体角(S… 解

6 years ago

horizonshd • 3 months ago

"注意，算出来的结果已经不是纯四元数了，并且，它并没有旋转45度、范数也不再是2(反而变小了，变成√3)" 范数为什么不是 2 ???

Xianqi Zhang • 2 years ago • edited