Міністерство освіти і науки України

Національний університет “Львівська політехніка”

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра програмного забезпечення

Звіт

Про виконання лабораторної роботи №9

на тему:

«Наближення функцій методом найменших квадратів»

Лектор:
доцент каф. ПЗ
Мельник Н.Б.

Виконав:
ст. гр. ПЗ-11
Солтисюк Д.А.

Прийняла:
доцент каф. ПЗ
Мельник Н.Б.

« __ » ________ 2022 р.

∑ = _____ _________ .

Львів – 2022

Тема: Наближення функцій методом найменших квадратів

Мета: ознайомлення на практиці з методом найменших квадратів апроксимації (наближення) функцій.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Апроксимація функцій – процес утворення поліному певного порядку на основі вхідних даних, поданих у виді таблиці певної кількості точок (n). Утворений поліном описує криву, яка містить у собі множину вхідних даних, та дає змогу отримати її проміжні значення.

Апроксимація функцій є ефективним способом нівелювання похибок вхідних даних.

Одним із поширених методів апроксимації функцій є **метод найменших квадратів.** У якості вхідних даних отримуємо таблично задану функцію на деякому проміжку. Мета – сформувати поліном m-го степеня, при чому $m=0,n$.

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

Похибка для поліному представлена середнім квадратичним відхиленням:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(P_m(x_i) - y_i\right)^2}$$

Суть алгоритму – відшукати невідомі коефіцієнти поліному, при цьому, квадрат кожного відхилення повинен бути мінімальним.

$$\Phi(a_0, a_1,\ a_2,\ \ldots a_m) = \ \sum_{i=0}^{n}\left(P_m(x_i) - y_i\right)^2 = \ \sum_{i=0}^{n}\left(\ \sum_{i=0}^{n} a_j x_i^j - y_i\right)^2$$

Далі – знаходимо похідні за змінними a_k *(k = 0, m)* та прирівнюємо їх до нуля.

Таким чином ми отримаємо ***нормальну систему*** методу найменших квадратів, яку можна подати як:

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k}\right)a_j = \sum_{i=0}^{n} y_j x_i^k$$

Отримавши СЛАР такого типу, її розв’язують довільним способом (точними або наближеними). Отримані розв’язки й будуть шуканими коефіцієнтами поліному.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Варіант 9

Завдання

Методом найменших квадратів побудувати лінійний, квадратичний і кубічний апроксимаційні поліноми для таблично заданої функції.

Варіант 9	*x*	4,03	4,08	4,16	4,23	4,26	4,33
	y	2,8	2,94	3,2	3,38	3,53	3,75

ТЕКСТ ПРОГРАМИ

main.py

```
from common.least_square_approximation import LeastSquareApproximation
from common.main import Points

if __name__ == "__main__":
    points: Points = ([
        4.03,
        4.08,
        4.16,
        4.23,
        4.26,
        4.33,
    ], [2.8, 2.94, 3.2, 3.38, 3.53, 3.75])

    for degree in range(3):
        LeastSquareApproximation(points, degree + 1).compile()
```

least_square_approximation.py

```
import numpy as np
from common.lu_decomposition import LUDecompositionMethod
from common.main import ApproximationOrientedMethod, Points
from common.utils import print_matrix


class LeastSquareApproximation(ApproximationOrientedMethod):

    def __init__(self, points: Points, degree: int) -> None:
        super().__init__("Least square approximation", points, degree)

    def execute_method(self):
        x = self.points[0]
        y = self.points[1]

        m = self.degree + 1
        n = len(x)

        A = np.zeros((m, m))
        B = np.zeros(m)

        for k in range(m):
            for i in range(n):
                B[k] += y[i] * (x[i]**k)
                for j in range(m):
                    A[k][j] += x[i]**(j + k)

        print_matrix(A, "A")
        print_matrix([B], "B")

        coeffs = LUDecompositionMethod(A, B).compile(silent=True)

        return np.poly1d(coeffs[::-1])
```

РЕЗУЛЬТАТИ

```
>>> Least square approximation (degree of 1) method

Initial values
+------+------+
|  X   |  Y   |
+------+------+
| 4.03 | 2.8  |
| 4.08 | 2.94 |
| 4.16 | 3.2  |
| 4.23 | 3.38 |
| 4.26 | 3.53 |
| 4.33 | 3.75 |
+------+------+

A:
6.0                         25.089999999999996
25.089999999999996          104.98230000000001

B:
19.6    82.1639


Results

3.162 x - 9.954
```

Рис. 2 Результат
(Лінійний поліном)

```
>>> Least square approximation (degree of 2) method

Initial values
+------+------+
|  X   |  Y   |
+------+------+
| 4.03 | 2.8  |
| 4.08 | 2.94 |
| 4.16 | 3.2  |
| 4.23 | 3.38 |
| 4.26 | 3.53 |
| 4.33 | 3.75 |
+------+------+

A:
6.0                     25.089999999999996      104.98230000000001
25.089999999999996      104.98230000000001      439.537915
104.98230000000001      439.537915              1841.3657645100002

B:
19.6    82.1639 344.64026100000007


Results
       2
1.203 x - 6.886 x + 11.01
```

Рис. 3 Результат
(Квадратичний поліном)

```
>>> Least square approximation (degree of 3) method

Initial values
+------+------+
|  X   |  Y   |
+------+------+
| 4.03 | 2.8  |
| 4.08 | 2.94 |
| 4.16 | 3.2  |
| 4.23 | 3.38 |
| 4.26 | 3.53 |
| 4.33 | 3.75 |
+------+------+

A:
6.0                     25.089999999999996      104.98230000000001      439.537915
25.089999999999996      104.98230000000001      439.537915              1841.3657645100002
104.98230000000001      439.537915              1841.3657645100002      7718.7267436699
439.537915              1841.3657645100002      7718.7267436699         32375.119331137328

B:
19.6    82.1639 344.64026100000007      1446.4685515700003


Results
       3        2
2.024 x - 24.2 x + 99.38 x - 137.1
```

Рис. 4 Результат
(Кубічний поліном)

ВИСНОВКИ

Виконавши лабораторну роботу №9, я отримав необхідні знання для про принципи апроксимації функцій шляхом утворення поліномів різних порядків за допомогою методу найменших квадратів. Використав отримані вміння на практиці, реалізувавши програмний алгоритм виконання цього методу.